© Firooz Arash 2020

مکانیک همیلتونی.....(۳)

کاربردهای نظریه‌ی همیلتون

دو کاربرد را در اینجا خواهیم پروراند: (۱) براکت‌های پوواسن و (۲) قضیه‌ی لیوویل اولی راه به مکانیک کوانتومی می‌گشاید و دومی به مکانیک آماری

براکت‌های پوواسون

تابعی از متغیرهای مستقل p ، q و t را در نظر بگیرید: $f(q,p,t)$. اگر به ازای هر حرکت مجاز سامانه‌ی دینامیکی این تابع مقدار ثابتی باشد: $f(q,p,t)=$ ثابت ، گوییم، $f(q,p,t)$ انتگرال حرکت معادله‌های هامیلتون است. نمونه‌های انتگرال حرکت عبارت اند از (الف): همیلتونی سامانه‌ی بسته. (ب): اگر مختصاتی (مانند q_j) چرخه‌ای باشد، آنگاه p_j انتگرال حرکت است.

روشن است که اگر $f_۱, f_۲, \cdots, f_{۲n}$ انتگرال‌های حرکت باشند، هر تابعی مانند $F(f_۱, f_۲ \cdots, f_{۲n})$ هم انتگرال حرکت است. در بحثی که در پی می‌آید فقط انتگرال‌های حرکت **مستقل از هم** را در نظر خواهیم گرفت.

اگر مجموعه‌ی کامل، $f_۱, f_۲, \cdots, f_{۲n}$ ، از انتگرال‌های حرکت را بشناسیم، می‌توانیم همه‌ی متغیرهای مستقل p_j و q_j را به‌دست آوریم و **سامانه به طور کامل شناخته می‌شود**. پس:

$$\begin{cases} f_۱(q,p,t)=C_۱ \\ \vdots \\ f_{۲n}(q,p,t)=C_{۲n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_۱=\varphi_۱(t,C_۱,\ldots C_{۲n}) \\ \vdots \\ q_n=\varphi_n(t,C_۱,\ldots C_{۲n}) \\ p_۱=\psi_۱(t,C_۱,\ldots C_{۲n}) \\ \vdots \\ p_n=\psi_n(t,C_۱,\ldots C_{۲n}) \end{cases} \qquad (۱)$$

حال فرض کنید، k $(k<۲n)$ انتگرال حرکت داده شده‌اند و یا آنها را می‌شناسیم. برای هر f

© Firooz Arash 2020

می‌توان نوشت (با جایگزینی‌هایی از معادله‌های همیلتون)

$$\frac{df}{dt}=\circ=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j+\sum_j\frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_j\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) \qquad (۲)$$

تعریف براکت پوواسون: برای هر دو تابع دلخواه $f(q,p,t)$ و $g(q,p,t)$، براکت پوواسون یا جابه‌جایی پوواسون عبارت است از

$$\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j}\equiv\left[f,g\right] \qquad (۳)$$

پس: شرط لازم و کافی برای این که f در رابطه‌ی (۲) انتگرال حرکت (یعنی کمیت پایسته) باشد

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\left[f,H\right]=\circ \qquad (٤)$$

حال اگر f به طور صریح به زمان بستگی نداشته باشد، $\frac{\partial f}{\partial t}=\circ$، رابطه‌ی (٤) به

$$\left[f,H\right]=\circ \qquad (٥)$$

کاهش می‌یابد. این معادله در مکانیک کوانتومی نقش برجسته‌ای دارد. در فیزیک کلاسیک، در این درس ما، اهمیت رابطه‌ی (٥) این است که راه‌کاری برای یافتن انتگرال سوم حرکت (کمیت پایسته‌ی سومی) را از دو کمیت پایسته‌ی شناخته شده به‌دست آوریم. این گزاره، در واقع، قضیه‌ی ژاکوبی- پوواسون است. بگذارید آن را بیان کنیم و سپس به اثبات آن بپردازیم:

قضیه‌ی ژاکوبی- پواسون

اگر $f(q,p,t)$ و $g(q,p,t)$ انتگرال‌های حرکت باشند، $\left[f,g\right]$ هم ثابت حرکت است.

پیش از اثبات این قضیه، برخی ویژگی‌های سودمند براکت‌های پوواسون را برمی‌شمارم:

(۱) : براکت پواسون جابه‌جایی‌پذیر نیست: $\left[f,g\right]=-\left[g,f\right]$

(۲): به ازای هر مقدار ثابت c داریم: $\left[cf,g\right]=c\left[f,g\right]$

(۳): برای تابع h براکت پواسون پخش‌پذیر است: $\left[f+h,g\right]=\left[f,g\right]+\left[h,g\right]$

© Firooz Arash 2020

(٤): $$\frac{\partial}{\partial t}\left[f,g\right]=\left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right]$$

(٥): $$\left[f\,h,g\right]=f\left[h,g\right]+h\left[f,g\right]$$

(٦): اتحاد ژاکوبی: $$\left[f,\left[g,h\right]\right]+\left[g,\left[h,f\right]\right]+\left[h,\left[f,g\right]\right]=0$$

ویژگی‌های (٥)- (١) از تعریف براکت پواسون نتیجه می‌شوند. اثبات ویژگی (٦) به تمرین‌ها واگذار شده است.

حالا می‌توانیم قضیه‌ی ژاکوبی- پوواسون را ثابت کنیم:

قضیه‌ی ژاکوبی- پواسون

اگر $f\left(q,p,t\right)$ و $g\left(q,p,t\right)$ انتگرال‌های حرکت باشند، $\left[f,g\right]$ هم ثابت حرکت است.

شرط لازم و کافی پایسته بودن یا ثابت حرکت بودن f با رابطه‌ی (٤) داده شده شده است. در اینجا می‌خواهیم نشان دهیم که $\left[f,g\right]$ هم ثابت حرکت است. یعنی اگر $f\rightarrow\left[f,g\right]$ رابطه‌ی (٤) چه چیزی به ما می‌گوید؟ به بیان دیگر، اگر $\left[f,g\right]$ بخواهد ثابت حرکت باشد باید نشان دهیم که در (٤)، با $f\rightarrow\left[f,g\right]$

(٦) $$\frac{\partial}{\partial t}\left[f,g\right]+\left[\left[f,g\right],H\right]=0$$

صدق می‌کند:

چون f و g ثابت‌های حرکت اند، برای آنها داریم

(٧) $$\frac{\partial f}{\partial t}+\left[f,H\right]=0\quad,\quad\frac{\partial g}{\partial t}+\left[g,H\right]=0$$

رابطه‌ی (٦) را به صورت زیر بنویسید

(٨) $$\frac{\partial}{\partial t}\left[f,g\right]=-\left[\left[f,g\right],H\right]$$

سمت چپ را با بهره‌گیری از ویژگی (٤) براکت پواسون بسط دهید و سمت چپ را با توجه به تعریف برکت پوواسون (جابه‌جایی) بازنویسی کنید. خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f,g\right]=\left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[\frac{\partial g}{\partial t},f\right]$$
$$=-\left[\left[f,H\right],g\right]-\left[f,\left[g,H\right]\right] \qquad (۹)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[f,g\right]=\left[\left[H,f\right],g\right]+\left[\left[g,H\right],f\right] \qquad (۱۰)$$

سمت راست رابطه‌ی (۱۰) را با استفاده از اتحاد ژاکوبی بازنویسی کنید:

$$\left[f,\left[g,H\right]\right]+\left[g,\left[H,f\right]\right]+\left[H,\left[f,g\right]\right]=\circ$$

$$\Rightarrow \quad \left[\left[g,H\right],f\right]+\left[\left[H,f\right],g\right]+\left[\left[f,g\right],H\right]=\circ$$

$$\Rightarrow \quad \left[\left[g,H\right],f\right]+\left[\left[H,f\right],g\right]=-\left[\left[f,g\right],H\right] \qquad (۱۱)$$

جایگزینی در رابطه‌ی (۱۰) به‌دست می‌دهد:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[f,g\right]=-\left[\left[f,g\right],H\right] \qquad (۱۲)$$

و قضیه اثبات شد.

نکته: پس، می‌توان برای نمونه، با محاسبه‌ی $\left[f,\left[f,g\right]\right]$، انتگرال حرکت بعدی را به‌دست آورد و... با این وجود، ممکن است انتگرال حرکتی که از براکت پواسون به‌دست می‌آید بدیهی (یعنی صفر) باشد یا ترکیبی از انتگرال‌های حرکت دیگر باشد. بنابراین، این روش یافتن همه‌ی k ($k<۲n$) انتگرال حرکت را تضمین نمی‌کند. به چند مثال توجه کنید:

مثال ۱: (الف) فرض کنید $g(q,p,t)=q_\beta$ است. براکت پواسون $\left[f,q_\beta\right]$ را به‌دست آورید.

(ب): فرض کنید $g(q,p,t)=p_\beta$ است. براکت پواسون $\left[f,p_\beta\right]$ را به‌دست آورید.

(پ): با فرض $f(q,p,t)=q_\gamma$ و $g(q,p,t)=p_\beta$، براکت پواسون $\left[q_\gamma,p_\beta\right]$ را حساب کنید.

حل: (الف)

© Firooz Arash 2020

$$\left[f,q_\beta\right]=\sum_j\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\cancel{\frac{\partial q_\beta}{\partial p_j}}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial q_\beta}{\partial q_j}\right)=-\sum_j\frac{\partial f}{\partial p_j}\delta_{j\beta} \qquad (۱۳)$$

در رابطه‌ی بالا جمله‌ی اول صفر است چون q_β و p_j متغیرهای مستقل‌اند.

(ب):

$$\left[f,p_\beta\right]=\sum_j\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_j}\cancel{\frac{\partial p_\beta}{\partial q_j}}\right)=\sum_j\frac{\partial f}{\partial q_j}\delta_{j\beta}=\frac{\partial f}{\partial q_\beta} \qquad (۱٤)$$

(پ):

$$\left[q_\gamma,p_\beta\right]=\sum_j\left(\frac{\partial q_\gamma}{\partial q_j}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_j}-\frac{\partial q_\gamma}{\partial p_j}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_j}\right)=\sum_j\delta_{\gamma j}\delta_{\beta j}=\delta_{\beta\gamma} \qquad (۱٥)$$

به همین ترتیب دیده می‌شود که $\left[q_\gamma,q_\beta\right]=0$ و $\left[p_\gamma,p_\beta\right]=0$ اند.

مثال ۲: فرض کنید تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}$ انتگرال حرکت است. براکت پواسون $\left[L_x,L_y\right]$ و $\left[L^2,L_z\right]$ را حساب کنید.

حل: تکانه‌ی زاویه‌ای $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ است و مولفه‌های آن به قرار زیرند:

$$L_x=yp_z-zp_y \quad , \quad L_y=zp_x-xp_y \quad , \quad L_z=xp_y-yp_x \qquad (۱٦)$$

هر یکاز این مولفه‌ها را به صورت $L_i=L_i\left(x,y,z;p_x,p_y,p_z\right)$ در نظر بگیرید. بنابراین، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\left[L_x,L_y\right]&=\left(\cancel{\frac{\partial L_x}{\partial x}}\frac{\partial L_y}{\partial p_x}-\cancel{\frac{\partial L_x}{\partial p_x}}\frac{\partial L_y}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial L_x}{\partial y}\cancel{\frac{\partial L_y}{\partial p_y}}-\frac{\partial L_x}{\partial p_y}\cancel{\frac{\partial L_y}{\partial y}}\right)\\&+\left(\frac{\partial L_x}{\partial z}\frac{\partial L_y}{\partial p_z}-\frac{\partial L_x}{\partial p_z}\frac{\partial L_y}{\partial z}\right)\\&=-p_y(-x)-y(p_x)=xp_y-yp_x=L_z\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

© Firooz Arash 2020

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که $\left[L_y,L_z\right]=L_x$ و $\left[L_z,L_x\right]=L_y$ اند. از طرف دیگر، چون $L^۲=L_x^۲+L_y^۲+L_z^۲$ است، پس

$$\left[L^۲,L_z\right]=\left[L_x^۲,L_z\right]+\left[L_y^۲,L_z\right]+\cancel{\left[L_z^۲,L_z\right]}=۲L_x\left[L_x,L_z\right]+۲L_y\left[L_y,L_z\right]$$
$$=۲L_x\left(-L_y\right)+۲L_x\left(L_x\right)=۰ \qquad (۱۸)$$

این مثال نشان می‌دهد که در سامانه‌ی بسته که تکانه‌ی کل (و مولفه‌های کارتزی آن) و تکانه‌ی زاویه‌ای (و مولفه‌های کارتزی آن) انتگرال حرکت اند، براکت‌های پواسون یا صفر است و یا مولفه‌های کارتزی دیگری اند.

در مکانیک کوانتومی، قاعده‌های همانند براکت پواسون برای جابه‌جاگرها به کار می‌رود. در جبر جابه‌جاگرها، به جای توابع، عملگرهای کوانتومی (برای نمونه $p_x \to \hat{p}_x = i\hbar\partial/\partial x$ و $L_x \to \hat{L}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y$ و ...) جایگزین می‌شوند. و براکت پواسون به صورت $\left(۱/i\hbar\right)\left[\hat{f},\hat{g}\right]=\left(-i/\hbar\right)\left[\hat{f},\hat{g}\right]$ درمی‌آید. در مکانیک کوانتومی به یک اصل بنیادی می‌رسیم که می‌گوید اگر براکت پواسون دو «متغیر دینامیکی» کلاسیکی صفر شود، می‌توان این متغیرها را (ویژگی‌های فیزیکی را) **همزمان اندازه** گرفت (یعنی با دقتی دلخواه اندازه‌گیری کرد.) اگر براکت پواسون صفر نباشد، یک چنین اندازه‌گیری همزمان ناشدنی است!

فضای فاز، قضیه‌ی لیوویل، توزیع بندادی در مکانیک آماری

فضای فاز:

حالت حرکت سامانه‌ی مکانیکی با n درجه‌ی آزادی در فرمول‌بندی همیلتون با $۲n$ متغیر (یا «مختصات») کاملا مشخص می‌شود. n تا از این متغیرها q_j ها و n تای دیگر p_j ها اند. q_j ها و p_j ها را می‌توان مختصات فضای $۲n$ بعدی پنداشت. این فضای $۲n$ بعدی را **فضای فاز** می‌نامند. زیرفضای n بعدی q_j فضای **پیکربندی** سامانه است و زیرفضای n بعدی p_j ها فضای **تکانه** است. حالت سامانه در هر لحظه‌ی زمانی t با نقطه‌ای در فضای فاز داده می‌شود.

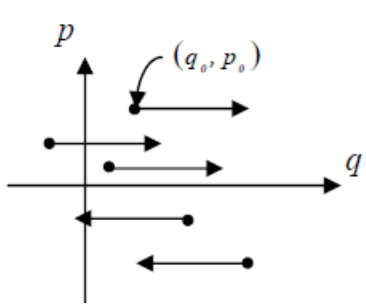
© Firooz Arash 2020

حرکت سامانه در بازه‌ی معینی از زمان، خمی را در فضای فاز تشکیل می‌دهد. این خم **مسیر فاز** نامیده می‌شود. اگر همیلتونی سامانه را بدانیم، تمامی مسیر فاز را می‌توان با دانستن یک نقطه (یعنی شرایط اولیه) حساب کرد. این محاسبه، یگانه است. به بیان دیگر، هر نقطه‌ی فضای فاز فقط به یک مسیر فاز تعلق دارد (برخی نقاط خاص وجود دارند که ممکن است که چندین مسیر فاز از آنها بگذرد. این ها نقاط خیلی خاص‌اند.) نمودار مسیرهای ممکن یک سامانه را **نقش فاز** یا **نمودار فاز** می‌نامند.

روشن‌تر بگوییم: فرض کنید ذره‌ای در یک پتانسیل حرکت می‌کند (یعنی لاگرانژی و یا عمیلتونی آن را می‌شناسیم). هر نقطه‌ی مسیر ذره با یک q و یک p معین شناسایی می‌شود. نقطه‌ی مسیر (q,p) یگانه است.

ادعا: اگر ذره در یک لحظه در مکانی با مختصات (q,p) باشد و همیلتونی ذره را بدانیم، حرکت ذره برای تمام زمان‌ها شناخته می‌شود؛ چون با استفاده از معادله‌های همیلتون $\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}$ و $\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}$ مقدارهای $\dot{q}$ و $\dot{p}$ را می‌توان در این لحظه یافت. از این مشتق‌ها می‌توان q و p را در لحظه‌ی بعدی (یا پیشین) حساب کرد؛ آنها هم به نوبه‌ی خود $\dot{q}$ و $\dot{p}$ را در لحظه‌ی بعدی (یا پیشین) به‌دست می‌دهند. با ادامه‌ی این کار می‌توان در زمان پیش وپس رفت و پی‌درپی مقادیر (q,p) و $(\dot{q},\dot{p})$ را به‌دست آورد. پس، شرایط اولیه، $(q_\circ,p_\circ)$، به همراه همیلتونی سامانه، یا معادله‌های هامیلتون، مسیر ذره را در فضای فاز به طور یگانه تعیین می‌کنند.

مثال۳: فرض کنید ذره‌ای با سرعت ثابت در یک بعد حرکت می‌کند. نمودار فاز آن را تعیین کنید.



حل: ذره با سرعت ثابت حرکت می‌کند. به آن نیرو وارد نمی‌شود و انرژی پتانسیل آن مقدار ثابتی است (آن را صفر فرض کنید.) همیلتونی ذره $H=p^{۲}/۲m$ است. معادله‌های همیلتون $\dot{q}=\partial H/\partial p=p/m$ و $\dot{p}=-\partial H/\partial q=\circ$ اند. پس، می‌بینیم که تکانه مقدار ثابتی است و با زمان تغییر نمی‌کند.

© Firooz Arash 2020

بنابراین، خم‌های ممکن در فضای فاز، خط‌های افقی اند. نمودار فضای فاز در شکل بالا دیده می‌شود. کدام یک از این مسیرها را ذره می‌پیماید، بستگی به شرایط اولیه دارد و با مختصات اولیه‌ی $(q_\circ, p_\circ)$ تعیین می‌شود. خط‌های مربوط به p منفی به سوی چپ و در راستای کاهش p اند. اگرچه همه‌ی این خط‌ها شبیه یکدیگرند، ذره خطی را که $|p|$ آن بزرگ‌تر است سریع‌تر می‌پیماید؛ چون $\dot{q} = p/m$ است.

مثال ٤: همیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده را بنویسید و مسیرهای ممکن آن را در فضای فاز (x, p) توصیف کنید.

حل: انرژی جنبشی: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ و انرژی پتانسیل: $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ ($\omega = \sqrt{k/m}$). لاگرانژی عبارت است از

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m} \tag{۱۹}$$

پس: همیلتونی

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{۲۰}$$

از معادله‌های همیلتون داریم:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x \tag{۲۱}$$

حل این معادله‌ها آسان است: p را بین آنها حذف کنید:

$$p = m\dot{x} \Rightarrow \dot{p} = m\ddot{x} \tag{۲۲}$$

$$\dot{p} = -m\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \tag{۲۳}$$

$$\Rightarrow x = A\cos(\omega t - \delta) \quad , \tag{۲۴}$$

$$p = m\dot{x} = -m\omega A\sin(\omega t - \delta)$$

که شکل پارامتری معادله‌ی بیضی اند. چرا بیضی؟

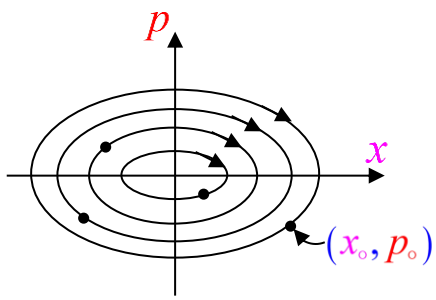
بیضی بودن این مسیرها در فضای فاز از پایستگی انرژی نتیجه می‌شود. چون لاگرانژی به طور روشن به زمان t بستگی ندارد، انرژی کل سامانه همان همیلتونی است که مقدار ثابتی است. اندازه‌ی انرژی در هر لحظه با مقدار اولیه‌اش برابر است. پس می‌توان نوشت

© Firooz Arash 2020

$$\frac{p^{۲}}{۲m}+\frac{۱}{۲}\omega^{۲}mx^{۲}=\frac{p_{\circ}^{۲}}{۲m}+\frac{۱}{۲}\omega^{۲}mx_{\circ}^{۲}=\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}A^{۲}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^{۲}}{A^{۲}}+\frac{p^{۲}}{\left(m\omega A\right)^{۲}}=۱=\frac{x_{\circ}^{۲}}{A^{۲}}+\frac{p_{\circ}^{۲}}{\left(m\omega A\right)^{۲}} \qquad (۲۵)$$

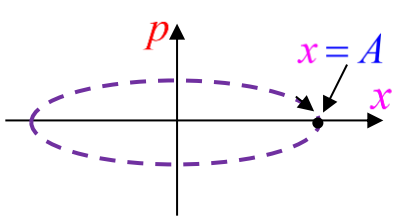
روشن است که این معادله‌ی یک بیضی در فضای $x-p$ است؛ نیم‌محور بزرگ آن A و نیم-محور کوچکش $m\omega A$ اند.



با گذشت زمان، مختصات (x,p) نوسانگر روی بیضی می‌چرخد که در شکل نشان داده شده‌اند. از رابطه‌ی (۲۵) پیداست که هر یک از این بیضی ها محور p (یعنی وقتی که $x=\circ$ است) را در $p^{۲}=p_{\circ}^{۲}+m^{۲}\omega^{۲}x_{\circ}^{۲}$ و محور x را (یعنی به ازای $p=\circ$) در $x^{۲}=x_{\circ}^{۲}+p_{\circ}^{۲}/\left(m\omega\right)^{۲}$ قطع می‌کنند. در زیر محور x، بیضی‌ها چپ‌گرد و در بالای این محور راست‌گرد اند. از معادله های همیلتون دیده می‌شود که در یک نقطه‌ی معین شیب هر بیضی $dp/dx=\dot{p}/\dot{x}=-m^{۲}\omega^{۲}x/p$ است. است. این مقدار به ازای $p=\circ$ بینهایت و به ازای $x=\circ$ صفر است و با شکل سازگار است.

بگذارید یکی از مدارها را در نظر بگیریم و آن را با جزییات بیشتر بررسی کنیم.

فرض کنید نوسانگر از $x=A$ شروع به حرکت می‌کند؛ یعنی $\left(x_{\circ},p_{\circ}\right)=\left(A,\circ\right)$ است. در شکل زیر این مسیر فاز نشان داده شده است. نیروی بازگرداننده سبب می‌شود که نوسانگر به سوی $x=\circ$ شتابیده شود. بنابراین، x کوچک می‌شود و p در جهت منفی افزایش پیدا می‌کند. هنگامی که x به صفر می‌رسد، p بیشترین مقدار منفی خود را به‌دست می‌آورد: $p=-m\omega A$. از این‌جا به بعد، نوسانگر از حالت ترازمندی به سوی x منفی حرکت می‌کند. در حالی که p هنوز منفی است، از مقدارش کاسته می‌شود تا در $x=-A$ به $p=\circ$ می‌رسد. از اینجا به بعد، p دوباره در جهت مثبت شروع به افزایش می‌کند، اما x به سوی صفر می‌رود تا این که سرانجام به نقطه‌ی آغاز برسد. توجه کنید که اگرچه در شکل اول



دیده نمی‌شود، با این حال، مدت زمان لازم برای پیمایش هر یک از بیضی‌ها یکی است. این واقعیت پذیرفتنی است؛ چون بیضی‌های بزرگ، نقاطی با $|p|$ بزرگ‌ترند، بنابراین، خم‌ها تندتر پیموده می‌شوند و مسافت کل بزرگ‌تری در همان زمان پیموده می‌شود.

مثال ۵: از فرمول‌بندی هامیلتونی استفاده کنید و مسیرهای فاز جسمی به جرم m را توصیف کنید که در میدان گرانش زمین سقوط می‌کند. جهت مثبت مختصات $q=x$ را رو به پایین برگزینید. برای شرایط اولیه‌ی زیر بین زمان $t=0$ و t مسیرها را نشان دهید.

(الف): $q_0=p_0=0$ (یعنی جرم m از $q=0$ رها می‌شود).

(ب): $q_0=Q$ ، اما $p_0=0$ (جرم m در $q=Q$ از حالت سکون رها می‌شود).

(پ): $q_0=Q$ و $p_0=P$ (جرم m از نقطه‌ی $q=Q$ با تکانه‌ی اولیه‌ی $p=P$ رها شده است).

(ت): $q_0=0$ و $p_0=P$ (جرم m از $q_0=0$ با تکانه‌ی اولیه‌ی $p=P$ رها شده است).

حل: مسئله را برای یک حالت عمومی حل خواهم کرد. شرایط اولیه‌های گوناگون را می‌توانید جایگزین کنید

$$T=\frac{p^2}{2m}\ ,\ V=-mgq \quad\Rightarrow\quad H=T+V=\frac{p^2}{2m}-mgq \tag{۲۶}$$

معادله‌های همیلتون به‌دست می‌دهند:

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}\quad,\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=mg \tag{۲۷}$$

p را بین آنها حذف کنید: از معادله‌ی سمت چپ داریم $p=m\dot{q}\ \Rightarrow\ \dot{p}=m\ddot{q}$. آن را در معادله‌ی سمت راست جایگزین کنید. به‌دست می‌آید $m\ddot{q}=mg\rightarrow\ddot{q}=g$ (روشن است که اگر از این معادله دوبار نسبت به زمان انتگرال بگیریم، معادله آشنای $q(t)=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+q_0$ به دست می‌آید). ما البته این را نمی‌خواهیم بلکه شکل مسیر را (به ازای هر شرط اولیه) در فضای فاز لازم داریم. برای این کار، q را برحسب p (یا p را برحسب q) به‌دست آورید. چون $\dot{p}=mg$ است پس، $p-p_0=mgt$ و در نتیجه $t=(p-p_0)/mg$ است. حال می‌توان t را از معادله‌ی بالا حذف کرد. خواهیم داشت

© Firooz Arash 2020

$$q(p)=q_\circ+\left(\frac{p_\circ}{m}\right)\left(\frac{p-p_\circ}{mg}\right)+\frac{g}{۲}\left(\frac{p-p_\circ}{mg}\right)^{۲}=q_\circ+\frac{p^{۲}-p_\circ^{۲}}{۲m^{۲}g} \qquad (۲۸)$$

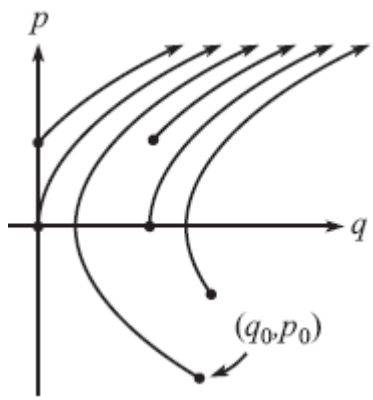
می‌بینیم که q تابعی از مربع p است. این بدان معنی است که خم‌ها سهمی‌هایی اند که همانند

شکل روبه‌رو به سوی راست گشوده شده‌اند. توجه کنید که خم‌ها در زیر محور q (جایی که p منفی است) به سوی چپ و در بالای محور q (جایی که p مثبت است) به سوی راست اند.

رابطه‌ی (۲۸) را می‌توان به صورت عمومی‌تر زیر نوشت

$$q(p)=Ap^{۲}+B \qquad (۲۹)$$

با $B\equiv q_\circ-p_\circ^{۲}/۲m^{۲}g$ و $A\equiv ۱/۲m^{۲}g$.

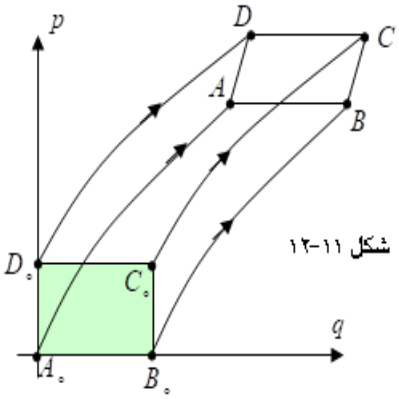


B به شرایط اولیه‌ی $p_\circ$ و $q_\circ$ بستگی دارد؛ اما A مستقل از شرایط اولیه است و برای همه‌ی خم ها یکسان است. خب! A به خمش بستگی دارد. بنابراین، خم‌های شکل بالا بخش‌هایی از سهمی های با خمش یکسان اند. یعنی آنها هرگز یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند. تنها تفاوت این خم‌ها در محل تقاطع‌شان با محور q (یعنی در B) است

شیب این خم‌ها را می‌توان در هر نقطه‌ی دلخواه (q,p) حساب کرد: از رابطه‌ی (۲۹) داریم

$$\frac{dq}{dp}=\frac{p}{m^{۲}g} \quad\Rightarrow\quad \frac{dp}{dq}=\frac{m^{۲}g}{p} \qquad (۳۰)$$

(ب)، (پ)، (ت): اگر شرایط اولیه‌های متفاوت را در رابطه‌ی (۲۸) قرار دهیم، چهار خم شکل زیر را خواهیم داشت: چهار مسیر $A_\circ A$، $B_\circ B$، $C_\circ C$ و $D_\circ D$ هر یک بخشی از یک سهمی است و هیچ یک دیگری را قطع نمی-کند. می‌بینید که مستطیل اولیه $A_\circ B_\circ C_\circ D_\circ$ به متوازی‌الضلاع $ABCD$ تحول می‌یابد. با این وجود، مساحت مستطیل و و مساخت متوازی‌الضلاع باهم برابرند($A_\circ B_\circ=AB$ و ارتفاع‌ها هم یکی است.) در بخش آینده خواهیم دید که این دو ویژگی (یعنی تغییر شکل، اما ثابت ماندن مساحت) از



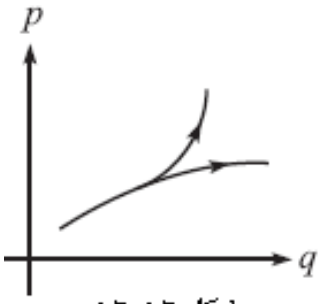
شکل ۱۱-۱۲

ویژگی‌های عمومی مسیرهای فاز اند. به ویژه، ثابت ماندن مساحت نمونه‌ای از کاربرد قضیه‌ی لیوویل است.

نکاتی درباره‌ی این مثال:

۱. در مثال‌های بالا دیدیم که مسیرهای فاز یکدیگر را قطع نمی‌کنند. اثبات این واقعیت ساده است. اگر دو مسیر فاز یکدیگر را در نقطه‌ای قطع کنند، در آن نقطه دو بردار سرعت $\left(\dot{q},\dot{p}\right)=\left(\frac{\partial H}{\partial p},-\frac{\partial H}{\partial q}\right)$ وجود خواهد و این نشدنی است. بنابراین، از هر نقطه‌ی فضای فاز باید یک مسیر فاز بگذرد.

۲. هیچ مسیری در فضای فاز نمی‌تواند همانند شکل زیر دو شاخه شود، حتی اگر در نقطه‌ی شاخگی سرعت در هر دو شاخه یکی باشد.



شکل ۱۲-۱۲

اثبات: معادله‌های همیلتون بردار سرعت $\left(\dot{q},\dot{p}\right)=\left(\frac{\partial H}{\partial p},-\frac{\partial H}{\partial q}\right)$ را در هر نقطه به طور یگانه تعیین می‌کند. بنابراین، امکان دوشاخگی وجود ندارد: در نقطه‌ی شاخگی بید سرعت هر دو خک یکسان باشد.