

Modélisation des sables avec la loi de Nova : détermination des paramètres et influence sur les simulations

Philippe MESTAT

Directeur de recherche
Chef de la section du Calcul des ouvrages géotechniques

Nasser ARAFATI

Docteur ENPC

Laboratoire central des Ponts et Chaussées

RÉSUMÉ

Cet article présente une synthèse de différents travaux théoriques menés au LCPC dans le domaine de la rhéologie des sables. Ces recherches se sont essentiellement appuyées sur la loi de comportement proposée par Roberto Nova en 1982 et ont permis de proposer une méthodologie de détermination des paramètres utilisant les résultats d'essais de laboratoire traditionnels. Cette méthodologie est fondée sur une étude analytique des équations de la loi de Nova. Le rôle des paramètres a été clairement identifié et chacun relié à une pente caractéristique des courbes expérimentales. Des analyses de sensibilité ont permis d'élaborer un principe d'optimisation des simulations théoriques. Plusieurs études sur des sables ont montré la simplicité de mise en œuvre et la grande efficacité de cette méthodologie. En particulier, l'étude du sable de Karlsruhe est présentée et la bonne concordance entre les résultats théoriques et expérimentaux démontre le bien-fondé de cette méthodologie. Enfin, les intervalles de variation des paramètres de la loi de Nova sont établis et complètent l'ensemble des indications utiles pour une bonne application de cette méthodologie.

MOTS CLÉS : 42 - *Modèle mathématique* - *Contrainte* - *Rhéologie* - *Loi* - *Méthode* - *Laboratoire* - *Essai* - *Sable* - *Triaxial* - *Comportement* - *Simulation* - *Élastoplasticité* - *Éprouvette*.

Introduction

Depuis une quinzaine d'années, de nombreuses lois de comportement, essentiellement de type élastoplastique avec écrouissage, ont été proposées pour décrire le comportement non linéaire des massifs de sols naturels. Ces lois décrivent d'une manière relativement satisfaisante les principaux phénomènes mécaniques liés au comportement d'une éprouvette de sol soumise à des sollicitations triaxiales. Toutefois, elles se caractérisent souvent par un nombre élevé de paramètres, le record étant, à notre connaissance, détenu par la loi de Baladi (citée par Saada et Bianchini, 1989), qui peut nécessiter jusqu'à 40 paramètres. Les rhéologues s'étaient ainsi engagés dans une spirale infernale : pour décrire correctement la réponse à plusieurs chemins de sollicitations, il fallait augmenter le nombre de paramètres et, plus ce nombre devenait important, plus il s'avérait difficile pour les études courantes de déterminer ces paramètres avec précision. Aujourd'hui, les modèles proposés et utilisés sont redevenus « raisonnables » et le nombre de paramètres est en moyenne d'une dizaine. Cela constitue un honnête compromis entre des paramètres à déterminer sur relativement peu d'essais et une représentation acceptable du comportement mesuré en laboratoire. C'est notamment le cas de la loi de Nova (version 1982) qui a été développée pour décrire le comportement des sables sous sollicitations monotones et qui a été utilisée au LCPC par Tadjbakhsh et Frank (1985) et das Neves (1996) pour l'étude des pieux sous charge axiale, par Mestat et al. (1990a, 1990b) pour la simulation d'essais triaxiaux, par Chambon et Corté (1991) pour le calcul d'ouvrages souterrains, par Mestat (1990c) pour le calcul de fondations superficielles et par Arafati (1996) pour la modélisation d'un rideau de palplanches.

L'utilisation d'une telle loi dans le calcul par éléments finis d'un ouvrage de géotechnique ne peut être envisageable, en conditions de projet, que s'il existe une méthodologie de détermination des paramètres, fondée sur les essais traditionnels de mécanique des sols (essais triaxiaux de compression, essais œdométriques et essais *in situ*). La démarche suivie (y compris le choix des essais à réaliser) doit être simple et pratique, peu onéreuse et relativement rapide, mais aussi rigoureuse que possible. En effet, plus il y a de paramètres à déterminer, plus il y a de risques que le jeu de paramètres obtenu ne soit pas unique. Le succès d'une loi élastoplastique comme le modèle Cam-Clay pour les argiles repose ainsi pour une très large part sur le fait qu'il comporte peu de paramètres, que ceux-ci sont faciles à déterminer et correspondent directement à des paramètres familiers pour les géotechniciens.

Comme la détermination des paramètres d'après les résultats d'essais menés en place, notamment des essais pressiométriques, est encore un problème délicat, cet article est consacré à la présentation d'une analyse de la loi de Nova (1982) en conditions triaxiales et d'une méthodologie exploitant au mieux les résultats des essais traditionnels en laboratoire.

Méthodes de détermination des paramètres des lois avancées

Dans la plupart des publications, la stratégie de détermination des paramètres est peu décrite et commentée et, lorsqu'elle l'est, il est fait appel à plusieurs types d'essais, dont des essais spéciaux (extension, à pression moyenne constante, etc.). L'information rhéologique utilisée par les auteurs est donc généralement importante et la méthodologie qui en découle peu adaptée pour les projets dans lesquels on ne dispose que d'essais traditionnels. Un compromis s'avère donc nécessaire entre l'efficacité d'une méthodologie et des essais de laboratoire menés de manière quasi-industrielle. Évidemment, si l'enjeu du projet permet de multiplier les types d'essais, cela sera d'autant plus satisfaisant.

Analyse d'une loi de comportement et détermination des paramètres

Pour déterminer les paramètres d'une loi de comportement, le chercheur ou l'ingénieur doit maîtriser la loi de comportement qu'il va utiliser, avoir compris la signification de ses paramètres, connaître leurs plages de variation possible ou savoir comment les relier aux paramètres familiers des mécaniciens des sols. Cette maîtrise est généralement acquise au travers de la lecture d'articles, mais aussi en faisant fonctionner la loi de manière analytique.

Lorsqu'il n'existe pas de documents sur le sujet, cette maîtrise peut être acquise en suivant les phases de développement et d'application d'une stratégie de détermination des paramètres :

- distinction entre les paramètres physiques (phase élastique, rupture, dilatance à la rupture) et les paramètres cachés liés à la forme de la surface de charge et à son évolution (écrouissage). Les paramètres physiques sont directement mesurables, et cela sans ambiguïté, sur les courbes triaxiales classiques ($\epsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3$) et (ϵ_1, ϵ_v). Ce sont, par exemple, l'angle de frottement interne, l'angle de dilatance, l'angle caractéristique, les module d'Young et les coefficients de Poisson tangents, les modules au déchargement. Les paramètres cachés doivent être déterminés par des calages successifs (optimisation) sur les résultats expérimentaux. Leur détermination est souvent plus longue et peut être incertaine ;
- analyse du rôle de chaque paramètre au cours des essais classiques, et de l'influence d'une variation des paramètres sur la réponse théorique ;
- mise en évidence des inégalités que doivent respecter les paramètres pour décrire correctement les essais et satisfaire les lois de la mécanique ;
- simulations des essais avec le jeu de paramètres obtenu et confrontation des résultats théoriques aux mesures expérimentales ;
- validation ou non du jeu de paramètres obtenu ;
- nouvelle optimisation possible ou choix d'une autre loi de comportement (et donc peut-être d'une autre stratégie de détermination).

À chaque loi est ainsi attachée une méthodologie particulière. Pour les paramètres physiques, celle-ci peut être commune et bien établie, notamment pour les paramètres élastiques et ceux liés à la rupture. En revanche, c'est la détermination des paramètres cachés qui constitue une spécificité à chaque fois nouvelle.

En pratique, on peut classer les méthodes de détermination des paramètres mécaniques à partir d'essais de laboratoire en quatre catégories : les méthodes basées sur les moindres carrés, les méthodes par corrélation, les méthodes analytiques et les méthodes d'optimisation.

Méthodes basées sur les moindres carrés

Ces méthodes évaluent les paramètres au cas par cas en appliquant la technique des moindres carrés dans des diagrammes judicieusement choisis pour que certaines variations théoriques se transforment en relations simples (par exemple, linéaires). L'exemple le plus astucieux est fourni par la méthode de Duncan et Chang (1970) qui transforme des hyperboles en droites.

Desai et Siriwardane (1984), Lade (1988), Kolymbas (1991) ont également proposé de telles méthodes pour leur propre loi.

La difficulté augmente avec la complexité des équations du modèle et ces méthodes ne peuvent pas être adaptées à toute loi de comportement. En effet, il ne s'agit pas d'user de facilités mathématiques pour caler n'importe quelle quantité dans n'importe quel diagramme. Les incertitudes liées aux mesures expérimentales peuvent vite se cumuler dans de telles combinaisons. Il convient donc de rester près du sens mécanique des paramètres, de la représentation des courbes d'essais et d'éviter des transformations trop compliquées.

Méthodes à base de corrélation

Ces méthodes déduisent les paramètres mécaniques de corrélations établies entre ceux-ci et certaines propriétés physiques des sols (granulométrie, indice de plasticité, coefficient de consolidation, pression de préconsolidation, indice des vides, etc.). Cette approche a été développée notamment par Izuka et Ohta (1987), Biarez *et al.* (1989), et utilisée par Bauer (1996). Toutefois, ces auteurs précisent bien qu'il ne doit s'agir que d'une première estimation et que la réalisation d'essais mécaniques reste indispensable pour confirmer ou modifier les valeurs des paramètres.

Méthodes analytiques

Ces méthodes déterminent les paramètres en comparant directement les tangentes et asymptotes théoriques aux valeurs correspondantes estimées sur les courbes expérimentales. Les expressions théoriques sont fournies sous forme analytique et on aboutit à un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les paramètres cherchés. La qualité de ces méthodes repose sur une évaluation correcte des tangentes aux courbes d'essais (voir paragraphe suivant) et sur le contrôle du domaine de variation des paramètres. Cette approche est fréquemment utilisée, d'une part, pour calculer un premier jeu de paramètres afin d'initier une procédure d'optimisation et, d'autre part, dans de nombreux travaux de recherche car c'est une approche simple qui a le mérite de rester proche du fonctionnement mécanique de la loi. Cela n'empêche pas de coupler de telles méthodes avec une procédure d'optimisation concernant seulement quelques paramètres cachés. Des travaux de ce genre ont été réalisés notamment par Cambou *et al.* (1990), Mestat *et al.* (1990a, 1990b), Chehade *et al.* (1992).

Méthodes d'optimisation

Ces méthodes permettent de calculer tous les paramètres simultanément en résolvant un problème inverse à l'aide d'un processus d'optimisation, couplé ou non avec une approche statistique tenant compte d'un certain degré d'incertitude sur les mesures expérimentales. Le processus d'optimisation consiste à minimiser, par rapport à l'ensemble des paramètres cherchés, une certaine fonction qui mesure l'erreur globale entre la réponse théorique et les résultats expérimentaux.

En comparaison des autres méthodes, une méthode d'optimisation présente plusieurs avantages :

- éviter une certaine subjectivité du chercheur ou de l'ingénieur ;
- estimer les paramètres en tenant compte de l'ensemble des points expérimentaux et des essais ;
- tenir compte des intervalles de variations des paramètres et des inégalités qui peuvent exister entre eux. Ces limites sont dues à des conditions théoriques, des conditions de continuité ou de concavité des courbes contraintes-déformations, des ordres de grandeur observés ou obtenus par corrélation. Par exemple, le module d'Young et le coefficient de Poisson d'un sol sont compris entre les intervalles suivants : $0 < E \leq 1\,000$ MPa et $0 < \nu \leq 0,5$.

Mais elles présentent aussi quelques inconvénients :

- les paramètres physiques et cachés peuvent être mis sur le même plan ;
- l'unicité de la procédure n'est pas assurée. La fonction à minimiser peut posséder plusieurs minima locaux ;
- le processus doit être initié avec un jeu de paramètres déjà bien adapté, déduit d'une première interprétation en utilisant les méthodes précédentes, ou issu de données sur des sols similaires ou de corrélations avec les caractéristiques physiques du sol ;
- la difficulté d'obtenir certains paramètres avec précision lorsque ceux-ci n'ont pas beaucoup d'influence sur les résultats d'essais disponibles. Un tel cas de figure condamne à la non-unicité du jeu de paramètres. Il faut d'autres essais pour conclure correctement.

De telles méthodes ont été utilisées notamment par Ju *et al.* (1987), Meimon (1989), Axelsson *et al.* (1991), Shao *et al.* (1991), Anandarajah et Agarwal (1991), Muir Wood *et al.* (1993), Charlez et Shao (1993). Pour les applications, des logiciels spécialisés (liés à une ou plusieurs lois) ont été développés comme ADELAP par l'Institut français du pétrole (Biarez *et al.*, 1989 ; Meimon, 1992), PARASOL par l'École Centrale

de Paris (Aubry et Piccuez, 1988), MIDAS par l'EUDIL (Shao et al., 1991), TRIDENT par l'INSA de Lyon, DELUGE par EDF-CNH, CALCPARA par l'IRIGM (cités par Cambou et al., 1995).

Pratique de la détermination des paramètres

En pratique, la détermination des paramètres est souvent délicate et toute procédure automatisée ne peut être appliquée sans précautions particulières. Il serait imprudent de les utiliser comme des « boîtes noires » sans le concours d'un utilisateur confirmé ou d'un mécanicien des sols averti.

Les procédures automatisées constituent des outils intéressants, mais à eux seuls ils ne sont pas suffisants. Il faut ajouter une bonne pratique de la loi de comportement utilisée et le recours à une première stratégie de détermination simple pour obtenir un jeu de paramètres initial satisfaisant. La conclusion logique à laquelle sont arrivés plusieurs auteurs, c'est qu'il vaut mieux déterminer les paramètres physiques à l'aide d'une méthode analytique (par exemple) et les paramètres cachés à l'aide d'un processus d'optimisation. C'est une méthode mixte de ce type qui a été développée pour les lois avancées introduites dans le progiciel CÉSAR-LCPC (Mestat, 1990a). Comme ces lois présentent au maximum un seul paramètre que l'on peut qualifier de caché, l'optimisation est réalisée par des calages successifs auxquels on peut donner un sens mécanique dans le cas de l'essai triaxial de compression.

Après avoir déterminé les paramètres, il convient de valider les valeurs obtenues en comparant les simulations théoriques aux résultats expérimentaux. Des logiciels de simulation ont également été développés à cette fin et sont souvent inclus dans les logiciels de détermination cités précédemment.

Une méthode analytique pour la détermination des paramètres

La méthodologie que nous avons appliquée à la loi de Nova appartient à la catégorie des méthodes analytiques couplées avec une optimisation sur la valeur d'un paramètre. Son principe consiste à reprendre la démarche adoptée pour les lois de comportement les plus simples : estimer des tangentes et des asymptotes en certains points représentatifs des variations des courbes contraintes-déformations déduites d'un essai triaxial de compression $(\epsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$ et (ϵ_1, ϵ_v) . Les points choisis permettent d'encadrer les courbes expérimentales par des tangentes et asymptotes (notées A_i sur la figure 1). La procé-

ture de détermination des paramètres est alors fondée sur l'identification entre ces tangentes et les expressions analytiques des quantités $\left(\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\epsilon_1}, \frac{d\epsilon_v}{d\epsilon_1}\right)$, fournies par la loi de comportement considérée.

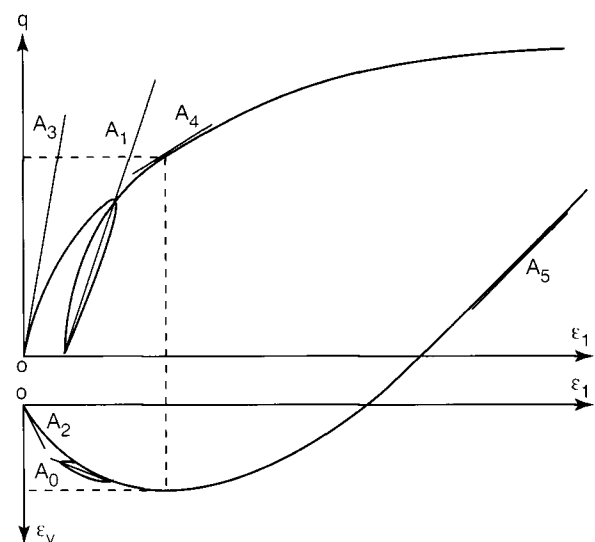


Fig. 1 - Résultats d'un essai triaxial de compression et tangentes significatives aux courbes contraintes-déformations.

Les relations différentielles de l'élastoplasticité permettent généralement de déduire les expressions des déformations incrémentales élastiques et plastiques en fonction de l'état de contraintes, de l'incrément des contraintes et du module d'écrouissage H . Dans le cas d'un essai triaxial de compression axisymétrique (σ_1 croissant ; $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{constante}$) et pour une loi de comportement à un mécanisme plastique, les déformations plastiques incrémentales s'écrivent :

$$d\epsilon_1^p = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_1} \right) d\sigma_1$$

et
$$d\epsilon_2^p = d\epsilon_3^p = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_3} \right) d\sigma_1 \quad (1)$$

où F et G sont respectivement les fonctions qui décrivent la surface de charge et le potentiel plastique.

Si, d'autre part, la partie élastique des déformations est définie par les relations :

$$d\epsilon_1^e = a d\sigma_1 \text{ et } d\epsilon_2^e = d\epsilon_3^e = b d\sigma_1 \quad (2)$$

où a et b sont deux fonctions qui dépendent de l'état de contraintes, alors les tangentes théoriques aux courbes triaxiales s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\epsilon_1} = \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1^e + d\epsilon_1^p} = \frac{1}{a + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_1} \right)} \quad (3)$$

$$\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} = \frac{d\varepsilon_v^e + d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_1^e + d\varepsilon_1^p} = \frac{a + 2b + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_1} + 2 \frac{\partial G}{\partial \sigma_3} \right)}{a + \frac{1}{H} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \right) \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_1} \right)} \quad (4)$$

Dès lors, il suffit d'estimer les valeurs des tangentes et asymptotes aux courbes $(\varepsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_v)$ en certains points particuliers (points de calage) :

- à l'origine ($q = 0$) ;
- à l'état caractéristique ($d\varepsilon_v = 0$) ;
- à la rupture ($\eta = \eta_{\max}$) ;

puis, d'identifier celles-ci aux expressions analytiques pour obtenir un système d'équations dont la résolution fournira les paramètres recherchés.

L'essai de compression isotrope et l'essai œdométrique sont également des essais faciles à interpréter. Ils fournissent directement les valeurs de trois paramètres liés aux paramètres traditionnels (indices de compressibilité et de gonflement, pression de préconsolidation), qu'il est ensuite possible de rattacher aux paramètres d'une loi de comportement.

La qualité de cette méthode dépend essentiellement de l'estimation des tangentes aux courbes expérimentales et de l'incertitude existant sur les valeurs expérimentales. Là encore, plusieurs approches sont possibles :

- la technique des moindres carrés appliquée sur un voisinage du point de calcul. Par exemple, pour une tangente à l'origine, on peut considérer un ensemble de points caractérisés par une déformation axiale inférieure à une certaine valeur ε_0 , valant environ 0,5 % pour les essais conventionnels ;
- l'estimation graphique de tangentes à partir d'une règle et d'une figure agrandie au voisinage du point de calcul ;
- la méthode sécante en contraintes. Par exemple, pour un calcul à l'origine, la tangente est confondue avec une droite passant par l'état initial et par un certain niveau de contraintes ;

➤ la méthode hyperbolique de Duncan, qui suppose que la courbe expérimentale $(\varepsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$ peut être décrite globalement ou localement par une hyperbole dans un diagramme contrainte-déformation ;

➤ la méthode parabolique d'Atkinson (1973), similaire à la précédente, qui admet que la courbe $(\varepsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$ peut être représentée localement par une parabole.

Par simplicité et souplesse, c'est la méthode des moindres carrés appliquée au cas par cas qui a été retenue.

Description de la loi de Nova (version 1982)

La loi de comportement proposée par Roberto Nova en 1982 est composée d'une élasticité non linéaire et d'une plasticité à un mécanisme définie selon le niveau de contraintes atteint (tableau I). Les différentes fonctions mathématiques sont exprimées à l'aide des invariants p (pression moyenne) et q (déviateur des contraintes) :

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\text{et } q = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} \quad (5)$$

La convention de signe adoptée est la convention de la mécanique des sols : les contraintes de compression sont positives.

La partie élastique des déformations est liée à l'état de contraintes par la relation incrémentale :

$$d\varepsilon_{ij}^e = L_0 d\eta_{ij} + B_0 \frac{dp}{3p} \delta_{ij} \quad (6)$$

où L_0 et B_0 sont deux paramètres de la loi et

$$\eta_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - p\delta_{ij}}{p}$$

TABLEAU I
Expressions de la surface de charge et du potentiel plastique en fonction de l'état de contraintes (loi de Nova, 1982)

État de contraintes	Relation contrainte-dilatance	Surface de charge $F(p, q, p_c)$ et potentiel plastique $G(p, q, p_c)$
$\frac{q}{p} \leq \frac{M}{2}$	$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_1^p} = \frac{M^2 p}{4\mu q}$	$F(p, q, p_c) = G(p, q, p_c)$ $G(p, q, p_c) = \frac{4\mu}{M^2} - \frac{q^2}{p^2} + 1 - \frac{p_c^2}{p^2} = 0$
$\frac{q}{p} \geq \frac{M}{2}$	$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_1^p} = \frac{M}{\mu} - \frac{q}{\mu p}$	$F(p, q, p_c) = \frac{q}{p} - \frac{M}{2} + \ln \left(\sqrt{1 + \mu \frac{p}{p_c}} \right) = 0$ $G(p, q, p_c) = \frac{q}{p} - \frac{M}{1-\mu} \left[1 - \mu \left(\frac{p}{p_c} \right)^{1-\frac{1}{\mu}} \right] = 0$

La variable p_{cg} (tableau I) correspond à l'intersection du potentiel plastique avec l'axe des compressions isotropes et dépend de l'état de contraintes (p , q). Pour sa part, l'évolution de l'écroutissage (variable p_c) est gouvernée par une combinaison linéaire des invariants de déformations plastiques ε_v^p et ε_d^p :

$$p_c = p_{c0} \exp \left(\frac{\varepsilon_v^p + D\varepsilon_d^p}{l - B_0} \right) \quad (7)$$

où $\varepsilon_v^p = \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p$

$$\text{et } \varepsilon_d^p = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{(\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_1^p - \varepsilon_3^p)^2 + (\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p)^2}{2}}$$

Roberto Nova a décrit dans plusieurs articles le rôle des paramètres du modèle et la manière qu'il préconise pour les déterminer (voir par exemple, Nova (1982)). D'autres auteurs se sont intéressés à cette loi, comme Chehade et al. (1992), Axelsson et al. (1991). Mais, dans ces articles, les stratégies de détermination utilisées sont fondées sur l'exploitation de différents types d'essais qui sont rarement disponibles dans les études courantes, comme les essais d'extension ou à pression moyenne constante. Lorsque ces essais manquent, ces auteurs ne proposent pas d'alternative, sauf de procéder par calages successifs. Pour ces raisons, il est apparu nécessaire de promouvoir une autre stratégie plus accessible et centrée sur les seuls essais de compression drainés (Mestat, 1990a, 1990b ; Arafati, 1996).

La loi de Nova comporte huit paramètres, dont sept sont adimensionnels (B_0 , L_0 , M , μ , D , l , m). Le huitième paramètre p_{c0} est en fait une pression de référence, qui peut être calculée de deux manières :

❶ à partir de l'état initial des contraintes.

Pour les sols normalement consolidés, le paramètre p_{c0} est calculé, pour chaque point du massif, en écrivant que l'état initial est situé sur la surface de charge $F(p_0, q_0, p_{c0})$. D'où l'expression,

$$p_{c0} = \sqrt{\frac{4\mu}{M^2} q_0^2 + p_0^2} \quad (8)$$

avec q_0 et p_0 , déviateur et pression moyenne à l'état initial pour le point considéré. Cette détermination semble conforme aux observations expérimentales, qui montrent que les sables présentent un comportement fortement non linéaire et irréversible dès qu'on leur applique un chargement. Pour un essai triaxial avec consolidation isotrope, p_{c0} est égal à la pression de confinement σ_3 de l'essai. Pour les sols surconsolidés, le paramètre p_{c0} en un point correspond à la contrainte moyenne maximale subie au cours de l'histoire du sol avant l'application de nouvelles sollicitations liées au projet étudié. L'état initial

peut être alors à l'intérieur de la surface de charge définie par p_{c0} ;

❷ à partir des résultats d'essais en laboratoire et notamment d'essais de compression isotrope.

Une valeur indépendante de l'état de contraintes est obtenue ; elle définit un domaine d'élasticité initiale pour une certaine gamme de contraintes. Cette méthode est toutefois à déconseiller, car elle risque de faire jouer un rôle mécanique trop important à ce paramètre, qui n'est plus alors rattaché à l'état initial du matériau.

Méthodologie de détermination des paramètres de la loi de Nova

Dans le cas d'un essai triaxial de compression, les relations différentielles de la loi de Nova peuvent être exprimées en fonction du seul rapport de contraintes $\eta = q/p$ et de son incrément $d\eta$ (tableau II). Ces équations permettent de calculer les tangentes théoriques, en tout point des courbes triaxiales, en considérant les expressions suivantes :

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} = \frac{d\sigma_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\varepsilon_1^c + d\varepsilon_1^p}$$

$$\text{et } \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} = \frac{d\varepsilon_v^c + d\varepsilon_v^p}{d\eta} \frac{d\eta}{d\varepsilon_1^c + d\varepsilon_1^p} \quad (9)$$

L'analyse de l'essai de compression isotrope est aussi très utile pour déterminer les paramètres B_0 et l . En effet, la loi de Nova représente cet essai par les relations :

$$\varepsilon_v^c = B_0 \ln \frac{p}{p_0} + \varepsilon_{v0} \text{ et } \varepsilon_v^p = (l - B_0) \ln \frac{p}{p_0} \quad (10)$$

où (p_0, ε_{v0}) est un état élastique initial, qui sert de référence pour l'intégration.

L'étude des expressions théoriques des tangentes aux courbes triaxiales permet de préciser le rôle des paramètres de la loi de Nova (tableau III) et de faciliter l'identification aux points de calage suivants :

- déchargement complet ($q = 0$ et $dq \leq 0$). Dans ce cas, la courbe théorique est souvent raide et proche d'une droite comme la courbe expérimentale. Ceci autorise le calcul pour un déchargement complet (tableau IV) ;
- chargement initial ($q = 0$ et $dq > 0$). Deux cas se présentent : soit l'état de contraintes initial est à l'intérieur du domaine élastique, soit il est sur la surface de charge dans le domaine plastique (tableau IV) ;
- état caractéristique ($\eta = \eta_m$ et $d\varepsilon_v = 0$) ;
- cisaillement maximal (rupture pour $\eta = \eta_r$) (tableau V) ;
- dilatance à la rupture pour $\eta = \eta_r$ (tableau V).

TABLEAU II
Simulation d'un essai triaxial de compression avec la loi de Nova (1982)

Élasticité	$d\varepsilon_1^e = \frac{1}{3} \left(2L_0 + \frac{B_0}{3-\eta} \right) d\eta$ $d\varepsilon_2^e = d\varepsilon_3^e = \frac{1}{3} \left(-L_0 + \frac{B_0}{3-\eta} \right) d\eta$
Plasticité $\eta \leq \frac{M}{2}$	$d\varepsilon_1^p = \frac{l - B_0}{3} \frac{\left(1 + \frac{12\mu}{M^2} \eta \right)^2 d\eta}{\left(1 + \frac{4\mu}{M^2} \eta^2 \right) \left(1 + \frac{4\mu D}{M^2} \eta \right) (3 - \eta)}$ $d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p = \frac{l - B_0}{3} \frac{\left(1 + \frac{12\mu}{M^2} \eta \right) \left(1 - \frac{6\mu}{M^2} \eta \right) d\eta}{\left(1 + \frac{4\mu}{M^2} \eta^2 \right) \left(1 + \frac{4\mu D}{M^2} \eta \right) (3 - \eta)}$
Plasticité $\eta \geq \frac{M}{2}$	$d\varepsilon_1^p = \frac{l - B_0}{m} \frac{\left(\mu + \frac{M-\eta}{3} \right) (m+3-\eta) d\eta}{(M + \mu D - \eta)(3-\eta)}$ $d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p = \frac{l - B_0}{m} \frac{\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{M-\eta}{3} \right) (m+3-\eta) d\eta}{(M + \mu D - \eta)(3-\eta)}$

TABLEAU III
Rôle des paramètres de Nova dans la simulation d'un essai triaxial

Paramètre	Rôle du paramètre
B_0	Paramètre lié à la déformation volumique élastique.
L_0	Paramètre lié à la déformation déviatorique élastique.
l	Paramètre lié à la déformation volumique totale.
M	Paramètre lié à l'état caractéristique du sable et au cisaillement maximal (rupture).
μ	Paramètre lié au cisaillement maximal (rupture).
D	Paramètre lié au cisaillement maximal et à la dilatance à la rupture.
m	Paramètre caché lié à l'état caractéristique et à la courbure générale des courbes (ε_1, q) et $(\varepsilon_1, \varepsilon_v)$ pour un essai de compression triaxiale.

TABLEAU IV
Expressions des tangentes initiales aux courbes théoriques

Calcul des tangentes pour un essai de compression drainé	$\left(\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} \right)_{q=0}$	$\left(\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} \right)_{q=0}$
Cas d'un déchargement total ou d'un chargement initial dans le domaine élastique	$\frac{9\sigma_3}{6L_0 + B_0}$	$\frac{3B_0}{6L_0 + B_0}$
Cas d'un chargement initial dans le domaine plastique	$\frac{9\sigma_3}{6L_0 + l}$	$\frac{3l}{6L_0 + l}$

TABLEAU V
Expressions des asymptotes aux courbes théoriques

Rupture de l'éprouvette	$\eta_r = M + \mu D$
Dilatance à la rupture	$\left(\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} \right)_r = \frac{3(M - \eta_r)}{3\mu + M - \eta_r} = \frac{-3D}{3 - D}$

Les calculs théoriques sont relativement simples, sauf dans le cas de l'état caractéristique qui mérite un développement particulier. À partir des tableaux IV et V, on peut généralement estimer les paramètres B_0 , L_0 , l et D .

L'extremum de déformation volumique sur la courbe (ϵ_1, ϵ_v) définit l'état caractéristique du sable. La condition $d\epsilon_v = 0$ au point $\eta = \eta_m$ conduit à la relation :

$$B_0 + \frac{(l - B_0)(M - \eta_m)(m + 3 - \eta_m)}{m(M + \mu D - \eta_m)} = 0 \quad (11)$$

D'autre part, si A_4 représente la valeur de la tangente au point $\eta = \eta_m$ sur la courbe expérimentale $(\epsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$, la loi de Nova conduit à l'égalité :

$$A_4 = \frac{27\sigma_3}{(3 - \eta_m) \left[2L_0(3 - \eta_m) + B_0 + \frac{(l - B_0)(M + 3\mu - \eta_m)(m + 3 - \eta_m)}{m(M + \mu D - \eta_m)} \right]} \quad (12)$$

La combinaison des équations (11) et (12) conduit à une expression plus simple :

$$A_4 = \frac{27\sigma_3(M - \eta_m)}{(3 - \eta_m) [2L_0(3 - \eta_m)(M - \eta_m) - 3\mu B_0]} \quad (13)$$

Par ailleurs, l'élimination de μ grâce à la relation, $\mu D = \eta_r - M$, entraîne :

$$\frac{\eta_r - M}{M - \eta_m} = \frac{\beta}{B_0}$$

avec $\beta = \frac{2}{3}(3 - \eta_m) DL_0 - \frac{9\sigma_3 D}{A_4(3 - \eta_m)} \quad (14)$

Connaissant L_0 et D , le paramètre M est d'abord déduit de l'équation (14) ; puis, μ est calculé à partir de la valeur de l'asymptote à la rupture. Le paramètre m est déterminé en reportant les expressions de M et μ dans la relation (12) qui se simplifie grandement (tableau VI).

Le point délicat de cette méthodologie concerne l'estimation de la pente A_4 . En effet, une faible erreur dans l'estimation de la déformation axiale correspondant à l'état caractéristique ($d\epsilon_v = 0$) peut entraîner une erreur importante sur la valeur de A_4 , car les tangentes $dq/d\epsilon_1$ varient fortement dans cette zone intermédiaire entre l'état initial et la rupture.

REMARQUE 1

Lorsqu'on dispose d'un essai de compression isotrope et d'un essai triaxial de compression avec une phase de déchargement, on aboutit à plusieurs valeurs pour les paramètres B_0 et l . D'une manière générale, il vaut mieux privilégier les essais de cisaillement. Mais si aucune phase de déchargement n'a été réalisée, le paramètre B_0 doit être déterminé sur l'essai de compression isotrope.

REMARQUE 2

L'analyse des équations différentielles de la loi de Nova (version 1982) montre aussi que certaines inégalités doivent être vérifiées par les paramètres :

- tous les paramètres ont des valeurs positives ;
- $0 < B_0 < l$ (par construction des déformations plastiques et de l'écroutissage) ;

TABLEAU VI
Détermination des paramètres de la loi de Nova (essai triaxial drainé)

Essai	Exploitation des courbes	Expression des paramètres
Compression isotrope	Courbes en chargement et en déchargement	$B_0 = \frac{\Delta\epsilon_v^e}{\ln\left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right)} ; l = \frac{\Delta\epsilon_v}{\ln\left(1 + \frac{\Delta p}{p}\right)}$
Essai triaxial compression drainée	Parties des courbes en déchargement	$B_0 = 3\sigma_3 \frac{A_1}{A_0} ; L_0 = \sigma_3 \frac{3 - A_1}{2A_0}$
	Parties des courbes en chargement dans le domaine plastique	$l = 3\sigma_3 \frac{A_3}{A_2} ; L_0 = \sigma_3 \frac{3 - A_3}{2A_2}$
	Asymptote à la courbe de dilatance	$D = \frac{3A_5}{-3 + A_5}$
	Étude de la rupture et de l'état caractéristique sur les courbes triaxiales. Avec $\beta = \frac{2}{3}(3 - \eta_m) DL_0 - \frac{9\sigma_3 D}{A_4(3 - \eta_m)}$ où η_m et η_r sont les rapports des contraintes à l'état caractéristique et à la rupture.	$M = \frac{B_0 \eta_r + \beta \eta_m}{B_0 + \beta}$ $\mu = \frac{\beta(\eta_r - \eta_m)}{D(B_0 + \beta)}$ $m = \frac{(-3 + \eta_m)(l - B_0)}{l + \beta}$

- $0 < M + \mu D < 3$ (par définition du rapport de contraintes : $\eta < 3$) ;
- $0 < D \leq M + \mu D$ (pour assurer l'existence du potentiel plastique si $\eta \geq M / 2$) ;

• $0 < B_0 < 3L_0$ (pour vérifier la condition $\frac{d\varepsilon_1^c}{d\varepsilon_3^c} < 0$ dans le domaine élastique).

Par ailleurs, la loi de Nova offre une particularité au point de contraintes $\eta = M / 2$, pour lequel la surface de charge change d'expression (tableau I). Si, en ce point, la continuité des surfaces est assurée, celle des tangentes $\left(\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} \text{ ou } \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} \right)$ n'est généralement pas vérifiée. La condition de convexité de la courbe triaxiale indique alors que la tangente à gauche doit être supérieure à la tangente à droite. Le développement des expressions analytiques conduit à la condition suivante sur les paramètres :

$$\frac{1}{m} \geq \frac{2\mu}{M(1 + \mu)} \quad (15)$$

L'inégalité correspondante sur la courbe $(\varepsilon_1, \varepsilon_v)$ est toujours vérifiée par construction de l'état caractéristique. L'ensemble de ces inégalités doit être pris en compte dans la méthodologie de détermination.

Simulation des essais et comparaison avec l'expérience

La méthode de détermination des paramètres exposée ci-dessus exploite les résultats habituels d'un essai triaxial de compression drainé, auquel il faut ajouter au moins un essai de compression isotrope. En pratique, on dispose en général de plusieurs essais de compression à différentes pressions de confinement. Le problème consiste donc à rechercher un jeu de paramètres cohérent avec l'ensemble des résultats expérimentaux. Trois stratégies peuvent être envisagées :

- 1 déterminer un jeu de paramètres pour chaque essai, puis calculer une moyenne arithmétique des valeurs obtenues pour chaque paramètre ;
- 2 faire une moyenne des quantités calculées à partir des courbes expérimentales (tangentes initiales, asymptotes, état caractéristique, pente de dilatance). Cette technique évite de faire la moyenne des valeurs des paramètres cachés, en ne considérant que des quantités physiques ;
- 3 afin de réduire le nombre d'essais à exploiter, calculer des moyennes sur les résultats expérimentaux et appliquer la méthode de détermination sur ces essais moyens.

Les deux premières stratégies semblent les plus réalistes. Toutefois, on a privilégié la première stratégie, car elle permet également d'analyser l'évolution des paramètres en fonction de la pression de confinement et donc de prévoir, si néces-

saire lors d'une modélisation numérique, une subdivision du massif de sol en plusieurs couches caractérisées par des valeurs de paramètre différenciées. Le choix final des paramètres est ensuite réalisé à partir de la confrontation de l'ensemble des résultats expérimentaux avec les essais simulés. Si la simulation n'est pas satisfaisante, il convient d'ajuster les valeurs des paramètres pour améliorer les résultats théoriques. La recherche d'un processus d'optimisation passe par l'analyse du rôle de chaque paramètre dans les simulations.

Influence des paramètres sur les simulations

Une étude systématique de l'influence des paramètres du modèle de Nova sur la simulation des essais triaxiaux de compression drainés a été réalisée en faisant varier chaque paramètre de + 25 % ou de - 25 %, et en gardant constant les autres. Cette étude a été effectuée à l'aide du logiciel LOIS-LCPC, développé pour simuler les essais triaxiaux par diverses lois de comportement (Mestat, 1990 ; Arafati, 1996). Les tableaux VII et VIII résument les influences de chaque paramètre et les figures 2 à 4 regroupent les résultats. On observe que les variations de chaque paramètre modifient nettement au moins une courbe théorique (cisaillement ou volume), suggérant par là-même qu'on pourra déterminer les valeurs des paramètres de manière unique pour un degré de concordance entre les courbes donné.

TABLEAU VII
Influence des paramètres de la loi de Nova sur la courbe $(\varepsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$

Paramètre	Type d'influence
M	Influence nette sur le niveau de contrainte à la rupture et sur l'ensemble de la courbe.
l, B_0	Influence importante pour $q/p \geq M/2$ sur toute la courbe. Pas d'effet sur le niveau de contraintes à la rupture.
L_0	Influence relativement faible sur l'ensemble de la courbe.
μ	Influence nette sur le niveau de contrainte à la rupture.
D	Influence nette sur le niveau de contrainte à la rupture et sur la partie intermédiaire de la courbe (écrouissage).
m	Influence sur la courbure intermédiaire pour $q/p \geq M/2$.

TABLEAU VIII
Influence des paramètres de la loi de Nova sur la courbe $(\varepsilon_1, \varepsilon_v)$

Paramètre	Type d'influence pour une variation de $\pm 25\%$
M, l, B_0, μ, L_0	Influence importante sur la position de l'état caractéristique et translation de l'asymptote (pente de dilatance inchangée).
D	Influence forte sur la pente de l'asymptote et faible effet sur la position de l'état caractéristique.
m	Influence assez faible sur la position de l'état caractéristique et translation de l'asymptote.

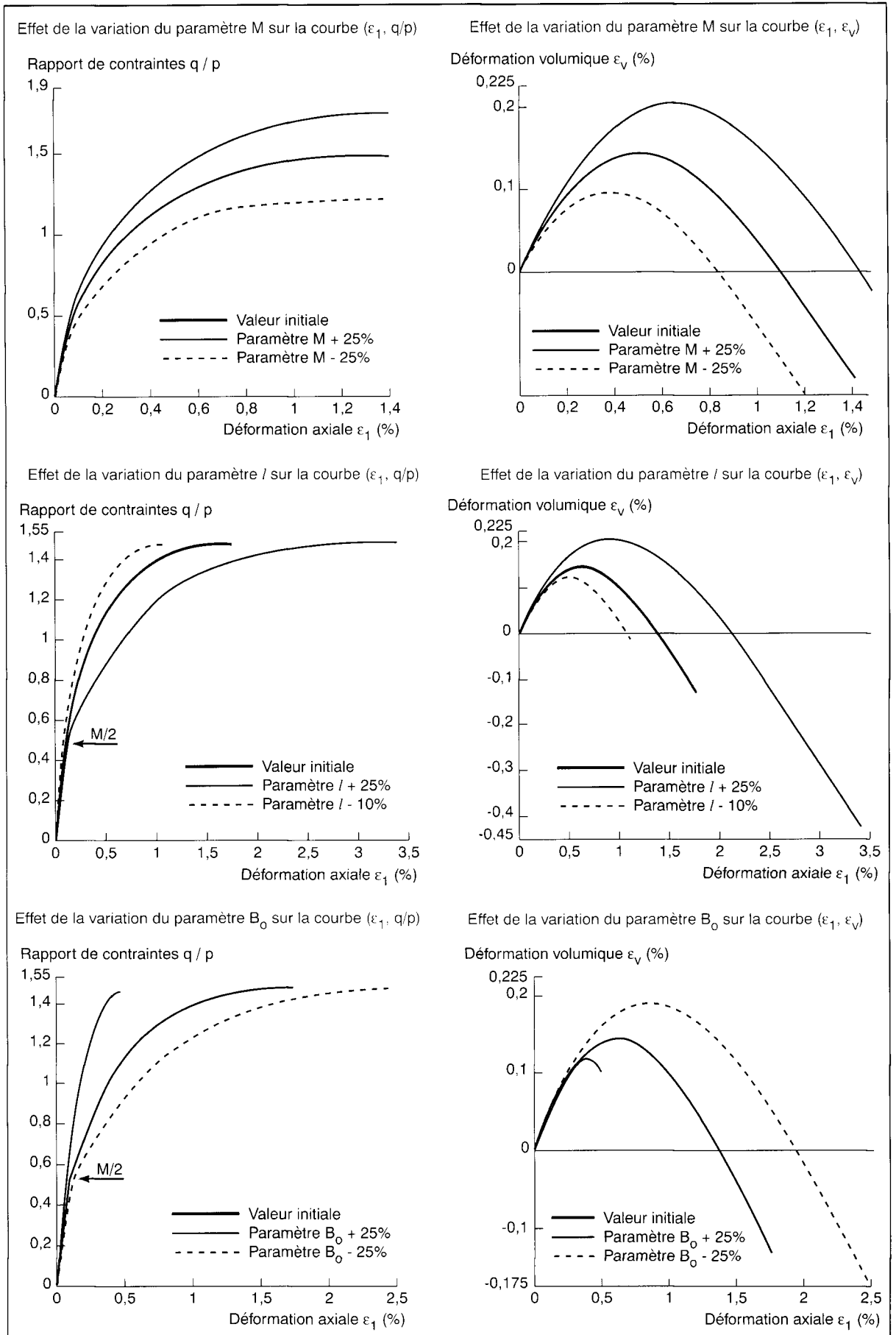


Fig. 2 - Influence d'une variation de M , l et B_0 sur les courbes $(\epsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$ et (ϵ_1, ϵ_v) .

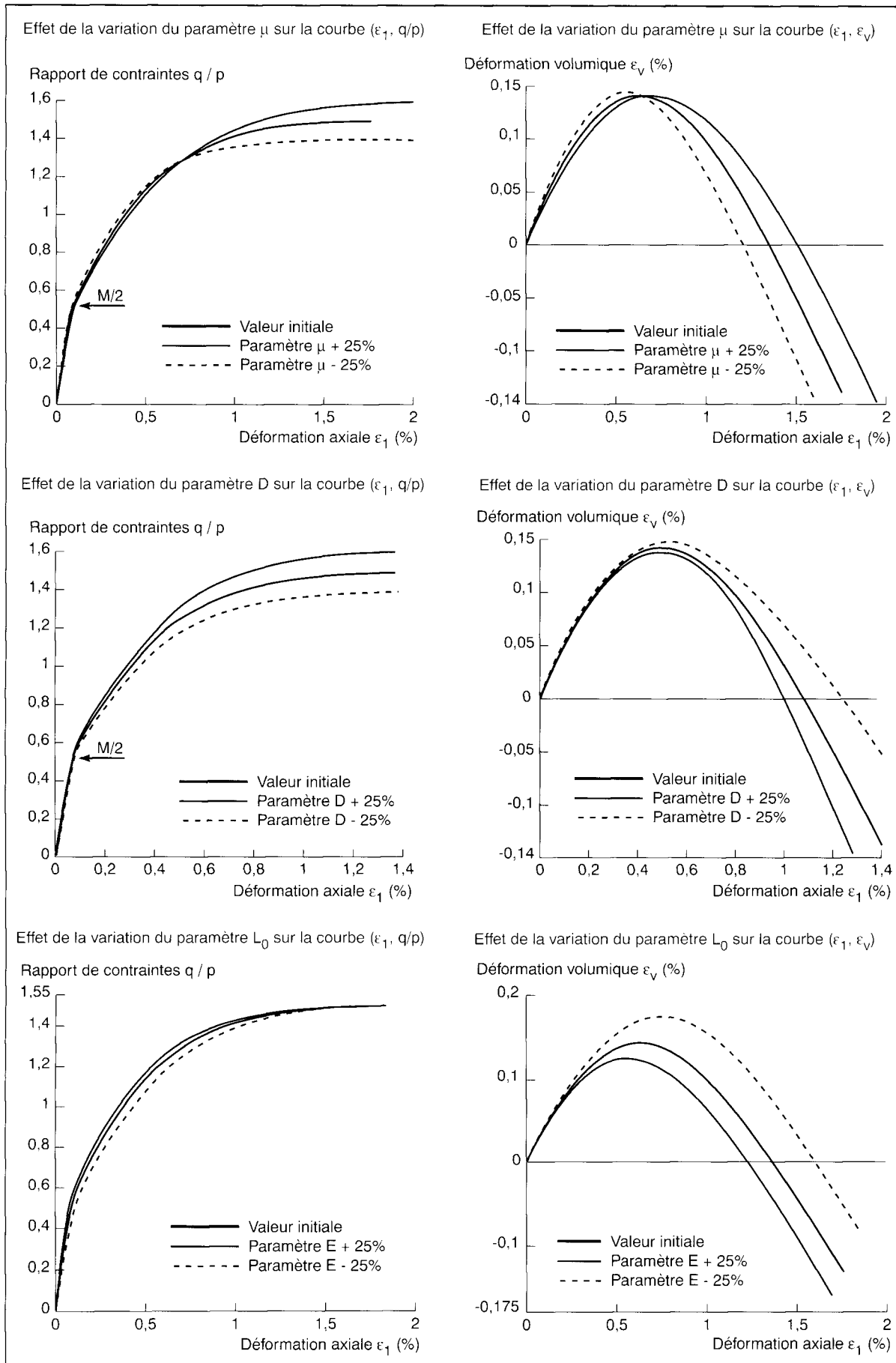


Fig. 3 - Influence d'une variation de μ , D et L_0 sur les courbes $(\epsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$ et (ϵ_1, ϵ_v) .

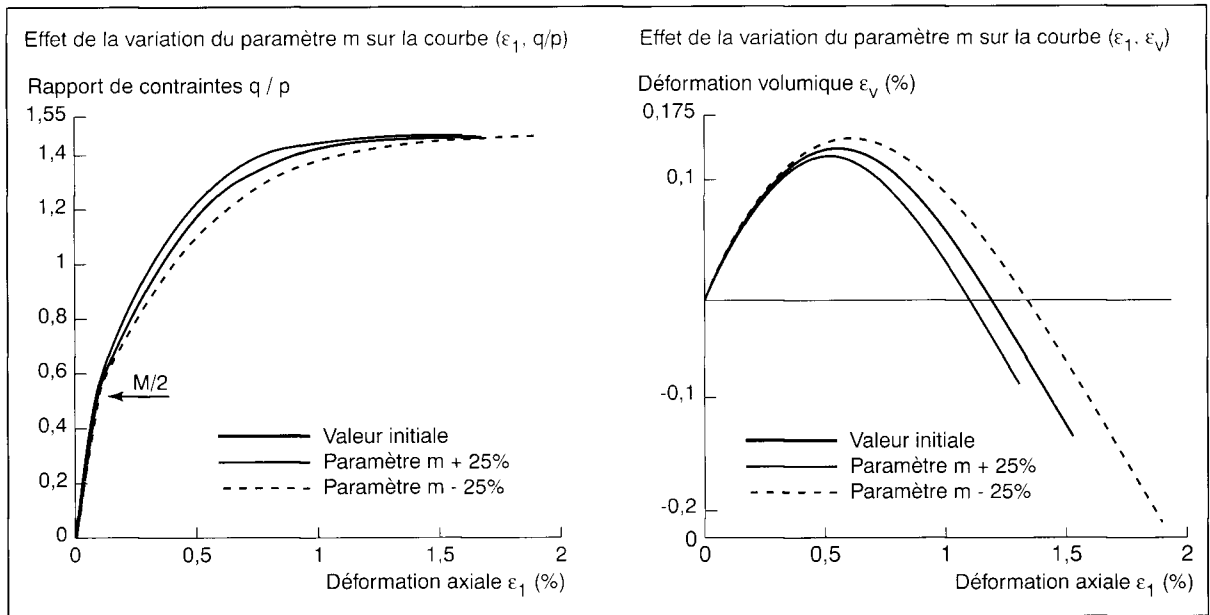


Fig. 4 - Influence d'une variation de m sur les courbes $(\epsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$ et (ϵ_1, ϵ_v) .

Principe d'ajustement des paramètres pour la loi de Nova

La méthode analytique proposée a été appliquée à plusieurs types de sable. Ces études ont montré que le jeu de paramètres moyens ainsi obtenu conduit à des simulations des courbes $(\epsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$ généralement proches des courbes expérimentales. En revanche, la position de l'état caractéristique sur la courbe (ϵ_1, ϵ_v) n'est souvent pas bien décrite par cette première simulation (Mestat, 1990a). Cette différence s'explique par l'utilisation d'expressions incrémentales et non totales. La figure 5 illustre le problème : la méthode proposée impose aux points A (expérimental) et B (simulé) d'avoir une tangente de même valeur sur la courbe (ϵ_1, ϵ_v) et de présenter un extremum au point correspondant sur la courbe $(\epsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$. Les points A et B n'ont aucune raison d'être confondus, puisqu'aucune relation n'est imposée entre leurs abscisses respectives (déformation axiale). Il faut s'en remettre à la capacité prédictive du modèle pour obtenir un décalage plus ou moins important par rapport à l'expérience.

La figure 5 prouve qu'il suffit d'augmenter (ou de diminuer) la valeur de la tangente A_4 pour rapprocher les points A et B, et améliorer la simulation. La nouvelle valeur de A_4 ne sera, certes, plus égale à la valeur expérimentale mais permettra de mieux représenter l'extremum de déformation volumique. Dans le cas de la loi de Nova, cet ajustement se traduit directement sur les valeurs des paramètres M , μ et m (tableau VI). Cependant, une étude de sensibilité a montré que les paramètres M et μ sont peu

affectés par le changement de la tangente A_4 . En revanche, le paramètre m peut être multiplié par deux, trois, voire quatre, jouant ainsi le rôle essentiel dans l'amélioration de la simulation globale.

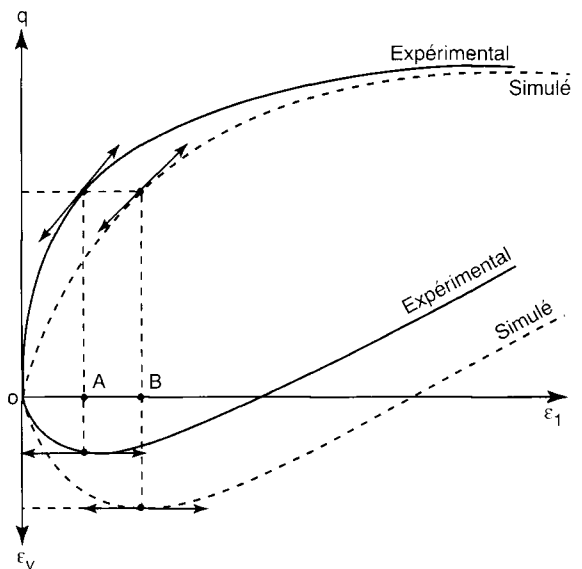


Fig. 5 - Principe d'ajustement des paramètres pour une méthode analytique.

Si une première simulation entraîne une représentation de l'état caractéristique trop à droite par rapport à la courbe expérimentale, une augmentation de m ramène l'extremum théorique ($d\epsilon_v = 0$) et on se rapproche de l'extremum expérimental avec une faible perturbation sur la simulation de l'ensemble des courbes. *A contrario*, un mouvement vers la droite est obtenu par une diminution de m . Cette façon de procéder est

simple et ne nécessite généralement que quelques calculs pour atteindre une simulation satisfaisante. Cette technique d'ajustement pourrait facilement être formalisée et informatisée comme un processus d'optimisation.

Une autre approche simple consiste à utiliser les expressions théoriques pour imposer à la nouvelle simulation de passer par le point expérimental définissant l'état caractéristique : $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{exp}$ et $\varepsilon_v = \varepsilon_v^{exp}$. Cependant, pour être cohérent, il faut corriger ces relations en considérant les valeurs expérimentales au point $\eta = M/2$, qui n'ont aucune raison d'être égales à celles de la simulation. On emploie alors les relations suivantes obtenues après intégration des relations incrémentales :

$$\varepsilon_1^{th} - \varepsilon_1^{exp} = \varepsilon_1^{th} \left(\frac{M}{2} \right) - \varepsilon_1^{exp} \left(\frac{M}{2} \right) + \frac{(m_2 - m_1)(l - B_0)}{3m_1 m_2} \left[\eta - \frac{M}{2} + \mu (D - 3) \ln \left(\frac{M + \mu D - \eta}{\frac{M}{2} + \mu D} \right) \right] \quad (16)$$

$$\varepsilon_v^{th} - \varepsilon_v^{exp} = \varepsilon_v^{th} \left(\frac{M}{2} \right) - \varepsilon_v^{exp} \left(\frac{M}{2} \right) + \frac{(m_2 - m_1)(l - B_0)}{m_1 m_2} \left[\eta - \frac{M}{2} + \mu D \ln \left(\frac{M + \mu D - \eta}{\frac{M}{2} + \mu D} \right) \right] \quad (17)$$

où m_1 est le paramètre du jeu de données initial et m_2 , la valeur ajustée. La résolution des équations (16) et (17) à l'état caractéristique fournit deux valeurs pour le paramètre m_2 . Par simplicité, une moyenne arithmétique est ensuite considérée.

En résumé, l'amélioration d'une simulation s'obtient en faisant varier la valeur du paramètre m , ce qui entraîne :

- sur la courbe $(\varepsilon_1, \varepsilon_v)$, un déplacement de l'asymptote et une augmentation ou une diminution de ε_v à l'état caractéristique, selon la position de η_m par rapport à η_0 ;
- sur la courbe $(\varepsilon_1, \sigma_1 - \sigma_3)$, un raidissement ou un assouplissement de la courbure dû au décalage des déformations sur l'axe ε_1 et aux valeurs inchangées des contraintes.

Exemple d'application : étude du sable de Karlsruhe

Contexte de l'application et description des essais de laboratoire

L'université de Karlsruhe (Allemagne) a réalisé une expérimentation en vraie grandeur, qui

consistait à creuser une fouille devant un rideau de palplanches butonné dans une couche de sable fin à moyen avec des passages de sable graveleux. Le sable avec une densité relative de 0,584 peut être classé comme un sable moyennement dense à dense. La qualité des mesures sur l'ouvrage et le nombre d'essais de mécanique des sols réalisés (en laboratoire et *in situ*) ont fourni l'occasion d'organiser un concours de prévisions du comportement du rideau (von Wolffersdorff, 1994). Un dossier géotechnique détaillé a été envoyé aux personnes désireuses de réaliser des prévisions. Au LCPC, Josseume et *al.* (1997) ont réalisé des prévisions en utilisant la méthode de calcul aux coefficients de réaction et, après le concours, Mestat et Arafati (1998) ont effectué des calculs par éléments finis avec la loi de Nova pour décrire le comportement du sable. À cette occasion, la méthodologie présentée dans cet article a été appliquée aux essais de laboratoire réalisés sur des éprouvettes reconstituées à partir d'échantillons prélevés entre les profondeurs 1 m et 4 m. Les essais sont les suivants :

- six essais triaxiaux de compression drainés à trois pressions de confinement différentes : 100, 200 et 300 kPa. Chaque essai a été répété une fois. Aucun déchargement n'a été effectué dans cette série d'essais ;
- un essai triaxial en compression isotrope avec un cycle de chargement-déchargement.

Application de la méthode analytique au sable de Karlsruhe

Comme il n'y a pas de phase de déchargement dans les essais de cisaillement, le paramètre B_0 est déterminé à partir de l'essai de compression isotrope en considérant les points extrêmes de la courbe en déchargement :

$$B_0 = \frac{\varepsilon_v^1 - \varepsilon_v^2}{\ln \frac{p_1}{p_2}} = \frac{0,01015 - 0,00843}{\ln \frac{197,93}{50,33}} = 0,00126$$

Les six essais ont été analysés systématiquement et ont conduit à six valeurs pour les tangentes A_2, A_3, A_4 et A_5 . Les tangentes A_0 et A_1 ne peuvent être calculées faute de phases en déchargement (fig. 1).

Les tableaux IX à XI illustrent la manière d'appliquer la méthode de détermination des paramètres proposée.

TABLEAU IX
Détermination des paramètres I et L_0

Essai (kPa)	A_2 (kPa)	A_3	I	L_0
100	28 530	0,82	0,00828	0,00367
100	28 120	0,65	0,00693	0,00418
200	57 340	0,81	0,00838	0,00378
200	57 980	0,77	0,00782	0,00378
300	66 440	0,86	0,01164	0,00483
300	69 840	0,80	0,01030	0,00472
Moyenne	51 375	0,785	0,00889	0,00416

TABLEAU X
Détermination du paramètre D

Essai (kPa)	A_5	D	Essai (kPa)	A_5	D
100	- 0,466	0,40335	200	- 0,491	0,42194
100	- 0,635	0,52407	300	- 0,437	0,38144
200	- 0,491	0,42194	300	- 0,507	0,43370
Moyenne		0,43200			

TABLEAU XI
Détermination des paramètres M, μ et m

Essai (kPa)	A_4 (kPa)	η_m	β	η_r	M	μ	m
100	76,47	1,32	- 2,711	1,74	1,32	1,04177	0,436
100	87,06	1,05	- 2,775	1,65	1,05	1,14540	0,400
200	128,93	1,38	- 3,593	1,71	1,40	0,78237	0,322
200	136,53	1,35	- 3,307	1,74	1,35	0,92465	0,328
300	171,55	1,38	- 3,701	1,71	1,38	0,86544	0,456
300	187,96	1,23	- 3,514	1,68	1,23	1,03795	0,457
Moyenne des valeurs sur les six essais :	131,42	1,29	- 3,417	1,71	1,285	0,973	0,384

Ces tableaux illustrent l'évolution des paramètres avec la pression de confinement σ_3 . On note une certaine dispersion pour les essais répétés, mais dans l'ensemble les valeurs de paramètres sont assez proches. Les écarts les plus importants concernent le paramètre μ . L'ajustement du paramètre m sur l'ensemble des six essais de cisaillement est effectué à l'aide des formules (16) et (17), dans lesquelles on reporte les valeurs moyennes des quantités ε_1^{th} , ε_1^{exp} , ε_v^{th} et ε_v^{exp} au point $\eta = M / 2$ et à l'état caractéristique ($\eta = \eta_m$) (tableaux XII et XIII). On en déduit deux valeurs : 0,91 et 0,58. La moyenne arithmétique est retenue : $m = 0,745$.

Comparaison avec les résultats expérimentaux

Le logiciel LOIS-LCPC a été utilisé pour effectuer les simulations théoriques (Mestat, 1990a). Il permet d'intégrer pas à pas les équations différentielles de différentes lois de comportement en suivant des chemins de sollicitations triaxiales donnés. Les figures 6 à 9 présentent la confrontation entre les simulations initiale et ajustée et les courbes expérimentales. Une excellente concordance peut être constatée. Le principe d'ajustement du paramètre m se révèle très efficace et permet de mieux décrire l'état caractéristique. Par ailleurs, les résultats de l'essai de compression isotrope sont également bien représentés.

TABLEAU XII
Valeurs des déformations axiale et volumique au point $\eta = M / 2$

Essai (kPa)	ε_1^{th} (%)	ε_1^{exp} (%)	ε_v^{th} (%)	ε_v^{exp} (%)
100	0,580	0,374	0,364	0,218
100	0,601	0,452	0,375	0,245
200	0,570	0,530	0,360	0,311
200	0,583	0,413	0,366	0,300
300	0,589	0,512	0,368	0,396
300	0,600	0,535	0,374	0,390
Moyenne	0,587	0,469	0,369	0,310

TABLEAU XIII
Déformations axiale et volumique à l'état caractéristique

Essai (kPa)	ε_1^{th} (%)	ε_1^{exp} (%)	ε_v^{th} (%)	ε_v^{exp} (%)
100	3,267	1,745	0,991	0,699
100	2,022	1,227	0,873	0,379
200	3,677	2,079	0,969	0,791
200	3,618	1,996	0,976	0,756
300	3,712	2,466	0,969	0,962
300	2,849	1,996	0,981	0,806
Moyenne	3,191	1,918	0,960	0,732

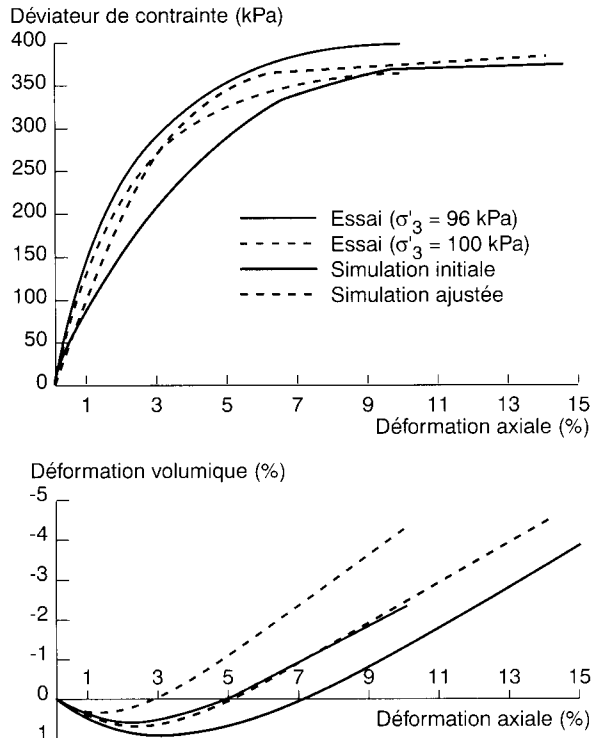


Fig. 6 - Comparaison des simulations théoriques (initiale et ajustée) avec les résultats expérimentaux pour les essais à $\sigma_3 = 100$ kPa.

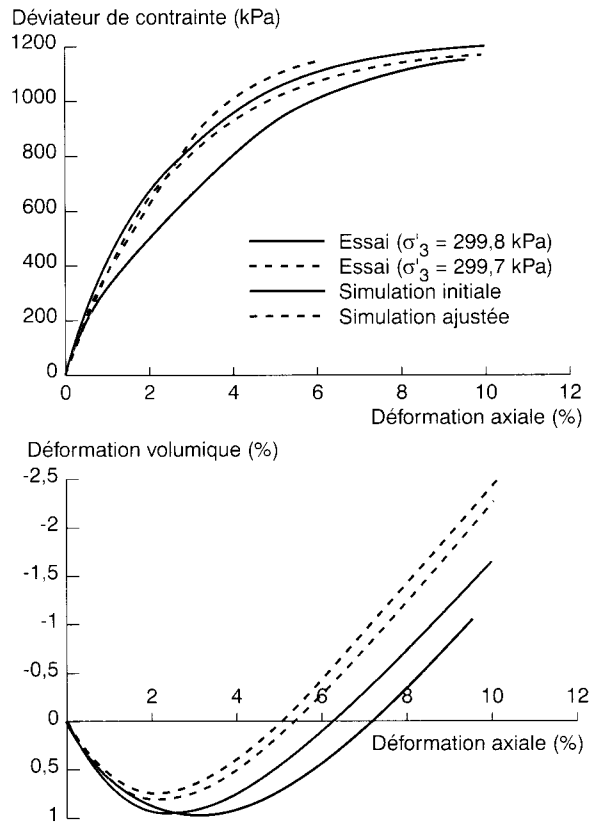


Fig. 8 - Comparaison des simulations théoriques (initiale et ajustée) avec les résultats expérimentaux pour les essais à $\sigma_3 = 100$ kPa.

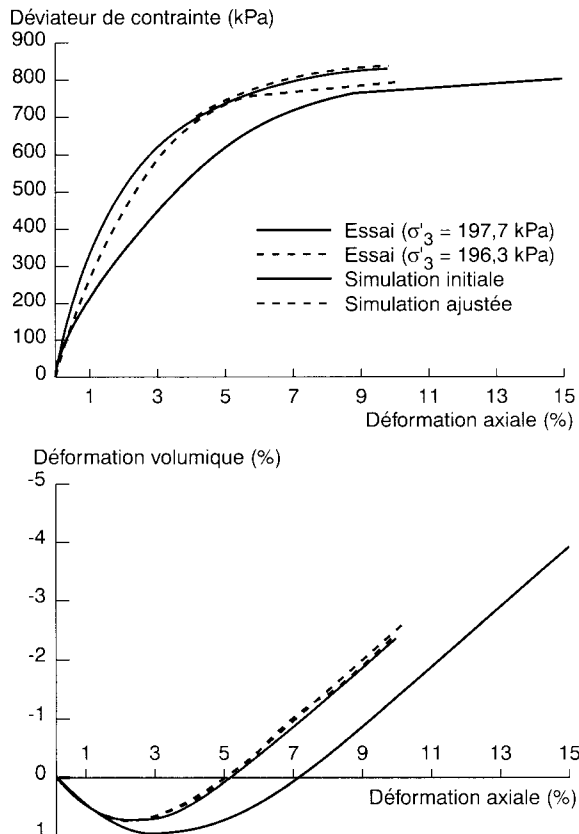


Fig. 7 - Comparaison des simulations théoriques (initiale et ajustée) avec les résultats expérimentaux pour les essais à $\sigma_3 = 100$ kPa.

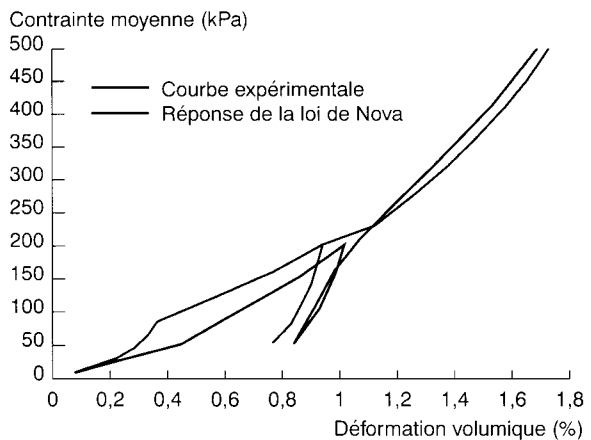


Fig. 9 - Comparaison de la simulation théorique avec les résultats expérimentaux pour l'essai de compression isotrope.

Synthèse des résultats obtenus sur des sables d'origine diverse

L'application de cette méthodologie a permis d'obtenir les valeurs des paramètres de la loi de Nova pour plusieurs types de sable (tableau XIV). L'analyse de ces valeurs fournit quelques indications sur les ordres de grandeur de ces paramètres pour les sables :

– M semble varier de 1 à 1,5 ; μ autour de 1. La quantité $M + \mu D$ est liée à l'angle de frottement interne par l'équation :

$$M + \mu D = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi} \quad (18)$$

et donc $M + \mu D$ est inférieur à 2,435 (ce qui correspond à $\phi < 60$ degrés) ;

– D varie entre 0 et 0,77. Ces limites se déduisent de la relation existant entre ce paramètre et l'angle de dilataance à la rupture :

$$D = \frac{6 \sin \psi}{3 - \sin \psi} \quad (19)$$

D est donc généralement compris entre 0 ($\psi = 0$ degré) et 0,77 ($\psi = 20$ degrés) ;

– l se situe dans l'intervalle 0,001 et 0,01 tandis que B_0 évolue entre 0,0005 et 0,005. Des valeurs plus importantes sont obtenues lorsque le sol est un mélange de sables et d'argiles (tableau XIV, sables fins argileux de Sao Paulo, Brésil (das Neves, 1993)) ;

– L_0 vaut en moyenne 0,001 avec des valeurs parfois supérieures jusqu'à 0,004 ;

– m est inférieur à 1.

Par une autre méthodologie de détermination et en considérant d'autres types d'essais complémentaires, Nova (1982) a abouti à des ordres de grandeur relativement plus importants pour les paramètres liés à la déformabilité : l (de l'ordre de 0,004 à 0,15), L_0 (de 0,002 à 0,01) et B_0 (de 0,025 à 0,001). En revanche, les ordres de grandeur des paramè-

tres liés à la rupture (M , μ , D) sont globalement identiques. Quant au paramètre caché m , il semble être généralement plus élevé dans les résultats de Nova, tout en restant inférieur à l'unité. Ces différences, somme toute relatives, proviennent certes du type d'essais interprétés, mais surtout de la nature des sables étudiés par Nova et par le LCPC (densité, granulométrie, angularité, rugosité, etc.).

Conclusions

Une méthodologie simple et de mise en œuvre rapide a été développée pour déterminer les paramètres de la loi élastoplastique avec écrouissage de Nova (version 1982). Elle est fondée sur l'exploitation des essais traditionnels de mécanique des sols (triaxiaux de compression et oedométriques). Le rôle des paramètres du modèle, y compris celui d'un paramètre caché, a été analysé. Des études de sensibilité ont d'autre part permis de compléter la méthodologie par un principe d'ajustement des simulations théoriques. Les bonnes concordances observées entre les résultats théoriques et expérimentaux montrent le bien-fondé de cette stratégie de détermination et confirment la capacité de la loi de Nova à décrire le comportement des sables sous sollicitations monotones. Les paramètres ainsi déterminés ont été introduits dans des modélisations par éléments finis et ont conduit à des résultats globalement satisfaisants.

La description détaillée de cette méthodologie avait aussi pour objectif de rendre plus compréhensible le fonctionnement de la loi de Nova (version 1982) dans le cas des essais traditionnels de mécanique des sols. L'informatisation de cette procédure ne pose pas de difficulté majeure. Son extension à d'autres lois de comportement, sous réserves des développements analytiques adéquats, constitue un axe de recherche intéressant. Des travaux de ce genre ont d'ailleurs été entamés pour la loi de Vermeer (1982).

TABLEAU XIV
Valeurs des paramètres de Nova obtenues au LCPC pour divers sables

Sable	M	l	B ₀	L ₀	μ	D	m
Fontainebleau ($\gamma = 15,5 \text{ kN/m}^3$)	1,093	0,0022	0,0017	0,0009	1,190	0,520	0,113
Reid Bedford ($\gamma = 15,8 \text{ kN/m}^3$)	1,116	0,0025	0,0004	0,0008	1,373	0,191	0,806
Hostun ($\gamma = 16,5 \text{ kN/m}^3$)	1,250	0,0022	0,0018	0,0012	1,002	0,323	0,055
Karlsruhe ($\gamma = 16,5 \text{ kN/m}^3$)	1,285	0,0089	0,0013	0,0042	0,973	0,432	0,745
Labenne ($\gamma = 16,6 \text{ kN/m}^3$)	1,130	0,0008	0,0005	0,0010	1,040	0,480	0,072
Labenne ($\gamma = 17,3 \text{ kN/m}^3$)	1,063	0,0018	0,0014	0,0022	1,313	0,320	0,204
Sables fins argileux (Sao Paulo, Brésil)	1,109 à 1,450	0,0124 à 0,0294	0,0017 à 0,0168	0,0061 à 0,0114	1,000	0,0	0,450 à 0,600

- ANANDARAJAH A., AGARWAL D. (1991), Computer-aided calibration of a soil plasticity model, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 15, pp. 835-856.
- ARAFATI N. (1996), *Contribution à la modélisation du déchargement des massifs de sol*, Thèse de doctorat de l'ENPC, 232 pages.
- ARAI K., OHTA H., KOJIMA K. (1987), Estimation of nonlinear constitutive parameters based on monitored movement of subsoil under consolidation, *Soils and Foundations*, vol. 27, 1, pp. 35-49.
- ARAI K. (1993), Back-analysis of deformation and Mohr-Coulomb strength parameters based on initial strain method, *Soils and Foundations*, vol. 33, 3, pp. 130-138.
- ATKINSON (1973), *The deformation of undisturbed London clay*. Ph. D. thesis, University of London, Imperial College of Science and Technology.
- AUBRY D., PICCUEZZU E. (1988), An automatic soil parameters identification software, *Numerical Methods in Geomechanics*, Innsbruck, Swoboda (eds), Balkema, pp. 279-284.
- AXELSSON K., YU Y., RUNESSON K., KLISINSKI M. (1991), Determination of constitutive parameters for soils based on optimization, *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Beer, Booker et Carter (eds), Balkema, pp. 569-574.
- BAUER E. (1996), Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials, *Soils and Foundations*, vol. 36, 1, pp. 13-26.
- BIAREZ J., FAVRE J.-L., HICHER P.-Y., RAHMA A. (1989), Correlations for granular media, classification logic and connections between classes, *Powders and Grains*, Biarez et Gourvès (eds), Balkema, pp. 201-209.
- CAMBOU B., ALLOUANI M., ELAMRANI K., BAHAR R., FRY J.J. (1990), Identification et calcul aux limites par la méthode des éléments finis, 25^e colloque du Groupe français de Rhéologie, Grenoble, pp. 219-230.
- CAMBOU B., RAHAR R. (1993), Utilisation de l'essai pressiométrique pour l'identification de paramètres intrinsèques du comportement d'un sol, *Revue française de Géotechnique*, 63, pp. 39-50.
- CAMBOU B., FAVRE J.-L., LANIER J., SHAHROUR I., SHAO J.-F. (1995), La validation des codes de calcul. Chapitre 5, *Mécanique des Géomatériaux*, Éditions Hermès, 562 pages.
- CHAMBON P., CORTÉ J.-F. (1991), *Étude sur modèles réduits centrifugés. Application aux tunnels à faible profondeur en terrain meuble pulvérulent*. Études et recherche des laboratoires des Ponts et Chaussées, série Géotechnique, GT 48, 164 pages.
- CHARLEZ Ph., SHAO J.-F. (1993), Mechanical behaviour of soft deep rocks, *Geotechnical Engineering of Hard Soils - Soft Rocks*, Anagnostopoulos et al. (eds), Rotterdam, Balkema, pp. 425-431.
- CHEHADE W., SHAHROUR I., NOVA R. (1992), Validation file for an elastoplastic-strain hardening model of soil behaviour, *Computers and Geotechnics*, vol. 14, pp. 1-20.
- DESAI C.S., SIRIWARDANE H. (1984), Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 468 pages.
- DUNCAN J.M., CHANG C.Y. (1970), Non linear analysis of stress and strain in soils, *Journal of Soil Mechanics Foundations Division*, ASCE, vol. 96 (SM5), pp. 1629-1653.
- FLAVIGNY E., HADJ-SADOK M., HODODECKI G., BALACHOWSKI L. (1991), Séries répétitives d'essais triaxiaux dans deux laboratoires, *Archiwum Hydrotechniki*, vol. XXXVIII, pp. 21-35.
- GENS A., LEDESMA A., ALONSO E.E. (1996), Estimation of parameters in geotechnical back analysis - II. Application to a tunnel excavation problem, *Computers and Geotechnics*, vol. 18, 1, pp. 29-46.
- GIODA G. (1985), Some remarks on back analysis and characterization problems, *Fifth International Conference on Numerical Methods in geomechanics*, Nagoya, Balkema, pp. 47-61.
- GIODA G., SAKURAI S. (1987), Back analysis procedures for the interpretation of field measurements in geomechanics, *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, vol. 11, 4, pp. 555-583.
- HICHER P.-Y., MICHALI A. (1991), Identifying soil parameters by means of laboratory and in situ testing, *Computers and Geotechnics*, vol. 19, 2, pp. 153-170.
- HUANG T.-K., CHEN W.F. (1990), Simple procedure for determining cap-plasticity-model parameters, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, vol. 116, 3, pp. 492-513.
- IISUKA A., OHTA H. (1987) A determination procedure of input parameters in elasto-viscoplastic finite element analysis, *Soils and Foundations*, vol. 27, 3, pp. 71-87.
- JOSSEAUME H., DELATTRE L., MESPOULHÉ I. (1997), Interprétation par le calcul aux coefficients de réaction du comportement du rideau de palplanches expérimental de Hochstetten, *Revue française de géotechnique*, 79, pp. 1-14.
- JU J.W., SIMO J.C., PISTER K.S., TAYLOR R.L. (1987), A parameter estimation algorithm for inelastic material models, *Constitutive Laws for Engineering Materials*, C.S. Desai et al. (eds), Elsevier, New York, pp. 1233-1240.

- KOLYMBAS D. (1991), Computer-aided design of constitutive laws, *International Journal for numerical and analysis methods in Geomechanics*, vol. 15, pp. 593-604.
- LADÉ P.V. (1988), Double hardening constitutive model for soils, parameter determination and predictions for two sands, *Constitutive Equations for Granular Non-Cohesive Soils*, Saada et Bianchini (eds), Balkema, pp. 367-383.
- LEDESMA A., GENS A., ALONSO E.E. (1991), Identification of parameters of nonlinear geotechnical models, *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Beer, Booker et Carter (eds), Balkema, pp. 1005-1010.
- LEDESMA A., GENS A., ALONSO E.E. (1996), Estimation of parameters in geotechnical back analysis - I. Maximum likelihood approach, *Computers and Geotechnics*, vol. 18, 1, pp. 1-27.
- LEDESMA A., GENS A., ALONSO E.E. (1996), Parameter and variance estimation in geotechnical back analysis using prior information, *International Journal for numerical and analytical methods in Geomechanics*, vol. 20, 1, pp. 119-141.
- LUNNE T., LACASSE S., RAD N.S. (1989), General report/Discussion session 2 : SPT, CPT, pressuremeter testing and recent developments in in situ testing - Part 1 : all tests except SPT, *Proceedings of the 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Rio de Janeiro, vol. 4, pp. 2339-2403.
- MEIMON Y. (1989), Validation des modèles rhéologiques sur ouvrages types : une tentative de démarche d'assurance-qualité, *Bilan et perspectives GRECO-Géomatériaux*, pp. 179-201.
- MEIMON Y. (1992), *Modèles pour le comportement des fondations d'ouvrages types marins*, Mémoire d'Habilitation à diriger des recherches, Institut français du pétrole - Université des Sciences et Techniques de Lille.
- MEIMON Y., FAVRE J.-L., LANIER J., MESTAT Ph., SHAHROUR I. (1995), Fondations superficielles, Chapitre 3 in *Les géomatériaux : avancées récentes en calcul d'ouvrages*, pp. 147-188, éditions Hermès.
- MESTAT Ph. (1990a), *Méthodologie de détermination des paramètres des lois de comportement à partir d'essais triaxiaux conventionnels*, Rapport interne LCPC, FAER 1.16.21.0.
- MESTAT Ph., DEGNY E., CHAMBON P., SEKKATE-RIHANOU Z. (1990b), Détermination des paramètres du modèle de Nova à partir d'un essai triaxial, *25^e colloque du Groupe français de Rhéologie*, Grenoble, pp. 173-184.
- MESTAT Ph. (1990c), *Simulation numérique du comportement de fondations superficielles (modèles réduits en centrifugeuse)*, Bilan de la participation au GRECO 1988-1990, LCPC, Division GMS1, FAER 1.16.21.0.
- MESTAT Ph. (1997), Note technique - Loi de Drucker-Prager, *Revue française de Génie Civil*, pp. 367-371.
- MESTAT Ph., ARAFATI N. (1998), Modélisation par éléments finis du comportement du rideau de palplanches expérimental de Hochstetten, *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chaussées*, 216, juillet-août, pp. 19-39.
- MISBAHI A., SHAO J.F., HENRY J.P. (1994), Application de la méthode d'inversion à la détermination des contraintes *in situ* en milieux anisotropes, *Revue française de Géotechnique*, 67, pp. 41-48.
- MUIR WOOD D., MACKENZIE N.L., CHAN A.H.C. (1993), Selection of parameters for numerical predictions, *Predictive soil mechanics*, Thomas Telford, London, pp. 496-512.
- DAS NEVES M. (1993), Analyse elastoplastica pelo método dos elementos finitos de estacas escavadas, Doctorat en Géotechnique de l'École d'ingénieurs de Sao Carlos, Université de Sao Paulo.
- SAADA A., BIANCHINI G. (1989), *Proceedings of the International Workshop on Constitutive Equations for Granular Non-Cohesive Soils*, Cleveland, Balkema, 734 pages.
- SAKURAI S. (1992), Field measurement and back analysis, *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Beer, Booker et Carter (eds), Balkema, pp. 1693-1701.
- SAKURAI S., AKUTAGAWA S., TOKUDOME O. (1994), Characterization of yield function and plastic potential function by back analysis, *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Siriwardane et Zaman (eds), Balkema, pp. 2011-2016.
- SHAO J.-F., DAIHOU A., HENRY J.-P. (1991), Application de la théorie des problèmes inverses à l'estimation des paramètres des modèles rhéologiques, *Revue française de Géotechnique*, 57, pp. 75-80.
- TADJBAKHSI S., FRANK R. (1985), *Étude par la méthode des éléments finis du comportement élastoplastique de sols dilatants*, Application aux pieux sous charge axiale, Rapport de recherche des LPC, 135, 142 pages.
- VERMEER P. (1982), A five constant model unifying well established concepts, *International Workshop on Constitutive Behaviour of Soils*, Grenoble, Balkema, pp. 175-197.
- VON WOLFFERSDORFF P.A. (1994), *Results of the field test and evaluation of the predictions and subsequent calculations*, Workshop Sheet Pile Test Karlsruhe, Delft University, Holland, october 1994.
- YOUSSEF (1991), *Étude du comportement des sables sous sollicitations homogènes. Validation d'une méthodologie de détermination des paramètres de comportement de Nova et de Vermeer*, Mémoire de DEA, LCPC, FAER 2.24.01.
- ZAMAN M.M., DESAI C.S., FARUQUE M.O. (1982), An algorithm for determining parameters for Cap Model from raw laboratory test data, *Fourth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, Eisenstein Z. (ed), Balkema, pp. 275-281.

ABSTRACT

Modelling of sands with the behaviour law of Nova: determination of parameters and influence on simulations

P. MESTAT, N. ARAFATI

This paper deals with a synthesis of several theoretical studies made at LCPC about rheology of sands. The aim of these works is to provide a simple and practical procedure for determining the parameters of the advanced elastoplastic model which was proposed by Roberto Nova in 1982. This procedure is based on the conventional triaxial tests and analytical developments of constitutive equations. The meaning of each parameter is presented as well as the connection between them and the characteristic slopes of experimental curves. A parametric analysis has allowed to propose a strategy which optimizes the identification of parameters. The proposed procedure have been tested and verified with success on several sands. The application of the procedure on Karlsruhe's sand is shown and it is confirmed that the theoretical results well agree with the experimental results. Finally, the typical values of parameters are established and give additional indications for a good use of this procedure.

Modélisation des sables avec la loi de Nova : détermination des paramètres et influence sur les simulations