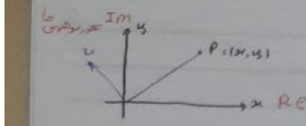
دکتر آیلیان

Subject ۹۸.۲.۲ توابع مختلط

Date

متغیرهای مختلط و کاربردهای آن در حل ترم مسوی



مقدمه اعداد مختلط

« Complex Numbers »

نمادین ← $(x, y) = x + iy$

$i^2 = -1 \Leftarrow \boxed{i = \sqrt{-1}}$

اعداد مختلط ← برداری در R^2 ← متناظر با R^2

هر عدد مختلط z به فرم $z = x+iy$ نمایش داده می‌شود که در آن x بخش حقیقی $Re(z)$، y را بخش موهومی عدد z، $Im(z)$ نمایش می‌دهیم

$z = x + iy = Re(z) + iIm(z)$

اگر $Im(z)$ مساوی صفر باشد $Re(z)$ را عدد حقیقی محض می‌نامیم اگر $Re(z) = 0$، $iIm\,z$ را موهومی محض می‌نامیم

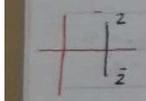
عدد مختلط 0 مساوی است $0 + 0i$

$R^2 = R+iR \subset R\times R$

$C = [z = x+iy \mid x, y \in R]$ $\quad C \simeq R^2$ ← میدان ترتیب ناپذیر

مزدوج یک عدد مختلط: هرگاه $z = x+iy$ مختلط باشد مزدوج آن را با $\bar{z} = x - iy$ تعبیر می‌شود

« Conjugate »



تعبیر ->

نرم عدد مختلط معلوم در دارم: هرگاه z یک عدد مختلط باشد نرم z که با نماد $\|z\|$ یا $|z|$ به صورت $\|z\| = \sqrt{x^2+y^2}$

اعمال جبری اعداد مختلط

① جمع و تفریق اعداد مختلط،

$z_1 = x_1 + iy_1$
$z_2 = x_2 + iy_2$ $\in C$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) \underset{-}{+} i(y_1 \pm y_2)$$

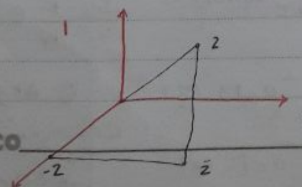
ذات عملیات و تغییر ناپذیر

$Re(z_1 \pm z_2) = Re(z_1) \pm Re(z_2)$, $Im(z_1 \pm z_2) = Im(z_1) \pm Im(z_2)$

② قرینه عدد مختلط. $z = x+iy \quad -z = -x - iy$

انعکاس نسبت به مبدا مختصات

$\|z\| = \|-z\| = \|\bar{z}\|$



② ضرب اعداد مختلط:

$z_۱ = x_۱ + iy_۱$

$z_۲ = x_۲ + iy_۲ \rightarrow z_۱ z_۲ = \underbrace{(x_۱x_۲ - y_۱y_۲)}_{Re(z_۱z_۲)} + i\underbrace{(x_۱y_۲ + x_۲y_۱)}_{Im(z_۱z_۲)}$

$Re(z_۱z_۲) = Re(z_۱)Re(z_۲) - Im(z_۱)Im(z_۲)$, $Im(z_۱z_۲) = Re(z_۱)Im(z_۲) + Re(z_۲)Im(z_۱)$

③ تقسیم اعداد مختلط:

$\frac{z_۱}{۰ \neq z_۲} = z_۱ \frac{1}{z_۲}$) وارون ضربی

وارون ضربی اعداد مختلط:

$z \neq ۰$

$\bar{z} \neq ۰ \qquad \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^۲} = \boxed{\frac{x}{x^۲+y^۲} + i\frac{-y}{x^۲+y^۲}}$ ★★

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy \rightarrow \boxed{z\bar{z} = x^۲ + y^۲ = \|z\|^۲}$ ★

$Re(1/z) = \frac{Re(z)}{\|z\|^۲}$

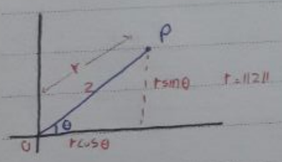
$Im(1/z) = \frac{-Im(z)}{\|z\|^۲}$

$\frac{z_۱}{z_۲} = z_۱ \frac{1}{z_۲} \xrightarrow{★★} (x_۱ + iy_۱)\left(\frac{x_۲}{x_۲^۲+y_۲^۲} + i\frac{-y_۲}{x_۲^۲+y_۲^۲}\right) = \frac{x_۱x_۲ + y_۱y_۲}{x_۲^۲+y_۲^۲} + i\frac{(y_۱x_۲ - x_۱y_۲)}{x_۲^۲+y_۲^۲}$

$Re\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right) = \frac{Re(z_۱)Re(z_۲) + Im(z_۱)Im(z_۲)}{\|z_۲\|^۲}$ $\qquad Im\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right) = \frac{Im(z_۱)Re(z_۲) - Re(z_۱)Im(z_۲)}{\|z_۲\|^۲}$

نمایش قطبی، اویلری، هندسی عدد مختلط:

$re^{i\theta}$



$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = re^{i\theta}$

$r = \|z\| \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$z_۱ = r_۱e^{i\theta_۱}$

$z_۲ = r_۲e^{i\theta_۲} \rightarrow z_۱z_۲ = r_۱r_۲e^{i\theta_۱ + i\theta_۲} \rightarrow r_۱r_۲e^{i(\theta_۱+\theta_۲)}$ $\qquad \frac{z_۱}{z_۲} = \frac{r_۱}{r_۲}e^{i(\theta_۱ - \theta_۲)}$

$x + iy = \underset{\downarrow}{re^{i\theta}} \rightarrow \overset{\text{شعاع قطبی}}{r = \sqrt{x^۲+y^۲}} \qquad \overset{\text{زاویه قطبی}}{\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)}$ $\qquad \theta = Arg(z)$

(r،θ) $\leftarrow x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$\theta \in [۰, ۲\pi]$

آرگومان اصلی عدد مختلط

$-\pi < \theta \leq \pi$

تکرار..

Subject :
Date

آرگومان اصلی $\theta = arg(z)$ θ بین بازه $(-\pi,\pi]$ [illegible]

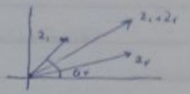
$z = z_۱ z_۲ = \rho e^{i\phi}$ $\rho = r_۱ r_۲$ $\phi = Arg(z_۱) + Arg(z_۲)$

تقسیم $w = \frac{z_۱}{z_۲} = \gamma e^{i\tau}$ $\gamma = \frac{r_۱}{r_۲}$ $\tau = arg(z_۱) - arg(z_۲)$

$z_۱ + z_۲ = \rho e^{i\phi}$ $\rho = \|z_۱ + z_۲\| \neq \|z_۱\| + \|z_۲\|$ $\phi = Arg(z_۱ + z_۲)$

$z_۱ - z_۲ = re^{i\theta}$ - $r = \|z_۱ - z_۲\| \neq \|z_۱\| - \|z_۲\|$

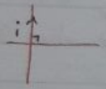
مثال:



$Arg(z_۱) + Arg(z_۲)$

$\theta_۲ \leq Arg(z_۱ + z_۲) \leq \theta_۱$

مثال: $z = i$



$x + iy = z = i = re^{i\theta}$

$x = ۱ , y = ۰$ $r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = ۱$ $\theta = tan^{-۱}(\frac{y}{x}) = tan^{-۱}(\frac{۱}{۰}) = \frac{\pi}{۲}$

$\theta = Arg(i) = \frac{\pi}{۲}$ $i = e^{i\frac{\pi}{۲}}$

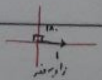
مثال: $z = ۱ + i$

$x = ۱ , y = ۱$ $r = \sqrt{۱^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۲}$

$\theta = tan^{-۱}(\frac{y}{x} = \frac{۱}{۱}) = \frac{\pi}{۴}$ $\theta = Arg(۱+i) = \frac{\pi}{۴}$ $۱ + i = \sqrt{۲} e^{i\frac{\pi}{۴}}$

$z = re^{i\theta}$ $\rightarrow z^{-۱} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$ $1 = 1e^{i۰}$ $\rightarrow \theta = Arg(z)$

$\rightarrow Arg(\frac{1}{z}) = -\theta$

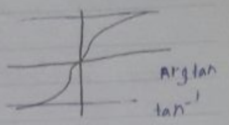


Subject:
Date

مثال $z = x + iy$ $\bar{z} = x - iy$

$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ $\varphi = \tan^{-1}(-\frac{y}{x}) = -\tan^{-1}(\frac{y}{x})$

[illegible]



$x + iy = re^{i\theta}$ $x - iy = re^{i\varphi}$

خواص اعمال جبری اعداد مختلط

① خاصیت جابجایی پذیری مختلط، $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

② خاصیت شرکت پذیری جمع: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

③ عدم خاصیت جابجایی تفاضل $z_2 - z_1 = -(z_1 - z_2)$ قرینه

④ عدم خاصیت شرکت پذیری تفاضل $z_1 - (z_2 - z_3) \neq (z_1 - z_2) - z_3$

⑤ خاصیت جابجایی ضرب مختلط، $z_1 z_2 = z_2 z_1$

⑥ خاصیت شرکت پذیری ضرب مختلط، $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

⑦ خاصیت نامساوی مثلثی $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$

⑧ $|\|z_1\| - \|z_2\|| \leq \|z_1 - z_2\|$

⑨ $\|z_1 z_2\| = \|z_1\|\|z_2\|$

⑩ $\|\frac{z_1}{z_2}\| = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$ $z_2 \neq 0$

⑪ $\bar{\bar{z}} = z$ $\|\bar{z}\| = \|z\|$

PAPCO

⑫ $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ هم برقرار   ⑬ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ هم برقرار

⑭ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $z_2 \neq 0$ $\bar{z}_2 \neq 0$

توان و ریشه های عدد مختلط: «از مدل قطبی استفاده با اثبات باید داده شد»

$z \neq 0 \to z^n = s$ توان nام عدد z

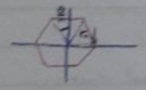
$z^n = \rho e^{i\varphi}$ $z = re^{i\theta} \to z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

$\varphi = Arg(z^n) = n\,Arg(z)$ «اعداد مختلط ترتیب نمی‌پذیرند» «مثبت و منفی ندارند»

ریشه های nام عدد مختلط: $z \neq 0$ $z = re^{i\theta}$ $w =$

$w_k = z^{\frac{1}{n}} = (re^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)}$ $k = 0, 1, \dots, n-1$

« ریشه های nام w_k رئوس یک n ضلعی منتظم به مرکز مبدا مختصات $0 \le k \le n-1$ و شعاع منتظم $r^{\frac{1}{n}}$ » و زاویه بین هر دو راس n ضلعی منتظم برابر $\frac{2\pi}{n}$ است.



مثال: $w = (1-i)^{\frac{1}{3}}$ «۳ تا ریشه»

$z = 1-i = re^{i\theta}$ $r = \sqrt{2}$ $\theta = \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$ $\theta = Arg(1-i) = \frac{3\pi}{4}$

$w_k = r^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{3}\right)}$ $k = 0, 1, 2$ $\to \begin{cases} \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} & k=0 \\ \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}} & k=1 \\ \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{19\pi}{12}} & k=2 \end{cases}$ رئوس مثلث متساوی الاضلاع

مثال: $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{1}{۴}}$

$1-i = \sqrt{۲}\, e^{i\frac{۳\pi}{۴}}$ $\qquad \frac{1-i}{1+i} = e^{i\frac{\pi}{۲}} = i$

$1+i = \sqrt{۲}\, e^{i\frac{\pi}{۴}}$

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{1}{۴}} = i^{\frac{1}{۴}} = e^{i\left(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۲}}{۴}\right)} \to \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{۸}} & k=۰ \\ e^{i\frac{۵\pi}{۸}} & k=۱ \\ e^{i\frac{۹\pi}{۸}} & k=۲ \\ e^{i\frac{۱۳\pi}{۸}} & k=۳ \end{cases}$

$k=۰,۱,۲,۳$

رئوس یک مربع

مثال: فرض کنید z_1, z_2, z_3 سه عدد مختلط با نرم واحد باشند به طوری که $z_1+z_2+z_3=0$ مقادیر $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}$

(روی دایره‌ی واحد هستند)

و $z_1^۲, z_2^۲, z_3^۲$ را بیابید

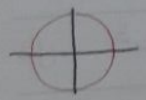
$r = \|z_i\| = 1$, $i=۱,۲,۳$ $\Big\} \to \|z_i\|^۲ = z_i\bar{z}_i \to \boxed{\bar{z}_i = \frac{1}{z_i}}$ ✱

$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3} \overset{*}{=} \bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3 = \overline{z_1+z_2+z_3} = \bar{0} = 0$

$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3} = \frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3} = 0 \to z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2 = 0$

$(z_1+z_2+z_3)^۲ = z_1^۲+z_2^۲+z_3^۲+۲(z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3)$

مکان هندسی اعداد مختلط با نرم یک دایره واحد است معادلات



$\|z\|=1 \to x^۲+y^۲=1$

مثال: معادله $1+z+z^۲+z^۳+z^۴=0$ را حل کنید

$1+z+z^۲+\dots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ ✱ $\qquad (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1}) = a^n-b^n$

$z\neq1$

$1+2+2^{۲}+2^{۳}+2^{۴} \overset{?}{=} \frac{1-2^{۵}}{1-2} \rightarrow 1+2+2^{۲}+2^{۳}+2^{۴} = \dots 1-2^{۵}=0 \quad 2\neq 1$

$2^{۵}=1 \rightarrow 2=1^{\frac{1}{۵}} \quad 1=e^{i0} \quad \theta=0$

$w_k = 1^{\frac{1}{۵}} = e^{i\left(\frac{۲k\pi+0}{۵}\right)}$,

$e^{i0}=1$ ریشه $k=0$

$e^{i\frac{۲\pi}{۵}}$ $k=1$

$e^{i\frac{۴\pi}{۵}}$ $k=۲$

$e^{i\frac{۶\pi}{۵}}$ $k=۳$ $1=e^{i0}$ $\theta=0$

$e^{i\frac{۸\pi}{۵}}$ $k=۴$

تمرین [illegible]: اتحادها را $1+2+\dots+2^{n}=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$ اثبات کنید

اتحاد مثلثاتی را

$1+\cos\theta+\cos۲\theta+\dots+\cos n\theta=\frac{1}{۲}+\frac{\sin(n+\frac{1}{۲})\theta}{۲\sin\frac{\theta}{۲}}$

$\sin\theta+\sin۲\theta+\dots+\sin n\theta=\frac{\sin(\frac{n+1}{۲})\theta\,\sin\frac{n\theta}{۲}}{\sin\frac{\theta}{۲}}$

اثبات الف: $S=1+2+\dots+2^{n} \rightarrow S-2S=(1+2+\dots+2^{n})-(2+2^{۲}+\dots+2^{n+1})=1-2^{n+1}$

$S=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

ب: به کمک الف، با در نظر گرفتن $z=re^{i\theta}=r\cos\theta+ir\sin\theta$ با جایگذاری توان z در الف، ب را نتیجه بگیرید [illegible]

$1+z+\dots+z^{n}=1+re^{i\theta}+r^{۲}e^{i۲\theta}+\dots+r^{n}e^{in\theta} \quad \dots \quad e^{in\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{n}$

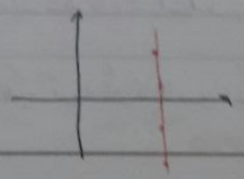
مثال: مجموعه نقاط با ضابطه داده شده را نمایش هندسی کنید

الف) $Re(\bar{z}-i)=۲$

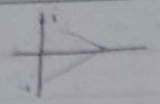
$z=x+iy \rightarrow \bar{z}=x-iy$

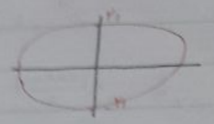
$\bar{z}-i=x+i(-y-1)$

$Re(\bar{z}-i)=۲ \longrightarrow x=۲$



مزدوج [illegible]

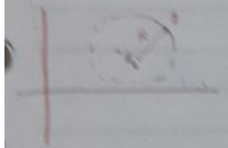
ب.  مکان هندسی عدد مختلط ها $|z-۲i| = |z+۲i|$

ج.  مکان هندسی یک بیضی است $|z-۲i| + |z+۲i| = ۵$

بیضی به کانون های ۲i , -۲i

مثال: معادله دایره در صفحه مختلط به مرکز نقطه $z_۰$ و شعاع R در صفحه مختلط

$z_۰ = x_۰ + iy_۰$



$|z - z_۰| = R$ $\quad |z - z_۰| = \sqrt{(x-x_۰)^۲ + (y-y_۰)^۲}$

معادله کارتزی دایره به مرکز $(x_۰, y_۰)$ به شعاع R $\quad (x-x_۰)^۲ + (y-y_۰)^۲ = R^۲ \Leftarrow |z-z_۰|^۲ = R^۲ , |z-z_۰| = R$

معادله دایره به مرکز $z_۰$ و شعاع R: $|z - z_۰| = R$ در صفحه مختلط

$z = e^{i\theta} \Leftarrow |z| = ۱$ دایره واحد به مرکز مبدا و شعاع یک

$|z| = ۱$ یعنی $z = e^{i\theta} \quad \theta \in [۰, ۲\pi]$

نواحی در صفحه مختلط:

همسایگی در صفحه مختلط C: فرض کنید $z_۰$ نقطه ثابت از صفحه مختلط C، R عدد مثبت باشد همسایگی حول نقطه $z_۰$ به شعاع R به صورت زیر تعریف می شود.

$N_R(z_۰) = \{z \mid |z - z_۰| < R\}$

نقطه درونی یک مجموعه در صفحه مختلط: فرض $S \subseteq C$ [illegible] از صفحه C باشد نقطه $z_۰ \in S$ را نقطه درونی S گوییم هرگاه یک همسایگی حول نقطه $z_۰$ به مرکز $z_۰$ به شعاع مناسب موجود باشد که تمامی آن همسایگی کاملا درون S قرار گیرد

نقاط $S^۰$

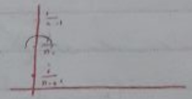
نقطه بیرونی: هرگاه $S\subset C$ ناحیه‌ای در C باشد نقطه $z\in C$ را نقطه بیرونی S گوئیم هرگاه یک همسایگی به شعاع مثبت حول z موجود باشد به طوریکه کاملاً این همسایگی بیرون S قرار گیرد.

نقطه مرزی یک ناحیه: نقطه z از صفحه C برای ناحیه $S\subset C$ را نقطه مرزی گوییم هرگاه هر همسایگی حول z در نظر بگیریم هم با درون S، هم با بیرون S اشتراک ناتهی داشته باشد. مجموعه نقاط مرزی ناحیه S را با نماد ∂S یا $bd(S)$ نمایش می‌دهند.

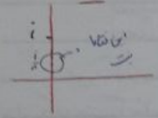
نقطه حدی (انباشتگی): فرض کنید $S\subset C$ یک ناحیه در صفحه مختلط C باشد. نقطه $z\in C$ را نقطه حدی مجموعه S گوییم هرگاه هر همسایگی حول z در نظر بگیریم مجموعه S را در نقاطی غیر z قطع کند $N(z)\cap(S-\{z\})\neq 0$

نکته: هر نقطه حدی یک مجموعه یا نقطه درونی و یا نقطه مرزی آن مجموعه است.

مثال: $S=[z=\frac{i}{n}\ |n\in IN]$



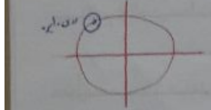
هیچ نقطه $\frac{i}{n}$ ، $n\geq 1$ درونی S نیست. و نیز بیرونی هم نیست. مرزی هم هستند.



$Z_0=0$ نقطه حدی مجموعه S است.

مثال: دایره واحد $S=\|z\|=1$

هر نقطه از دایره درونی نیست.
بیرونی هم نیست. هر نقطه مرزی است
و هر نقطه از دایره واحد حدی است

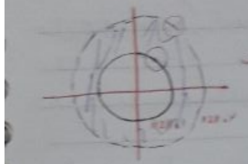


مجموعه باز در صفحه مختلط: مجموعه $S\subset C$ را یک مجموعه باز گوییم هرگاه هر نقطه‌ی یک نقطه درونی S باشد

مجموعه‌ها باز نیستند. $S:\|z\|=1$ $S=[\frac{i}{n}]$

مجموعه بسته: مجموعه D را بسته گوییم هرگاه هر نقطه حدی D متعلق به D باشد. D=[z| |z|≤1] بسته است. D=[1/n] بسته نیست.

مثال: D=[z| 1≤|z|<2]



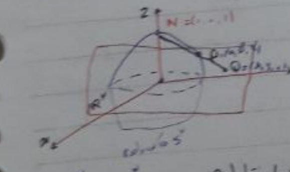
هر نقطه D نقطه درونی نیست
هر نقطه‌ای بر دایره |z|=1 ، |z|=2 مرزی است
، هر نقطه z که 1<|z|<2 درونی است
هر نقطه‌ای z که |z|=1 ، |z|=2 مرزی هستند.
هر نقطه‌ای که 1≤|z|≤2 حدی هستند

مجموعه کراندار: مجموعه S را کراندار گوییم هرگاه S کاملا درون یک دیسک به شعاع به اندازه کافی بزرگ R قرار گیرد. در غیر این صورت بی‌کران است
مانند [z| 1≤|z|≤2] = S کراندار، کراندار [z| Re z>0] = S ، S = [1/n] کراندار است.

محور حقیقی‌ها، موهومی‌ها، بی‌کران هستند.

$\hat{C} = \overset{\text{صفحه}}{C} \cup \overset{\text{نقطه بی‌نهایت}}{[\infty]}$ صفحه توسعه یافته مختلط

برای درک بهتر و آشنایی با مفهوم نقطه در بی‌نهایت می‌توان از روش تصویر گنج‌نگاری به صورت زیر استفاده کرد.



هرگاه کره یا سپهر S^2 را از صفحه کارتزین R^2 مماس بر آن
قرار دهیم به طوری که دایره عظیمه آن روی صفحه R^2 قرار گیرد (صفحه استوا) مثل
شمال کره S^2 را در نظر بگیریم، حال تمام خط‌های گذرنده از N به طوری که S^2 را در نقطه P
و صفحه R^2 در صفحه توسعه یافته C^* را در نقطه Q قطع کند در این صورت به هر نقطه از کره یک نقطه
از صفحه توسعه یافته و قطب شمال نقطه متناظر به نقطه بی‌نهایت است.

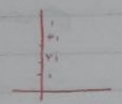
نگاشت $T: S^2 \to R^2$
$P \to Q$
$(x,y,z) \to (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0)$

$T(N) = \infty$

نگاشت $T^{-1}: R^2 \to S^2$
$(x,y,0) = (\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1})$
$T^{-1}(\infty) = N$

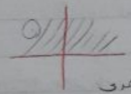
همسایگی نقطه در ∞: برای هر عدد $\varepsilon>0$ ، همسایگی به شعاع ε نقطه ∞ به فرم $N_\varepsilon=[z\in\mathbb{C} \mid \|z\|>\frac{1}{\varepsilon}]$ تعریف می‌شود

مثال: $S=[z_n=ni \mid n\in\mathbb{N}]$



نقطه‌ی بی‌نهایت نقطه‌ی حدی مجموعه‌ی S است

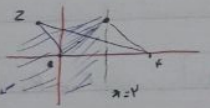
مثال: $S=[z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z\geq 0]$ نیم‌بالایی



بی‌نهایت نقطه‌ی مرزی S، هر نقطه S نیز نقطه حدی

مثال: نوع ناحیه داده شده «باز، بسته، ...» را تعیین کنید

الف: $\|z-4\|\geq\|z\|$



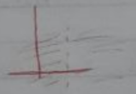
$S=[z \mid Re(z)\leq 2]$

S بی‌کران است.

S باز نیست زیرا نقاط روی خط $x=2$ درونی S نیستند. S بسته است زیرا هر نقطه آن حدی است.

مجموعه همبند در $\mathbb{C}$: زیرمجموعه $S\subseteq\mathbb{C}$ را همبند گوییم هرگاه هر دو نقطه از S را بتوان با یک مسیر پیوسته به هم وصل کرد به گونه‌ای که تمام مسیر درون S قرار گیرد. مجموعه S در مثال قبل همبند است.

$A=[z \mid Re z>2]\cup[z \mid Re z<1]$



تعریف حوزه باز: مجموعه باز همبند را حوزه باز می‌نامیم.

۶'

Subject:
Date:

فصل ۲ :

تابع مختلط: «نگاشت مختلط» نگاشتی است از یک زیر مجموعه در صفحه مختلط به یک زیر مجموعه در صفحه مختلط که

آن را با $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ نمایش می دهیم

$z \to f(z) = w$

مثال: $f(z) = Re(z)$ «همان تابع x» .

$f(z) = iz$ دوران به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی

$z = x+iy \to iz = -y+ix \to (x,y) \to (-y,x)$

$f(z) = z+1$ انتقال به اندازه یک واحد در جهت x .

$x+iy \xrightarrow{f} (x+1)+iy$

نگاشت خطی $g(z) = Az+B$ A,B اعداد مختلط ثابت

ترکیبی از دوران و انتقال

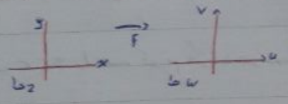
قلمرو و برد نگاشت مختلط:

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

برد F $R_F = [w \in \mathbb{C} \mid \exists z \in D_F : f(z) = w]$

قلمرو F $D_F = [z \in \mathbb{C} \mid w = f(z)]$

$w = u+iv = f(z) = f(x+iy) \to u+iv = f(x+iy)$



مثال: $f(z) = y\int_0^{\infty} e^{-xt}dt + i\sum_{0}^{\infty} y^n$

$D_F = [z = x+iy \mid f(z) = w = u+iv]$ ، $D_F = [z = x+iy \mid x>0 , -1<y<1]$

$\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-xt}dt}_{\text{همگرا}} < +\infty \leftrightarrow x>0$ $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} y^n}_{\text{همگرا}} < +\infty \to |y|<1 \to -1<y<1$

PAPCO

Subject:
Date

مثال: $f(z)=\sqrt{x^2+y^2}-iy=u+iv$ $D_F=\mathbb{C}$, $R_F=?$

$$\begin{cases} u=\sqrt{x^2+y^2}=\|z\| \\ v=-y \end{cases}$$

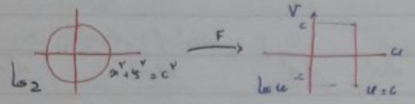
تصاویر دایره به مرکز مبدا و شعاع c ($x^2+y^2=c^2$, $\|z\|=c$) تحت نگاشت f

$-c\le x\le c \to -\sqrt{c^2-x^2}\le y\le\sqrt{c^2-x^2}$

به ناحیه زیر تصویر می شود

$$\begin{cases} u=c & \text{خط قائم در صفحه w} \\ -c\le v=-y\le c \end{cases}$$

c^2 c^2-x^2



حد نگاشت مختلط: فرض کنید تابع مختلط $F(z)=w$ در یک همسایگی محذوف نقطه $z_0=x_0+iy_0$ تعریف شده باشد گوئیم تابع $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ دارای حد مختلط $L=L_1+iL_2$ است هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ (دلخواه) عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که از نامساوی $0<\|z-z_0\|<\delta$ (همسایگی محذوف z_0 به شعاع δ) نتیجه شود $\|F(z)-L\|<\varepsilon$ (همسایگی L به شعاع ε) می نویسیم $\lim_{z\to z_0}F(z)=L$

$\forall\varepsilon\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0;\ 0<\|z-z_0\|<\delta \to \|F(z)-L\|<\varepsilon$

مثال: $F(z)=2x+iy^2$ $\lim_{z\to 2i}F(z)=4i$

$\|i\|=1$ $i=\sqrt{-1}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \ 0<\|z-2i\|<\delta \to \|2x+iy^2-4i\|<\varepsilon$

$\|2x+iy^2-4i\|=\|2x+i(y^2-4)\| \overset{\text{نامساوی مثلث}}{\le} |2x|+|y^2-4| = 2|x|+|y-2||y+2|$

PAPCO

$\boxed{\begin{array}{l} |x| < \sqrt{x^۲+(y-۲)^۲} \\ |y-۲| \end{array}}$ ✱ ۷'

$= ۲|x| + |y^۲ - ۴| = ۲|x| + |y-۲||y+۲| < ۲|x| + ۵|y-۲| \overset{*}{\leq} ۷\sqrt{x^۲+(y-۲)^۲} < ۷\delta_۲ < \varepsilon$

$-۱ < y-۲ < ۱ \rightarrow |y-۲| < \delta_۱ = ۱ ; \boxed{\delta_۱ = ۱}$ $\boxed{\delta_۲ < \frac{\varepsilon}{۷}}$

$\boxed{۳ < |y+۲| < ۵}$ کران

$\delta = \min[\delta_۱ = ۱, \frac{\varepsilon}{۷}]$

تمرین ۶ ص ۳۳: $\lim_{z \to ۰} \frac{\bar{z}^۲}{z} = ۰$

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy \to \bar{z}^۲ = (x-iy)(x-iy) = x^۲ - y^۲ - ۲ixy$

$$\frac{\bar{z}^۲}{z} = \bar{z}^۲ \cdot \frac{\bar{z}}{\|z\|^۲} = (x^۲ - y^۲ + i(-۲xy))\left(\frac{x}{x^۲+y^۲} + i\frac{-y}{x^۲+y^۲}\right) = \frac{x(x^۲-y^۲)+۲xy^۲}{x^۲+y^۲} + i\frac{-۲x^۲y - x^۲y + y^۳}{x^۲+y^۲}$$

$$= \quad x + i\frac{y(y^۲-۳x^۲)}{x^۲+y^۲}$$

$$\lim F(z) = ۰ \leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} x + i\frac{y(y^۲-۳x^۲)}{x^۲+y^۲} = (۰,۰) \leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} x = ۰ , \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{y(y^۲-۳x^۲)}{x^۲+y^۲} = ۰ \quad (II)$$

(II) $\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > ۰ \quad \|\underbrace{(x,y)-(۰,۰)}_{\sqrt{x^۲+y^۲}}\| < \delta \to \left|\frac{y(y^۲-۳x^۲)}{x^۲+y^۲} - ۰\right| < \varepsilon$

$\boxed{|y|, |x| < \sqrt{x^۲+y^۲}}$ ✱

$$= \frac{|y||y^۲-۳x^۲|}{x^۲+y^۲} \leq \frac{|y|}{x^۲+y^۲}(|y|^۲ + ۳|x|^۲) = \frac{|y|^۳+۳|y||x|^۲}{x^۲+y^۲}$$

✱ $\leq \frac{(\sqrt{x^۲+y^۲})^۳ + ۳(\sqrt{x^۲+y^۲})^۳}{x^۲+y^۲} = \frac{۴\sqrt{x^۲+y^۲}\cdot(x^۲+y^۲)}{x^۲+y^۲} = ۴\sqrt{x^۲+y^۲} < ۴\delta < \varepsilon$

$\delta < \frac{\varepsilon}{۴}$

قضایایی برای حد تابع مختلط:

①: تابع مختلط $F(z) = w$ در نقطه $z = z_۰$ دارای حد مختلط $w_۰ = u_۰ + iv_۰$ است اگر و تنها اگر بخش های حقیقی و موهومی

Subject:
Date:

تابع $f(z)$ به عنوان تابع دو متغیره ($u(x,y)$ ، $v(x,y)$) یعنی (u,v) در $z_0=(x_0,y_0)$ دارای حد و به ترتیب w_1 ، w_2 باشد

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)+iv(x,y)=w_1+iw_2 \Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=w_1 , \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=w_2$$

تبصره ②: هرگاه توابع مختلط $f(z)=u_1+iv_1$ ، $g(z)=u_2+iv_2$ دارای حد، به ترتیب مختلط $L_1=a_1+ib_1$ ، $L_2=a_2+ib_2$ باشند

آنگاه توابع مختلط $f(z)+g(z)$ ، $f(z)\cdot g(z)$ ، $\frac{f(z)}{g(z)}$ ، (به شرط اینکه $L_2\neq 0$) در z_0 دارای حد هستند

الف $\lim_{z\to z_0} f(z)\pm g(z)=L_1\pm L_2$ ب $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=L_1L_2$ ج $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}=\frac{L_1}{L_2}$ ✓

نتیجه: هر چند جمله‌ای درجه n ام مختلط $P_n(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$ که در آن a_i ، $i=0,1,\dots,n$ ضرایب مختلط ثابت

چند جمله‌ای $P_n(z)$ هستند. در هر نقطه $z=z_0$ دارای حد است و داریم $\lim_{z\to z_0} P_n(z)=P_n(z_0)$

لم: هرگاه تابع مختلط $f(z)=u+iv$ در $z=z_0$ دارای حد باشد آنگاه تابع حقیقی $\|f(z)\|=\sqrt{u^2+v^2}$ در نقطه z_0 نیز دارای

$u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$ تابع ۲ متغیره $z_0=x_0+iy_0$

حد است و داریم $\lim_{z\to z_0}\|f(z)\|=\|\lim_{z\to z_0} f(z)\|$

تمرین ۱۳: فرض کنید $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=0$ و $\lim_{z\to z_0} f(z)=0$ نشان دهید که عدد $m>0$ وجود دارد به طوری که برای همه z در یک

همسایگی نقطه z_0 داریم، $f(z)=u_1+iv_1$ $g(z)=u_2+iv_2$ g دارای همسایگی کراندار $\forall z\in N_\delta(z_0) : \|g(z)\|<m$

حل: فرض $\varepsilon>0$ داده شده باشد چون $\lim_{z\to z_0} f(z)=0$ پس عدد $\delta_1>0$ وجود دارد که $0<\|z-z_0\|<\delta_1$ داریم: $\|f(z)-0\|<\frac{\varepsilon}{m}$ ①

چون $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z)=0$ پس عدد $\delta_2>0$ موجود است که به ازای $\|z-z_0\|<\delta_2$ داریم ② $\|f(z)g(z)-0\|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\|f(z)\|\|g(z)\|=\|f(z)g(z)\|$

حال قرار دهیم $\delta=\min[\delta_1,\delta_2]$ پس برای هر z در همسایگی به شعاع δ از نقطه z_0 (یا $z\in N_\delta(z_0)$) به کمک ① و ② داریم

۱۲ مثال: $\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2+1}=0$ «تمرین الف ۱۲»

فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده. باید نشان دهیم که عدد $N>0$ موجود است بطوریکه برای هر z که $\|z\|>N$ داشته باشیم

$\left\|\frac{1}{z^2+1}-0\right\|<\varepsilon$

$$\left\|\frac{1}{z^2+1}\right\|=\frac{1}{\|z^2+1\|}\overset{*}{<}\frac{1}{\|z\|^2}\overset{(z)}{<}\frac{1}{N^2}<\varepsilon \quad \text{کافیست} \quad N>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$z^2=x^2-y^2+i(2xy)\to\|z^2+1\|>\|z^2\|=\|z\|^2\to\frac{1}{\|z^2+1\|}<\frac{1}{\|z\|^2} \; *$$

تمرین ب: $\lim_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)^3}=\infty$

فرض کنید $M>0$ داده شده باشد نشان می دهیم عدد $\delta>0$ موجود است بطوریکه از رابطه $\|z-1\|<\delta$ نتیجه شود $\left\|\frac{1}{(z-1)^3}\right\|>M$

$$\left\|\frac{1}{(z-1)^3}\right\|=\frac{1}{\|(z-1)^3\|}=\frac{1}{\|z-1\|^3}>\frac{1}{\delta^3}>M \xrightarrow{\text{کافیست}} \delta<\frac{1}{\sqrt[3]{M}}$$

پیوستگی تابع مختلط: فرض کنید تابع مختلط $f(z)=u+iv$ در یک همسایگی حول نقطه $z=z_0$ تعریف شده باشد گوئیم $f(z)$ در $z=z_0$ پیوسته است هرگاه $\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$. چنانچه تابع مختلط $f(z)$ در هر نقطه ای از حوزه D از صفحه مختلط $\mathbb{C}$ پیوسته باشد گوئیم $f(z)$ بر D پیوسته است. همه قضایای جبری نتایج در خصوص بحث حد تابع مختلط درباره بحث پیوستگی تابع مختلط نیز صادق است.

Subject:
Date

پیوستگی تابع مرکب مختلط: هرگاه تابع مختلط $g(z)$ در نقطه $z=z_0$ پیوسته و تابع مختلط $f(z)$ در $w=g(z_0)$ پیوسته باشد

آنگاه تابع مرکب $f\circ g$ در $z=z_0$ پیوسته است و داریم: $\lim_{z\to z_0}(f\circ g)(z)=f(\lim g(z))=f(g(z_0))=(f\circ g)(z_0)$

پیوستگی و کرانداری توابع مختلط: فرض کنید تابع مختلط $f(z)=u+iv$ بر یک حوزه پیوسته باشد. آنگاه تابع مختلط $\|f(z)\|$ بر

سراسر این حوزه کراندار باشد و تابع حقیقی $\|f(z)\|$ هر مقادیرش را در سراسر نقطه حوزه اختیار کند $\forall z\in D,\ m\leq\|f(z)\|\leq M$

$m=\min\|f(z)\|=\min_D(u^2+v^2)$

$M=\max\|f(z)\|=\max_D(u^2+v^2)$ «مثل خودش با نرم آن کار می‌کنیم»

$D=[z=(x,y)]$ [illegible]

مثال: $f(z)=e^{xy}+i\sin(x^3-2xy^2)$ پیوستگی؟

$u(x,y)=e^{xy}$ در سراسر صفحه پیوسته است

$v(x,y)=\sin(x^3-2xy^2)$ " " " " v → $f(z)$ بر سراسر C پیوسته

$\|f(z)\|=\sqrt{e^{2xy}+\sin^2(x^3-2xy^2)}\leq\sqrt{e^{2xy}+1}$ بر هر حوزه کراندار D درون صفحه C تابع $\|f(z)\|$ کراندار است

و مقادیر min ، max خود را اختیار کند. زیرا تابع نمایی e^{xy} بر مجموعه نقاط (x,y) از یک ناحیه کراندار، تابعی کراندار است.

مشتق تابع مختلط: فرض کنید تابع مختلط $f(z)=u+iv=w$ در یک همسایگی نقطه $z=z_0$ تعریف شده باشد گوئیم تابع

$f(z)$ در $z=z_0$ مشتق پذیر است هرگاه $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ موجود باشد. در این حالت می‌نویسیم: $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)=(D_{f(z)})_{z_0}$

مثال: $f(z)=\|z\|$ مشتق پذیری در $z=0$ بررسی کنید.

مرجع ها

$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to 0}\frac{\|z\|}{z}\xrightarrow{\text{مسیر } C_1:\ z=Re(z)}\lim\frac{\|z\|}{z}=\frac{|x|}{x}\to\begin{cases}+1 & ; x>0\\ -1 & ; x<0\end{cases}$ دو جواب

حد موجود نیست

مسیر $C_2=z=iIm(z)$ تا محور موهومی $\to\lim_{z\to 0}\frac{\|z\|}{z}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|}{iy}\begin{cases}-i & ; y>0\\ +i & ; y<0\end{cases}$

PAPCO

مثال: $f(z)=z^2$ مشتق پذیری در $z=0$ و $z_0\neq0$

$\lim_{z\to0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to0}\frac{z^2}{z}=\lim_{z\to0}z=0 \to f'(0)=0$

$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^2-z_0^2}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)(z+z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}z+z_0=2z_0$ بطورکلی $f'(z_0)=2z_0$

تمرین: $f(z)=\operatorname{Re}z$ در z_0 نقطه مشتق پذیر نیست. و $g(z)=\operatorname{Im}(z)$

مثال: $f(z)=\operatorname{Re}(z)$ بررسی مشتق پذیری

$\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(\Delta z+z_0)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{\operatorname{Re}(\Delta z+z_0)-\operatorname{Re}(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{\operatorname{Re}(\Delta z)}{\Delta z}$

$\Delta z=\Delta x$ $\quad$ $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$

$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\operatorname{Re}(\Delta z)}{\Delta z}=\begin{cases}\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\\ \lim_{\Delta y\to0}\frac{0}{i\Delta y}=0\end{cases}$ $\quad \Delta z=i\Delta y \quad \to$ مشتق در $z=z_0$ موجود نیست

پس $\operatorname{Re}(z)$ در z_0 مشتق پذیر نیست

قضیه جبری مشتق توابع مختلط. فرض کنید توابع مختلط $f(z)$، $g(z)$ در نقطه $z=z_0$ مشتق پذیر باشد آنگاه توابع مختلط $f(z)\pm g(z)$ ، $f(z)g(z)$ ، $\frac{f(z)}{g(z)\neq0}$ در نقطه $z=z_0$ مشتق پذیر خواهد بود، داریم:

[illegible]

$(f\pm g)'(z_0)=f'(z_0)\pm g'(z_0)$

$(fg)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$ $\qquad$ $\left(\frac{f}{g}(z)\right)'=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z)\neq0}$

نتیجه:

$\frac{d}{dz}(f^n(z))\Big|_{z=z_0}=nf'(z_0)f(z)^{n-1}$

شرط لازم و کافی مشتق پذیری توابع مختلط و معادلات کشی-ریمان:

روابط ★ برقرار است هرگاه برای تابع مختلط $f(z)=u+iv$ مشتق پذیر در نقطه (x_0,y_0) ، $z_0=x_0+iy_0$ موجود است آنگاه معادلات زیر برقرار باشند.

$$★★\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\end{cases}$$

روابط ★★ را معادلات کشی ریمان، البته به مشتق پذیری تابع مختلط $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=z_0$ می نامیم.

شرط لازم و کافی برای مشتق پذیری تابع مختلط $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=z_0$ آن است که $f(z)$ در معادلات کشی ریمان ★★ در نقطه $z=z_0$ صدق کند که در آن همه مشتقات جزئی توابع حقیقی u و v در نقطه (x_0,y_0) موجود باشند.

فرض $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=z_0$ مشتق پذیر باشد.

① $f'(z_0)=Re(f'(z_0))+iIm(f'(z_0))$

② $f'(z_0)\xrightarrow{\text{تعریف}}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z+z_0)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}Re\frac{(f(\Delta z+z_0)-f(z_0))}{\Delta z}+i\lim_{\Delta z\to 0}\frac{Im f(\Delta z+z_0)-f(z_0)}{\Delta z}$

$$①,② \to \begin{cases}Re(f'(z_0))=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(\Delta z+z_0)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{Re(f(\Delta z+z_0)-f(z_0))}{\Delta z}=Re(\lim(\quad)) \leftarrow ★\\ Im(f'(z_0))=\lim\frac{Im(f(\Delta z+z_0)-f(z_0))}{\Delta z}=Im(\lim(\quad))\end{cases}$$

مثال: $f(z)=|z|^2$

$$z=x+iy \to |z|^2=z\bar{z}=x^2+y^2 \to \begin{cases}u(x,y)=x^2+y^2\\ v(x,y)=0\end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=2x_0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \Rightarrow x_0=0$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=2y_0$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ $\quad\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Rightarrow y_0=0$

تابع $f(z)$ تنها در $(0,0)$ ، z_0 مشتق پذیر است اگر معادلات کشی ریمان ★★ در این نقطه برقرار باشد.

به عبارت دیگر $f(z)$ تنها در $z_0=0$ مشتق پذیر است.

قضیه شرط کافی مشتق پذیری تابع مختلط: هرگاه توابع دو متغیره $u(x,y)$ ، $v(x,y)$ همینطور در نقطه $(x,y)=(x_0,y_0)$ پیوسته، مشتق پذیر باشند و مشتقات جزئی آنها موجود و پیوسته در این نقطه باشند آنگاه تابع مختلط $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=z_0$ مشتق پذیر است و داریم

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)\overset{\text{معادلات کوشی}}{=}v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$$ ***

قضیه شرط لازم مشتق پذیری تابع مختلط: هرگاه توابع دو متغیره حقیقی $u(x,y)$ ، $v(x,y)$ در نقطه $(x,y)=(x_0,y_0)$ پیوسته و مشتق پذیر با مشتقات جزئی پیوسته در این نقطه باشند آنگاه تابع مختلط $f(z)=u+iv$ در نقطه $z=z_0$ مشتق پذیر است اگر توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در معادلات کوشی - ریمان در نقطه $(x,y)=(x_0,y_0)$ صدق کند

مثال: مشتق پذیری تابع $f(z)=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ را بررسی کنید.

توابع u ، v در همه نقاط پیوسته، مشتق پذیر با مشتقات جزئی پیوسته

$$\begin{cases} u(x,y)=e^x\cos y \\ v(x,y)=e^x\sin y \end{cases}$$

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=e^x\cos y$$

$$\to u_x=v_y$$

$$v_y=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=e^x\cos y$$

چون معادلات کوشی در همه نقاط برای تابع $f(z)$ برقرار است پس $f(z)$ در همه نقاط مشتق پذیر است

$$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-e^x\sin y$$

$$\to u_x=-u_y$$

$$v_x=\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=e^x\sin y$$

بنا به شرط کافی ←

$$f'(z)=u_x+iv_x=e^x\cos y+ie^x\sin y=f(z)$$

صورت قطبی معادلات کشی ریمان: فرض کنید توابع حقیقی u, v در بخش‌های حقیقی و موهومی تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ توابعی پیوسته با مشتقات جزئی پیوسته بر حسب مختصات قطبی (r,θ) باشند ($u=u(r,\theta)$, $v=v(r,\theta)$) معادلات کشی ریمان در فرم دکارتی که به صورت ... ،

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

بیان می‌شود با استفاده از قاعده زنجیری مشتق به صورت زیر بدست می‌آیم

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta$$

$$u_\theta = \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = u_x(-r\sin\theta) + u_y(r\cos\theta)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= u_r\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + u_\theta\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$\to u_x = u_r\cdot\frac{r\cos\theta}{r} + u_\theta\cdot\left(-\frac{r\sin\theta}{r^2}\right)$$

$$\boxed{\to u_x = \cos\theta\, u_r + -\frac{1}{r}\sin\theta\, u_\theta}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = u_r\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + u_\theta\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = u_r\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + u_\theta\frac{x}{x^2+y^2} = u_r(\sin\theta) + u_\theta\left(\frac{1}{r}\cos\theta\right)$$

$$\boxed{\to u_y = \sin\theta\, u_r + \frac{1}{r}\cos\theta\, u_\theta}$$

به طور مشابه میتوان مشتقات جزئی v_x, v_y را برحسب مختصات (r,θ) به کمک قاعده زنجیره بدست آورد.

با جایگذاری مشتقات u_x, u_y, v_x, v_y از روابط فوق در معادلات کشی ریمان دکارتی * به فرم قطبی معادلات کشی ریمان دست می‌یابیم

$$\boxed{\begin{cases} u_r = \frac{1}{r}v_\theta \\ u_\theta = -rv_r \end{cases}} \quad (۵۵)$$

Subject:
Date

دراینصورت شرط کافی مشتق پذیری تابع مختلط در مختصات قطبی آنست که توابع $u(r,\theta)$ ، $v(r,\theta)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته برحسب (r,θ) در همسایگی نقطه داده شده $z_0=x_0+iy_0=r_0e^{i\theta_0}$ باشند داریم

$$f'(z_0)=e^{-i\theta_0}\left(u_r(r_0,\theta_0)+iv_r(r_0,\theta_0)\right)=\frac{1}{r_0}e^{-i\theta_0}\left(v_\theta(r_0,\theta_0)-u_\theta(r_0,\theta_0)\right)$$

مثال: مشتق پذیری تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ ، $z\neq0$ را بررسی کنید.

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=\underbrace{\frac{1}{r}\cos\theta}_{u(r,\theta)}+i\underbrace{\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right)}_{v(r,\theta)}$$

u_θ ، u_r ، v_r ، v_θ همگی پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته بجز در مبدا $z=0$ میباشند.

$$\begin{cases}u_r=-\frac{1}{r^2}\cos\theta\\ v_\theta=-\frac{1}{r}\cos\theta\end{cases}\rightarrow u_r=\frac{1}{r}v_\theta\ ✓\qquad\begin{cases}u_\theta=-\frac{1}{r}\sin\theta\\ v_r=\frac{1}{r^2}\sin\theta\end{cases}\quad u_\theta=-rv_r$$

تابع $f(z)$ در معادلات کوشی ریمان قطبی بجز مبدا صدق می کند بنابه قضیه گفته شده بالای $f(z)$ بجز مبدا در همه جا مشتق پذیر است.

$$f'(z)=e^{-i\theta}(u_r+iv_r)=e^{-i\theta}\left(-\frac{1}{r^2}\cos\theta+i\frac{1}{r^2}\sin\theta\right)$$

$$=-\frac{1}{r^2}e^{-i\theta}(\cos\theta-i\sin\theta)=-\frac{1}{r^2}e^{-i\theta}\cdot e^{-i\theta}=-\frac{1}{r^2}e^{-i(2\theta)}$$

مثال ۵: $f(z)=x^3-i(y-1)^3$ کجا مشتق پذیر است.

$u(x,y)=x^3$ $\quad v(x,y)=-(y-1)^3$

$$\begin{cases}u_x=3x^2\\ v_y=-3(y-1)^2\end{cases}\quad u_x=v_y\rightarrow 3x^2=-3(y-1)^2\quad\boxed{x=0,\ y=1}\qquad\begin{cases}u_y=0\\ v_x=0\end{cases}\quad u_y=0\rightarrow u_y=-v_x$$

معادلات کوشی ریمان $u_x=v_y$ ، $u_y=-v_x$

تنها در نقطه $(0,1)$ برقرارند. پس $f(z)$ تنها در نقطه $z=(0,1)$ مشتق پذیر است.

$f'(z_0) = u_x(z_0)+iV_x(z_0) = f'(1) =$ [illegible]

تابع تحلیلی: تابع مختلط $f(z)=u+iv$ را در یک همسایگی حول نقطه z_0 تعریف شده باشد گوئیم تابع $f(z)$ در z_0 تحلیلی است هرگاه تابع $f(z)$ در همه نقاط یک همسایگی حول نقطه z_0 مشتق‌پذیر باشد.

مثال: $f(z)=|z|^2$ هیچ جا تحلیلی نیست زیرا $f(z)$ فقط در $z_0=0$ مشتق‌پذیر است در همسایگی حول z_0 هیچ جا مشتق‌پذیر نیست.

مثال: $f(z)=\frac{1}{z}$ جز در صفر همه جا تحلیلی است زیرا $f(z)$ فقط در $z_0=0$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال: $f(z)=z^2$ همه جا تحلیلی است زیرا $f(z)$ همه جا مشتق‌پذیر است.

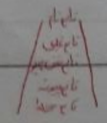
نقطه تکین (منفرد): نقطه z_0 را نقطه تکین تابع مختلط $f(z)$ گوئیم هرگاه f در z_0 تحلیلی نباشد اما در هر همسایگی حول z_0، $f(z)$ دارای نقاط تحلیلی باشد.

مثال: $f(z)=|z|^2$ نقطه $z_0=0$ نقطه تکین نیست زیرا هر همسایگی حول $z_0=0$ شامل نقاط تحلیلی نیست. سایر نقاط $z\neq 0$ نقاط تکین $f(z)$ نیستند.

مثال: $f(z)=\frac{1}{z}$ فقط در نقطه $z_0=0$ تنها نقطه تکین می‌باشد [illegible] تنها تکین

مثال: $f(z)=z^2$ بدون نقطه تکین است.

تابع تام: تابع مختلط $f(z)=u+iv$ را تام گوئیم هرگاه در سراسر صفحه مختلط $\mathbb{C}$ تحلیلی باشد. $z^2, e^z, P_n(z), \sin z$



Subject:
Date

① قضیه جبری توابع مختلط: هرگاه توابع مختلط $f(z)$ ، $g(z)$ در نقطه $z=z_0$ تحلیلی باشند آنگاه توابع مختلط $(f\pm g)(z)=f(z)\pm g(z)$ ، $f(z)g(z)$ ، $\frac{f(z)}{g(z)\neq 0}$ در $z=z_0$ تحلیلی است.

② هرگاه تابع مختلط $g(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی و تابع مختلط $f(z)$ در $g(z_0)$ تحلیلی باشند آنگاه تابع مختلط $(f\circ g)(z)$ در $z=z_0$ تحلیلی است.

نکته: توابع گویا یا توابع کسری مختلط در ریشه‌های مخرج کسر تحلیلی نیستند. درباره توابع گویا مختلط میتوان دید که ریشه‌های مخرج کسر تنها نقاط تکین تابع مختلط است. تابع مختلط f بر حوزه D را تحلیلی گوئیم هرگاه در همه نقاط آن حوزه تحلیلی است.

تمرین ۹: هرگاه f بر حوزه D تحلیلی باشد نشان دهید که f ثابت است اگر در هر یک از شرایط زیر صدق کند

الف) $\bar{f}(z)$ بر حوزه D تحلیلی باشد. ب) تابع حقیقی $|f(z)|$ بر D ثابت باشد ج) مقدار $f(z)$ بر D حقیقی باشد د) مقدار $f(z)$ بر D موهومی محض باشد

اثبات ج) فرض f بر D تحلیلی و مقدار $f(z)$ بر D حقیقی باشد نشان می‌دهیم که $f(z)$ بر D ثابت است. در اینجا $v=0$ ← $f(z)=u+i0$

چون f بر D تحلیلی است پس f بر D مشتق پذیر است و در معادلات کوشی ریمان صدق کند $\overset{f \text{ بر } D}{\text{ثابت}}$ ← $u=u(x,y)$ بر D ثابت ← $\left[\begin{array}{l} u_x=v_y=0 \\ u_y=-v_x=0 \end{array}\right.$

اثبات الف) فرض f بر D، $\bar{f}$ بر D تحلیلی باشد نشان می‌دهیم f بر D ثابت است.

$f(z)=u+iv$
$\bar{f}(z)=u-iv$ → $f(z)+\bar{f}(z)=2u(x,y)$

قرار دهید $h(z)=f(z)+\bar{f}(z)$ بنا به قضیه جبری توابع تحلیلی $h(z)$ بر D تحلیلی است. چون $h(z)$ مقدار حقیقی است پس بنا به حکم ج می‌دانیم $h(z)$ تابع ثابت بر D باشد پس $u(x,y)$ بر D ثابت است. قرار دهید $g(z)=f(z)-\bar{f}(z)=2iv(x,y)$

بنا به قضیه جبری توابع تحلیلی $g(z)$ بر D تحلیلی است. بنا به حکم (د)، $g(z)$ تابع موهومی محض بر D است پس تابع ثابت بر D است پس حکم

$v(x,y)$ بر D ثابت است در نتیجه $f(z)=u+iv$ بر D ثابت است.

ب: فرض کنید f بر D تحلیلی و |f| بر D تابع ثابت حقیقی باشد. نشان می‌دهیم که f(z) بر D ثابت است. چون |f| بر D ثابت است پس $k = \|f(z)\|$ اگر $k=0$ پس $f(z)=0$ که تابع ثابت می‌شود. اگر $k \neq 0$: $k^2 = \|f(z)\|^2 = f(z)\overline{f(z)}$ ، $\overline{f(z)} = \frac{1}{k^2} f(z)$ چون f بر D تحلیلی است پس $\overline{f(z)}$ یا $\frac{1}{k^2}$ بر D تحلیلی است پس $\overline{f(z)}$ تحلیلی است بنا به حکم الف پس f(z) بر D ثابت است.

نکته: هرگاه تابع f(z) بر D تحلیلی بوده و غیر ثابت باشد آنگاه $\overline{f(z)}$ تابع تحلیلی نیست.

مثال: $f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$ بر سراسر C تحلیلی و تام است.

$\overline{f(z)} = e^x \cos y - i e^x \sin y$ هیچ جا تحلیلی است

تابع همساز یا هارمونیک: فرض کنید تابع دو متغیره h(x,y) یک تابع پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته روی ناحیه D در صفحه xoy باشد آنگاه h(x,y) را همساز گوییم هرگاه

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} h + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h = \underbrace{h_{xx} + h_{yy}}_{\nabla h(x,y)} = 0$$

قضیه تابع مختلط هارمونیک: فرض کنید $f(z) = u + iv$ تابع مختلطی باشد که بر ناحیه D تعریف شده و پیوسته و مشتق‌پذیر باشد در این صورت تابع مختلط f(z) تحلیلی است اگر توابع دو متغیره u(x,y) , v(x,y) توابع همساز بر ناحیه D باشند.

«یعنی $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ، $v_{xx} + v_{yy} = 0$ بر ناحیه D»

اثبات: تابع مختلط $f(z) = u + iv$ بر ناحیه D تحلیلی است اگر و تنها اگر u, v توابعی همساز بر D باشند.

« f تحلیلی باشد معادلات کشی ریمان بر D صدق می‌کند.

$$\begin{cases} u_x = v_y & ① \\ v_x = -u_y & ② \end{cases} \rightarrow u_{xx} = -u_{yy} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_{xx} \overset{①}{=} v_{yx} \overset{*}{=} v_{xy}$$

$$v_{xy} \overset{②}{=} -u_{yy}$$

تعریف مزدوج همساز: هرگاه $f(z) = u + iv$ تابع مختلط تحلیلی بر حوزه D باشد به طوریکه توابع u, v در معادلات کشی ریمان برای تابع $f(z)$ بر حوزه D صدق کنند آنگاه v را مزدوج همساز تابع u بر حوزه D می نامیم.

قضیه (شرط لازم و کافی): تابع مختلط $f(z) = u + iv$ بر حوزه D تحلیلی است اگر و تنها اگر تابع دو متغیره $v(x,y)$ مزدوج همساز تابع دو متغیره $u(x,y)$ بر حوزه D باشد.

نکات مزدوج همساز: ① هرگاه تابع v مزدوج همساز تابع u بر حوزه D باشد آنگاه لزوما تابع u مزدوج همساز تابع v بر حوزه D نیست مگر آنکه در حالت خاص u, v توابع ثابت باشند.

شل ۸ ۵۰ ② فرض کنید v مزدوج همساز u بر حوزه D، u مزدوج همساز v بر حوزه D باشد آنگاه u, v توابع ثابت است.

v مزدوج همساز u بر D ← $f(z) = u + iv$ تحلیلی بر D ↔ $\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$ بر حوزه D

u " " v ← " $g(z) = v + iu$ " ↔ $\begin{cases} v_x = u_y \\ u_x = -v_y \end{cases}$ بر حوزه D

← $v_y = 0$ ، $u_y = 0$ ، $v_x = 0$ ، $u_x = 0$ بر حوزه D ← u, v تابع ثابت بر حوزه D

دل ۹ ۵۰ ③ هرگاه v مزدوج همساز u بر حوزه D آنگاه $-u$ مزدوج همساز v بر حوزه D

اثبات: v مزدوج همساز u بر D ← $f(z) = u + iv$ بر D تحلیلی ← $\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases}$ بر حوزه D ← $\begin{cases} (-u)_x = -u_x = -v_y \\ -(-u)_y = u_y = -v_x \end{cases}$

$g(z) = v - iu$ بر حوزه D تحلیلی پس $-u$ مزدوج همساز v بر D

$$\begin{cases} v_x = (-u)_y = -u_y \\ v_y = -(-u)_x = v_x \end{cases}$$

مثال: فرض کنید $u(x,y)=y^3-3x^2y$ بر صفحه R^2 همساز باشد. مزدوج همساز u را بیابید و تابع مختلط تحلیلی وابسته به آن را معرفی کنید
$((u_{xx}+u_{yy}=0))$

① $\begin{cases}u_x=v_y\\u_y=-v_x\end{cases} \longleftrightarrow$ v مزدوج همساز u : $\exists v(x,y)$ $f(z)=u+iv$ بر $\mathbb{C}$ تحلیلی باشد

با جاگذاری u_x ، u_y در دستگاه ① داریم

$$\begin{cases}v_y=u_x=-6xy \quad ②\\ v_x=-u_y=-3y^2+3x^2 \xrightarrow[x]{\text{انتگرال}} v(x,y)=\int(-3y^2+3x^2)dx+g(y)\to v(x,y)=-3y^2x+x^3+g(y)\end{cases}$$

مشتق $\xrightarrow[y]{②}$ $-6xy=v_y=-6xy+g'(y)\to g'(y)=0\to g(y)=0=$ ثابت $\to v(x,y)=-3xy^2+x^3$

$f(z)=u+iv=y^3-3x^2y+i(-3xy^2+x^3)(+c)=i(z^3(+c))$ $f=x+iy\to i(z^3)$

مثال ۱۲: اگر $u(r,\theta)=\ln r$ ، $r>0$ مزدوج همساز u را برحسب r,θ بیابید «یعنی $v(r,\theta)$»

حل. $\ln r=\frac{1}{r}$ $v(r,\theta)$ مزدوج همساز $u(r,\theta)$ $\longleftrightarrow$ (II) $\begin{cases}u_r=\frac{1}{r}v_\theta\\u_\theta=-rv_r\end{cases}$ صورت تحلیلی ریمان

$$\exists v:\begin{cases}v_\theta=ru_r=1\\ v_r=-\frac{1}{r}u_\theta=0\end{cases}\to v(r,\theta)=\theta+c$$

$D=\mathbb{C}-[\dots]$ $\xrightarrow{\text{تحلیلی}} f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)=\ln r+i\theta=(\operatorname{Ln} z)$

مثال ۳

توابع مقدماتی مختلط: تابع نمایی مختلط، تابع لگاریتم مختلط، تابع مثلثاتی مختلط، تابع هذلولوی مختلط، تابع مثلثی مختلط
تابع [illegible]

تابع نمایی مختلط: هرگاه تابع مختلط $f(z)=u+iv$ بنویسیم $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ (*) داده شده، $f(z)$ را

تابع نمایی مختلط نامیم و آن را با e^z و یا $\exp(z)$ نمایش می‌دهند

خواص تابع نمایی مختلط: ① تابع e^z تام است که همه جا تحلیلی است، $(e^z)'=\frac{d}{dz}(e^z)=e^z$

② $\forall z_1,z_2\in C;\quad e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$

اثبات: $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\to e^{z_1+z_2}=e^{x_1+x_2}\cos(y_1+y_2)+ie^{x_1+x_2}\sin(y_1+y_2)$

$$=e^{x_1 x_2}(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2)+i(e^{x_1}e^{x_2}(\sin y_1\cos y_2+\sin y_2\cos y_1)$$

$$=e^{x_1}e^{x_2}\cos y_2\overbrace{(\cos y_1+i\sin y_1)}^{e^{iy_1}}+e^{x_1}e^{x_2}\sin y_2\overbrace{(-\sin y_1+i\cos y_1)}^{ie^{iy_1}}$$

$$=e^{x_1+iy_1}e^{x_2}\cos y_2+ie^{x_1+iy_1}e^{x_2}\sin y_2=e^{x_1+iy_1}(e^{x_2}\cos y_2+ie^{x_2}\sin y_2)=e^{z_1}.e^{z_2}$$

③ $\forall z_1,z_2,\ e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$ ④ $e^{-z}=\frac{1}{e^z}$ ⑤ $e^{\bar z}=\overline{e^z}$

اثبات ⑤: $z=x+iy\to\bar z=x-iy$

$$e^{\bar z}=e^{x-iy}=e^x.e^{-iy}=e^x(\cos(-y)+i\sin(-y))=e^x(\cos y-i\sin y)=e^x\cos y-ie^x\sin y=\overline{e^z}$$

⑥ $e^{\bar z}$ هیچ جا تحلیلی است زیرا e^z تحلیلی تام است و چون e^z ثابت نیست پس $e^{\bar z}$ تحلیلی نمی‌تواند باشد.

⑦ $\|e^z\|=\sqrt{(e^x\cos y)^2+(e^x\sin y)^2}=\sqrt{e^{2x}(\cos^2 y+\sin^2 y)}=e^x\to\|e^z\|=e^x$

۱۴ تمرین: بررسی تحلیلی بودن $f(z)=e^{z^2}$ و f در کجا تحلیلی است.

Subject:
Date

راه حل اول) $g(z)=z^{۲}$ $\longleftarrow$ $h(z)=e^{z}$ $f(z)=(h\circ g)(z)$ بنابه قضیه مشتق تابع مرکب و ترکیب توابع تحلیلی، f(z) هم تحلیلی است پس تام است

راه حل دوم) $z^{۲}=(x+iy)^{۲}=x^{۲}-y^{۲}+i(۲xy)$

$$e^{z^{۲}}=e^{x^{۲}-y^{۲}}(\cos(۲xy)+i\sin(۲xy))$$

$$\begin{cases} U(x,y)=e^{x^{۲}-y^{۲}}\cos(۲xy) \\ V(x,y)=\overset{e^{x^{۲}-y^{۲}}}{\cancel{\cos(۲xy)}}\sin(۲xy) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_x=V_y \\ V_x=-U_y \end{cases} \rightarrow R^{۲}$$ برقرار $\rightarrow$ f(z) تام است

— — — — —

تمرین: $f(z)=(e^{\frac{1}{z}})$ ، f کجا تحلیلی است؟

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^{۲}}=\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}+\frac{i(-y)}{x^{۲}+y^{۲}} \qquad e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}}\left(\cos\left(\frac{-y}{x^{۲}+y^{۲}}\right)+i\sin\left(\frac{-y}{x^{۲}+y^{۲}}\right)\right)$$

$$=e^{\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}}\left(\cos\left(\frac{y}{x^{۲}+y^{۲}}\right)-i\sin\left(\frac{y}{x^{۲}+y^{۲}}\right)\right)$$

$$\begin{cases} u=e^{\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}}\cos\left(\frac{y}{x^{۲}+y^{۲}}\right) \\ v=e^{\frac{x}{x^{۲}+y^{۲}}}\sin\left(\frac{y}{x^{۲}+y^{۲}}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_x=v_y \\ v_x=-u_y \end{cases} \rightarrow D=R^{۲}-\{(۰,۰)\}$$ f(z) در D تحلیلی است

راه حل کوتاه: $g(z)=\frac{1}{z}$ $\rightarrow$ تحلیلی بر $C-\{۰\}$

$h(z)=e^{z}$ و $f(z)=(h\circ g)(z)$ بنابه قضیه ترکیب توابع تحلیلی بر $C-\{۰\}$ تحلیلی است

تمرین ۱۵: $f(z) = Re(e^{\frac{1}{z}})$

$f(z) = Re(e^{\frac{1}{z}}) = e^{\frac{x}{x^۲+y^۲}} \cos(\frac{y}{x^۲+y^۲})$ f(z) مشتق پذیر است بر $R^۲ - [۰,۰]$

$$\begin{cases} u_x = v_y = ۰ \\ v_x = -u_y \end{cases}$$

$$u_x = \frac{x^۲+y^۲-۲x^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} e^{\frac{x}{x^۲+y^۲}} \cos(\frac{y}{x^۲+y^۲}) + \frac{۲xy}{(x^۲+y^۲)^۲} \sin(\frac{y}{x^۲+y^۲})$$

$u_x = ۰$ هیچ جا برقرار نیست

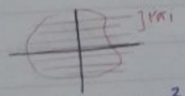
$f(z) = Re(e^{\frac{1}{z}})$ هیچ جا تحلیلی $\rightarrow$ $u_y = ۰$ مشابه نیز هیچ جا برقرار نیست.

⑧ $f e^{i\theta} = w = e^z = e^x e^{iy} \rightarrow \|e^z\| = f = e^x \quad \theta = y$

⑨ تابع نمایی مختلط e^z با دوره تناوب تکرار به اندازه $۲\pi i$ تکرار می شود

$e^{z+۲k\pi i} = e^z$

$k \in Z$

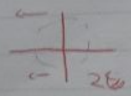


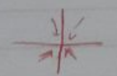
به عبارت دیگر قضیه ۹ بیانگر آن است که نگاشت e^z نمایی داده شده، نوارهای افقی به ضخامت ۲π موازات محور حقیقی ها برش می دهد، تصویر می کند

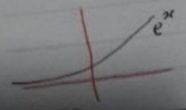
اثبات ۹: $e^{z+۲k\pi i} = e^{x+i(y+۲k\pi)} = e^x(\cos(y+۲k\pi)+i\sin(y+۲k\pi)) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z$

تمرین ۱۱: نشان دهید تابع نمایی مختلط $e^z = e^{x+iy}$ را وقتی که $x \rightarrow -\infty$ بررسی کنید

$\lim_{x\to-\infty} e^z = ۰ \quad e^z = \rho e^{i\varphi} \rightarrow \rho = e^x \quad \varphi = y$







$\lim_{x\to-\infty} e^x = ۰ \rightarrow \rho \rightarrow ۰ \quad x \rightarrow -\infty$

وقتی x ها به سمت $-\infty$ می روند شعاع ها دارند به سمت صفر نزدیک می شوند

Subject:
Date

۲, تمام‌تابع $e^{z} = e^{x+iy}$ ، $y \to \infty$

[illegible]

$z = x+iy$

$e^{x+iy} = e^{x}.e^{iy} \rightarrow \rho = e^{x} \rightarrow$ دایره ← ثابت

$\varphi = y$

توابع مثلثاتی مختلط $\cos z$, $\sin z$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i}$$

خواص $\sin z$, $\cos z$

① چون تابع iz تابع تام است، تابع e^{z} تابع تام است پس تابع مرکب e^{iz} تام است، مشابه e^{-iz} نیز تام است پس توابع $\sin z$, $\cos z$ توابع تام هستند در نتیجه تحلیلی، مشتق‌پذیراند، داریم:

$$\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z \quad , \quad \frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$$

اثبات. $\frac{d}{dz}(\cos z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{۲}\right) = \frac{1}{۲}\left(\frac{d}{dz}(e^{iz}) + \frac{d}{dz}(e^{-iz})\right) = \frac{1}{۲}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\sin z$

② $\sin \bar{z}$, $\cos \bar{z}$ هیچ جا تحلیلی است، داریم [illegible]

$$\left[\begin{array}{l} \overline{\sin z} = \sin(\bar{z}) \\ \overline{\cos z} = \cos(\bar{z}) \end{array}\right.$$

$\sin(\bar{z}) = \sin(x - iy) = \sin x \cos(-iy) + \cos x \sin(-iy)$

$= \sin x \cos(iy) - \cos x \sin(-iy) \overset{*}{=} \sin x \, ch y - i \cos x \, sh y$ (I)

$sh y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{۲i}$

$\cos(iy) = \frac{e^{-y}+e^{y}}{۲} = ch y$ هذلولی y

$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{۲} \rightarrow \sin(iy) = \frac{e^{-y}-e^{y}}{۲i} = -\frac{1}{i} sh y = i sh y$

$\cos(iy) = ch y$

$\sin(iy) = +i sh y$

☆

PAPCO

Subject:
Date

$\overline{\sin z} = \overline{\sin(x+iy)} = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) \overset{*}{=} \sin x \, ch y + i \cos x \, sh y$

به عبارت دیگر

$= \sin x \, ch y - i \cos x \, sh y$ (II) $\xrightarrow{(II)\ (I)}$ $\overline{\sin z} = \sin(\bar{z})$

cos(z), sin(z) همه اتحادهات

$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$ (۳)

$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

$\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cos(-z) = \cos(z)$ (۴)

تابع فرد — تابع زوج

(۵) تعریف

$\cos(z)$, $\sin(z)$

$$\boxed{\sin(z) = \sin x \, ch y + i \cos x \, sh y}$$
$$\boxed{\cos(z) = \cos x \, ch y - i \sin x \, sh y}$$
$*$

۳ مثال: معادله $\sin z = ch۴$ را حل کنید.

$\sin z = ch۴ \longleftrightarrow \begin{cases} \sin x \, ch y = ch۴ & ① \\ \cos x \, sh y = 0 & ② \end{cases}$

$\cos x \, sh y = 0 \dashrightarrow sh y = 0 \xrightarrow{\text{اکیدا}} y = 0 \xrightarrow[①]{ch(0)=1} \sin x = ch۴$ ✗

$\cos x = 0 \xrightarrow[①]{\sin x = \pm 1} \pm ch y = ch۴ \to ch y = ch۴ \to \boxed{y = ۴}$

$(x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲})$

جواب معادله: $z = x + iy = (۲k\pi + \frac{\pi}{۲}) + ۴i$ $k \in \mathbb{Z}$

(۶) $\|\sin z\|^{۲} = (\sin x \, ch y)^{۲} + (\cos x \, sh y)^{۲} = \sin^{۲} x \, ch^{۲} y + \cos^{۲} x \, sh^{۲} y = \sin^{۲} x (ch^{۲} y) + \cos^{۲} x (sh^{۲} y)$

$ch^{۲} y = ۱ + sh^{۲} y$

$= \sin^{۲} x (۱ + sh^{۲} y) + \cos^{۲} x \, sh^{۲} y = \sin^{۲} x + sh^{۲} y (\sin^{۲} x + \cos^{۲} x)$

$= \sin^{۲} x + sh^{۲} y$

$$\boxed{\|\sin z\|^{۲} = \sin^{۲} x + sh^{۲} y}$$

$\cos iy = ch\, y$
$\sin iy = i\, sh\, y$

$ch\, iy = \cos y$
$sh\, iy = i \sin y$

(۷) $\tan(z_1 \pm z_2) = \frac{\tan(z_1) \pm \tan(z_2)}{1 \mp \tan(z_1)\tan(z_2)}$ $\cot(z_1 \pm z_2) = \frac{\cot(z_1) \pm \cot(z_2)}{1 \mp \cot z_1 \cot z_2}$

(۸) $\tan(-z) = -\tan z$ $\cot(-z) = -\cot(z)$ $\tan(z+\pi) = \tan z$ (۴)
$\cot(z+\pi) = \cot z$

تعریف: $\sec z = \frac{1}{\cos z}$, $\csc z = \frac{1}{\sin z}$

دامنه ⑨: $\sec z$ در $z \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ تحلیلی است. $\csc z$ در $z \neq k\pi$ تحلیلی است.

⑩ $\frac{d}{dz}(\sec z) = \sec z \tan z$ ، $\frac{d}{dz}(\csc z) = -\csc z \cot z$

توابع هذلولوی:

تعریف: $\sinh z = sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{۲}$, $\cosh z = ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{۲}$

① $sh\, y$ ، $ch\, y$ هر دو تحلیلی «تام» هستند و $\frac{d}{dz}(sh\, y) = ch\, y$, $\frac{d}{dz}(ch\, y) = sh\, y$

② تعریف معادل:

$sh(z) = sh(x+iy) = sh\, x\, ch\, iy + ch\, x\, sh(iy)$

$ch(iy) = \cos y$
$sh(iy) = i \sin y$

$$\boxed{= sh(z) = sh\, x \cos y + i\, ch\, x \sin y}$$

$ch(z) = ch(x+iy) = ch\, x\, ch(iy) - sh\, x\, sh\, iy$

$$\boxed{ch(z) = ch\, x \cos y - i\, sh\, x \sin y}$$

③ $\operatorname{sh}(\bar z) = \operatorname{sh}(x - iy) = \operatorname{sh}x\cos y - i\operatorname{ch}x\sin y = \overline{\operatorname{sh}z}$

$\operatorname{ch}(\bar z) = \operatorname{ch}(x - iy) = \operatorname{ch}x\cos y + i\operatorname{sh}x\sin z = \overline{\operatorname{ch}z}$

$\operatorname{sh}\bar z$ ، $\operatorname{ch}\bar z$ هیچ جا تحلیلی هستند

④ $\|\operatorname{sh}z\|^۲ = (\operatorname{sh}x\cos y)^۲ + (\operatorname{ch}x\sin y)^۲ = \operatorname{sh}^۲x\cos^۲y + (1 + \operatorname{sh}^۲x)\sin^۲y$

$= \operatorname{sh}^۲x(\cos^۲y + \sin^۲y) + \sin^۲y = \operatorname{sh}^۲x + \sin^۲y$

$\|\operatorname{ch}z\|^۲ = (\operatorname{ch}x\cos y)^۲ + (\operatorname{sh}x\sin y)^۲ = \operatorname{ch}^۲x\cos^۲y + \operatorname{sh}^۲x\sin^۲y = (1 + \operatorname{sh}^۲x)\cos^۲y + \operatorname{sh}^۲x\sin^۲y$

$= \operatorname{sh}^۲x(\cos^۲y + \sin^۲y) + \cos^۲y = \operatorname{sh}^۲x + \cos^۲y$

⑤ توابع حقیقی $\|\operatorname{sh}z\|^۲$ ، $\|\operatorname{ch}z\|^۲$ بی‌کران هستند.

⑥ $\operatorname{ch}(z_1 \pm z_۲) = \operatorname{ch}z_1\operatorname{ch}z_۲ \mp \operatorname{sh}z_1\operatorname{sh}z_۲$, $\operatorname{sh}(z_1 \pm z_۲) = \operatorname{sh}z_1\operatorname{ch}z_۲ \pm \operatorname{ch}z_1\operatorname{sh}z_1$

⑦ $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh}z$ تابع فرد $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch}z$ تابع زوج

مثال: نقاط غیر تحلیلی تابع $f(z) = \dfrac{\sin z}{(\operatorname{ch}z + \frac{1}{۲})(z^۴ + ۳)}$ را بیابید.

$$\left[\begin{array}{ll} \operatorname{ch}z + \frac{1}{۲} = 0 & ① \\ z^۴ + ۳ = 0 & ② \end{array}\right.$$
← ریشه‌ها را حل کرده ← نقاط غیر تحلیلی f

۱۸

Subject.

Date

① $ch z + \frac{1}{۲} = ۰ \longleftrightarrow ch z = -\frac{1}{۲} \xrightarrow{**} \begin{cases} chx\cos y = -\frac{1}{۲} \\ shx\sin y = ۰ \end{cases}$

$shx\sin y = ۰ \longleftrightarrow shx = ۰$ یا $\sin y = ۰$

if $shx = ۰ \longleftrightarrow x = ۰ \xrightarrow[\text{در بالا}]{ch(۰)=۱} \cos y = -\frac{1}{۲} \to y = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \to z = i(۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳})$

if $\sin y = ۰ \xrightarrow[\text{در بالا}]{\cos y = \pm ۱} (\pm chx) = -\frac{1}{۲} \longrightarrow chx = \frac{1}{۲}$

$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{۲} = \frac{1}{۲} \longleftrightarrow e^x + e^{-x} = ۱ \xleftrightarrow[x]{\text{ضرب در}} e^{۲x} - e^x + ۱ = ۰ \xrightarrow{t=e^x} t^۲ - t + ۱ = ۰ \quad \Delta < ۰$

جواب ندارد

در بخش ① نقاط غیر تحلیلی $f(z)$ شامل نقاط $z = i(۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳})$ است.

(II) $: z^۴ + ۳ = ۰ \longleftrightarrow z = \sqrt[۴]{-۳} \to -۳ = ۳e^{i\pi}$

$$w\ z = \sqrt[۴]{۳}\, e^{i(\frac{۲\pi k + \pi}{۴})} = \begin{cases} \sqrt[۴]{۳}\,(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲}}{۲}),\ k = ۰ & w_۰ \\ \sqrt[۴]{۳}\,(-\frac{\sqrt{۲}}{۲} + i\frac{\sqrt{۲}}{۲}),\ k = ۱ & w_۱ \\ \sqrt[۴]{۳}\,(-\frac{\sqrt{۲}}{۲} - i\frac{\sqrt{۲}}{۲}),\ k = ۲ & w_۲ \\ \sqrt[۴]{۳}\,(\frac{\sqrt{۲}}{۲} - i\frac{\sqrt{۲}}{۲})\ k = ۳ & w_۳ \end{cases}$$

$\left[z = i(k\pi + \frac{۲\pi}{۳}) \quad w_۰, w_۱, w_۲, w_۳ \right] = F$ نقاط غیر تحلیلی

PAPCO

Subject:
Date

توابع مختلط هذلولوی «هذلولوی گون»

تعریف : $\sinh z = \operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{۲}$ ، $\cosh z = \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{۲}$

خواص $\operatorname{ch} z$ ، $\operatorname{sh} z$:

① $\operatorname{ch} z$ ، $\operatorname{sh} z$ توابع تام بر $\mathbb{C}$ هستند. $\left[\frac{d}{dz}(\operatorname{sh} z) = \operatorname{ch} z \quad - \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{ch} z) = \operatorname{sh} z \right.$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}$

② تعریف معادل: $Z = x + iy \; ; \; \operatorname{sh}(z) = \operatorname{sh}(x+iy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(iy) + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(iy)$

$$\boxed{\operatorname{sh}(z) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y} \, *$$

$$\operatorname{ch}(z) = \operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch}(iy) + \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(iy) \Rightarrow \boxed{\operatorname{ch}(z) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y} \, *$$

③ $\overline{\operatorname{sh} z} \overset{*}{=} \operatorname{sh} x \cos y - i \operatorname{ch} x \sin y = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(iy) - \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(iy) = \operatorname{sh}(x - iy)$

$= \operatorname{sh}(\bar{z}) \rightarrow \boxed{\overline{\operatorname{sh} z} = \operatorname{sh}(\bar{z})}$ مشابه $\rightarrow \overline{\operatorname{ch} z} = \operatorname{ch}(\bar{z})$

④ $\operatorname{ch} \bar{z}$ ، $\operatorname{sh} \bar{z}$ هیچ جا تحلیلی هستند «برگ تمرین ۹ ص ۵۱»

⑤ $\|\operatorname{sh} z\|^{۲} \overset{*}{=} \operatorname{sh}^{۲} x \cos^{۲} y + \operatorname{ch}^{۲} x \sin^{۲} y = \operatorname{sh}^{۲} x \cos^{۲} y + (1 + \operatorname{sh}^{۲} x) \sin^{۲} y$

$= \operatorname{sh}^{۲} x (\overbrace{\cos^{۲} y + \sin^{۲} y}^{1}) + \sin^{۲} y = \operatorname{sh}^{۲} x + \sin^{۲} y \Rightarrow \underset{①}{\boxed{\|\operatorname{sh} z\|^{۲} = \operatorname{sh}^{۲} x + \sin^{۲} y}}$ تابع حقیقی $\|\operatorname{sh} z\|$ بی کران است

$\|\operatorname{ch} z\|^{۲} = \operatorname{ch}^{۲} x \cos^{۲} y + \operatorname{sh}^{۲} x \sin^{۲} y = (1 + \operatorname{sh}^{۲} x) \cos^{۲} y + \operatorname{sh}^{۲} x \sin^{۲} y = \ldots = \operatorname{sh}^{۲} x + \cos^{۲} y$

$$\underset{②}{\boxed{\|\operatorname{ch} z\|^{۲} = \operatorname{sh}^{۲} x + \cos^{۲} y}}$$ تابع حقیقی $\|\operatorname{ch} z\|$ بی کران است

⑥ تابع فرد $sh(-z) = -sh(z)$ تابع زوج $ch(-z) = chz$

⑦
$$\begin{cases} sh(z_1 \pm z_2) = shz_1\, chz_1 \pm chz_1\, shz_2 \\ ch(z_1 \pm z_2) = chz_1\, chz_2 \pm shz_1\, shz_2 \end{cases}$$

⑧ $ch^2z - sh^2z = 1$

⑨ $sh(iz) = i\sin z$, $ch(iz) = \cos z$, $\sin(iz) = i\,shz$, $\cos(iz) = chz$

مثال: به کمک تعریف * دیده می‌شود که $sh(z) = sh(z + 2\pi i)$

مثال: $|shx| \le \|chz\| < chx$

حل: به کمک رابطه ۷ طرف چپ نامساوی سوال بدیهی است

$$\|chz\|^2 = sh^2x + \cos^2y \le sh^2x + 1 = ch^2x \to \|chz\| \le \overset{\text{مثبت}}{chx}$$

مثال: معادله $shz = i$ را حل کنید

$$shz = i \overset{*}{\longleftrightarrow} \begin{cases} shx\cos y = 0 \to shx = 0 \text{ یا } \cos y = 0 \\ chx\sin y = 1 \end{cases}$$

$$\text{if } shx = 0 \xleftrightarrow{\text{[illegible] sh}} x = 0 \xrightarrow{ch(0)=1} \sin y = 1 \to y = (2k+1)\frac{\pi}{2} \to z = i(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{if } \cos y = 0 \xrightarrow[\text{معادله دوم}]{\sin y = \pm 1} \pm chx = 1 \to chx = 1 \longleftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1$$

Subject:
Date

$\to e^{x} + e^{-x} - ۲ = ۰ \xrightarrow{\times e^{x}} e^{۲x} + ۱ - ۲e^{x} = ۰ \longmapsto t^{۲} - ۲t + ۱ = (t-۱)^{۲} = ۰$

جواب معادله : $\to t = ۱ \to e^{x} = ۱ \longleftrightarrow x = ۰ \to \cos y = -\cos y = (۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \to z = i(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$

تعریف : $\tanh z = th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z}$ th z تابع تحلیلی است $\forall z \; ch\, z \neq ۰$

$ch\, z = ۰ \to \begin{cases} ch\, x \cos y = ۰ \xrightarrow{ch\, x \neq ۰} \cos y = ۰ \to y = (۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \\ sh\, x \sin y = ۰ \end{cases}$

صفرهای ch z $\; z = i(۲k+۱)\frac{\pi}{۲} \longleftrightarrow x = ۰ \longleftrightarrow sh\, x = ۰ \xleftarrow{\sin(۲k+۱)\frac{\pi}{۲} = \pm ۱}$

th z در همه z های صفحه $Z \neq i(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ تحلیلی است

$\cot anh\, z = cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z}$ cth z تحلیلی است $\forall z \; sh\, z \neq ۰$

$sh\, z = ۰ \to \begin{cases} sh\, x \cos y = ۰ \\ ch\, x \sin y = ۰ \end{cases} \to z = i(n\pi)$

$sch\, z = \frac{1}{ch\, z} \to z \neq i(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ sch z برای ← تحلیلی است

$csch\, z = \frac{1}{sh\, z} \to$ csch z برای $z \neq i(k\pi)$ تابع تحلیلی است

۲۱

Subject:
Date

تابع تک مقداری Ln(z) «شاخه اصلی» یا هر یک از شاخه های فرعی ln z دارای تابع وارون نمایی مختلط می‌باشد

$$w = \ln z \longleftrightarrow z = e^{w}$$

$$(2k-1)\pi < \underbrace{\mathrm{Im}\, w}_{\theta} \leq (2k+1)\pi$$

$$h = 0 \quad . \quad W = \mathrm{Ln}\, z \longleftrightarrow z = e^{w} \qquad -\pi \leq \mathrm{Im}\, w \leq \pi$$

پرتو π = α بریدگی شاخه اصلی Ln z محسوب می‌شود اما سایر بریدگی تابع ln z به ازای پرتوهای $\alpha = \alpha_0$ رخ می‌دهد. به عبارت دیگر، شاخه‌های فرعی ln z در پرتوهای $\alpha = \alpha_0$ می‌تواند تحلیلی نباشد، تابع ln z چند شاخه‌ای گویند

PAPCO

۹۹
روز اول

تابع لگاریتم مختلط :

تابع چند شاخه ای :

برشگی : مسیر یک خط یا یک خم که یک تابع مختلط در امتداد آن مسیر دارای نقاط غیر تحلیلی باشد به عبارت دیگر نقاط غیر تحلیلی آن تابع روی این برشگی واقع باشد.

تابع چند شاخه ای : تابع مختلط $f(z)$ را چند شاخه ای نامیم هرگاه دارای چند برشگی در صفحه مختلط باشد که مجموع نقاط تحلیلی در صفحه مختلط را شاخه های متناظر تابع مختلط $f(z)$ می نامیم. به بیان دیگر به ازای هر برشگی یک شاخه از شاخه های تابع مختلط معرفی شده. معادلاً یک تابع چند شاخه ای $f(z)$ را چند مقداری نامیم اگر تابع $f(z)$ تابع تک مقداری باشد که در حوزه داده شده جز برشگی تحلیلی باشد. گاهی اوقات کلمه برشگی را با برشگی شاخه نیز بیان می کنند بنابراین هر برشگی یک شاخه تابع چند مقداری شامل نقاط تکین است که هر یک شاخه تابع چند مقداری بطور مشخص

هر تابع چند مقداری دارای یک شاخه اصلی و شاخه های فرعی میباشد

شاخه اصلی تابع چند مقداری لگاریتم مختلط : تابع $Ln\, z = Log(z) = ln\, r + i\theta$ را شاخه اصلی تابع لگاریتم مختلط می خوانیم که در آن ، $r = |z|$ ، θ آرگومان اصلی عدد مختلط z است و $Arg(z) = \theta$ ، $-\pi < \theta \leq \pi$.

$\boxed{\text{شاخه اصلی تابع لگاریتم مختلط} \quad Ln\, z = Ln\, r + i\theta \ ; \ -\pi < \theta \leq \pi \ , \ r > 0}$

شاخه‌های فرعی تابع چندمقداری لگاریتم مختلط به صورت :

③ $\boxed{\ln z = \log(z) = \ln r + i\Theta}$ تعریف می‌شود که $\Theta = \theta + 2k\pi$ و $\theta = \arg(z)$

شاخه فرعی kام تابع لگاریتم مختلط $\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$ ④ $(2k-1)\pi < \Theta \leq (2k+1)\pi$ $\theta < \Theta < \theta + 2\pi$ در شاخه فرعی به عبارت

از تعاریف ③ و ④ می‌توان دید که $\theta = \pi$ یک بریدگی برای تابع چندمقداری لگاریتم مختلط است.

به عبارت دیگر بخش منفی محور حقیقی‌ها شامل مبدا در بر دارند. نقاط غیر تحلیلی (تکین) تابع $\ln z$ یا $\ln z$ باشد.

زیرا معادلات کشی ریمان برای نقاط واقع بر بخش منفی محور حقیقی‌ها شامل مبدا برقرار نیست.

شاخه اصلی $\ln z = \overbrace{\ln r}^{u} + \overbrace{i\theta}^{v}$

$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ u_\theta = -r v_r \end{cases} \leftrightarrow$ $\alpha = \pi$ بریدگی $\ln z$

مشتق جزئی u_r، $\frac{\partial u}{\partial r}$ با $\frac{1}{r}$ مشتق جزئی v_θ در یک همسایگی کوچک شامل نقاط با آرگومان $\pi = \alpha$ برابر نیست. توجه شود که v_θ، u_r، u_θ، v_r همگی در یک همسایگی کوچک در بخش منفی محور حقیقی‌ها موجودند و عدم برقراری معادلات کشی ریمان تحلیلی باعث وجود بریدگی $\pi = \alpha$ می‌باشد.

تذکر: تابع چندمقداری لگاریتم مختلط در بخش منفی محور حقیقی‌ها شامل مبدا، پیوسته است.

«« توضیحات صفحه ۶۳ »» بنابه بریدگی که خط باشد آن را برش پرتوی نامند

$\operatorname{Log} z = \operatorname{Ln} z = \ln r + i\theta$ $\quad -\pi < \theta < \pi \quad$ $\theta = \operatorname{Arg}(z)$

$\operatorname{Ln} z$ روی پرتو «برش» $\alpha = \pi$ تحلیلی نیست

پس برای هر θ که $-\pi < \theta < \pi$ تابع مقدار اصلی $\operatorname{Ln} z$ تحلیلی است «در معادلات کشی ریمان قطبی صدق می کند»

$u(r,\theta) = \ln r \to u_r = \frac{1}{r} \ , u_\theta = 0$

$V(r,\theta) = \theta \to V_r = 0 \ , V_\theta = 1$

با جایگذاری در معادلات کشی ریمان قطبی، استفاده از آنها کاملا مشتق پذیری داریم،

$\frac{d}{dz}(\operatorname{Ln} z) = e^{-i\theta}(u_r + i V_r) = e^{-i\theta}(\frac{1}{r}) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$ برای هر z که در بخش منفی محور حقیقی وجود نداشته باشد.

مشابه، شاخه‌های دیگر تابع لگاریتم $\ln z$ نیز برای z های غیر واقع بر پرتو $\alpha = \pi$ ، $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ ، نیز تحلیلی است داریم

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{z}$$

②

$e^{\ln z}$

خواص تابع لگاریتم مختلط:

① $\overset{\text{اگر}}{e^{\operatorname{Ln} z}} = z \ , \ \overset{\text{اگر}}{e^{\ln z}} = z \qquad e^{\ln z} = \overset{\text{ترکیب}}{(\exp \circ \ln)(z)}$

اما $z \neq \operatorname{Ln}(e^z)$ یا $\ln(e^z) = z$ لزوما برابر با z نیست

اثبات: $z = re^{i\theta} \to \ln z = \ln r + i\theta \to e^{\ln z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r}e^{i\theta} = re^{i\theta} = z$

$z = x+iy \to \ln(e^z) = \ln(\|e^z\|) + i\arg(e^z) \to \|e^z\| = e^x \ , \arg(e^z) = 2k\pi + y$

Subject:
Date

$\ln(e^2) = e^{~~\ldots~~} = Ln(e^x) + i(۲k\pi + y) = x + i(۲k\pi + y) = (x+iy) + i۲k\pi$

$= z + i۲k\pi \overset{k\neq0}{\neq} z$

۲) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ اما لزوماً تساوی $Ln(z_1 z_2) = Ln(z_1) + Ln(z_2)$ برقرار نمی‌باشد

توجه شود که در ثابت ۲ در رابطه اول گویای آن است که مقدار لگاریتم در شاخه‌ای برای $z_1 z_2$ با مجموع مقدار لگاریتم در شاخه‌ای برای z_1، برای z_2 برابر است. اما رابطه دوم گویای آن است مقدار لگاریتم در شاخه اصلی برای $z_1 z_2$ با مجموع مقدار لگاریتم در شاخه اصلی برای z_1، برای z_2 لزوماً برابر نیست. زیرا امکان دارد $Arg(z_1 z_2)$ از مجموع $Arg(z_1) + Arg(z_2)$ کمتر باشد.

مثال: نکته: $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$

مثال: $z_2 = 1+i$, $z_1 = i$ داریم $z_1 z_2 = i - 1$

$r_1 = 1 \quad Ln r_1 = ۰$

$Arg(z_1) = \frac{\pi}{۲} \qquad \ln(z_1) = i(\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi)$

$Arg(z_2) = \frac{\pi}{۴} \qquad \ln(z_2) = Ln(\sqrt{۲}) + i(\frac{\pi}{۴} + ۲k\pi)$

$r_2 = \|z_2\| = \sqrt{۲}$

$\ln(z_1 z_2) = \ln(\sqrt{۲} e^{i\frac{۳\pi}{۴}}) = Ln\sqrt{۲} + i(\frac{۳\pi}{۴} + ۲k\pi) \rightarrow \ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$

مثال: $z_1 = z_2 = -1$

$z_1 z_2 = 1$

$\theta = Arg(z_1) = Arg(z_2) = \pi \qquad \theta^* = Arg(z_1 z_2) = ۰$

$\|z_1\| = \|z_2\| = 1 \qquad r = \|z_1 z_2\| = 1$

$Ln(z_1) = \ln r_1 + i\theta = i\theta = i\pi \qquad Ln(z_1 z_2) = \ln r + i\theta^* = ۰$

$Ln(z_2) = i\pi$

$Ln(z_1 z_2) \neq Ln(z_1) + Ln(z_2)$

$\ln(z_1 z_2) = \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2) = (\ln r_1 + \ln r_2) + i(۲k\pi + \theta_1 + \theta_2)$

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \to z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$((\theta_i = \arg(z_i) = ۲k\pi + \theta_i \quad i = ۱, ۲))$

③ $\ln(\frac{z_1}{z_2}) = \ln z_1 - \ln z_2$ اما در حالت کلی $\text{Ln}(\frac{z_1}{z_2}) = \text{Ln} z_1 - \text{Ln} z_2$ برقرار نیست.

④ $\ln(z^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \ln z$

اثبات: $z = re^{i\theta} \to z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{۲k\pi+\theta}{n})} = \ln(z^{\frac{1}{n}}) = \ln(r^{\frac{1}{n}}) + i(\frac{۲k\pi+\theta}{n} + ۲l\pi)$

$= \frac{1}{n} \ln r + i\frac{\theta + ۲(k+l)\pi}{n} \quad ۰ \leq k \leq n-۱ , \ l \in Z$

به کمک الگوریتم تقسیم دیده می‌شود $P = nl + k$

که ← طرف چپ = طرف راست. طرف راست: $\frac{1}{n}(\text{Ln} z) = \frac{1}{n}(\text{Ln} r + i(۲p\pi + \theta)) = \frac{1}{n} \ln r + i\frac{۲p\pi+\theta}{n} \quad p \in Z$

⑤ به کمک خواص ①، ④ داریم با ترکیب exp با $\ln(z^{\frac{1}{n}})$

$z^{\frac{1}{n}} \overset{①}{=} e^{\ln(z^{\frac{1}{n}})} \overset{④}{=} \exp(\frac{1}{n} \ln z)$ ، $z^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n} \ln z)$ | n مقدار متمایز به ازای $k = ۰, \ldots, n-۱$

تعمیم نابت ⑦ ← $\ln(z^n) = n\ln(z)$ $\quad \text{Ln}(z^n) \neq n\text{Ln}(z)$

مثال، $z = i-۱$ $\quad \text{Ln}[(i-۱)^۲] \neq ۲\text{Ln}(i-۱)$

$z = i+۱ \to \text{Ln}[(i+۱)^۲] = ۲\text{Ln}(i+۱)$

ص ۴۸ مثال: هرگاه $Re(z_۱)>۰$ ، $Re(z_۲)>۰$ نشان دهید $Ln(z_۱z_۲) = Ln(z_۱) + Ln(z_۲)$

$Re(z_۱) \geq ۰ \longleftrightarrow -\frac{\pi}{۲} \leq Arg(z_۱) \leq \frac{\pi}{۲}$

$z_۱ = r_۱ e^{i\theta_۱}$ $\quad \theta_۱ = Arg(z_۱)$

$\rightarrow z_۱z_۲ = r_۱r_۲ e^{i(\theta_۱+\theta_۲)}$ $\quad -\pi \leq \theta_۱, \theta_۲ \leq \pi$

$z_۲ = r_۲ e^{i\theta_۲}$ $\quad \theta_۲ = Arg(z_۲)$

$Ln(z_۱z_۲) = ln(r_۱r_۲) + i(\theta_۱+\theta_۲) = ln(r_۱) + ln r_۲ + i\theta_۱ + i\theta_۲ = (ln r_۱ + i\theta_۱) + (ln r_۲ + i\theta_۲) = Ln z_۱ + Ln z_۲$

ص ۴۸ ۹ مثال - الف: $ln(i^۲) = ۲ln(i)$ $\quad \frac{\pi}{۴} < \theta < \frac{۹\pi}{۴}$

$i = e^{i\frac{\pi}{۲}} \rightarrow Arg(i) = \frac{\pi}{۲} = \theta$ $\quad |i| = ۱$

$i^۲ = -۱ \rightarrow Arg(-۱) = \pi$

$|i|^۲ = ۱$

$ln i = ln r + i\frac{\pi}{۲} = i\frac{\pi}{۲}$

$ln i^۲ = ln|۱| + i\pi = i\pi$

$ln(i^۲) = ۲ln(i)$

ب: $\frac{۳\pi}{۴} < \theta < \frac{۱۱\pi}{۴}$

$arg(i) =$ ؟

$i = e^{i\frac{۱۰\pi}{۴}}$ $\quad i^۲ = -۱ \rightarrow arg(i^۲) = \pi$

$ln(i) = i\frac{۱۰\pi}{۴}$ $\quad ln(i^۲) \neq ۲ln i$

$ln(i^۲) = i\pi$

z^c : c exp z^c cexp

$z^c = c\exp(c \ln z)$

تابع توانی مختلط :

$z^c = \exp(c \ln z)$ (c عدد مختلط ثابت)

مثال: $\ln i = i(2k\pi + \frac{\pi}{2})$ ، $\text{Ln}\, i = i\frac{\pi}{2}$ ← در شاخه‌ی اصلی

$i^{-2i} = \exp(-2i \ln i)$

$= \exp(-2i \cdot i(2k\pi + \frac{\pi}{2}))$

$= \exp(2(2k\pi + \frac{\pi}{2})) = e^{(4k+1)\pi}$

$z^{-c} = \frac{1}{z^c}$

تابع توانی z^c در شاخه‌ی اصلی $\text{Ln}\, z$ (یعنی: برای بخش منفی محور حقیقی ها شامل مبدا) تحلیلی نیست.

برش $\alpha = \pi$ ، $-\pi < \theta \le \pi$

و z^c در شاخه‌های فرعی $\ln z$ به ازای برش‌های $\alpha = \alpha_0$: $\alpha_0 < \alpha < 2\pi$ تحلیلی نیست.

بنابراین تابع توانی z^c جز روی برش‌های شاخه‌ی اصلی و فرعی $\ln z$ ، همه‌جا تحلیلی است و داریم :

$z \neq 0$ با اصلی یا فرعی $\frac{d}{dz} z^c = \frac{d}{dz}(\exp(c \ln z)) = \frac{c}{z}\exp(c \ln z) = \frac{c}{z} z^c = cz^{c-1}$

توجه: چون تابع $\ln z$ تابع چندشاخه‌ای است پس تابع توانی z^c نیز چندشاخه‌ای است و برای [illegible] تابع z^c تک‌مقداری است

تابع توانی c^z :

$c^z \underset{\text{تعریف}}{=} \exp(z \ln c) = e^{z \ln c}$

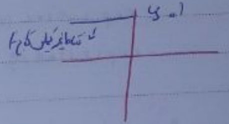
اگر نقطه‌ی c روی برش $\pi = \alpha$ یا برش‌های فرعی $\alpha = \alpha_0$ باشد
تابع توانی c^z غیرتحلیلی است در غیر اینصورت c^z تحلیلی است

$\frac{d}{dz}(c^z) = \frac{d}{dz}(e^{z \ln c}) = \ln c \cdot e^{z \ln c} = \ln c \cdot c^z$

Subject:
Date

مثال: نقاط غیر تحلیلی تابع $f(z)=\ln(z-i)$ را بیابید.

$$\left.\begin{array}{l} Re(z-i)\leqslant ۰ \\ Im\,z=۰ \end{array}\right] \leftrightarrow$$ نقاط غیر تحلیلی f



$z=x+iy \rightarrow z-i=x+i(y-1)$

$Re(z-i)\leqslant ۰ \leftrightarrow x\leqslant ۰$

$Im(z-i)=۰ \leftrightarrow y-1=۰$ $\rightarrow z=x+iy \quad x\leqslant ۰ \,.\, y=1$

توابع مثلثاتی معکوس مختلط:

$z=\sin w \longleftrightarrow w=\sin^{-1}z$

تعریف $= \dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{۲i} = e^{iw}-e^{-iw}-۲iz=۰ \xrightarrow{\times e^{iw}} e^{۲iw}-۲ize^{iw}-1=۰$

$\rightarrow t^{۲}-۲izt-1=۰ \rightarrow t=\dots \rightarrow e^{iw}=iz+(1-z^{۲})^{\frac{1}{۲}}$

لگاریتم گیری مختلط: $w=-iLn(iz+(1-z^{۲})^{\frac{1}{۲}})$

$w=-i\ln(iz+(1-z^{۲})^{\frac{1}{۲}}$ در شاخه فرعی

مشابهاً

$z=\cos w \longleftrightarrow w=\cos^{-1}z \qquad w=-i\ln(z+i(1-z^{۲})^{\frac{1}{۲}}$

$w=\tan^{-1}z \rightarrow z=\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}=\dfrac{\frac{e^{iw}\ e^{-iw}}{۲}}{\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{۲}} \rightarrow w=\frac{i}{۲}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$

$\dfrac{d}{dz}(\sin^{-1}z)=\dfrac{1}{(1-z^{۲})^{\frac{1}{۲}}} \;,\; \dfrac{d}{dz}(\cos^{-1}z)=-\dfrac{1}{(1-z^{۲})^{\frac{1}{۲}}} \;,\; \dfrac{d}{dz}(\tan^{-1}z)=\dfrac{1}{1+z^{۲}}$

PAPCO

توابع هذلولوی معکوس مختلط: $z = sh\,w \Leftarrow w = sh^{-1} z$

نگاشت های مختلط متداول

تابع خطی «نگاشت خطی»: نگاشت $w = Az + B$ که در آن A، B دو عدد مختلط ثابت هستند یک نگاشت خطی

① حالت خاص: $w = z + B \leftarrow A = 1$

$z = x + iy$, $B = B_1 + iB_2$

$w = z + B \rightarrow (x+B_1) + i(y+B_2) \xrightarrow{\text{در صفحه z ها}} (x,y) \xrightarrow{w} \overset{\text{در صفحه w ها}}{\overline{(x+B_1, y+B_2)}}$

در این حالت نگاشت w، نگاشت انتقال در صفحه مختلط C است به اندازه بردار B

② حالت خاص: $w = Az$ ، $B = 0$

$A = r_0 e^{i\theta_0}$ ثابت $\rightarrow r_0 = \|A\|$

$z = re^{i\theta}$ $\quad w = Az = rr_0 e^{i(\theta+\theta_0)}$

نگاشت دوران در صفحه مختلط C به اندازه θ_0 رادیان θ_0 می باشد. و با ضریب r_0 تصویر شده. انبساطی از این خاصیت ایجاد که یا انبساط برای $1 < r_0$، یا انقباض برای $1 > r_0$ می باشد

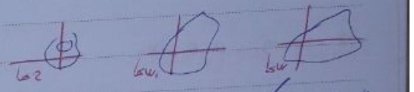
Subject:
Date

ملاحظه: اگر $A \neq 1$ و $B \neq 0$ آنگاه نگاشت خطی $w = Az + B$ بیان کننده دوران، انبساط ناحیه داده شده و سپس انتقال ناحیه تصویر شده تحت دوران انبساط است

تعبیر هندسی: انتقال + انبساط + دوران ≡ نگاشت خطی

نکته: تحت نگاشت خطی ناحیه تصویر شده، مشابه ناحیه اصلی است به عبارت دیگر نگاشت خطی حافظ هندسه ناحیه داده شده است

ترتیب عمل نگاشتن تابع خطی $w = Az + B$ به صورت زیر است.

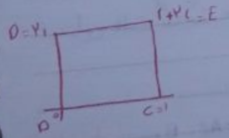


$$Z \xrightarrow[\text{دوران}]{w_1} w_1 = Az \xrightarrow[\text{انتقال}]{w} w = w_1 + B$$

نگاشت خطی ترکیبی از نگاشت دوران، نگاشت انتقال است

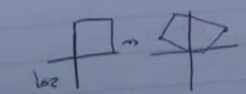
مثال: $w = (1+i)z + (۲-i)$ $A = 1+i \ , \ B = ۲-i$

تصویر ناحیه R تحت نگاشت خطی w



$\theta_0 = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{۴}$ انبساط $r_0 = \|A\| = \sqrt{۲} > 1$

$w_۲ = w_1 + B = w_1 + (۲-i)$



$w_1 = Az$

$o \xrightarrow{w_1} o$

$C = 1 \xrightarrow{w_1} 1+i = C'$

$E \xrightarrow{w_1} (1+۲i)(1+i) = -1+۳i = E'$

$D = ۲i \xrightarrow{w_1} (1+i)(۲i) = -۲+۲i = D'$

$o \xrightarrow{w_۲} ۲-i$

$C' \xrightarrow{w_۲} (1+i)+(۲-i) = ۳ = C''$

$E' \rightarrow (-1+۳i)+(۲-i) = 1+۲i = E''$

$D' \rightarrow (-۲+۲i)+(۲-i) = i = D''$

PAPCO

ubject :
Date

نگاشت $\frac{1}{z}$: نگاشت انعکاس.

$z \neq 0 \to w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = u + iv$

$z = x+iy$ $\quad z \xrightarrow[\text{مزدوج گیری}]{T_1} \bar{z} = w_1 \xrightarrow[\text{ضرب اسکالر}]{T_2} \frac{1}{\|z\|} w_1 \qquad T = T_2 \circ T_1 \qquad w = T(z) = \frac{\bar{z}}{\|z\|^2}$

تعبیر هندسی: $T(z) = \frac{1}{z}$ نگاشت انعکاس نسبت به دایره واحد $\|z\| = 1$ است

T_1: حافظ نرم و تغییر دهنده آرگومان $\qquad T_2$: حافظ آرگومان و تغییر دهنده نرم

$z \xrightarrow{w_1} \frac{z}{\|z\|^2} = w_1 \xrightarrow{w} \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} \qquad \operatorname{Arg}(w_1) = \operatorname{Arg}(z) \qquad \operatorname{Arg}(w) = -\operatorname{Arg}(w_1) = -\operatorname{Arg} z$

T نگاشت یک به یک و پوشا است. نقاط روی دایره واحد $\|z\| = 1$ تحت T روی دایره واحد باقی می‌ماند و روی خودشان تصویر می‌شوند. برای نقاط درون دایره واحد تصویرشان بیرون دایره واحد می‌باشد و برعکس

$\infty \xrightarrow{T=\frac{1}{z}} 0$

$0 \xrightarrow{T} \infty$

طریقه نگاشتن تابع انعکاس $\frac{1}{z}$

برای ناحیه داده شده D درون صفحه z که شامل خطوط و دوایر درون ناحیه D را تصویر کنیم، لازم است معادله‌ی خط، دایره را به کمک ⋆ تصویر کنیم.

$$\boxed{a(x^2+y^2) + bx + cy + d = 0}$$

خط و دایره در صفحه z ها

$a = 0 \to$ خط

$a \neq 0 \to$ دایره

Ⓘ $d = 0 \Leftarrow$ دایره گذرنده از مبدا

II $a \neq 0, d \neq 0 \Leftarrow$ " " غیر "

III $a = d = 0 \Leftarrow$ خط گذرنده از مبدا

IV $a = 0, d \neq 0 \Leftarrow$ " " غیر "

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \quad ⋆⋆$$

$$⋆ \to \boxed{d(u^2+v^2) + bu - cv + a = 0}$$

$T(z) = \frac{1}{z}$

خط و دایره در صفحه w ها

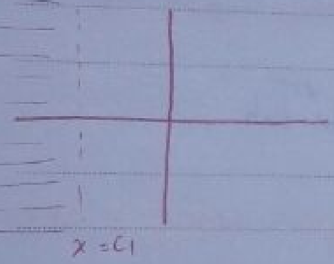
$I' = bu - cv + a = 0$ خط غیرگذرنده از مبدأ

$(II)' =$ دایره غیرگذرنده از مبدأ

$III' = bu - cv = 0$ خط گذرنده از مبدا

$IV' =$ دایره گذرنده از مبدا

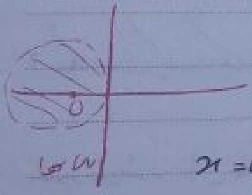
مثال ۷: $c_1 < 0$ ، تصویر نیم صفحه $x < c_1$ تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$



$$w = \frac{1}{z} = u + iv$$

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad x = \frac{u}{u^2+v^2}$$

$$v = \frac{-y}{x^2+y^2} \rightarrow y = \frac{-v}{x^2+y^2}$$



$$x = c_1 \Longleftrightarrow \frac{u}{u^2+v^2} = c_1 \rightarrow c_1(u^2+v^2) - u = 0 \qquad u^2 - \frac{u}{c_1} + v^2 = 0$$

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4c_1^2}$$

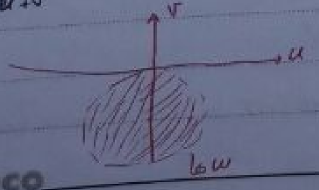
$O(\frac{1}{2c_1}$ [illegible] مرکز دایره ، $R = \frac{1}{2|c_1|}$ شعاع دایره

مثال ۹: $w = \frac{1}{z}$ ، تصویر $D = [(x,y);\ 0 < y < \frac{1}{2c}]$ تحت w ؟

معادلات تبدیل: $w = T(z) = \frac{1}{z} = u + iv$ ، $z = x + iy$ در نتیجه $u + iv = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$ $\rightarrow x = \frac{u}{u^2+v^2}$ ، $y = -\frac{v}{u^2+v^2}$

$$y = -\frac{v}{u^2+v^2} \qquad y = 0 \Longleftrightarrow v = 0 \qquad y = \frac{1}{2c} \Longleftrightarrow u^2 + v^2 + 2cv = 0 \rightarrow u^2 + (v+c)^2 = c^2$$

دایره به مرکز $(0,-c)$ و شعاع c



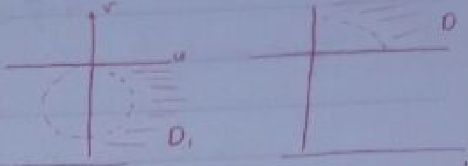
Subject:
Date

مثال ۱۴: $D=[(x,y),\ x\ge۰,\ ۰\le y\le ۱]$ ، $w=\frac{1}{z}$ تصویر D تحت w

$D\xrightarrow{w_1=\frac{1}{z}} D_1 \xrightarrow[\text{دوران } \frac{\pi}{۲}]{w_۲=iw_1} D_۲$ $\quad x\ge۰ \longleftrightarrow u\ge۰$

$۰\le y\le۱ \longrightarrow v\le۰$ ، $\frac{-v}{u^۲+v^۲}\le ۱ \to u^۲+v^۲+v\ge۰$

$\to u^۲+(v+\frac{1}{۲})^۲\ge\frac{1}{۴}$ بیرون دایره به مرکز [illegible] با شعاع $\frac{1}{۲}$



مثال ۱۵: تصویر ناحیه $x^۲-y^۲=۱$ «هذلولی» تحت $\frac{1}{z}$

$Z=re^{i\theta} \longrightarrow w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$ $\quad \theta=\operatorname{Arg} z \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \to x^۲-y^۲=r^۲(\cos^۲\theta-\sin^۲\theta)=r^۲\cos۲\theta$

$x^۲-y^۲=۱ \to r^۲\cos۲\theta=۱ \to r^۲=\frac{1}{\cos۲\theta}$ $\quad w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\overset{*}{=}\frac{1}{\sqrt{\cos۲\theta}}(\cos\theta-i\sin\theta)$

تصویر ناحیه D تحت w

تبدیل موبیوس «تبدیل خطی کسری» نگاشت $w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ که در آن $ad-bc\ne۰$ را تبدیل موبیوس می‌نامیم.

if $c=۰ \longrightarrow w=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ نگاشت خطی ، if $a=۰ \longrightarrow w=\frac{b}{cz+d}$ ترکیبی از نگاشت خطی، نگاشت انعکاس $\frac{1}{z}$

حالت کلی $c\ne۰ \to w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}$ ترکیبی از نگاشت انعکاس و نگاشت خطی

خطی ∘ انعکاس ∘ خطی = نگاشت موبیوس

$z\xrightarrow{\text{خطی}} cz+d=Z \xrightarrow{\text{انعکاس}} \frac{1}{Z}=w_1 \xrightarrow{\text{خطی}} \frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}w_1$

هرگاه $ad-bc\ne۰$ آنگاه نگاشت موبیوس $T(z)=w$ دارای وارون‌پذیر است داریم:

$w=\frac{az+b}{cz+d} \longrightarrow z=T^{-1}(w)=\frac{-dw+b}{cw-a}$

مجموعه‌های نگاشت موبیوس وارون پذیر تشکیل یک گروه است.

نکات ①: اگر $c=0$، نگاشت موبیوس $T(z)$ یک به یک است. یعنی هر نقطه از صفحه w ها تصویر دقیقاً یک نقطه از صفحه z ها است

② اگر $c\neq0$، هر نقطه تصویر دقیقاً یک نقطه از صفحه z ها است مگر برای $w=\frac{a}{c}$

$\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\cup[\infty]$ صفحه مختلط توسعه یافته، $T:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ آنگاه:

$c=0,\ T(\infty)=\infty$ $\qquad c\neq0,\ T(\infty)=\frac{a}{c}$ $\qquad T(-\frac{d}{c})=\infty$

نتیجه: نگاشت موبیوس روی صفحه مختلط توسعه یافته $\mathbb{C}^*$ یک به یک است

$c=0,\ T^{-1}(\infty)=\infty$, $c\neq0,\ T^{-1}(\frac{a}{c})=\infty$

$T^{-1}(\infty)=-\frac{d}{c}$

نگاشت موبیوس: $z \xrightarrow{\text{خطی}} cz+d \xrightarrow{\text{انعکاس}} w_1=\frac{1}{z} \xrightarrow{\text{خطی}} w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}w_1$

نحوه یافتن ضابطه نگاشت موبیوس: با داشتن حداکثر سه نقطه z_1, z_2, z_3، تصویر آنها w_1, w_2, w_3 می توان ضابطه نگاشت موبیوس بین نقاط z، w را بدست آورد.

$$\left(\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)}=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\right) \to w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

مثال: نگاشت موبیوس که بین نقاط $z_1=0$ و $z_2=i$، $z_3=-1$، تصویر $w_1=1$، $w_2=1$، $w_3=0$ را بیابید.

$$\frac{(w-1)(1)}{w(1-i)}=\frac{z(i+1)}{(z+1)i} \to w=-i\frac{z+1}{z-1}$$

$w\ .\ iw$

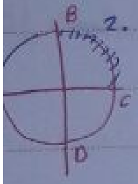
هرگاه در بین نقاط z_1, z_2, z_3 و یا تصویر آنها w_1, w_2, w_3 نقطه ∞ رخ دهد عبارت شامل ∞ در صورت و مخرج کسرهای ∞ حذف می شود و عبارت حاصل کسری ساده تر می شود، زیرا تبدیل موبیوس روی $\mathbb{C}^*$ یک به یک بوده، ∞ تصویر خودش یا نقطه دیگر است

مثال) تبدیل موبیوسی را بنویسید که نقاط $z_1=1$ ، $z_2=0$ ، $z_3=-1$ را که روی نقاط $w_1=i$ ، $w_2=\infty$ ، $w_3=1$ ببرد.

حذف عبارات شامل w_2 و نقاط z_2

$\rightarrow \frac{w-i}{w-1}=\frac{z-1}{z+1} \rightarrow w=T(z)=\frac{(1+i)z+(1-1)}{۲z}$

مثال: تصویر دایره واحد $|z|=1$ تحت $w=\frac{1+z}{1-z}$ ؟



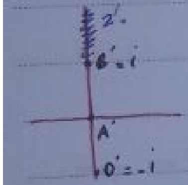
$A=-1$ $\quad A'=0$

$B=i \rightarrow w \rightarrow B'=\frac{1+i}{1-i}=i$

$C=1$ $\quad C'=\infty$

$D=-i$ $\quad D'=-i$

$\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1-1+۲i}{۲}=i$



$z_0=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

روی ربع اول مطلوبه،

$\frac{1-i}{1+i}$

$z_1=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ $\quad |z_1|=1$

نکته: نگاشت موبیوس همواره خط و دایره در صفحه zها به خط و دایره در صفحه wهای دیگر میبرد در واقع دایره به خط یا دایره به دایره است.

مثال: تصویر محور حقیقی ها تحت $w=\frac{1+z}{1-z}$ ؟

$A=0$ $\quad D=-\frac{1}{۲}$ $\quad A'=1$ $\quad D'=\frac{1}{۳}$

$B=\frac{1}{۲}$ $\quad E=-۲$ $\quad \xrightarrow{w}$ $\quad B'=۳$ $\quad E'=-\frac{1}{۳}$

$C=۲$ $\quad F=\infty$ $\quad C'=-۳$ $\quad F'=-1$

$T(z) \rightarrow w=\frac{a}{c}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}$ $\quad$ if $|\frac{a}{c}|=1 \rightarrow w=e^{i\alpha}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}$

if $|z_0|=|z_1| \longleftrightarrow |1-z_1|=|1-z_0|$

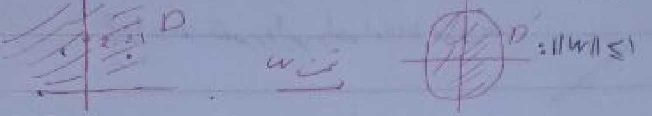
$z_0=\frac{b}{a}\ ,\ z_1=\frac{d}{c}$ $\quad$ یا $\quad \mathrm{Re}\,z_1=\mathrm{Re}\,z_0$

$z_1=\bar{z}_0$ یا $z_1=z_0$

در حالتی که $z_1 = z_0$ ← $w = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-z_0} = e^{i\alpha}$

در حالتی که $z_1 = \bar{z}_0$ ← $e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-z_1} = $ ∗∗∗ $w = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ نگاشت موبیوس سؤال شود

مثال: تصویر ناحیه $Im(z) \geq 0$ تحت نگاشت موبیوس.



$z_0 = i \to w = e^{i\alpha}\frac{z-i}{z+i} \to \|w\| = \frac{\|z-i\|}{\|z+i\|}$ $\|e^{i\alpha}\| = 1$

تصویر = $Im(z)$ تحت موبیوس.

$D' =$ داخل یا خط $Im z = 0$ در مرز حقیقی ها

$z_0 = 1 \to \bar{z}_0 = 1$ ← $w = e^{i\alpha}\frac{z-1}{z-1} = e^{i\alpha}$

$\alpha \in [0, 2\pi]$ دایره w

خط w به ازای هر α $e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}}$

نگاشت $w = z^2$ یا z^n

نگاشت z^n ناحیه داده شده D را به صورت زیر تصویربری کند. $z^n = r^n e^{in\theta}$

θ آرگومان نقاط ناحیه را n برابر کند. پس شعاع قطبی ناحیه D را به توان n می رسانیم

$w = z^2$ ، $D \{(x,y) \mid y \geq 0 , x^2+y^2 \le 1\}$

$D: 0 \le r \le 1$ و $0 \le r^2 \le 1$

$0 \le \theta \le \pi$ $0 \le 2\theta \le 2\pi$

$D': 0 \le \rho \le 1$

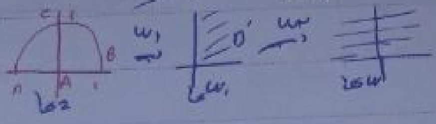
$0 \le \varphi \le 2\pi$

Subject:
Date

مثال: تصویر ناحیه $D=[(x,y): y\geq 0, x^{۲}+y^{۲}\leq 1]$ تحت $w=(\frac{1+z}{1-z})^{۲}$ سؤال ارشد

$w_1 = z \to \frac{1+z}{1-z} = -\frac{z+1}{z-1} = e^{i\pi}\frac{z-(-1)}{z-1}$ $\underline{\boxed{e^{i\pi}=-1}}$ $\alpha=\pi$

$-1=e^{i\alpha}\to\alpha=\pi$



$\|z\|=1$ درون دایره واحد $\xleftrightarrow[\text{سرسری}]{\text{نگاشت}}$ $\mathrm{Im}\,z\geq 0$ نکته ۳ ←

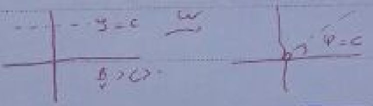
$T_1(z)=w_1=\frac{1+z}{1-z}$ ، $D\to D'$ مرحله اول نگاشت $w_{۲}=z_1\to(z_1)^{۲}$

$w=(\frac{1+z}{1-z})^{۲}=w_{۲}\circ w_1$ $D'=\left[\begin{array}{l}0\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲}\\ 0\leq r\leq+\infty\end{array}\right.\xrightarrow[\varphi=۲\theta,\ \rho=r^{۲}]{w_{۲}}\left[\begin{array}{l}0\leq\varphi\leq\pi\\ 0\leq r\leq+\infty\end{array}\right.$

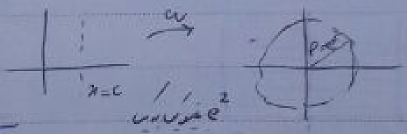
نگاشت نمایی مختلط: $w=\exp z=e^z$

$z=x+iy\to e^z=e^x\cdot e^{iy}=\rho e^{i\varphi}\leftrightarrow\|e^z\|=\rho=e^x$ ، $\varphi=\mathrm{Arg}(e^z)=y$

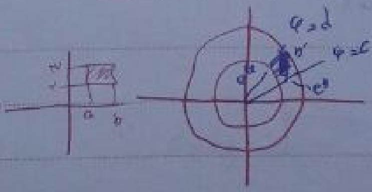
مثال: ① خط $y=c\xrightarrow{w}\varphi=c$ پرتو



② $x=c\xrightarrow{w=e^z}\rho=e^x=e^c$: دایره

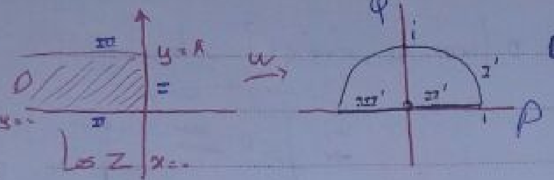


③ مستطیل: $\left[\begin{array}{l}a\leq x\leq b\\ c\leq y\leq d\end{array}\right.\xrightarrow{w}\left[\begin{array}{l}c\leq\varphi\leq d\\ e^a\leq\rho=e^x\leq e^b\end{array}\right.$



Subject:
Date

مثال: $w=e^z$ ناحیه $D=[(x,y): x\le 0,\ 0<y<\pi]$



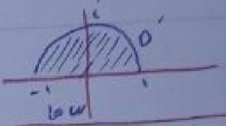
① پاره خط $x=0$, $0<y\le\pi$ $\xrightarrow{w}$ $\rho=1$, $0<\varphi\le\pi$ ①' نیم دایره واحد بالایی

(II) نیم خط $y=0$, $x\le0$ $\xrightarrow{w}$ (II)' $\rho=e^x$, $0<\rho\le1$, $\varphi=0$

(III) = نیم خط $y=\pi$, $x\le0$ $\xrightarrow{w}$ (III)' $0<\rho\le1$, $\varphi=\pi$ پاره خط

IV $x=c$, $y\ge0$ $\xrightarrow{w}$?

V $y=c$, $0<c<\pi$, $x\le0$ $\xrightarrow{w}$?



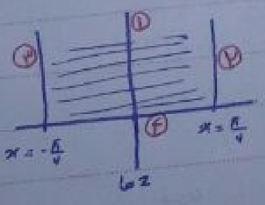
نیم دیسک بالایی = درون نیم دایره واحد بالایی = تصویر D تحت w

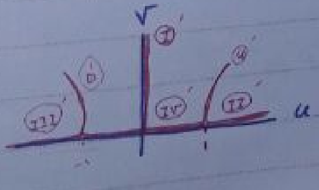
نگاشت $w=\sin z$

$\sin z=\sin x\,\text{ch}y+i\cos x\,\text{sh}y=u+iv$

$z=x+iy\to\begin{cases}u=\sin x\,\text{ch}y\\ v=\cos x\,\text{sh}y\end{cases}$

مثال:





② نیم خط قائم $x=\frac{\pi}{2}$, $y\ge0$ $\xrightarrow{w}$ $\begin{cases}u=\text{ch}y\ge1\\ v=0\end{cases}$ ②'

① $x=0$ نیم خط قائم $y\ge0$ $\xrightarrow{w}$ $\begin{cases}u=0\\ v=\text{sh}y\ge0\end{cases}$ ①'

③ نیم خط قائم $x=-\frac{\pi}{2}$, $y\ge$ $\xrightarrow{w}$ $\begin{cases}-\text{ch}y\le-1\\ v=0\end{cases}$ ③'

نمودار shy

نمودار chy

Subject:
Date

④ خط $y = ۰ \xrightarrow{w} \begin{cases} u = \sin x \to -۱ \leq u \leq ۱ \\ v = ۰ \end{cases}$ ⑤

$-\frac{\pi}{۲} \leq x \leq \frac{\pi}{۲}$

$-\frac{\pi}{۲} < c < ۰$

⑤ $x = c$, $y \geq ۰$ $\xrightarrow{w} \begin{cases} u < ۰ \\ v > ۰ \end{cases}$ ⑤ $u = |\sin c| \, ch\, y$, $v = |\cos c| \, sh\, y$ $\to \frac{u^۲}{\sin^۲ c} - \frac{v^۲}{\cos^۲ c} = ch^۲ y - sh^۲ y = ۱$

$\downarrow$ $\frac{u^۲}{a^۲} - \frac{v^۲}{b^۲} = ۱$ هذلولی در ربع ۲ام

⑥ $x = c$, $y \geq ۰$ $\xrightarrow{w} \begin{cases} u > ۰ \\ v > ۰ \end{cases}$ $u = |\sin c| \, ch\, y$, $v = |\cos c| \, sh\, y$ $\longrightarrow \frac{u^۲}{\sin^۲ c} - \frac{v^۲}{\cos^۲ c} = ۱$ $u > v > ۰$ ⑦

$۰ < c < ۲\pi$

$D \xrightarrow{w} D' = u \circ v$ نیم صفحه بالایی

تبدیل متوالی: تبدیل «دونگاشت» $w = T(z)$ را یک تبدیل متوالی گوییم هرگاه ترکیبی از نگاشت های متعددی باشد

$w = \cos z$ صورت تبدیل متوالی بیان می کنیم.

$w = \cos z = \sin(\frac{\pi}{۲} - z)$

$w_۱ : z \xrightarrow{\text{خطی}} \frac{\pi}{۲} - z = Z$ $\qquad w_۲ : Z \to \sin(Z) = w$ $\qquad w = w_۲ \circ w_۱$

مثال. $w = ch\, z$ صورت تبدیل متوالی بیان کنید.

$w = ch\, z = \cos(iz)$ $\qquad w_۱ : z \xrightarrow[\frac{\pi}{۲}\ \text{اندازه}]{\text{دوران}} iz = z_۱$, $A = i \to \|A\| = ۱$

$w_۲ : z_۱ \longrightarrow \frac{\pi}{۲} - z_۱ = Z$

$w = w_۳ \circ w_۲ \circ w_۱$

$w_۳ = Z \to \sin Z = w$

Subject:
Date

$sh\,z$ $-i \sin iz$

۳۰ ۱

تبدیل $w = sh\,z = -i \sin iz$

$w_1 : z \to iz = z_1$

$w_۲ : z_1 \to \sin z_1 = z$ $\qquad w_۳ = z \xrightarrow[\text{۹۰ درجه}]{\text{دوران}} -iz = w$ $\qquad w = w_۳ \circ w_۲ \circ w_1$

مثال: $w = \sin^۲ z$

$\sin^۲ z = \frac{1-\cos ۲z}{۲}$

$w_1 = z \xrightarrow{\text{ضرب}} ۲z = z_1$ $\qquad w_۲ = z_1 \xrightarrow{\text{انتقال}} \frac{\pi}{۲} - z_1 = z_۲$

$w = w_۴ \circ w_۳ \circ w_۲ \circ w_1$

$w_۳ = z_۲ \xrightarrow{\text{سینوس}} \sin z_۲ = z_۳$ $\qquad w_۴ = z_۳ \xrightarrow[\text{اندازه ۲}]{\text{انتقال به}} \frac{1-z_۳}{۲}$

نکته: هر نگاشت مختلط را می توان به صورت ترکیبی از نگاشت های مقدماتی بیان کرد. می توان آن را به صورت یک تبدیل متوالی نوشت.

مثال $w = z + \frac{1}{z}$

$z = re^{i\theta} \to \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \to re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} \to r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$

$w = (r + \frac{1}{r})\cos\theta + i(r - \frac{1}{r})\sin\theta$

مثال: تصویر ناحیه $D: r = c$ تحت w قبلی

$D: r = c \xrightarrow{w} (c + \frac{1}{c})\cos\theta + i(c - \frac{1}{c})\sin\theta = u + iv \to \begin{cases} u = (c + \frac{1}{c})\cos\theta \\ v = (c - \frac{1}{c})\sin\theta \end{cases}$

$\frac{u^۲}{(c + \frac{1}{c})^۲} + \frac{v^۲}{(c - \frac{1}{c})^۲} = 1 \qquad c \neq 1, \; c > 0$

در صفحه uov بیضی

PAPCO

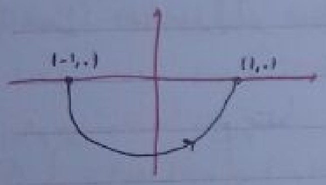
انتگرال معین تابع مختلط.

خم مختلط: نگاشت دوتایی $f(t) = x(t) + iy(t)$ که در آن توابع x و y توابع حقیقی پیوسته برحسب پارامتر t بر بازه $[a,b]$ تعریف می‌شوند را یک خم مختلط پارامتری می‌نامیم.

هر خم مختلط یک خم جهت‌دار از نقطه $f(a)$ تا نقطه پایانی $f(b)$ می‌باشد. هرگاه توابع حقیقی $x(t)$, $y(t)$ پیوسته باشند آنگاه خم مختلط $f(t)$ بر $[a,b]$ تکه‌ای یا پیوسته باشد.

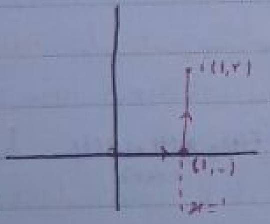
مثال: $f(t) = \cos t + i\sin t$

$-\pi \le t \le 0$



مثال: $f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 1 \\ 1 + i(t-1) & 1 \le t \le 2 \end{cases}$

$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1 \\ t-1 & 1 \le t \le 2 \end{cases}$



$f'(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ i & 1 < t < 2 \end{cases}$

$f(t)$ خم تکه‌ای هموار

در $t=0$, $t=1$, $t=2$ مشتق‌پذیر نیست

در بازه $(0,1)$ یا $(1,2)$ ، $f(t)$ هموار.

خم مختلط هموار: خم مختلط $f(t) = x(t) + iy(t)$ را بر بازه $a \le t \le b$ هموار نامیم هرگاه توابع حقیقی $x(t)$ ، $y(t)$ برای بازه به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند به‌طوری‌که دارای مشتق ناصفر باشد.

یعنی $f'(t) = x'(t) + iy'(t)$ $\quad \|f'(t)\| \neq 0$

$a \le t \le b$ $\quad x'(t) \neq 0$ یا $y'(t) \neq 0$

هم چنین خم مختلط $f(t)$ را بر بازه $a\le t\le b$ تکه‌ای هموار نامیم هرگاه توابع حقیقی $x(t)$ و $y(t)$ بر بازه $a\le t\le b$ تکه تکه مشتق پذیر باشند یعنی جز در تعداد متناهی نقطه بین a,b توابع $x(t)$ ، $y(t)$ در سایر نقاط بازه (a,b) مشتق پذیر باشند

مثال: $f(t)=t^{۳}+i(t^{۳}+۱)$ $-۱\le t\le ۱$

$f'(t)=۳t^{۲}+i(۳t^{۲})$ $-۱\le t\le ۱$ $\|f'(t)\|=\sqrt{۱۸t^{۴}}$ $f(t)$ خم هموار نیست

$\|f'(t)\|=0$ در $t=0$ $\rightarrow$ ولی تکه‌ای هموار است.

یعنی $f(t)$ به جز پارامتر $t=0$ برای سایر مقادیر t بین -۱ تا ۱ مشتق پذیر ناصفر است.

خم بسته مختلط: خم مختلط $f(t)=x(t)+iy(t)$ را یک خم بسته نامیم هرگاه $f(a)=f(b)$ $a\le t\le b$

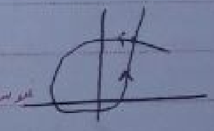
مثال: $f(t)=e^{it}=\cos t+i\sin t$ دایره واحد خم بسته است $0\le t\le ۲\pi$.

خم مختلط ساده: خم مختلط $f(t)=x(t)+iy(t)$, $a\le t\le b$ ساده نامیم هرگاه نمودار $f(t)$ خودتقاطعی نداشته باشد یعنی

$\nexists\ t_0,t_1 : f(t_0)=f(t_1)$

$a\le t_0 \ldots t_1\le b$ $t_0\ne t_1$


غیر ساده



خم ژوردن: خم بسته و ساده مختلط $a\le t\le b$ $f(t)=x(t)+iy(t)$ را خم ژوردن می‌نامیم

نکته: ملاحظه یک خم مختلط را می‌توان به صورت مختلف پارامتری کرد و آنرا نمایش داد

مثال: مجموع نقاطی که خم $f(t)=\begin{cases} t^{۳} & 0\le t\le ۱ \\ ۱+i(t-۱)^{۲} & ۱\le t\le ۲ \end{cases}$ مشخص می‌کند همان مجموع نقاطی است که خم

Subject:
Date

$g(t) = \begin{cases} t & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 1+i(t-1) & ; 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$ مشخص می کند. «به عبارت دیگر نوشتن خم مختلط منحصر به فرد نیست»

انتگرال معین خم مختلط: فرض کنید $f(t) = x(t) + i y(t)$ یک خم مختلط «تکه‌ای» پیوسته بر

$a \leq t \leq b$ باشد. آنگاه انتگرال معین تابع $f(t)$ بر بازه $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt\right) + i\left(\int_a^b y(t)\,dt\right) \in \mathbb{C} \quad *$$

خواص انتگرال معین مختلط.

① $Re\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b Re(f(t))dt$

$Im\left(\quad '' \quad \right) = \int_a^b Im(f(t))dt$

② $\int_a^b \gamma f(t)\,dt = \int_a^b (\gamma_1 x(t) - \gamma_2 y(t)) + i(\gamma_1 y(t) + \gamma_2 x(t))\,dt$

$$= \int_a^b (\gamma_1 x(t) - \gamma_2 y(t))\,dt + \int_a^b (\gamma_1 y(t) + \gamma_2 x(t))\,dt$$

$$\overset{*}{=} (\gamma_1 + i\gamma_2)\int_a^b f(t)\,dt \rightarrow \overbrace{\int_a^b \gamma f(t)\,dt = \gamma\int_a^b f(t)\,dt}$$

③ $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$

انتگرال مختلط روی خم مختلط: «انتگرال روی مرز»: فرض کنید $C: z(t) = x(t) + i y(t)$, $a \leq t \leq b$ یک خم مختلط و

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ تابع مختلط باشد که روی مرز خم C تکه‌ای پیوسته باشد. آنگاه انتگرال تابع $f(z)$

روی مرز مختلط C که با نماد $\int_C f(z)dz$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود

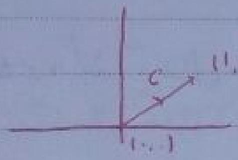
PAPCO

Subject:
Date

$$\left[\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t)).z'(t)dt \in \mathbb{C} \qquad dz = z'(t)dt \quad ** \right]$$

مثال. $f(z) = \bar{z}$ مطلوبست محاسبه $\int_C f(z)dz$ که $C: z(t) = t + it$, $۰ \le t \le ۱$

تابع $f(z)$ روی مسیرها هم پیوسته است



$$f(z(t)) = \overline{z(t)} = \overline{t+it} = t - it$$

$$z'(t) = ۱+i$$

$$f(z(t)).z'(t) = (t-it)(۱+i) = (t+t) + i(t-t) = ۲t$$

$$\int_C f(z)dz = \int_۰^۱ f(z(t))z'(t)dt = \int_۰^۱ ۲t\,dt = t^۲\Big|_۰^۱ = \boxed{1}$$

۱ خواص انتگرال روی مسیرها:

$f(z) = u + iv$ $\qquad x'(t)dt = dx$

$y'(t)dt = dy$

① $f(z(t))z'(t) = (ux' - vy') + i(uy' + vx')$

$$** \int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx$$

② هرگاه خم C نقطه A را به نقطه B وصل کند آنگاه خم "$-C$" همان مسیر از نقطه B به نقطه A است

$C: z = z(t) \rightarrow -C: z = z(-t)$

$a \le t \le b \qquad -b \le t \le a$

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

③ $\int_C \sigma f(z)dz = \sigma \int_C f(z)dz \qquad \sigma = \sigma_1 + i\sigma_۲$

PAPCO

④ جمع‌پذیری $\int_c (f(z) \pm g(z))\,dz = \int_c f(z)\,dz \pm \int_c g(z)\,dz$

⑤ $c = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_n$ هرگاه c به صورت اجتماع تشکیلی از خم‌های c_i باشد

$$\int_c f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_i} f(z)$$

$\max_c f(z) = M$ ، اگر M مقدار $f(z)$ در امتداد خم c

⑥ $$\left\| \int_c f(z)\,dz \right\| \le M \underbrace{\int_a^b z'(t)\,dt}_{L \ \text{طول قوس خم } c} = ML$$

مثال: $f(z) = \bar{z}$ ، $c: z(t) = e^{it}$ برای $\pi \le t \le 2\pi$ حاصل $\int_c f(z)\,dz$

$f(z(t)) = \overline{z(t)} = \overline{e^{it}} = e^{-it}$ $\qquad z'(t) = ie^{it}$

$f(z(t))\,z'(t) = i$ $\qquad \int_c f(z)\,dz = \int_\pi^{2\pi} f(z(t))z'(t)\,dt = \int_\pi^{2\pi} i\,dt = i\int_\pi^{2\pi} dt = \pi i$

مثال: $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ ، $\int_c f(z)\,dz = ؟$ که c دایره گذرنده از نقطه z_0 به شعاع R_0

$\|z - z_0\| = R_0 \to z - z_0 = R_0 e^{i\theta}$ $\qquad 0 < t < 2\pi$

$f(z(t)) = \frac{1}{z(t) - z_0} = \frac{1}{R_0 e^{it}} = \frac{1}{R_0} e^{-it}$ $\qquad z'(t) = iR_0 e^{it}$

$f(z(t))\,z'(t) = i \to \int_0^{2\pi} f(z(t))z'(t) = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$

قضیه کوشی - گورسا و تعمیم آن:

ناحیه همبند ساده: حوزه یا ناحیه درون صفحه C همبند ساده گوییم هرگاه D ناحیه همبند باشد و هر خم (منحنی) بسته ساده C درون D اختیار شود که جهت مثبت ((خلاف عقربه ساعت)) پیموده شد آنگاه محدوده درون خم C کاملا درون ناحیه D قرار گیرد.

ناحیه همبند: ناحیه یا حوزه D درون صفحه مختلط C هرگاه، هر دو نقطه آن را بتوان توسط یک خم (منحنی) پیوسته بهم وصل کرد به طوری که این مسیر کاملا درون ناحیه D قرار گیرد

در صورتی که ناحیه D همبند غیرساده باشد آن را همبند چندگانه می‌گوییم

جهت مثبت خم بسته ساده: هرگاه C یک خم بسته، ساده باشد و ناظری مسیر خم C را طی کند همواره ناحیه درون خم C را در طرف چپ خود ببیند گوییم C در جهت مثبت پیموده شده است

فرض کنید f(z) = u + iv یک تابع تحلیلی بر ناحیه همبند ساده R با مرز بسته ساده C باشد ((C = ∂R)) مطلوب است محاسبه $\oint_C f(z)\,dz$

«انتگرال مختلط f(z) روی مرز مختلط C هنگامی که C مرز بسته باشد، با $\oint_C f(z)dz$ بیان شود»

قضیه گرین: برای این کار لازم است توابع دو متغیره u(x,y)، v(x,y) بر روی و درون ناحیه R پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند:

$$\oint_C f(z)\,dz \overset{\text{ت}}{\underset{\text{ملال}}{=}} \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy$$

$$\underset{\text{قضیه گرین}}{=} \iint_R (-v_x - u_y)\,dA + i\iint_R (u_x - v_y)\,dA \xrightarrow[\text{ریمان}]{\text{صدق کردن در کشی}} 0$$

$$\boxed{\rightarrow \oint_C f(z)\,dz = 0}$$

C مرز بسته ساده

f تحلیلی
در کشی ریمان
صدق می‌کند
f = u + iv

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

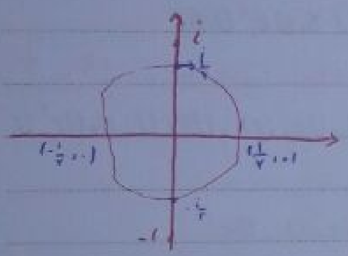
قضیه. هرگاه تابع مختلط $f(z) = u+iv$ بر ناحیه همبند ساده R تحلیلی باشد بطوریکه C مرز بسته ساده با جهت مثبت ناحیه R باشد «تابع $f(z)$ بر روی و درون مرز C تحلیلی باشد» آنگاه $\oint_C f(z)\,dz = 0$

مثال: $\int_{C\,\text{دایره}} z^2\,dz$

تام است

$f(z) = z^2$ ، پس f بر روی و درون دایره تحلیلی است $\xrightarrow{\text{قضیه کوشی گورسا}} \oint_C z^2\,dz = 0$

مثال $\int_{C: |z| = \frac{1}{2}} \frac{1}{z^2+1}\,dz$

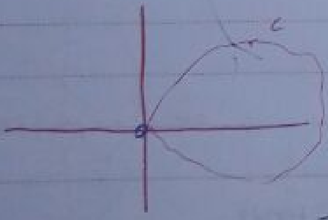


f در نقاط $z_1 = i$ ، $z_2 = -i$ غیر تحلیلی «ریشه های مخرج»

بنابه قضیه کوشی گورسا $\oint_C \frac{1}{z^2+1}\,dz = 0$

مثال: $\int_C \ln z\,dz$

C شامل مبدا نباشد
در قسمت راست محورها (C مرز بسته ساده)



$f(z) = \ln z$ بر مبدا و بخش منفی محور حقیقی ها تحلیلی نیست

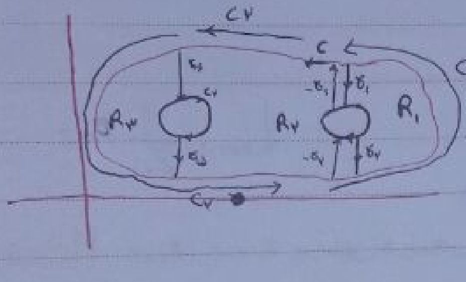
اما مرز بسته ساده C شامل این نقاط نیست پس $f(z)$ بر روی و درون مرز C تحلیلی است

بنابه قضیه کوشی گورسا: $\oint_C \ln z\,dz = 0$

تذکر: گاهی اوقات ممکن است که مرز بسته C ساده نباشد اما $\oint_C f(z)\,dz$ صفر شود. حتی این امکان وجود دارد که مرز غیر ساده C، بی نهایت بار خودش را قطع کند ولی $\oint_C f(z)\,dz$ صفر شود.

تعمیم قضیه کوشی-گورسا برای نواحی همبند چندگانه (ناحیه های غیرساده): هرگاه C یک مرز ساده بسته (در [illegible])

و C_i ، $i=1,2,\ldots,n$ مرزهای بسته ساده در مرز درونی از ناحیه همبند چندگانه R باشد به طوری که مرزهای درونی C_i با هم اشتراک نداشته باشند و R ناحیه بین مرز بیرونی C و مرز درونی C_i باشد و مرز C در جهت مثبت و مرزهای C_i همگی در جهت منفی «همان جهت مثبت» پیموده شده باشند و تابع مختلط $f(z)=u+iv$ بر ناحیه همبند چندگانه R تحلیلی باشد آنگاه $\oint f(z)\,dz = 0$



$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$

$\partial R_1 = C_1 \cup \gamma_1 \cup C_1^1 \cup \gamma_2$

$\partial R_2 = C_2 \cup \gamma_4 \cup C_2^1 \cup \gamma_3 \cup C_4 \cup -\gamma_2 \cup C_1^2 \cup -\gamma_1$

$\partial R_3 = C_3 \cup -\gamma_2 \cup C_2^2 \cup -\gamma_3$

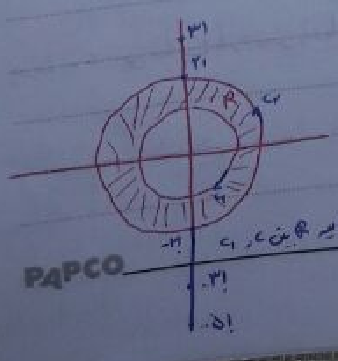
$$\partial R = \overbrace{(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4)}^{C} \cup \overbrace{(C_1^1 \cup C_1^2)}^{C_1} \cup \overbrace{(C_2^1 \cup C_2^2)}^{C_2}$$

نتیجه قضیه تعمیم کوشی گورسا:

$$\int_{\underset{\text{بیرونی جهت مثبت}}{C} \cup \underset{\text{درونی جهت منفی}}{C_1 \cup \cdots \cup C_n}} = 0 \rightarrow \underset{\text{بیرونی جهت مثبت}}{\oint_C f(z)dz} = -\underset{\text{درونی جهت منفی}}{\sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i}} f(z)dz = \underset{\text{درونی جهت مثبت}}{\sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i}} f(z)dz$$

مثال: $\int_{C \cup C_1} \frac{dz}{z^2(z^2+9)(z^2+25)}$

$C_1 = \|z\| = 1$ ~~[illegible]~~ درونی جهت منفی ، $C = \|z\| = 2$ بیرونی جهت مثبت



$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+9)(z^2+25)}$ ریشه‌های مخرج ← نقاط غیرتحلیلی f

$z_1 = 0$ ، $z_{2,3} = \pm 3i$ ، $z_{4,5} = \pm 5i$ نقاط غیرتحلیلی درون و روی مرزی ناحیه R واقع نیستند ← f بر R تحلیلی ← قضیه کوشی

$\int_{C \cup C_1} f(z)dz = 0$

Subject:
Date

قضیه: فرمول انتگرال کوشی: هرگاه تابع مختلط $f(z)=u+iv$ تابعی بر روی و درون مرز بسته ساده با جهت مثبت C تحلیلی باشد و z_0 نقطه درون مرز C باشد آنگاه:

$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ یا $\oint \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$

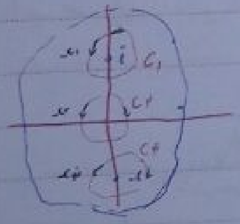
مثال: $\oint_{C:|z|=1}\frac{1}{z-z_0}dz=?$ ‏ z_0 درون C، مرز کراندار است

$f(z)=1$ تابع ثابت همه جا تحلیلی است، از تحلیلی است روی و درون مرز دارد

$\oint_C \frac{dz}{z-z_0}=2\pi i f(z_0)=2\pi i$

مثال: $\oint_C \frac{9z^2-iz+4}{z(z^2+1)}dz$ ‏ C مرز بسته ساده شامل مبدا، نقاط $\pm i$ «در جهت مثبت»

$z_1=0\,,\ z_2=i\,,\ z_3=-i$ ← ریشه‌های مخرج کسر، نقاط غیر تحلیلی تابع کسری



$\oint_C f(z)dz \overset{\text{تعمیم گورسا}}{=} -\underset{\text{جهت منفی}}{\oint_{C_1}} f(z)dz - \underset{\text{جهت منفی}}{\oint_{C_2}} f(z)dz - \underset{\text{جهت منفی}}{\oint_{C_3}} f(z)dz$

$=\underset{\text{جهت مثبت}}{\oint_{-C_1}} f(z)dz + \underset{\text{جهت مثبت}}{\oint_{-C_2}} f(z)dz + \underset{\text{جهت مثبت}}{\oint_{-C_3}} f(z)dz$

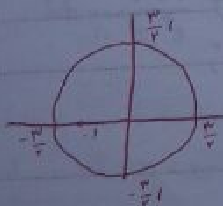
$f_1(z)=\frac{9z^2-iz+4}{z(z+i)}$ بر C_1 تحلیلی

$f_2(z)=\frac{9z^2-iz+4}{z^2+1}$ بر C_2 *

$f_3(z)=\frac{9z^2-iz+4}{z(z-i)}$ بر C_3 *

$=\oint_{-C_1}\frac{f_1(z)}{z-i}dz+\int_{-C_2}\frac{f_2(z)}{z-0}dz+\int_{-C_3}\frac{f_3(z)}{z+i}=[2\pi i(f_1(i)+f_2(0)+f_3(-i)]$

مثال: $\int_{C:|z|=\frac{3}{2}}\frac{\ln(1-\sin z)}{z+i}$



$\ln(1-\sin z)$ نقاط غیر تحلیلی ← $\begin{cases}Re(1-\sin z)\leq 0\\ Im(1-\sin z)=0\end{cases}$

Subject:
Date

۲۵

$\sin z = \sin x\, ch y + i \cos x\, sh y \to 1-\sin z = (1-\sin x\, ch y) + i(-\cos x\, sh y)$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} 1-\sin x\, ch y \leq 0 \\ \cos x\, sh y = 0 \end{cases} \to z = x+iy = \underset{k\in Z}{(۲k+1)}\frac{\pi}{۲} + iy$$

$F(z) = \ln(1-\sin z)$ روی درون دایره تحلیلی C

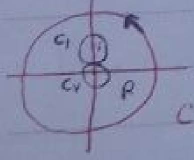
$$\oint \frac{F(z)}{z-z_0}dz = \oint \frac{\ln(1-\sin z)}{z+1}dz = ۲\pi i F(z_0) = ۲\pi i (\ln(1-\sin(-1)))$$

مثال: $\int_{C:|z|=۲} \frac{ch(\pi z)}{z(z-i)}$

$g(z) = \frac{ch(\pi z)}{z(z-i)}$

نقاط غیر تحلیلی $g(z)$ ← اشتراک مخرج کسر

$z_1 = 0 \; , \; z_۲ = i$



$C: |z| = ۲$

ناحیه همبند چندگانه بین مرز بیرونی C و مرزهای درونی
C_1 و $C_۲$ حول نقاط $z_1=0$ ، $z_۲=i$ درست میشه

$$\oint_{C\cup C_1\cup C_۲} g(z)dz = 0 \to \oint_C g(z)dz = -\oint_{C_1} g(z)dz - \oint_{C_۲} g(z)dz = \underset{\text{جهت مثبت}}{\oint_{-C_1}} - \underset{\text{جهت مثبت}}{\oint_{-C_۲}}$$

$\xrightarrow{\text{قضیه فرمول انتگرال کشی}} \oint_{-C_1} \frac{f_1(z)dz}{z-i} + \oint_{-C_۲} \cancel{g(z)dz} \frac{f_۲(z)dz}{z-0} \to \boxed{f_1(z) = \frac{ch(\pi z)}{z} \; , \; f_۲(z) = \frac{ch(\pi z)}{z-i}}$

$$= ۲\pi i f_1(z_1) + ۲\pi i f_۲(z_۲) = ۲\pi i\left(\frac{ch(\pi i)}{i} + \frac{ch(\pi 0)}{0-i}\right)$$

مثال: $\oint_{C:|z-1|=\frac{۳}{۲}} \frac{\sqrt{e^z+1}}{z^۲(z^۲-1)}dz$

$g(z) = \frac{\sqrt{e^z+1}}{z^۲(z^۲-1)}$

نقاط غیر تحلیلی تابع g ← نقاط غیر تحلیلی رادیکال
مرتبه ۲ و ریشه های مخرج کسر

$\underbrace{z_1 = 0}_{\text{تکراری}} \; , \; \underbrace{z_۲ = 1 \; , \; z_۳ = -1}_{\text{غیر تکراری}}$

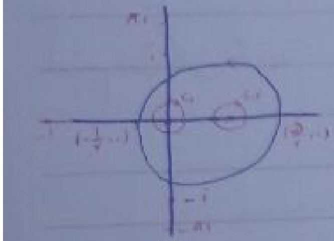
Subject:
Date

وقتی عبارت منفی حقیقی باشد $\begin{cases} Re(e^z+1) \leq 0 \\ Im(e^z+1) = 0 \end{cases}$ دارای $e^z+1 \longrightarrow \sqrt{e^z+1}$ نقاط غیر تحلیلی

$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y \rightarrow e^z+1 = e^x \cos y + 1 + ie^x \sin y$

$\rightarrow \begin{cases} Re(e^z+1) \leq 0 \\ Im(e^z+1) = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} e^x \cos y + 1 \leq 0 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases} \rightarrow \sin y = 0 \rightarrow y = k\pi$

$e^x(\pm 1) + 1 \leq 0 \rightarrow -e^x + 1 \leq 0 \longleftrightarrow e^x \geq 1 \rightarrow x \geq 0$



نقاط غیرتحلیلی $g(z)$ $z = x+iy = x+ik\pi$

$x \geq 0 \quad k \in Z$

$k \neq 0, 2, 4, \ldots$ k فرد

$k = 1 \rightarrow z = x + i\pi$ نقاط غیر تحلیلی هست

$k = -1 \rightarrow z = x - i\pi \rightarrow$ ولی درون c نیست

نقاط غیرتحلیلی $\sqrt{e^z+1}$ هیچکدام درون c نیستند و فقط نقاط غیر تحلیلی $z_1 = 0$ ، $z_2 = 1$ درون c هستند

بنابه قضیه کوشی گورسا $\oint_{C \cup C_1 \cup C_2} g(z)dz = 0 \longrightarrow \oint_C g(z)dz = \oint_{-C_1} g(z)dz + \oint_{-C_2} g(z)dz$

جهت مثبت [illegible] ساعت مثبت ساعت مثبت

از تعمیم فرمول انتگرال کوشی داریم:

$= \oint_{-C_1} \frac{f_1(z)}{\underset{z_1=0}{z-z_1}} dz + \oint_{-C_2} \frac{f_2(z)}{\underset{z_2=1}{z-z_2}} dz$

$f_1(z) = \frac{\sqrt{e^z+1}}{z^2-1} \quad , \quad f_2(z) = \frac{\sqrt{e^z+1}}{z^2(z+1)} \qquad = 2\pi i(f_1(z_1) + f_2(z_2))$

تعمیم فرمول انتگرال کوشی: هرگاه تابع $f(z)$ بر روی و درون مرز بسته ساده C با جهت مثبت تحلیلی باشد و نقطه z_0 درون مرز C باشد آنگاه: $\oint \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{n}(z_0)$ در حالت n = ۰ همان فرمول انتگرال کوشی است

این یعنی اگر تابعی تحلیلی باشد مشتق‌های مرتبه بالاتر دارد و آن را با استفاده از مشتق تابع بدست می آید

مثال: $\int_{C\,|z|=2} \frac{e^{-z}\cdot\tan(\frac{z}{2})}{z^2}dz$

تابع $e^{-z}\tan(\frac{z}{2})$ تحلیلی است و نقطه تکین $z_0 = 0$ که درون مرز است، تنها نقطه غیر تحلیلی $g(z)$ $\quad g(z)=\frac{e^{-z}\tan(\frac{z}{2})}{z^2}$

با تعمیم فرمول کوشی داریم:

$$\oint_C g(z)dz = \oint \frac{f(z)}{(z-0)^2}dz$$

$$f(z)=e^{-z}\tan(\frac{z}{2}) \quad = 2\pi i\,[f'(z_0)] = \frac{2\pi i}{2} = \pi i$$

$$f'(z) = -e^{-z}\tan\frac{z}{2} + \frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{z}{2}))e^{-z} \longrightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$

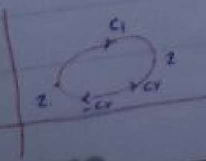
انتگرال نامعین مختلط: فرض کنید R ناحیه همبند ساده، و f بر R تحلیلی باشد حال اگر C_1 ، C_2 دو مرزی باشند که نقاط z_0, z درون ناحیه R را به هم وصل می کنند و مسیرهاشان تماماً درون R قرار گیرد آنگاه C_1, C_2 مرز بسته ای خواهند بود که با قضیه کوشی گورسا داریم:

$$\int_C f(z)dz = 0 \longleftrightarrow \int_{C\cup(-C_2)} f(z)dz = 0 \longleftrightarrow \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz = 0$$

$$\rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

در اینصورت تعریف انتگرال نامعین تابع تحلیلی $f(z)$ بر یک مرز C بصورت مقابل، بصورت زیر بیان می شود

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$



که در آن C هر مسیر واصل از نقطه z_0 تا نقطه z است و داریم $\frac{d}{dz}F(z) = f(z)$

«قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع تحلیلی»

قضیه موررا «در برعکس کوشی گورسا»: هرگاه تابع مختلط $f(z)$ بر ناحیه همبند ساده R پیوسته باشد و برای هر خم بسته ساده C که در ناحیه R است داشته باشیم $\oint_C f(z)dz = 0$ آنگاه f بر R تحلیلی است «به کمک تعریف انتگرال معین»

$f(z)$ تحلیلی بر R است ← $F(z)$ تحلیلی است $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz \rightarrow$

قضیه ماکزیمم قدر مطلق «نُرم»:

لم: اگر تابع $f(z)$ در یک همسایگی حول نقطه z_0 تحلیلی و غیرثابت باشد آنگاه حداقل یک z موجود است که $\|f(z)\| > \|f(z_0)\|$ «یعنی هیچ نقطه ماکزیممی در مرکز دیسک حول نقطه z_0 به شعاع ثابت موجود نیست»

① قضیه: اگر f در درون یک ناحیه تحلیلی و غیرثابت باشد آنگاه تابع حقیقی $\|f(z)\|$ دارای هیچ مقدار ماکزیممی در داخل آن ناحیه نیست «یعنی مقدار ماکزیمم $\|f(z)\|$ روی مرز ناحیه یافت می‌شود»

② قضیه لیوویل: اگر تابع $f(z)$ بر صفحه مختلط، کراندار و تام باشد آنگاه $f(z)$ ثابت است

③ هر چند جمله‌ای $P_n(z)$ که $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ، $n \geq 1$ ، حداقل یک ریشه دارد $[\exists z_0 , P(z_0) = 0]$ و بعلاوه، $P_n(z)$ ، n ریشه‌های خود را اختیار کند $P_n(z) = (z - z_1)\dots(z - z_n)$

سری لوران: فرض کنید C_1 ، C_2 دوایر به مرکز نقطه z_0 باشند و شعاع‌های r_1 ، r_2 باشند که $r_2 < r_1$

فرض کنید تابع f(z) بر ناحیه بین C_1 ، C_2 «ناحیه طوق شکل با مرزهای C_1 ، C_2»

تحلیلی باشد «یعنی $r_2 \leq |z-z_0| \leq r_1$ ؛ $\forall z$ ، f(z) تحلیلی باشد»

در اینصورت تابع f(z) در همه نقاط z که $r_2 \leq |z-z_0| \leq r_1$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \quad *$$

که در آن C_1 ، C_2 مرزهای با جهت مثبت، ضرایب a_n ، b_n از روابط زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \dfrac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{n+1}} \\ \\ b_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \dfrac{f(s)\,ds}{(s-z_0)^{n+1}} \end{cases} \quad **$$

در اینصورت بخش $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ را سری تیلور تابع f(z) در ناحیه $r_2 < |z-z_0| \leq r_1$ می‌نامیم

« تحلیلی بودن تابع f(z) در نقطه $z=z_0$ فرضا معلوم نیست »

نکته ۵. هرگاه شعاع r_1 آنقدر بزرگ شود « $r_1 \to \infty$ » تا به اولین نقطه غیر تحلیلی f(z) برسد و شعاع r_2 آنقدر کوچک شود ($r_2 \to 0$) تا به اولین نقطه غیر تحلیلی f(z) برسد در حالت $r_1 = \infty$ و $r_2 = 0$ هیچ نقطه غیر تحلیلی برای f(z) یافت نمی‌شود پس f(z) بر سراسر صفحه مختلط C تحلیلی «تام» است و در نتیجه « بنا به فرمول انتگرال کوشی » $\forall n \geq 0 : b_n = 0$

و تابع f(z) به صورت سری تیلور $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ نوشته می‌شود یعنی f(z) در همه نقاط z حول z_0 تحلیلی است «تیلور z، z_0 تحلیل است»
۴ در کل سری

قضیه، هرگاه تابع مختلط f(z) در یک همسایگی حول نقطه z_0 تحلیلی است اگر و تنها اگر f(z) به صورت سری تیلور حول نقطه

$z=z_0$ نوشته شود $\forall (z \in N(z_0)$ ، $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ، $a_n=\frac{f^n(z_0)}{n!}$

$$\longleftrightarrow f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\dots$$

نکته①: اگر $a_0 \neq 0$ ، $a_1 \neq 0$ یا $a_2 \neq 0$ در این صورت تابع $f(z)$ معادل در نقطه $z=z_0$ غیرتحلیلی است ، $f(z)$ دارای بسط تیلور و لوران حول نقطه z_0 باشد به عبارت دیگر همه ضرایب a_n ها باهم صفر نیستند

مثال: $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ بسط تیلور و بسط لوران $f(z)$ را در $z=0$ بیابید.

چون تابع $\frac{1}{z}$ در نقطه $z_0=0$ تحلیلی نیست پس $f(z)$ در $z_0=0$ تحلیلی نیست.

سری توانی: مجموع نامتناهی جمله به فرم $a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ را سری توانی حول نقطه $z=z_0$ با ضرایب a_n می‌نامیم.

همگرایی و واگرایی سری توانی، هرگاه سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ برای تمام z حول نقطه z_0 در دیسک همگرا که در رابطه $\exists r: \|z-z_0\|<r$ صدق کند به یک عدد مختلط ختم شود آنگاه سری توانی داده شده در ناحیه $D=\{z \mid \exists r,\ \|z-z_0\|<r\}$ همگرا گوییم در غیر اینصورت بیرون ناحیه ذکر شده D سری توانی را واگرا گوییم

قضیه تیلور برای توابع تحلیلی مختلط: هرگاه تابع مختلط $f(z)$ در درون دیسک همگنی حول نقطه z_0 به شعاع r یعنی $\|z-z_0\|<r$ تحلیلی باشد آنگاه $f(z)$ به صورت یک سری توانی به فرم زیر بیان می‌کند

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\dots+\frac{f^{n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

این سری توانی را سری تیلور $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ می نویسیم. در حالت خاص $z_0=0$ سری تیلور $f(z)$ را سری مک لورن حول $z_0=0$ گوییم

مثال: سری مک لورن این توابع

۱) $f(z)=e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\quad \forall z\quad |z|<\infty\quad 1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots$

۲) $f(z)=\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots$

۳) $f(z)=\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots$

۴) $f(z)=\operatorname{ch} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+$

$f(z)=\operatorname{sh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots$

$|z|<1$ تحلیلی بر $\boxed{f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n}$ ۲

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

ادامه مثال:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots\rightarrow e^{\frac{1}{z}}=\underset{\text{بخش تیلور } e^{\frac{1}{z}}}{1}+\underbrace{\frac{1}{z}+\frac{\frac{1}{2!}}{z^2}+\frac{\frac{1}{3!}}{z^3}}_{\text{سری لوران } e^{\frac{1}{z}} \text{ حول } z_0=0}+\dots$$

$z\rightarrow\frac{1}{z}$ تغییر متغیر

$a_0=1$

$a_n=0$

$n\geq 1$

$b_n=\frac{1}{n!}\qquad b_1=1,\ b_2=\frac{1}{2},\ b_3=\frac{1}{6}\ —$

یکتایی سری توانی مختلط: هرگاه تابع مختلط $f(z)$ در ناحیه $|z-z_0|<r$ حول نقطه $z=z_0$ تحلیلی باشد و سری توانی آن به صورت $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ باشد آنگاه این سری همان سری تیلور است به عبارت دیگر سری توانی تابع $f(z)$ همان سری تیلور تابع است

نکته ④: در سری لوران یک تابع مختلط f(z) در ناحیه $0<|z-z_0|<R$ ضریب b_1 اهمیت ویژه‌ای دارد

$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C:|z-z_0|=r} f(z)dz \Rightarrow \boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i b_1}$ * ⑤ در این صورت ضریب b_1 را مانده تابع در نقطه $z=z_0$ در ناحیه

داده شده R می‌خوانیم و آن را با $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1$ نمایش می‌دهیم

مثال: $\int_{C:|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = ?$ $b_1 = ①$

$\int e^{\frac{1}{z}} dz \overset{*}{=} 2\pi i b_1 = 2\pi i$ ، $b_1 = 1$ مانده f(z) در نقطه $z_0=0$ ... $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{\frac{1}{2!}}{z^2} + \frac{\frac{1}{3!}}{z^3} + \dots$

تذکر: رابطه * در حالت بعدی به کمک تعریف مانده‌ها انتگرال گیری با روش این تعریف مطالعه می‌شود

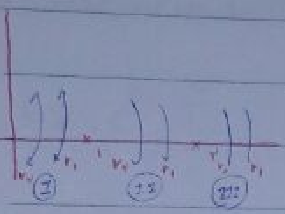
نکته ⑤: هرگاه تابع مختلط f(z) در سراسر دایره C با شعاع بزرگتر $|z-z_0|$ در درون دایره C تحلیلی باشد آنگاه ضرایب تیلوری

a_n همان $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ می‌باشد به کمک فرمول انتگرال کوشی به صورت $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$

$\frac{1}{1-z} = \sum_{0} z^n , \|z\|<1$

بدست می‌آید و ضرایب لوران b_n با تغییر متغیر n به $-n$ مشابه ضرایب a_n بدست می‌آید.

مثال: $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ سری های لوران $f(z)$ را بیابید حول نقطه $z_0 = 0$



نقاط غیر تحلیلی $f(z)$ هم $z_1 = 1$, $z_2 = 2$

Ⅰ: $r_2 \to 0$, $r_1 \to 1$

Ⅱ $r_2 \to 1$, $r_1 \to 2$

Ⅲ $r_2 \to 2$, $r_1 \to \infty$

Ⅰ $R: 0 < \|z - z_0\| < 1$, $z_0 = 0$

Ⅱ $R: 1 < \|z - z_0\| < 2$, $z_0 = 0$ نقطه

Ⅲ $R \ \|z - z_0\| > 2$, $z_0 = 0$

الف: سری لوران $f(z)$ حول $z_0 = 0$ در ناحیه Ⅰ

$0 < \|z - z_0\| < 1 \quad R. \quad 0 < \|z\| < 1$

تجزیه کسر $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} \to \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} \xrightarrow{*} -\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\|z\|<1$

$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \overset{**}{=} \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \to f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

✓ $R \ \|z\| < 1 = \|\frac{z}{2}\| < \frac{1}{2}$

سری لوران تابع حول z_0 در ناحیه $\|z\|<1$

$\to = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1 + \frac{1}{2^n}) z^n}_{\text{تیلور است}}$, $a_n = -1 + \frac{1}{2^n}$

ب: سری لوران $f(z)$ حول $z_0 = 0$ در ناحیه Ⅱ

$R. \ 1 < \|z\| < 2$

$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = t \cdot \frac{1}{1-t} \overset{**}{=} t \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$

$t = \frac{1}{z}$

$\|z\| > 1 \to \frac{1}{\|z\|} < 1 \quad \|z\| > 1 \Leftrightarrow \|t\| < 1$

$-\frac{1}{z-۲} = \frac{1}{۲-z} = \frac{1}{۲}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{۲}} = \frac{1}{۲}\cdot\frac{1}{1-s} \overset{**}{=} \frac{1}{۲}\sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{۲}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{۲^n} = \sum \frac{z^n}{۲^{n+1}}$

$|z|<۲$

$s = \frac{z}{۲} \qquad |z|<۲ \Leftarrow |\frac{z}{۲}|<1 \Leftarrow |s|<1$

ج: سری لوران $f(z)$ حول $z=0$ در ناحیه (III) $\quad R \quad |z|>۲$

$(z-1)$

$\frac{1}{z-1} \xrightarrow{\text{حالت ب}} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} \; ; \; |z|>۲>1$

$-\frac{1}{z-۲} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{۲}{z}} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-u} \overset{**}{=} -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} u^n = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}\frac{۲^n}{z^n} = -\sum\frac{۲^n}{z^{n+1}}$

$|u|<1 \qquad |z|>۲$

$u = \frac{۲}{z} \to |u| = \frac{۲}{|z|}$

$|z|>۲ \to \frac{۲}{|z|}<1$

$|z|>۲ \to |u|<1$

سری لوران $f(z)$ در ناحیه III

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{۲^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-۲^n}{z^{n+1}}$

$a_n = 0$

$b_n = 1-۲^n$

یادآوری: جمع و ضرب سری های لوران:

الف: هرگاه سری های توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ، $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ داده شده باشند جمع و تفریق سری های توانی

به صورت زیر است

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(z-z_0)^n$

ب: ضرب کشی سری های توانی

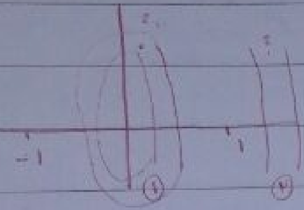
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$

که در آن $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$c_0 = a_0 b_0 \qquad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \ldots$

تمرین: سری لوران $f(z)=\frac{1}{1-z^2}$ حول $z=1$ بیابید.



نقاط غیر تحلیلی f ریشه های مخرج کسر $z_1=-1, z_2=1$

$|z|<1$

① $|z-1|>2$

تجزیه $f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}$

$\downarrow$

② $|z-1|<2$

① $|z-1|>2$

$-\frac{1}{z-1}$ [illegible] $\rightarrow f(z)=\sum a_n(z-1)^n+\sum\frac{b_n}{(z-1)^n}$

$$\boxed{\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n \quad |z|<1 \quad ✱}$$

$$\frac{1}{z+1}\overset{\text{بازنویسی}}{=}\frac{1}{2+(z-1)}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{2}{z-1})}$$

$t=-\frac{2}{z-1}$ $\quad |t|<1 \rightarrow |-\frac{2}{z-1}|<1 \rightarrow |z-1|>2$

$$✱=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{z-1}\sum\left(\frac{-2}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(z-1)^{n+1}}$$

$$\rightarrow f(z)=-\frac{1}{z-1}+\sum\frac{(-1)^n2^n}{(z-1)^{n+1}}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(z-1)^{n+1}}}_{|z-1|>2}$$

بسط لوران [illegible]

② $|z-2|<2$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2+(z-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z-1}{2})}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^{n+1}} \longrightarrow f(z)=\underbrace{-\frac{1}{z-1}}_{\text{بخش اصلی}}+\underbrace{\sum\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^{n+1}}}_{\text{بخش تحلیلی}}$$

$|z-1|<2$

$t=-\frac{z-1}{2}$ $\quad |t|<1 \rightarrow |-\frac{z-1}{2}|<1 \rightarrow |z-1|<2$

صفر تابع تحلیلی مرتبه: فرض کنید $f(z)$ یک تابع تحلیلی بر حوزه D باشد نقطه $z_0 \in D$ را صفر تابع تحلیلی $f(z)$ نامیم هرگاه $f(z_0)=0$. چون $f(z)$ بر D تحلیلی است پس دارای سری تیلور حول نقطه z_0 [illegible] می‌باشد داریم:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} , f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z-z)^n \quad (**)$$

نکته: اگر z_0 صفر تابع $f(z)$ آنگاه $a_0=f(z_0)=0$

صفر مرتبه m ام تابع تحلیلی: هرگاه z_0 صفر تابع تحلیلی $f(z)$ در یک حوزه D باشد بطوریکه $f^{(m-1)}(z)=\dots=f'(z_0)=f(z_0)=0$ $1\le m$ ولی $f^{(m)}(z_0)\neq 0$ آنگاه z_0 را صفر مرتبه m ام تابع تحلیلی $f(z)$ بر حوزه D می‌نامیم و از رابطه ** داریم

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z)^2+\dots+\frac{f^{(m-1)}(z)}{(m-1)!}+\frac{f^{(m)}(z)}{m!}(z-z)^m+\dots$$

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \overset{\text{تغییر}}{\underset{\text{اندیس}}{=}} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k+m)}(z_0)(z-z)^{k+m}}{(k+m)!}=(z-z_0)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k+m)}(z)(z-z)^k}{(k+m)!}$$

نکته: هرگاه $m=1$ باشد نقطه z_0 را صفر ساده $f(z)$ می‌نامیم و اگر $m>1$، z_0 را صفر غیرساده (مکرر) مرتبه m ام $f(z)$ می‌گوییم

نکته ①: صفرهای تابع $\sin z$ ، $\cos z$ ، $sh z$ ، $ch z$ ، e^{az+b} از مرتبه یک (ساده هستند) و صفر عبارت $(z-z_0)^n$ از مرتبه n ام است

مثال: $f(z)=z\,sh(z^2)$

$$sh z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots \qquad f(z)=z^3+\frac{z^7}{3!}+\frac{z^{11}}{5!}+\dots$$

صفر $f(z)$ مرتبه سوم $z=0$

$$=z^3\left(1+\frac{z^4}{3!}+\frac{z^n}{5!}+\dots\right)$$

Subject:
Year: Month: Date:

NOTE BOOK

یادآوری ①: هرگاه توابع تحلیلی $f(z), g(z)$ در $z=z_0$ دارای صفر مشترک باشند که از مرتبه‌های به ترتیب n, m $(m\leq n)$ باشند آنگاه الف: تابع $\alpha f+\beta g$ دارای $z=z_0$ به عنوان صفری باشد که از مرتبه m است

ب: تابع $f(z)g(z)$ دارای $z=z_0$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $m+n$ است

ج: تابع $\frac{f(z)}{g(z)}$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $n-m$ 〃

② قضیه روشه: فرض کنید $f(z), g(z)$ توابع تحلیلی باشند که بر درون و بر خم ساده و بسته C تحلیلی باشند و $\|g(z)\| \leq \|f(z)\|$ $\forall z\in C$ آنگاه صفرهای تابع $f(z)+g(z)$ و تابع $f(z)$ درون C برابرند.

مثال: $z^{7}-4z^{3}+z-1=0$ جواب این معادله را در داخل دایره $C: \|z\|=1$ را بیابید

$g(z)=z^{7}+z-1 \Rightarrow \|g(z)\| \leq \|z\|^{7}+\|z\|+1 \leq 3$ جمع چند جمله‌ای تحلیلی

$f(z)=-4z^{3} \Rightarrow \underset{\text{روی دایره } C}{\|f(z)\| \leq 4}$

طبق قضیه روشه صفرهای $z^{7}-4z^{3}+z-1$ با صفرهای $-4z^{3}$ درون C برابر است، چون $f(z)$ روی درون C نقطه $z=0$ با تکرار ۳ دارد پس معادله داده شده نقطه z درون یا روی درون C است.

قضیه: هرگاه z_0 یک صفر تابع تحلیلی f در نقطه z_0 تحلیلی باشد آنگاه همسایگی حول z_0 موجود است که $f(z)$ در تمام آن همسایگی صفری نداشته باشد مگر $f(z_0)=0$ یعنی صفرهای تابع تحلیلی تنها (ایزوله هستند)

Arang

مثال: $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$ در سراسر $\mathbb{C}$ تام، در اینصورت

[illegible]

$S = \{\underset{\text{صفرهای } f}{z\in\mathbb{C}} \mid f(z)=0\}$ بسته و کراندار در $\mathbb{C}$ ← $\mathbb{C} = S$ ← $f(z)=0$ ← $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

نتیجه: هرگاه تابع $f(z)$ در ناحیه بسته و کراندار D تحلیلی باشد و $S\subset D$ شامل تعداد نامتناهی از صفرهای f باشد

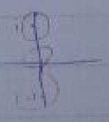
«صفرهای f هم خیلی نزدیک شوند» آنگاه f در سراسر D متحد با صفر است «$f \equiv 0$»

نتیجه: هرگاه تابع مختلط گویای $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ داده شده باشد بطوریکه صفرهای $Q_m(z)$ تنها «دور از یکدیگر» باشند ($P_n(z)$ و $Q_m(z)$ چندجمله‌ای به ترتیب با درجه n, m هستند) در اینصورت صفرهای $Q_m(z)$ تنها نقاط غیر تحلیلی $\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ است و بطور کلی در تابع گویا محل نقاط غیر تحلیلی صفرهای مخرج کسر بدست می‌آید.

نقطه تکین تابع مختلط: نقطه $z=z_0$ را نقطه تکین تابع $f(z)$ گوییم هرگاه f در z_0 تحلیلی نباشد اما در هر همسایگی شامل z_0 تابع $f(z)$ حداقل دارای یک نقطه تحلیلی باشد.

مثال $f(z)=\frac{1}{z} \to z_0=0$ تنها نقطه تکین $f(z)$

مثال $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+1)} \underset{\text{صفرهای مخرج}}{\overset{\text{نقاط تکین}}{\longleftrightarrow}} z_0=0 ,\ z_1=i ,\ z_2=-i$ تکین تنها



مثال $f(z)=\operatorname{Ln} z$ نقاط تکین: $\{z \mid Re(z)\le 0 ,\ Im(z)=0\}$

$f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{z})} \xrightarrow[\text{صفر مخرج}]{\text{نقاط تکین}} \sin(\frac{\pi}{z}) = 0 \to \frac{\pi}{z} = n\pi \to z_n = \frac{1}{n}$ هم $z=0$ و هم صفرهای مخرج کسر

مثال: $f(z)=\frac{\sin z}{z}$

$z_0=0$ ← صفرهای مخرج کسر ← نقطه تکین f

$z_0=0$ تکین برداشتنی ← $\frac{\sin z}{z}=\underbrace{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\dots}_{\text{بخش تحلیلی}}$ $\qquad \sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots$

۳) نقطه تکین اساسی: نقطه $z=z_0$ را نقطه تکین اساسی تابع $f(z)$ گوییم هرگاه تعداد نامتناهی جمله از بخش لوران

(سری لوران) تابع $f(z)$ در نقطه z_0 ناصفر باشد یعنی $\nexists m>0\ ;\ b_m=b_{m+1}=\dots=b_{m_1}=0\ ,\ b_{m_1+1}\neq 0$

مثال: $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$

$z_0=0$ ← نقطه تکین اساسی f $\qquad e^{z}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

بخش لوران شامل نامتناهی جمله

$z_0=0$ ← تکین اساسی $\qquad \underset{\text{بخش لوران}}{e^{\frac{1}{z}}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\dots$

۲) نقطه تکین از نوع قطب یا نقطه قطب مرتبه mام: نقطه تکین $z=z_0$ را قطب مرتبه mام تابع تحلیلی $f(z)$ نامیم هرگاه

بخش لوران تابع $f(z)$ شامل تعداد متناهی جمله باشد و به ترتیب ناصفر باشد به طوری که: $\exists m>0\ ,\ b_m\neq 0\ ,\ b_{m+1}=b_{m+2}=\dots=0$

معادلا سری لوران f حول z_0 به صورت زیر باشد: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\dots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m}$

$z=z_0$ قطب مرتبه mام

$\frac{g(z)}{f(z)}$ است اگر $g(z_0) \neq 0$ و g در $z=z_0$ تحلیلی باشد

مثال: $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$

$\overset{\text{نقطه تکین اساسی}}{z_0=0}$ ، $\overset{\text{قطب ساده}}{z=1}$ نقاط تکین $f(z)$

$z=1$ قطب ساده $f(z)$ است، g در $z=1$ تحلیلی است و $g(1)=e^{1}\neq 0$ [illegible]

$z_0=0$ نقطه تکین اساسی $f(z)$

$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{\frac{1}{2!}}{z^2} + \cdots$

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad |z|<1$

((قطب مرتبه یکم را ساده می‌گوییم))

$f(z) = \frac{1}{z-1} e^{\frac{1}{z}} = (1+z+z^2+\cdots)(1+\frac{1}{z}+\frac{\frac{1}{2!}}{z^2}+\cdots)$

$z=0$ نقطه تکین اساسی $f(z)$ ← [illegible]

روش شناسایی مانده‌ی تابع $f(z)$ در قطب مرتبه m ام: فرض کنید $z=z_0$ قطب مرتبه m ام تابع $f(z)$ باشد یعنی

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$ قرار دهید $\boxed{\varphi(z) = (z-z_0)^m f(z)}$

$\varphi(z)$ یک سری توانی حول $z=z_0$ [illegible] در $z=z_0$ تحلیلی است

$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} + b_1 (z-z_0)^{m-1} + \cdots + b_m = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \cdots + b_1 (z-z_0)^{m-1}$

$+ a_0 (z-z_0)^m + a_1 (z-z_0)^{m+1} + \cdots$

الف: هرگاه $z=z_0$ قطب ساده $f(z)$ باشد آنگاه $b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \varphi(z)$ ((مانده $f(z)$ در نقطه z_0))

ب: اگر $z=z_0$ قطب مرتبه m ام $f(z)$ باشد و $m\geq 2$ آنگاه

$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

مثال: $f(z)=\frac{\sin z}{z^{2}(z-1)^{2}}$ مانده‌های f را در نقاط تکین آن بیابید.

صفر مرتبه ۲ ، $z_1=1$ ، مرتبه ۲ ، $z_0=0$ ، صفرهای مخرج هستند ⇐ نقاط تکین منفرد f

$\sin z$ در $z_1=1$ تحلیلی است ⇐ $\sin(1)\neq 0$

قطب: $z_1=1$ قطب مرتبه دوم $f(z)$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots = z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots\right)$$

نشان می‌دهیم $z_0=0$ صفر ساده مخرج کسر است

$$\frac{\sin z}{z^2}=\frac{z\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots\right)}{z^2}=\frac{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\dots}{z}$$

که صفر صورت کسر نیست، صورت کسر در z_0 تحلیلی است پس $h(z)$ در $z_0=0$ دارای قطب ساده [illegible] z_0 قطب ساده $f(z)$

$z_1=1$ قطب مرتبه دوم $f(z)$ با $m=2$

$$\varphi_1(z)=(z-1)^2 f(z)=\frac{\sin z}{z} \qquad b_1=\operatorname{Res} f(z)=\frac{\varphi_1'(z)}{1!}$$

$$=\frac{\cos z\cdot z^2-2z\sin z}{z^4}\Big|_{z=1}=\cos 1-2\sin 1$$

$(m=1)$ $f(z)$ قطب ساده $z_0=0$ $\qquad \varphi_0(z)=(z-z_0)^1 f(z)=z f(z)=\frac{\sin z}{z(z-1)^2}$

$$b_0=\operatorname{Res} f(z)=\lim_{z\to z_0}\varphi_0(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}\times\lim_{z\to 0}\frac{1}{(z-1)^2}=1$$

جلسه چهارشنبه ۲۷ ، ۹ ، تکمیلی

㉑ محاسبه انتگرال ناسره گویا $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ که در آن f(x) تابع گویا و حقیقی متغیر است به طوریکه مخرج کسر تابع گویای f(x) ریشه حقیقی نداشته باشد

روش حل حالت ㉑: با تبدیل کردن تابع حقیقی f(x) به تابع مختلط f(z) از قضیه مانده ها نکات ① و ② و قضیه انتگرال را حل می کنیم برای نقاط تکین در نیم صفحه بالایی صفحه مختلط

مثال: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$

$\Delta<0$: ریشه حقیقی ندارد

$f(x)=\frac{1}{(x^2+4x+5)^2}$

$\downarrow$

$f(z)=\frac{1}{(z^2+4z+5)^2}$ $\longrightarrow$ $\oint \frac{dz}{(z^2+4z+5)^2}$ کانتور را در نیم صفحه بالایی مختلط

صفرهای مرتبه دوم مخرج

قطب مرتبه ۲ $z=-2\pm i$

نقاط تکین f ← صفرهای عمومی مخرج

$\mathrm{Im}\,z>0$ در نیم صفحه بالایی نقطه تکین f $z=-2+i$

1 $m=۲ \qquad \varphi(z)=(z-z_0)^۲ f(z)$

3 $(z^۲+۴z+۵)^۲=[(z-(-۲+i))]^۲[z-(-۲-i)]^۲ \qquad z^۲-(۴+i)^۲-۴z(-۲)$

5 $B=\operatorname{Res}_{z=-۲+i} f(z)=\frac{\varphi'(z_0)}{۱!}=\lim_{z\to -۲+i}\varphi'(z)=\frac{1}{۴i}$

7 $\to \oint_C f(z)dz=۲\pi i\times\frac{1}{۴i}=\frac{\pi}{۲} \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\oint_C f(z)dz=\frac{\pi}{۲}$

8 مثال ۲: $\int_0^{\infty}\frac{1+x^۲}{1+x^۴}dx$

11 $f(x)=\frac{1+x^۲}{1+x^۴}$ زوج ، [illegible] $\xrightarrow[②]{\text{بنابراین}} \frac{1}{۲}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x^۲}{1+x^۴}dx$

13–14 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x^۲}{1+x^۴}dx \quad x\to z \quad f(x)\to f(z)=f(z)=\frac{1+z^۲}{1+z^۴}$

15 صفرهای مخرج کسر [illegible] قطب‌های f(z)

16 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x^۲}{1+x^۴}dx \xrightarrow[\text{مسیر C}]{} \oint_C\frac{1+z^۲}{1+z^۴}dz$

نیم صفحه بالایی

18–19 $1+z^۴=0 \Rightarrow z=\sqrt[۴]{-1} \xleftarrow[\text{بالایی}]{\text{تنها قطبی f(z) در نیم صفحه}} \; z_1=e^{i\frac{\pi}{۴}}, \; z_۲=e^{i\frac{۳\pi}{۴}}$

صفرهای مخرج که صفر صورت نیست ، صفرهای مخرج در صورت نیست

19–20 z_1 قطب ساده ، $z_۲$ قطب ساده

22–23 $m=1 \Rightarrow \varphi_1(z)=(z-z_1)f(z)=\frac{1+z^۲}{(z-z_۲)(z-z_۳)(z-z_۴)}$

25 $1+z^۴=(z-z_1)(z-z_۲)(z-z_۳)(z-z_۴)$

قطب‌های بالای صفحه ، [illegible] نیم صفحه پایین

خطا

1 $m = 1 \quad \varphi_2(z) = (z - z_2) f(z) = \frac{1+z^۲}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$

3 z_1 [illegible] $B_1 = \operatorname{Res} f(z) = \lim \varphi_1(z) = \frac{1+1}{۲\sqrt{۲}(i-1)}$

5 $B_2 = \operatorname{Res} f(z) = \lim \varphi_2(z) = \frac{1-1}{۲\sqrt{۲}(i+1)} \to \oint_c f(z)dz = ۲\pi i(B_1+B_2)$

7 $= ۲\pi i \times -i\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}\pi \to \int_0^\infty f(x)dx = \frac{1}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\pi$

8 مثال: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^۲}{(x^۲+1)(x^۲+۴)} dx$

11 $f(x) \to f(z) = \frac{z^۲}{(z^۲+1)(z^۲+۴)}$

14 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \to \oint_c f(z)dz$ $f(z)$ تابع تحلیلی است ← صورتش دو درجه کمتر

15 تکینگی‌های بالایی $z_1 = i$ $z_2 = ۲i$

16 $z_1 = \pm i \quad z_2 = \pm ۲i \xrightarrow{\text{در نیم‌صفحه بالایی}} z_1 = i$

صورت، مخرج [illegible]

19 $\varphi_1(z) = (z-z_1)f(z) = (z-i)f(z) = \frac{z^۲}{(z+i)(z-۲i)(z+۲i)}$

21 $\varphi_2(z) = (z-z_2)f(z) = (z-۲i)f(z) = \frac{z^۲}{(z+i)(z-i)(z+۲i)}$

23 $B_1 = \operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \to i} \varphi_1(z) = \frac{i}{۶}$

25 $B_2 = \operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \to ۲i} \varphi_2(z) = -\frac{i}{۳}$

پس $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = \oint_C F(z)dz = ۲\pi i(B_1+B_2) = \frac{\pi}{۳}$

مثال: $\int_{0}^{\infty} \frac{۲x^۲-۱}{x^۴+۵x^۲+۴}dx = \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$

تابع زوج [illegible]

$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx \to \oint_C F(z)dz$ $\quad F(x) \to F(z) = \frac{۲z^۲-۱}{z^۴+۵z^۲+۴}$

[illegible] در نیم صفحه بالا

F(z) [illegible] = صفرهای مخرج کسر $\quad z^۴+۵z^۲+۴ = (z^۲+۱)(z^۲+۴)$

$Z = \pm ۲i \quad Z = \pm i$ نقاط تکین نیم صفحه بالای $z_1 = i ,\ z_2 = +۲i$

صفرهای ساده مخرج که صفر صورت کسر نیستند

$z_1 = i ,\ z_2 = ۲i$ نقطه قطب ساده $f(z)$ با $m=۱$

$\varphi_1(z) = (z-z_1)f(z) = (z-i)f(z)$

$\varphi_2(z) = (z-z_2)f(z) = (z-۲i)f(z)$

$B_1 = \text{Res}\, f(z) = \lim_{z\to i}\varphi_1(z) = \frac{i}{۲}$

$B_2 = \text{Res}\, f(z) = \lim_{z\to ۲i}\varphi_2(z) = -\frac{۳i}{۴}$

پس $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \oint_C f(z)dz = ۲\pi i(B_1+B_2) = \frac{\pi}{۲}$

پس $\int_{0}^{\infty} f(x)dx = \frac{۱}{۲}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{۴}$

محاسبه انتگرال‌های مجازی به صورت $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx$ یا $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx$ که در آن $f(x)$

یک کسر گویای حقیقی مثل $\frac{p(x)}{q(x)}$ است که چند جمله‌ای $q(x)$ دارای ریشه حقیقی نباشد، و درجه $q(x)$ حداقل ۲ واحد

از درجه $p(x)$ بزرگتر باشد، نقاط تکین تابع $f(z)$ که در نیم صفحه بالایی $Im z > 0$ واقع باشند را تعیین کنید (z_k)

مراحل: ابتدا متغیر حقیقی x را به متغیر مختلط z تبدیل کرده و به جای $\sin ax$ یا $\cos ax$ از

عبارت e^{iaz} استفاده میکنیم، بنابراین انتگرال داده شده به انتگرال مختلط $\oint_C f(z) e^{iaz} dz$

تبدیل می‌شود که C مسیر بسته ساده در نیم صفحه بالایی است، سپس به کمک $2\pi i$ و مجموع مانده‌ها داریم

جمع‌بندی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx = Re\left[2\pi i \sum_{i=1}^{n} \underset{z=z_i}{Res}\, f(z)e^{iaz}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx = Im\left[2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res\, f(z)e^{iaz}\right]$$

z_i: در نیم صفحه بالا $Im z > 0$

مثال: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx$

$f(x)\sin 2x \to f(z)e^{iaz}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx \to \oint f(z)e^{i2z} dz$

$f(z)e^{i2z}$ نقاط تکین = $f(z)$ نقاط تکین $\leftarrow$ صفرهای مخرج کسر $f(z)$

$f(z)$ نقاط تکین منفرد $z_۱ = i$ ، $z_۲ = ۲i$

منفرد: نقاط خارج که در نیم صفحه هست [illegible] خارج که در نیم صفحه نیست $f(z)$ [illegible]

$f(z)$ قطب مرتبه دوم $z_۱ = i$ $(m=۲)$ قطب ساده $z_۲ = ۲i$ $(m=۱)$

$m=۲$ $\varphi_۱(z) = (z-z_۱)^۲ f(z) e^{i\alpha z} = (z-i)^۲ f(z) e^{i۲z}$

$m=۱$ $\varphi_۲(z) = (z-z_۲) f(z) e^{i\alpha z} = (z-۲i) f(z) e^{i۲z}$

$B_۱ = \operatorname{Res}_{z=z_۱} f(z) e^{i۲z} = \lim \varphi_۱(z) = \varphi_۱'(z) = \lim_{z \to z_۱ = i} \varphi'(z) = \frac{۷e^{-۲}}{۳۶i}$

$B_۲ = \operatorname{Res} f(z) e^{i۲z} = \lim_{z \to ۲i} \varphi_۲(z) = \frac{e^{-۴}}{-۳۶i}$

$\to \oint_C f(z) e^{i۲z} = ۲\pi i (B_۱ + B_۲) \to I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ۲x \, dx = \operatorname{Im}(۲\pi i (B_۱ + B_۲))$

مثال: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ۲x}{(x^۲+۴)^۲} dx$

$f(x) = \frac{1}{(x^۲+۴)^۲}$ ، $\cos ۲x \to e^{i۲z}$

$f(x) \cos ۲x \to f(z) e^{i۲z} = \frac{e^{i۲z}}{(z^۲+۴)^۲}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ۲x \, dx = \operatorname{Re}\left[\oint_C f(z) e^{i۲z} dz\right]$

C مسیر بسته در نیم صفحه بالا

$z = ۲i$ نقطه تکین مرتبه دوم [illegible] $f(z)$ است

چون $z = ۲i$ قطب مرتبه دوم $f(z)$ یا $f(z) e^{i۲z}$

$f(z)$ نقاط تکین [illegible] $f(z)$ [illegible]

$B = \operatorname{Res} f(z) = \frac{\varphi'(z)}{۱!} = \lim \varphi'(z) \Big|_{z=۲i} = \lim \varphi'(z) = \frac{۵}{۳۲ie^{۴}}$

$\varphi(z) = (z-۲i) f(z) e^{i۲z}$

$\oint f(z) e^{i۲z} dz = ۲\pi i B = \frac{۵\pi}{۱۶e^{۴}}$

حقیقی

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ۲x \, dx = \frac{۵\pi}{۱۶e^{۴}}$

روز: ماه: سال:

موضوع:

(۲۲۲) محاسبه انتگرال ناسره حقیقی $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx$ یا $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx$ که در آن $f(x)$

تابع گویای حقیقی به فرم $\frac{P(x)}{q(x)}$ است که چند جمله‌ای $q(x)$ دارای ریشه حقیقی نباشد و درجه $q(x)$ حداقل ۲ واحد

از درجه $P(x)$ بزرگتر باشد، بنابراین تمام نقاط تکین $f(z)$ در نیم‌صفحه بالایی $\mathrm{Im}\,z>0$ واقع باشد [illegible] (۱۲)

روش حل: با تغییر مسیر طی متغیر حقیقی x متغیر مختلط z گذاشته و به جای $\sin ax$ یا $\cos ax$ از

صورت ایده‌آل تابع e^{iaz} استفاده می‌کنیم بنابراین انتگرال داده شده به انتگرال مختلط $\oint_C f(z)e^{iaz}dz$

که در آن C مرز بسته ساده نیم‌صفحه بالایی است تبدیل می‌شود و به کمک [illegible] π [illegible] داریم

طبق قضیه مانده‌ها:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i\sum_{i=1}^{n} \underset{z=z_i}{\mathrm{Res}}\, f(z)e^{iaz}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx = \mathrm{Im}\left[2\pi i\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}\, f(z)e^{iaz}\right]$$

z_i ها نقاط تکین $\mathrm{Im}\,z>0$ بالایی

مثال: $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ۲x}{(x^۲+۱)^۲(x^۲+۴)}dx$

$f(x)\sin ۲x \to f(z)e^{iaz}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx \to \oint f(z)e^{i۲z}dz$

صفرهای مخرج کسر $f(z)$ ← نقاط تکین $f(z)$ = نقاط تکین $f(z)e^{i۲z}$