سیزدهمین سمینار بین‌المللی
معادلات دیفرانسیل، سیستم‌های دینامیکی
و کاربردها

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی اصفهان
۲۳ الی ۲۵ تیرماه ۱۳۹۵

مطالعه دستگاههای دینامیکی به روش نگاشت پوانکاره از مراتب بالاتر

حسن آریانپور[1]، صفر محمدی [2] [1]دانشگاه تفرش، دانشکده ریاضی، عضو هیات علمی
[2]دانشگاه تفرش، دانشکده ریاضی، دانشجوی کارشناسی ارشد

چکیده:
در این مقاله با معرفی روش جبر دیفرانسیل وابسته به مدل تیلور، شار یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خودگردان را تقریب می زنیم. در ادامه با تعیین برش پوانکاره مناسب در نزدیکی مدار متناوب وابسته به جواب متناوب دستگاه و استفاده از تقریب چند جمله ای زمان تلاقی شار با برش پوانکاره در تقریب چند جمله ای شار، تقریب چند جمله ای نگاشت پوانکاره را برای دستگاه مورد نظر بدست می آوریم و در پایان با ارایه مثالی از یک دستگاه دینامیکی غیر خطی روش بکار رفته را پیاده سازی می کنیم.

واژه‌های کلیدی: دستگاه دینامیکی، نگاشت پوانکاره، مدل تیلور مرتبه n ام، جبر دیفرانسیل
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 12H05، 37C10، 37J25.

۱ مقدمه

هدف اصلی ما در این مقاله، بررسی وضعیت رفتار مانای یک دستگاه دینامیکی در بازه زمانی طولانی است. برای اینکار خود را به دستگاههایی محدود می سازیم که رفتار مانای کرانداری از خود بروز می دهند. اینگونه رفتارهای یک سیستم به چهار دسته: حول نقطه تعادل، جواب متناوب، جواب شبه متناوب و جواب آشوبناک تقسیم بندی می شوند. برای مطالعه رفتار مانای یک سیستم از روش نگاشت پوانکاره در تحلیل کیفی جوابهای آن استفاده میشود. در واقع، نگاشت پوانکاره به عنوان یک ابزار تحلیلی قوی و مناسب در مطالعه دستگاه های دینامیکی خودگردان و غیر خودگردان به شمار می رود که به دلیل کاهش مرتبه دستگاه دینامیکی پیوسته زمان به یک نگاشت گسسته زمان در قالب یک تناظر یک به یک و ارتباط بین مجموعه های حدی دستگاه دینامیکی اولیه و دستگاه گسسته زمان کاهش مرتبه یافته مورد توجه قرار می گیرد. روش نگاشت پونکاره دارای کاربردهای متعددی در حوره های مهندسی و فناوری مانند: لیزر و پزشکی، تیرهای کامپوزیتی، مهندسی کنترل، امواج الکترو مغناطیسی و نوسانگرها می باشد.

[2]صفر محمدی : safarmohammadi64@yahoo.com

۲ نمایش جبر دیفرانسیلی مدل تیلور شار دستگاه دینامیکی

دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خودگردان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(0) = X_0 + x_0 \end{cases} \tag{۱.۲}$$

که در آن $f : U \subset \mathbb{R}^v \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^v$ یک میدان برداری C^1 روی مجموعه باز U می باشد. طبق قضیه وجود و یکتایی جواب، با توجه به C^1 بودن میدان f ، یک جواب یکتا در همسایگی کوچک از $t = 0$ موجود است. فرض کنیم بردار ثابت $X_0 \in \mathbb{R}^v$ نقطه میانی جعبه دامنه $\mathbb{R}^v \supset X_0 + D = X_0 + [-d_1, d_1] \times \cdots \times [-d_v, d_v]$ برای شرط اولیه $x(0)$ بوده و محدوده های جعبه دامنه یعنی d_i ها از مرتبه 10^{-2} تا 10^{-8} باشند. تقریب چند جمله ای شار $\varphi(x,t)$ مربوط به معادله دیفرانسیل ۱.۱، یک بسط تیلور با جملاتی از متغیر مستقل زمانی t و شرط اولیه x می باشد. نمایش این تقریب، به شکل بردار جبر دیفرانسیل بوده بطوری که این نمایش ضرایب بسط تیلور را حداکثر تا مرتبه n حفظ می کند، در ادامه به معرفی مفاهیم مدل تیلور مرتبه n و جبر دیفرانسیل وابسته به مدل تیلور می پردازیم.

تعریف ۱.۲. فرض می کنیم تابع f روی $\mathbb{R}^v$ حداقل n بار مشتق پذیر باشد، مدل تیلور مرتبه n ام f را با نماد (P_n, I_n) نمایش می دهیم بطوری که P_n چند جمله ای تیلور مرتبه n ام f حول مبدا و I_n کران جمله باقیمانده می باشد و داریم:

$$P_n = \sum_{0 \le j_1 + \cdots + j_v \le n} c_{j_1,\dots,j_v} x_1^{j_1} \cdots x_v^{j_v}$$

که در آن $c_{j_1,\dots,j_v} = \frac{1}{j_1! \cdots j_v!} \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_v} f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_v^{j_v}}(0)$ ضرایب چند جمله ای تیلور مرتبه n ام می باشد.

عبارت جمله باقیمانده و کران آن با روابط زیر مشخص می شود:

$$f - P_n = \sum_{i_1,\dots,i_{n+1}=1}^{v} g_{i_1,\dots,i_{n+1}}(x) x_{i_1} \cdots x_{i_{n+1}}, \; g_{i_1,\dots,i_{n+1}}(0) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{n+1}}}(0)$$

بطوریکه برای هر $x \in B_r(0) = \{x \in R^v : ||x|| < r\}$ ضرایب $g_{i_1,\dots,i_{n+1}}(x)$ کراندارند و داریم:

$$|g_{i_1,\dots,i_{n+1}}(x)| \le M; \quad (1 \le i_1, \dots, i_{n+1} \le v), \quad |f - P_n| \le M(rv)^{n+1} = I_n$$

مدل تیلور انتگرال نامعین $\partial_i^{-1} f = \int f dz_i$ با دستور زیر مشخص می گردد:

$$\partial_i^{-1}(P_n, I_n) = (P_{n,\partial^{-1}}, I_{n,\partial^{-1}}) = \Big(\int_0^{x_i} P_{n-1} dz_i, \big(B(P_n - P_{n-1}) + I_n\big) B(x_i) \Big)$$

$$B(P_n - P_{n-1}) = \frac{1}{n!} M(rv)^n, \quad B(x_i) = r$$

$$I_{n,\partial^{-1}} = \big(B(P_n - P_{n-1}) + I_n\big) B(x_i) = \big(\frac{1}{n!} M(rv)^n + M(rv)^{n+1}\big) r$$

تعریف ۲.۲. $C^n(\mathbb{R}^v)$ را مجموعه همه توابع n بار بطور پیوسته مشتق پذیر روی $\mathbb{R}^v$ در نظر می گیریم و روی $C^n(\mathbb{R}^v)$ رابطه هم ارزی $=_n$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{gathered} \forall f, g \in C^n(\mathbb{R}^v), \; f =_n g \iff f(0) = g(0), \\ \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}(0) = \frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}(0) \\ 1 \le i_1 \dots, i_k \le v \quad 1 \le k \le n \end{gathered} \tag{۲.۲}$$

تعریف ۲.۳. (۲) رابطه هم ارزی $=_n$ فضای $C^n(\mathbb{R}^v)$ را به رده های هم ارزی افراز می کند و هر رده هم ارزی را با $[f]$ نمایش می دهیم و مجموعه همه رده های هم ارزی را با $_nD_v$ نمایش می دهیم.

برای هر $f \in C^n(\mathbb{R}^v)$، چند جمله ای تیلور مرتبه n ام T_fو تابع f در یک رده هم ارزی قرار دارند:

$$[f] = [T_f] \iff f =_n T_f$$

که در آن چندجمله ای T_f و ضرایب آن بصورت زیر داده می شوند:

$$T_f(x_1, \dots, x_v) = \sum_{0 \le j_1 + \dots + j_v \le n} c_{j_1,\dots,j_v} x_1^{j_1} \dots x_v^{j_v}, \quad c_{j_1,\dots,j_v} = \frac{1}{j_1! \cdots j_v!} \cdot \frac{\partial^{j_1+\dots+j_v} f}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_v^{j_v}}(0)$$

با قرار دادن $[x_k] = d_k \quad (1 \le k \le v),$ هر رده هم ارزی با رابطه زیر مشخص می شود و آنرا نمایش جبر دیفرانسیل وابسته به مدل تیلور تابع fمی نامند:

$$\begin{aligned}[f] = [T_f] &= \left[\sum_{0 \le j_1 + \dots + j_v \le n} c_{j_1,\dots,j_v} x_1^{j_1} \dots x_v^{j_v} \right] \\ &= \sum_{0 \le j_1 + \dots + j_v \le n} c_{j_1,\dots,j_v} [x_1^{j_1}] \dots [x_v^{j_v}] = \sum_{0 \le j_1 + \dots + j_v \le n} c_{j_1,\dots,j_v} d_1^{j_1} \dots d_v^{j_v}\end{aligned} \tag{۲.۳}$$

حال با اضافه کردن کران باقیمانده بدست آمده در روش محاسباتی (۴) به بردار جبر دیفرانسیل $\varphi(x,t)$، به مدل تیلور $\varphi(x,t) + I_\varphi$ از شار معادله دیفرانسیل می رسیم. مسئله مقدار اولیه که با رابطه ۱.۱ نمایش داده می شود را می توان به شکل معادله انتگرال بازنویس کرد:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau$$

چنانچه عملگر پیکارد A با تعریف $A : \vec{C}^0[0,t] \longrightarrow \vec{C}^0[0,t]$ را در نظر بگیرید که در آن $\vec{C}^0[0,t]$ فضای توابع برداری پیوسته روی بازه سته $[0,t]$ است. عملگر SA روی توابع برداری بصورت معادله انتگرالی زیر بیان می شود:

$$A(x)(t) = x(0) + \int_0^t f(x(\tau), \tau) d\tau$$

تکرار بکارگیری عملگر پیکارد A با شروع از شرایط اولیه نتیجه می دهد که کران های باقیمانده به کوچکترین بازه همگرا می شوند. (۴)

۳ محاسبه تقریب چند جمله ای نگاشت پوانکاره

فرض کنیم معادله دیفرانسیل $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ دارای جواب متناوب $\varphi(X_0, t)$ باشد، بطوری که این جواب از یک برش پوانکاره S شروع شود و بعد از دوره تناوب T به برش S برگردد. حال چگونگی تصویر کردن جعبه دامنه $X_0 + D$ تحت شار $\varphi(x,t)$ به برش پوانکاره S را با استفاده از قضیه زیر نشان می دهیم.

قضیه ۱.۳. (۱) فرض کنیم E یک زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^n$ و $f^1(E)$ باشد و فرض می کنیم $\varphi(X_0, t)$ جواب متناوب دستگاه معادلات $\dot{x} = f(x)$ با دوره تناوب $T > 0$ بوده و مدار متناوب

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi(X_0, t), \; 0 \le t \le T\}$$

درون E باشد به علاوه فرض می کنیم S ابر صفحه عمود بر Γ در $X_\circ$ باشد یعنی

$$S = \{x \in R^n : (x - X_\circ).f(X_\circ) = \circ\}$$

آنگاه $\delta > \circ$ و تابع یکتای $t_c(x)$ تعریف شده روی همسایگی $N_\delta(X_\circ)$ موجود است که برای هر $x_\delta(X_\circ)$ بطور پیوسته مشتق پذیر است بطوری که $t_c(X_\circ) = T$ و داریم: $\varphi(x, t_{c(x)}) \in S \qquad \forall x \in N_\delta(X_\circ),$.

حال اگر جعبه دامنه $X_\circ + D$ را در همسایگی $N_\delta(X_\circ)$ در نظر بگیریم از قضیه ۱.۲ نتیجه می شود که این جعبه دامنه تحت شار $\varphi(x,t)$ بعد از گذشت زمان $t_c(x)$ به برش S تصویر می شود که در آن $t_c(x)$ زمان اولین ورود به برش S است.

تعیین برش پوانکاره

فرض کنیم برش $S \subset \mathbb{R}^v$ بطور ضمنی بر حسب جملات تابعی $\sigma : \mathbb{R}^v \to \mathbb{R}$ با مجموعه $\{x \in \mathbb{R}^v : \sigma(x) = \circ\}$ بیان شده باشد. همچنین برای هموار بودن برش S تابع σ باید هموار فرض شود. در حالت خاص برش S، صفحه آفین $S = \{x \in \mathbb{R}^v :\ x_1 = c\}$ است که در آن $\sigma(x) = x_1 - c$ می باشد.

متقاطع بودن میدان برداری بر برش پوانکاره

شرط لازم برای تلاقی شار معادله دیفرانسیل با برش S اینست که میدان برداری f برای همه شرایط اولیه $X_\circ + D$ بر برش S متقاطع باشد، بطوری که داشته باشیم:

$$\nabla\sigma\big(\varphi(x, t_c(x))\big).f(x) \neq \circ$$

اگر فرض کنیم t_l و $t_u > t_l$ زمان هایی باشند که در لحظه t_l جعبه دامنه $X_\circ + D$ از برش S هنوز عبور نکرده ولی در لحظه t_u کاملاً از درون S گذر کرده است، در اینصورت بازه $[t_l, t_u]$ شامل زمان تلاقی $t_c(x)$ به ازای هر $X_\circ + D$ می باشد که بوسیله برش S و میدان برداری f تعیین می شود.

تعریف ۲.۳. فرض کنیم Γ, S, δ و $t_c(x)$ همان هایی باشند که در قضیه ۱.۲ آمده است. آنگاه برای هر $x \in N_\delta(X_\circ) \cap S$ تابع $P(x) = \varphi(x, t_c(x))$ را نگاشت پوانکاره مربوط به جواب متناوب $\varphi(X_\circ, t)$ می نامند.

با توجه به تعریف بالا، ساختار مدل تیلور نگاشت پوانکاره $P(x) + I_P$ با بکارگرفتن مدل تیلور تابع زمان تلاقی $t_c(x) + I_{t_c}$ در مدل تیلور شار $\varphi(x,t) + I_\varphi$ بصورت زیر بدست می آید:

$$P(x) + I_P = \varphi\big(x + [\circ, \circ], t_c(x) + I_{t_c}\big) + I_\varphi \tag{۱.۳}$$

حال برای نمایش جبر دیفرانسیلی $t_c(x)$، تابع $\psi : \mathbb{R}^v \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^v \times \mathbb{R}$ را با ضابطه زیر در نظر می گیریم:

$$\psi_k(x,t) = x_k \quad \forall k \in \{1, \ldots, v\}, \quad \psi_{v+1}(x,t) = \sigma(\varphi(x,t))$$

که در آن زمان تلاقی $t_c(x)$ در شرط $\varphi(x, t_c(x)) \in S$ صدق می کند بطوریکه داریم: $\sigma\big(\varphi(x, t_c(x))\big) = \circ$. همچنین زمان $t_c(x)$ با شارگذرای $\psi(x,t)$ رابطه زیر را برقرار می سازد:

$$\psi(x, t_c(x)) = \big(x_1, \ldots, x_v, \sigma(\varphi(x, t_c(x))\big) = (x, \circ)$$

با فرض وارون پذیری ψ، رابطه $t_c(x)$ بر حسب آن داده می شود بطوریکه

$$\psi^{-1}(x,0)=\psi^{-1}\big(\psi(x,t_c(x))\big)=(x,t_c(x))^T,\quad t_c(x)=\psi^{-1}_{v+1}(x,0)$$

بنابراین نمایش جبر دیفرانسیلی $t_c(x)$ بر حسب جملاتی از x از نمایش جبر دیفرانسیلی ψ^{-1} بدست می آید.

۴ پیاده سازی روش جبر دیفرانسل وابسته به مدل تیلور

دستگاه معادلات غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x_1}=x_3 \\ \dot{x_2}=x_4 \\ \dot{x_3}=x_4-\dfrac{\alpha}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}x_3+\dfrac{\alpha}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}x_2 \\ \dot{x_4}=-x_3-\dfrac{\alpha}{\sqrt{x_3^2+x_4^2}}x_4-\dfrac{\alpha}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}x_1 \end{cases}$$

که در آن $\alpha\in[0,1]$ شرط اولیه $x(0)=X_0+x_0$ با بردار $X_0=(1,0,0,-1)$ و جعبه $D=[-10^{-4},10^{-4}]^4$ را در نظر می گیریم. نقطه میانی X_0 از جعبه دامنه X_0+D روی مدار متناوب وابسته به جواب متناوب $\varphi(X_0,t)=(\cos t,-\sin t,-\sin t,-\cos t)$ با دوره تناوب $T=2\pi$ قرار دارد. اما هیچ یک از جواب های شروع شده از جعبه $X_0+(D-\{0\})$ متناوب نیستند بلکه به سمت جواب متناوب $\varphi(X_0,t)$ بطور مجانبی کشیده می شوند، این مطلب با توجه به مقادیر ویژه نگاشت پوانکاره تعریف شده روی برش $S=x\in\mathbb{R}^4: x_1=1$ بسادگی دیده می شود. در این مثال مرتبه محاسبات را برابر $n=4$ و مقدار α را برابر $0/1$ در نظر می گیریم.

با استفاده از عملگر پیکارد و با شروع از شرط اولیه X_0+x_0، تقریب چند جمله ای شار معادله دیفرانسیل را بدست می آوریم:

$$C(x(t))=X_0+x_0+\int_0^t f(x(\tau))d\tau$$

که در آن شرط اولیه $C(x(0))=X_0+x_0=U_0(t)$ در نظر گرفته شده است. با تکرار بکارگیری عملگر پیکارد به چند جمله ای تیلور مرتبه چهارم شار معادله دیفرانسیل می رسیم:

$$C\big(C^4(x(0))\big)=U_4(t)=\varphi_4(x,t)$$

حال ضرایب بسط تیلور زمان تلاقی $t_c(x)$ را تعیین می کنیم که برخی از این ضرایب تا مرتبه چهارم در جدول ۱ نمایش داده شده اند. با جایگذاری $t_c(t)$ در شار $\varphi_4(x,t)$ و تحدید $\varphi_4(x,t)$ به برش S، نتیجه می شود همه ضرایب بسط تیلور مؤلفه اول نگاشت پوانکاره $P_1(x)$ صفر هستند. در این صورت برای اینکه نشان دهیم جواب متناوب $\varphi(X_0,t)$ یک چرخه حدی است، مقادیر ویژه خطی شده نگاشت پوانکاره $P(x)$ حول X_0 را بدست می آوریم که در آن از رابطه $DP(X_0)=Q(X_0)$ نتیجه می شود:

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_{2,3}=0/73038\pm i(0/00574)$$

با توجه به مقادیر ویژه مزدوج مختلط $\lambda_{2,3}$، نقطه X_0 یک نقطه ثابت مجانبی پایدار نگاشت پوانکاره است بنابراین جواب متناوب $\varphi(X_0,t)$ متناظر با این نقطه ثابت نیز یک چرخه حدی پایدار می باشد.

شماره سطر	ضریب	مرتبه	نماها
۱	۰/۲۰۴۱۴۸۱۰۷۸۰۸۱۱۵۲E-۱۳	۰	۰ ۰ ۰ ۰ ۰
۲	-۰/۴۸۸۱۸۰۵۶۲۶۸۵۷۳۵۴E-۰۲	۱	۱ ۰ ۰ ۰ ۰
۳	۰/۱۴۲۰۴۵۳۹۵۸۱۸۴۹۰۶E-۰۳	۱	۰ ۱ ۰ ۰ ۰
۴	-۰/۱۴۲۰۴۵۳۹۵۸۱۸۴۹۵۶E-۰۳	۱	۰ ۰ ۱ ۰ ۰
۵	۰/۱۸۰۴۷۴۹۵۸۹۵۲۸۲۶۵E-۰۲	۱	۰ ۰ ۰ ۱ ۰
⋮			
۶۶	-۰/۱۷۲۸۲۷۲۱۰۸۲۲۶۸۸۴E-۱۴	۴	۰ ۰ ۲ ۲ ۰
۶۷	-۰/۱۳۸۰۵۷۳۴۱۶۹۹۰۲۳۷E-۱۵	۴	۱ ۰ ۰ ۳ ۰
۶۸	۰/۵۲۸۵۶۴۷۰۰۲۷۳۴۶۹۶E-۱۷	۴	۰ ۱ ۰ ۳ ۰
۶۹	۰/۴۸۱۷۹۰۹۰۴۰۷۳۴۳۶۷E-۱۴	۴	۰ ۰ ۱ ۳ ۰
۷۰	۰/۶۳۷۱۷۰۲۴۰۶۵۶۹۰۳۵E-۱۶	۴	۰ ۰ ۰ ۴ ۰

جدول ۱: ضرایب بسط تیلور $t_c(x)$

مراجع

[1] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3dr ed., Springer-Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, 2006.

[2] M. Berz, *Modern Map Methods in Particle Beam Physics*, Academic Press, San Diago,1999.

[3] J. Grote, M. berz, and K. Makino, High-order representation of Poincare maps, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research*, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, Vol. 558, No 1, (2006) 106-111.

[4] M. Berz and K. Makino, Verified integration of ODEs and flows using differential algebraic methods on high-order Taylor models, *Relible Computing*, No 4, (1998) 361-369.