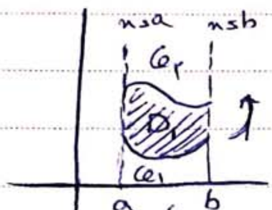
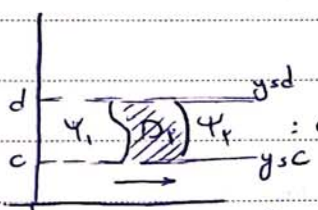
نواحی در صفحه $\mathbb{R}^2$: هر ناحیه بدون حفره $\mathbb{R}^2$ یا یک ناحیه مقدماتی و یا یک ناحیه‌ای که ترکیبی از نواحی مقدماتی مجزا است.



۱) ناحیه نوع اول مقدماتی (x ـ ساده): معادلات این ناحیه بفرم زیر است:

$$D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b \,,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$$

که در آن φ_1 و φ_2 توابع پیوسته بر بازه $[a,b]$ است.



۲) ناحیه دوم مقدماتی (y ـ ساده): معادلات این ناحیه به صورت زیر است:

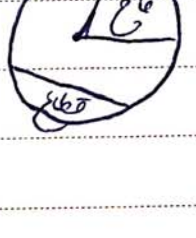
$$D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\le y\le d \,,\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$$

که در آن ψ_1 و ψ_2 توابع پیوسته بر بازه $[c,d]$ است.

۳) ناحیه نوع مقدماتی (ساده، نرمال): ناحیه‌ای است که معادلاتش را می‌توان هم به فرم نوع اول و هم به فرم نوع دوم بیان کرد.

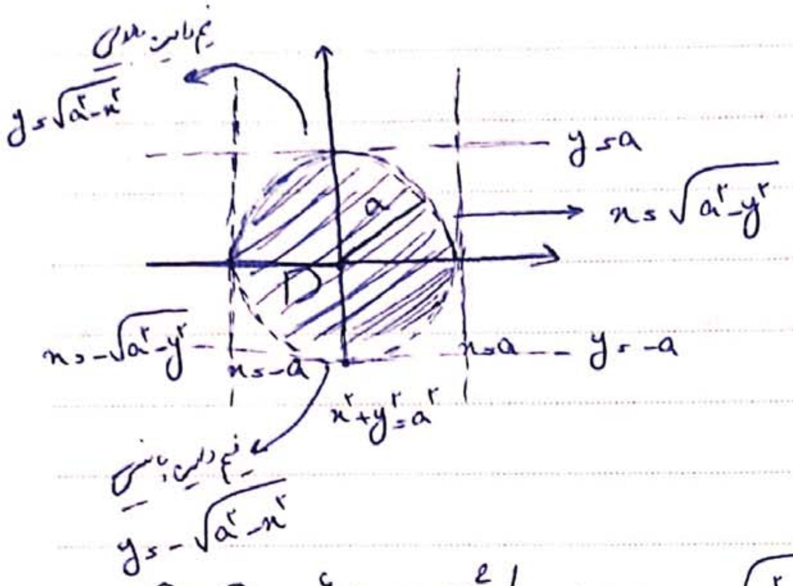
$$D_3 = D_1 = D_2$$

نکته: ناحیه دیسک شکل یا قطاع یا تاج (برش مرزی از مرکز دیسک) مستطیل شکل، مثلث و لوزی، نمونه‌ای از ناحیه نوع نرمال هستند.



72A

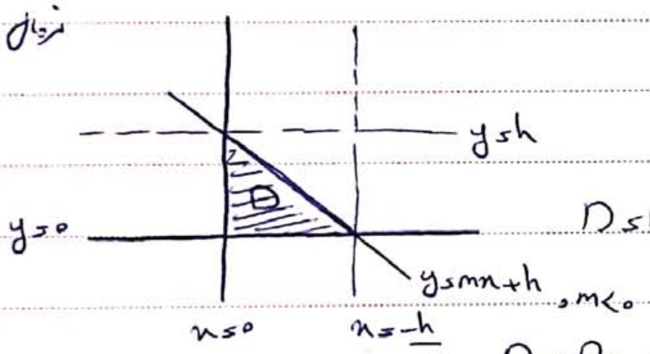
Subject:
Date



$D=D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -a\le x\le a,\ \underbrace{-\sqrt{a^2-x^2}}_{\varphi_1(x)}\le y\le \underbrace{\sqrt{a^2-x^2}}_{\varphi_2(x)}\}$

$D=D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -a\le y\le a,\ \underbrace{-\sqrt{a^2-y^2}}_{\psi_1(y)}\le x\le \underbrace{\sqrt{a^2-y^2}}_{\psi_2(y)}\}$

نرمال



(٤

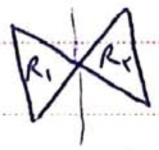
$D=D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le -\frac{h}{m},\ 0\le y\le mx+h\}$

$D=D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le h,\ 0\le x\le \frac{y-h}{m}\}$

D: نرمال

٤) ناحیه حل صفحه: ناحیه ای است که متعارفی نمی باشد و به صورت ترکیبی از نواحی متعارفی ساده است،

معادلات این ناحیه به صورت اجتماعی از معادلات نواحی ساده است.



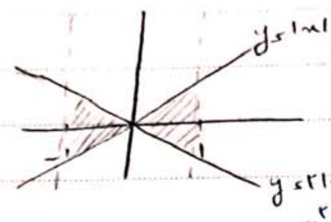
نرمال نیست $R=R_1\cup R_2$ نرمال است نرمال است

$D=\{(x,y):\ 0\le y\le 1,\ 0\le x\le \sin^{-1}y\}$

Subject:
Date

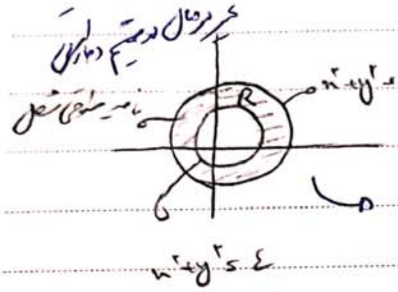
T2B

مثال: ? $R = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1 \,,\, -2|x| \le y \le |x|\}$



مثال ۲: R ناحیه طوقی شکل محدود به دوایر $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=e^2$

$r=2$, $r=e\approx 2{,}71$

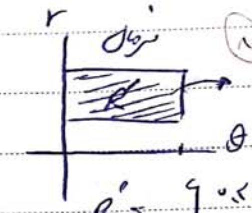


مختصات قطبی

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$r > 0$



تصویر R

مختصات قطبی

$$R' = \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 2 \le r \le e \end{cases}$$

$0 \le i \le n$

I_x $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ افراز به زیربازه‌ها $[x_i, x_{i+1}] \longleftarrow$ زیربازه i ام

طول قسمت‌ها $\Delta_i x = |x_{i+1} - x_i| = \dfrac{b-a}{n}$ مساوی

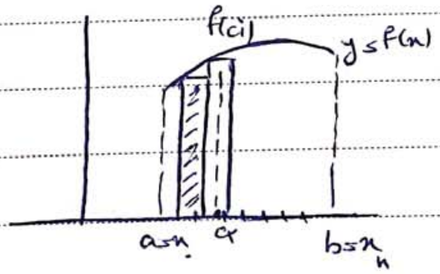
$c_i \in [x_i, x_{i+1}]$

$$n \to \infty : \overbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1}^{n} f(c_i)\Delta_i x\right) < +\infty}^{(*)}$$

تابع ریمانی

$$\longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = (*)$$

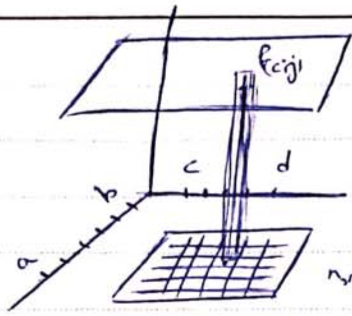
$\sum_{i=0}^{n} f(c_i)\Delta_i x =$ مساحت تقریبی سطح زیر منحنی $y=f(x)$



$\Delta_i x \to dx$

T3A

Subject
Date



$S: z=f(x,y)$ $\qquad R_{ij}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$

دلخواه $c_{ij}\in R_{ij}$ $\qquad A_{ij}=R_{ij}$ مساحت $\Delta(A_{ij})$

$$\lim_{n,m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(c_{ij})\Delta_{ij} < +\infty$$

$$\iint_D f(x,y)\,dA \qquad D\in[a,b]\times[c,d]$$

تصویر رویه f در صفحه xoy

$\{x_0=a, x_1, \dots, x_n=b\}$

$\{y_0=c, \dots, y_m=d\}$

استدلال شهودی: فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره پیوسته در ناحیه D درون صفحه xoy باشد

(D تصویر رویه f در صفحه xoy) بطوریکه $S: z=f(x,y)$ رویه تابع f در فضای $\mathbb{R}^3$ است و همچنین ناحیه D

فرض کنید ناحیه مستطیل شکل $R=[a,b]\times[c,d]$ قرار گیرد و به کمک افراز بازه ها، مجموعه ها $\{x_1=a, \dots, x_n=b\}$

و $\{y_1=c, \dots, y_m=d\}$ از نقاط بازه ها در نظر گرفته شود بطوریکه R_{ij} جزء مستطیل (ij) ام باشد و ΔA_{ij}

جزء مساحت مستطیل R_{ij} باشد و c_{ij} نقطه دلخواه مستطیل R_{ij} باشد ($1\le i\le n$ و $1\le j\le m$).

مجموع ریمانی $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(c_{ij})\Delta A_{ij}$ حجم تقریبی فضای اشغال شده (محصور) به سطح رویه

S به صفحه افقی xoy است. چنانچه m و n به بی نهایت میل کنند $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(c_{ij})\Delta A_{ij}$ موجود

و متناهی باشد آن گاه حجم فضای محصور به سطح رویه S و صفحه xoy را انتگرال دوگانه تابع $f(x,y)$ روی

ناحیه D در صفحه xoy می نامیم و آن را با نماد $\iint_D f(x,y)\,dA$ نمایش می دهیم.

Subject
Date

$$\iint_{D\subseteq \mathbb{R}^2} f(x,y)\,dA = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n,m} f(c_{ij})\,\Delta A_{ij} < +\infty$$

نکته: هرگاه $f(x,y)=1$ انتگرال دوگانه تابع ثابت 1 برابر با مساحت ناحیه انتگرال‌گیری D می‌باشد.

$$A(D) = \iint_{D\subseteq \mathbb{R}^2} dA$$

در حالتی که $f(x,y)\neq 1$، انتگرال دوگانه تابع مثبت f را حجم فضای محدود به رویه f و صفحه xoy می‌نامیم.

خواص و قضایای انتگرال دوگانه:

قضیه فوبینی:

① هر تابع دو متغیره پیوسته بر ناحیه R از صفحه xoy انتگرال‌پذیر دوگانه است.

② قضیه فوبینی: هر تابع کراندار دو متغیره بر ناحیه بسته و کراندار R در صفحه xoy بطوریکه نقاط ناپیوستگی تابع f بر اجتماع متناهی از منحنی‌ها واقع باشد، انتگرال‌پذیر دوگانه است.

③ هرگاه توابع دو متغیره f و g ($f(x,y)$, $g(x,y)$) بر ناحیه R از صفحه xoy انتگرال‌پذیر دوگانه باشند آنگاه توابع دو متغیره $f\pm g$، λf و λg که در آن λ یک مقدار اسکالر است. این توابع هم بر ناحیه R انتگرال‌پذیر دوگانه است و داریم:

$$\iint_R (f\pm \lambda g)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA \pm \lambda \iint_R g(x,y)\,dA$$

توجه شود به دلیل قضیه، تابع دو متغیره $fg(x,y)$ بر ناحیه R انتگرال‌پذیر دوگانه است اما:

$$\iint_R f(x,y)\,g(x,y)\,dA \neq \left(\iint_R f(x,y)\,dA\right)\left(\iint_R g(x,y)\,dA\right)$$

PAPCO

(ادامه)

④ هرگاه تابع دو متغیره $f(x,y)$ بر نواحی $R_1, \dots, R_n$ انتگرال پذیر دوگانه باشد آن گاه $f(x,y)$ بر اجتماع $R = R_1 \cup \dots \cup R_n$ انتگرال پذیر دوگانه است و داریم:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \sum_{i=1}^{n} \iint_{R_i} f(x,y)\,dA$$

⑤ (قضیه مقدار میانی انتگرال دوگانه): هرگاه تابع دو متغیره $f(x,y)$ بر ناحیه بسته و کران دار R پیوسته باشد آن گاه انتگرال دوگانه تابع f روی ناحیه R دارای اکسترمم است و در روابط زیر صدق می کند:

$$\underbrace{(\min_R f)(\text{مساحت ناحیه } R)}_{\text{حجم مکعب با ارتفاع } \min} \le \iint_R f(x,y)\,dA \le \underbrace{(\max_R f)(\text{مساحت ناحیه } R)}_{\text{حجم مکعب با ارتفاع } \max}$$

⑥ انتگرال مکرر دوگانه: هرگاه تابع دو متغیره $f(x,y)$ بر ناحیه R در صفحه xy پیوسته و کران دار بوده (نقاط ناپیوستگی واقع بر اجتماع متناهی از منحنی ها) باشد انتگرال مکرر تابع f بر ناحیه R به وسیله انتگرال های معین تک متغیره روی معادلات ناحیه R محاسبه می شود.

⑦ قضیه فوبینی: هرگاه تابع $f(x,y)$ در شرایط قضایای قبل فوبینی بر ناحیه R صدق کند، آن گاه انتگرال دوگانه f روی ناحیه R به وسیله حداقل یکی از انتگرال های مکرر تابع f روی ناحیه R محاسبه می شود.

Subject:
Date

T 4B

انتگرال مکرر دوگانه: فرض کنید تابع دو متغیره پیوسته $f(x,y)$ در ناحیه D درون صفحه xoy تعریف شده باشد، انتگرال مکرر تابع f در ناحیه D به صورت های زیر تعریف می شود:

① هرگاه D ناحیه نوع اول مقدماتی (x-ساده) باشد آنگاه انتگرال مکرر f بر D به صورت:

$$\int_a^b \Big(\underbrace{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy}_{h(x)} \Big)\, dx$$

که در آن φ_1 و φ_2 توابع پیوسته بر $[a,b]$ هستند.

$$D = \{ (x,y) : a \leq x \leq b \ , \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \}$$

② هرگاه ناحیه D نوع دوم مقدماتی (y-ساده) باشد آنگاه انتگرال مکرر f بر ناحیه D به صورت:

$$\int_c^d \Big(\underbrace{\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\, dx}_{g(y)} \Big)\, dy$$

که در آن φ_1 و φ_2 توابع پیوسته برحسب y بر $[c,d]$ است.

$$D = \{ (x,y) : c \leq y \leq d \ , \ \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y) \}$$

③ هرگاه ناحیه D نوع سوم مقدماتی (دوگانه-ساده) باشد آنگاه انتگرال مکرر f بر ناحیه D به صورت:

$$\int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

(خاصیت تعویض ترتیب انتگرال گیری) که در آن ناحیه D به یکی از دو فرم x-ساده یا y-ساده بیان می شود.

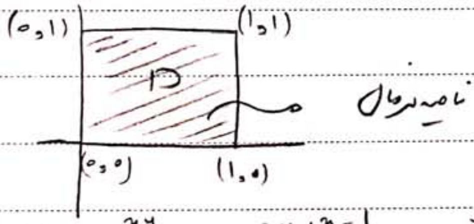
PAPCO

④ هرگاه D ناحیه مقدماتی نباشد اما به صورت اجتماعی از نواحی مقدماتی نوشته شود آنگاه انتگرال مکرر f بر ناحیه D به وسیله مجموع انتگرال ها مکرر f بر نواحی مقدماتی تفکیک شده از D که یکی از حالات (۱) یا (۲) یا (۳) بدست می آید.

$$\text{انتگرال مکرر } f \text{ بر ناحیه } D = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x,y)\, dA \quad , \quad D = D_1 \cup \dots \cup D_n$$

D_i یک ناحیه مقدماتی — dA: جزء مساحت ناحیه مقدماتی D_i

قضیه فوبینی (قضیه مهم): هرگاه تابع دو متغیره $f(x,y)$ بر ناحیه D درون صفحه xoy در شرایط مقابل صدق نماید (f پیوسته و یا f کران دار با تعداد نقاط ناپیوستگی یا اجتماع متناهی از منحنی ها در ناحیه بسته و کران دار یا مقدماتی D) صدق کند، آنگاه می توان انتگرال دوگانه f بر ناحیه D را به وسیله انتگرال ها مکرر f بر ناحیه D محاسبه کرد.



مثال: $? = \int_0^1 \left(\int_0^1 y e^{xy}\, dx \right) dy$

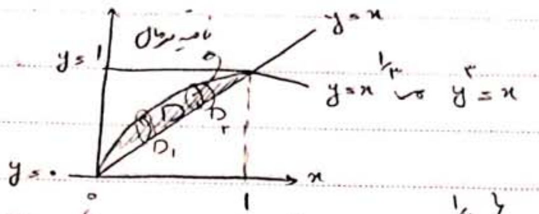
$$\int_0^1 y e^{xy}\, dx = e^{xy} \Big|_{x=0}^{x=1} = e^y - 1$$

$$\int_0^1 (e^y - 1)\, dy = e^y - y \Big|_{y=0}^{y=1} = (e-1) - 1 = \boxed{e - 2}$$

Subject:
Date

TSB

مثال) $\int_0^1 \left(\int_x^{x^{1/3}} e^{\frac{x}{y}}\,dy\right) dx \overset{t}{=} \int_0^1 \left(\int_{y^3}^{y} e^{\frac{x}{y}}\,dx\right) dy$



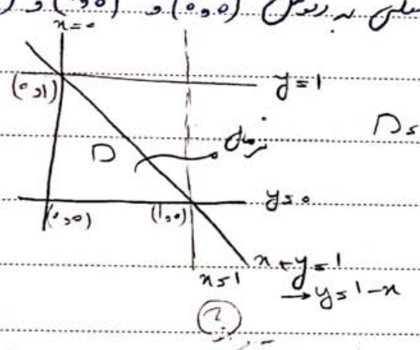
$D_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 ,\ x \le y \le x^{1/3}\}$

$D_2 = \{(x,y) : 0 \le y \le 1 ,\ y^3 \le x \le y\}$

$\int_{y^3}^{y} e^{\frac{x}{y}}\,dx = y e^{\frac{x}{y}}\Big|_{x=y^3}^{x=y} = y(e - e^{y^2})$ $\qquad t = y^2 \to dt = 2y\,dy$

$\int_0^1 y(e-e^{y^2})\,dy = e\int_0^1 y\,dy - \frac{1}{2}\int_0^1 2y e^{y^2}\,dy = e\left(\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1\right) - \left(\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1\right)$

مثال) مطلوب است محاسبه $\iint_D y^2\sqrt{x}\,dA$ که در آن D ناحیه مثلثی به رئوس $(0,0)$ و $(1,0)$ و $(0,1)$.



$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 ,\ 0 \le y \le 1-x\}$

$\iint_D y^2\sqrt{x}\,dA \overset{\text{قضیه فوبینی}}{=} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} y^2\sqrt{x}\,dy\right) dx = \int_0^1 \sqrt{x}\left(\underbrace{\int_0^{1-x} y^2\,dy}_{\frac{y^3}{3}\Big|_0^{1-x} = \frac{(1-x)^3}{3}}\right) dx$

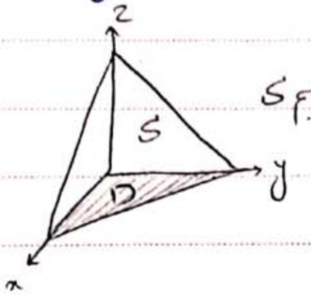
$= \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{x}\,(1-x)^3\,dx = \dots$

نکته: محاسبه حجم جسم (زیر) به وسیله انتگرال دوگانه

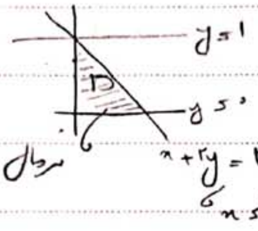
$V = \iint_D f(x,y)\,dA$ (حجم جسم S)

$D \subseteq xoy$ = تصویر جسم S در صفحه xoy (سطح قاعده) $\qquad f(x,y)$ = تابع مولد حجم (سقف)

مثال ۱. مطلوب است محاسبه حجم هرم ساخته شده توسط صفحات مختصات و صفحه $x+2y+z=2$



برای $z=0 \Leftarrow z$ ، $z=2-x-2y$: تابع مولد حجم S



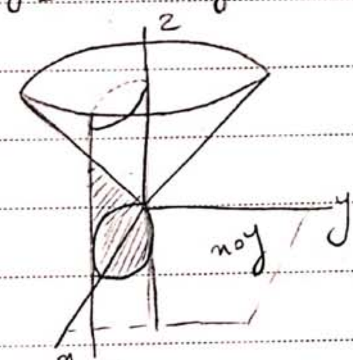
$V(S)=\iint_D f(x,y)\,dA$

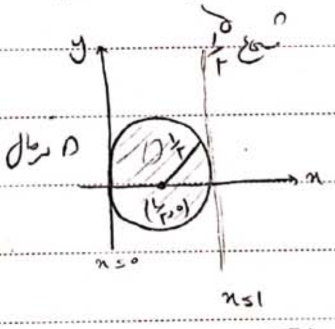
$D=D_2=\{(x,y);\ 0\le y\le 1,\ 0\le x\le 2-2y\}$

$V(S)=\int_0^1 \left(2x-\frac12 x^2-2xy\Big|_{x=0}^{x=2-2y}\right)dy=\int_0^1 2(2-2y)-\frac12(2-2y)^2-2(2-2y)y\,dy$

مثال ۲. مطلوب است حجم جسم محدود به صفحه xoy ، استوانه $x^2+y^2=x$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$

$x^2+y^2=x \to x^2+y^2-x=0 \to (x-\frac12)^2+y^2=\frac14$ استوانه مستدیر قائم به مرکز $(\frac12,0)$





D: تصویر جسم S در صفحه xoy

$V(S)=\iint_D f(x,y)\,dA$

$D=D_1=\{(x,y);\ 0\le x\le 1,\ -\sqrt{x-x^2}\le y\le \sqrt{x-x^2}\}$ تابع مولد حجم: $z=\sqrt{x^2+y^2}=f(x,y)$

$x^2+y^2=x \to y=\pm\sqrt{x-x^2}$ ، $C_1: y=-\sqrt{x-x^2}$ ، $C_2: y=\sqrt{x-x^2}$

$V(S)=\iint_{D\subseteq xoy} f(x,y)\,dA=\int_0^1 \Big(\underbrace{\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy}_{Ax^2}\Big)dx$

76B

$\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad x = a\sin t,\ dx = a\cos t\,dt \to \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$

$\sqrt{a^2+x^2}$ $\quad x = a\,tg\,t,\ dx = a\underbrace{(1+tg^2 t)}_{\sec^2 t}\,dt \to \sqrt{a^2+x^2} = a\sec t \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\sqrt{x^2-a^2}$ $\quad x = a\sec t,\ dx = a(\sec t \cdot tg\,t)\,dt \to \sqrt{x^2-a^2} = a\,tg\,t \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy \qquad \begin{aligned} y &= x\,tg\,t \\ dy &= x\sec^2 t\,dt \end{aligned} \to \sqrt{x^2+y^2} = x\sec t$$

$$\int \sec t\,dt = \ln|\sec t + tg\,t|$$

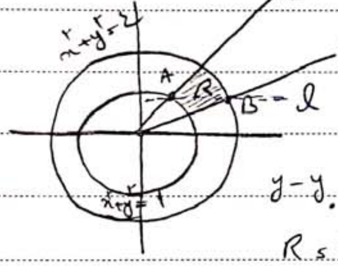
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x\sec t)(x\sec^2 t)\,dt$$

$$\int \sec^3 t\,dt = \int \underbrace{\sec t}_{u} \cdot \underbrace{\sec^2 t\,dt}_{dv} = \dots = \frac{1}{2}\sec t \cdot tg\,t + \frac{1}{2}\ln|\sec t + tg\,t|$$

جزءبجزء

$$\int \sec t\,(1+tg^2 t)\,dt$$

مثال) مطلوبست محاسبه $\iint_R tg^{-1}(\frac{x}{y})\,dA$ که در آن R ناحیه $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x$ ، $1 \le x^2+y^2 \le 4$



$y = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

$y = \sqrt{3}x$ با خط $x^2+y^2=1$

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ با خط $x^2+y^2=4$

مختصات A: برخورد دایره ...

$A \mid \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}$

مختصات B: ...

$B \mid \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

خط l: ... B, A

$$R = R_1 \cup R_2$$

$$\int_R\!\!\int tg^{-1}(\frac{x}{y})\,dA = \int_{R_1}\!\!\int tg^{-1}(\frac{x}{y})\,dA + \int_{R_2}\!\!\int tg^{-1}(\frac{x}{y})\,dA$$

[؟] ادامه مسئله ؟

۲۲۸

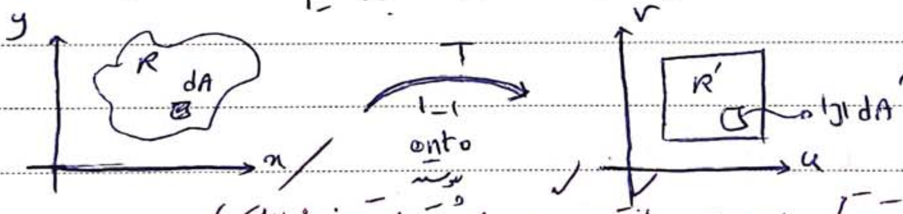
قضیه تغییر مختصات ژاکوبی در صفحه برای محاسبه انتگرال‌ها دوگانه:

فرض کنید نگاشت $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه $(u,v) \mapsto (x,y)$ داده شده باشد که در آن (x,y) مختصات در صفحه xoy و (u,v) مختصات در صفحه uov باشد به طوری که T ناحیه R در صفحه xoy را به ناحیه R' در صفحه uov می‌فرستد و فرض: T نگاشت ۱-۱ ، پوشا و پیوسته باشد و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته از u,v نسبت به x,y و دترمینان ژاکوبین تغییر سیستم مختصاتی $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ (در همه نقاط ناحیه R') ناصفر باشد. آن گاه

انتگرال دوگانه در سیستم مختصاتی (x,y) بوسیله انتگرال دوگانه در سیستم مختصاتی (u,v) محاسبه می‌شود و داریم:

$$* \iint_{R \subseteq xoy} f(x,y)\, dA = \iint_{R' \subseteq uov} f(x(u,v), y(u,v))\, \underline{|J|\, dA'} \; *$$

که در آن dA جزء مساحت ناحیه R و $|J|\,dA'$ جزء مساحت ناحیه R' در تغییر سیستم مختصاتی ژاکوبی است.



کاربرد سیستم مختصات قطبی برای محاسبه انتگرال دوگانه (به وسیله قضیه ژاکوبی):

$$T: \begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi] \;,\; r \geq 0$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r > 0 \quad \text{به جز مبدا}$$

(ماتریس ژاکوبی)

Subject:
Date

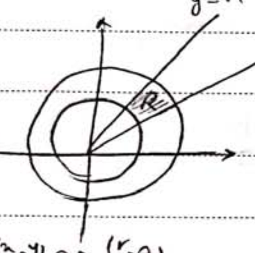
$$\iint_{R\subseteq xoy} f(x,y)\,dA = \iint_{R'\subseteq r o\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dA' \qquad dA = dx\,dy,\quad dA' = dr\,d\theta$$

نکته: برای استفاده از سیستم مختصات قطبی در محاسبه انتگرال دوگانه به موارد زیر اشاره می‌شود.

① در شکل ناحیه R در صفحه xoy، دایره یا بخشی از دایره، قطاع، تاج ظاهر شود.

② در معادلات ناحیه R یا تابع $f(x,y)$ عبارات شامل $\sqrt{x^2+y^2}$ و $tg^{-1}(\frac{y}{x})$ ظاهر شود.

مثال) $\iint_R tg^{-1}(\frac{x}{y})\, dA$ که در آن R قطاع بین $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x$ و ناحیه طوقی شکل $1 \le x^2+y^2 \le 4$ می‌باشد.



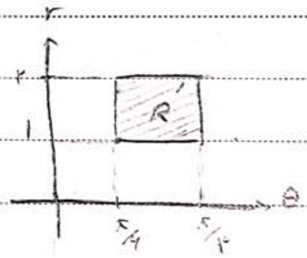
$(x,y) \sim (r,\theta)$
دکارتی قطبی

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$R' = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \\ 1 \le r \le 2 \end{cases}$$

$x^2+y^2=1 \xrightarrow{\text{قطبی}} r=1$

$x^2+y^2=4 \xrightarrow{\text{قطبی}} r=2$



$y = \sqrt{3}x \longrightarrow$ شیب $= tg\theta = \sqrt{3} \to \theta = \frac{\pi}{3}$

نکته: $\left(tg^{-1}(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2} - tg^{-1} t \right) \qquad t = \frac{y}{x}$

$$\iint_R tg^{-1}(\frac{x}{y})\, dA = \iint_R \left(\frac{\pi}{2} - tg^{-1}(\frac{y}{x})\right) dA \xrightarrow{\text{قطبی}} \iint_{R'\subseteq r o\theta} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) r\, dA'$$

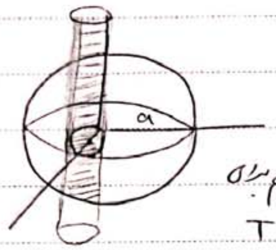
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\int_1^2 \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) r\,dr \right) d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \frac{1}{2} r^2 \Big|_1^2 d\theta = \frac{3}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) d\theta$$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\theta - \frac{1}{2}\theta^2 \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \right) = \ldots\ldots$ چون هر دو بازه کران‌دار هستند ← می‌توان جابه‌جا کرد بدون تغییر معادله

Subject:
Date

7.8A

مثال) حجم جسم T محصور از کره $x^2+y^2+z^2\le a^2$ توسط استوانه $x^2+y^2=ax$. $(a>0)$



$x^2+y^2-ax=0 \to (x-\frac{1}{2}a)^2+y^2=\frac{1}{4}a^2$

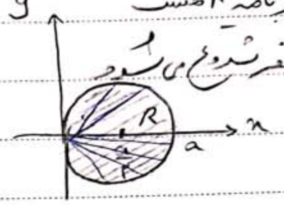
استوانه مستدیر قائم به مرکز قاعده $(\frac{1}{2}a,0)$ به شعاع $\frac{1}{2}a$

تابع مولد حجم برای نصف جسم T = نیم کره بالایی : $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=f(x,y)$

چون مبدأ جز ناحیه R هست

پس r از صفر شروع می‌شود

R = تصویر جسم T در صفحه xoy



$V(T)=2V(\frac{T}{2})$

نصف جسم T

$V(T)=2\iint_{R\subseteq xoy}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dA \xlongequal{\text{مختصات قطبی}} R'$: ناحیه R $\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \quad \text{یا} \quad (\frac{3\pi}{2}\le\theta\le\frac{5\pi}{2}) \\ 0\le r\le a\cos\theta \end{cases}$

$x^2+y^2=ax \xrightarrow{\text{قطبی}} r^2=ar\cos\theta \xrightarrow{r>0} r=a\cos\theta$

مکان استوانه

$V(T)=2\iint_{R'\subseteq ro\theta}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dA' = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr\right)d\theta$

$\int\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=-\frac{1}{2}\int_{a^2}^{a^2\sin^2\theta}t^{1/2}\,dt$ $\quad 0\le r\le a\cos\theta,\ a^2\le t\le a^2\sin^2\theta \quad a^2-r^2=t,\ -2r\,dr=dt$ تغییر متغیر

$=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left(t^{3/2}\Big|_{a^2}^{a^2\sin^2\theta}\right)=-\frac{1}{3}\left(t^{3/2}\Big|_{a^2}^{a^2\sin^2\theta}\right)$

$V(T)=-\frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left((a^2\sin^2\theta)^{3/2}-(a^2)^{3/2}\right)d\theta=-\frac{2}{3}a^3\int(\sin^3\theta-1)\,d\theta$

$*\ \int\sin^3\theta\,d\theta=\int\sin^2\theta\cdot\sin\theta\,d\theta=\int(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta \to u=\cos\theta,\ du=-\sin\theta\,d\theta$

$* = -\int(1-u^2)\,du$

مثال) $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ انتگرال ناسره نوع اول (همگرا)

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \overset{\text{قطبی}}{=}$$

$$R: \begin{cases} 0 \le x \le +\infty \\ 0 \le y \le +\infty \end{cases} \qquad \underset{\text{تغییر شده } R}{R'} = \begin{cases} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le +\infty \end{cases}$$

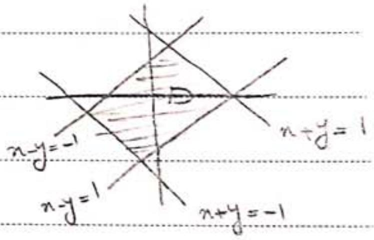
$$\overset{(i)}{=} \int_0^{\pi/2} \Big(\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\, r\, dr}_{1/2} \Big) d\theta \to \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \to \boxed{I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$$(*) \quad \underbrace{\int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr}_{\text{همگرا}} = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} r e^{-r^2} dr \xrightarrow[dt=2rdr]{t=r^2} = \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\int_0^{A^2} e^{-t} dt = -\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty} e^{-t}\Big|_0^{A^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\underset{\text{صفر}}{\lim_{A\to+\infty}} \left(e^{-A^2} - 1\right) = \frac{1}{2} \quad (i)$$

مثال) مطلوب است محاسبه $\iint_D e^{x+y}\, dA$ که در آن $D = \{(x,y) : \underbrace{|x|+|y| \le 1}_{\text{درون لوزی}}\}$

D: $-x-y=1$ ، $x+y=-1$



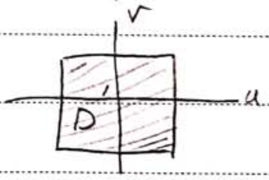
$x+y=1$ ، $x-y=1$ ، $-x+y=1$

$$\begin{cases} u = u(x,y) = x+y \\ v = v(x,y) = x-y \end{cases} \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(u+v) \\ y &= \tfrac{1}{2}(u-v) \end{aligned} \right\} : T$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

در همه نقاط (u,v) ناصفر است

$$D' = \begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$$ ناحیه مستطیل شکل



$$\iint_{D \subseteq xoy} e^{x+y}\, dA = \iint_{D' \subseteq uov} e^{u} \left|-\tfrac{1}{2}\right| dA' = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} e^u du\right) dv = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(e^u\Big|_{-1}^{1}\right) dv$$

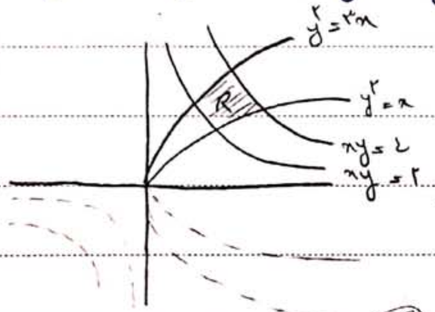
$$= \frac{1}{2}\left(e^{1} - e^{-1}\right)\underbrace{\int_{-1}^{1} dv}_{2} = e - \frac{1}{e}$$

نکته: هرگاه در معادلات ناحیه داده شده یا ضابطه تابع درون انتگرال دوگانه از عبارات درجه اول برحسب x و y استفاده شده باشد، بهترین سیستم مختصاتی برای حل انتگرال به کمک قضیه ژاکوبی با استفاده از سیستم مختصاتی خطی

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=AD-BC$$

می‌باشد. $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} u=Ax+By \\ v=Cx+Dy \end{cases}$

مثال) $\iint_R \frac{x^2}{y^2}\, dA$ که در آن R ناحیه محصور به منحنی‌ها $xy=2$، $xy=4$ و $y^2=3x$ و $y^2=x$



تغییر مختصات $\begin{cases} u=u(x,y)=xy \\ v=v(x,y)=\frac{y^2}{x} \end{cases} \to uv=y^3$

$$T:\begin{cases} y=u^{1/3}v^{1/3} \\ x=u^{2/3}v^{-1/3} \end{cases}$$

$\boxed{J=\frac{1}{3v}}$ در ناحیه $R' \neq 0$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix}=\frac{2}{9}v^{-1}+\frac{1}{9}v^{-1}$$

$$\iint_R \frac{x^2}{y^2}\, dA \overset{\text{تبدیل}}{=} \iint_{R'\subseteq uov} \frac{u^{4/3}v^{-2/3}}{u^{2/3}v^{2/3}}\,|J|\, dA=\iint_{R'} u^{2/3}v^{-4/3}\,|J|\, dA$$

$$=\frac{1}{3}\int_2^4\left(\int_1^3 u^{2/3}v^{-7/3}\, dv\right) du=\frac{1}{3}\left(\int_2^4 u^{2/3}\, du\right)\left(\int_1^3 v^{-7/3}\, dv\right)=\cdots$$

نکته: در انتخاب سیستم مختصات جدید برای محاسبه انتگرال دوگانه لازم است به معادلات ناحیه داده شده و ضابطه تابع درون انتگرال توجه شود و از آن استفاده شود (شرط برقراری $J\neq 0$).

مثال) $\iint_R xy\, dA$ که در آن R ناحیه محصور به اضلاع خطوط $x+3y=-1$ و $x-y=1$، $x+3y=3$ و $x-y=2$

$$\begin{cases} u=x+3y \\ v=x-y \end{cases} \to T:\begin{cases} x=\frac{1}{4}(u+3v) \\ y=\frac{1}{4}(u-v) \end{cases}$$

Subject:
Date:

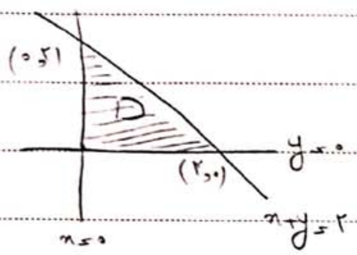
79B

$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & -1/4 \end{vmatrix} = -1/4 \neq 0$ ناحیه R'

$R' = \begin{cases} -1 \le u \le 3 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases} \to$ مستطیل R' تصویر R در صفحه uov

$\iint_R xy\, dA = \frac{1}{16} \iint_{R' \subseteq uov} (u+3v)(u-v)\,|J|\, dA' = \frac{1}{64} \int_{-1}^{3} \left(\int_1^2 (u^2 + 3v^2 + 2uv)\, dv \right) du = \dots$

مثال) $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA$ که در آن D ناحیه محصور به خطوط $x=0$ ، $y=0$ و $x+y=2$.



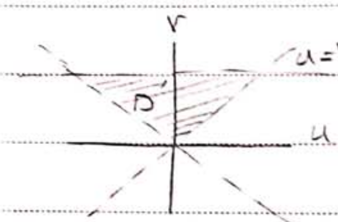
$\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(v-u) \end{cases}$

$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \neq 0$

خط $x+y=2 \to v=2$

خط $x=0 \to v=-u$

خط $y=0 \to v=u$



$D' = \{ 0 \le v \le 2 \;,\; -v \le u \le v \}$

یا $\{ -2 \le u \le 2 \;;\; |u| \le v \le 2 \}$

$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA = \iint_{D' \subseteq uov} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \frac{1}{2}\, dA' = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) du \right) dv$

$t = \frac{u}{v} \to dt = \frac{1}{v} du$

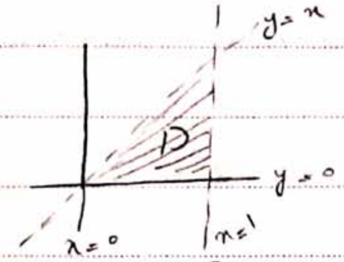
$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(v \sin\left(\frac{u}{v}\right) \Big|_{u=-v}^{u=v} \right) dv = \frac{1}{2} \int_0^2 v \left(\sin(1) + \sin(1) \right) dv$

$= (\sin(1)) \int_0^2 v\, dv = \dots$

مثال) $\int_0^1 \int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\, dx$

قطبی می‌کنیم

$x=1$ قطبی $x = r\cos\theta = 1 \to r = \frac{1}{\cos\theta}$



D قطبی شده D': $\begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta} \end{cases}$ ناحیه D

$x=1 \xrightarrow{\text{قطبی}} r\cos\theta = 1 \to r = \frac{1}{\cos\theta}$

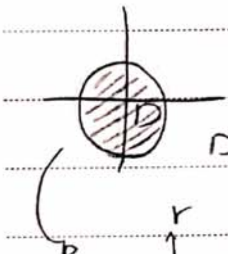
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad J = r$

$\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \left(\frac{r^2\cos^2\theta}{r}\, r\, dr\right) \right) d\theta = \int_0^{\pi/4} (\cos^2\theta)\left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{\frac{1}{\cos\theta}}\right) d\theta$

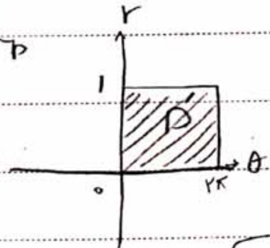
$= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^3\theta}\, d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \sec\theta\, d\theta = \frac{1}{3} \ln |\sec\theta + tg\,\theta| \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4}$

$= \frac{1}{3}\left(\ln(\sqrt{2}+1) - \underbrace{\cancel{\ln(1)}}_{0} \right) = \frac{1}{3} \ln(1+\sqrt{2})$

مثال) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dA$ که در آن D قرص واحد $D: \{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}$



D قطبی شده D': $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

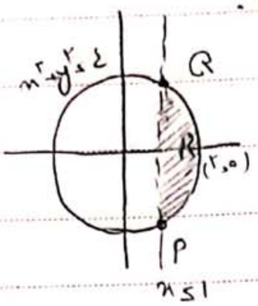


$= \iint_{D' \subseteq r o \theta} \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r\, dA' = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r\, dr \right) d\theta = \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}\right)\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r\, dr\right)$

$\frac{1-r^2}{1+r^2} = \frac{(1+r^2)-2r^2}{1+r^2} = 1 - \frac{2r^2}{1+r^2} \quad \boxed{u = r^2 \to du = 2r\, dr} \to \frac{1-r^2}{1+r^2} = 1 - \frac{2u}{1+u}$

$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\, r\, dr = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1 - \frac{2u}{1+u}}\, du \qquad S = 1 - \frac{2u}{1+u} \to ds = \dots$

مثال) مساحت ناحیه داخل دایره $x^2+y^2=4$ و سمت راست خط $x=1$.



تابع $f=1$

$A(R)=\iint_R dA$ قطبی شده R : R' : $\begin{cases} -\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{\cos\theta}\le r\le 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x=1 \end{cases} \to y^2=3 \quad y=\pm\sqrt{3}$

نقطه شروع ناحیه $P\,\Big|\begin{matrix}1\\-\sqrt{3}\end{matrix} \to tg\theta_0=-\sqrt{3} \to \theta_0=-\pi/3$

نقطه پایان ناحیه $Q\,\Big|\begin{matrix}1\\\sqrt{3}\end{matrix} \to tg\theta_1=\sqrt{3} \to \theta_1=\pi/3$

$\to \theta_0\le\theta\le\theta_1$

$\begin{cases} x=1 \to r\cos\theta=1 \to r=\frac{1}{\cos\theta} \\ x^2+y^2=4 \to r^2=4 \to r=2 \end{cases}$

$$=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} r\,dr\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(r^2\Big|_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2}\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(4-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

$$=2\int_{-\pi/3}^{\pi/3}d\theta-\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\sec^2\theta\,d\theta=2\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(tg\theta\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3}\right)=\frac{4\pi}{3}-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{3})$$
$$=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$$

مساحت همیشه ⊕ است. (در منفی یا صفر شدن اشتباه کرده است.)

مثال) $\iint_D \frac{dA}{(xy)^{2/3}}$ ، D ناحیه محصور بین $xy=1$ و $xy=3$ و $x(1-y)=1$ و $x(1-y)=2$

$\begin{cases} u=xy \\ v=x(1-y) \end{cases}$ $\quad J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 \\ \frac{v}{(u+v)^2} & \frac{-u}{(u+v)^2}\end{vmatrix}=\frac{-(u+v)}{(u+v)^2}\neq 0=\frac{-1}{(u+v)}\neq 0$

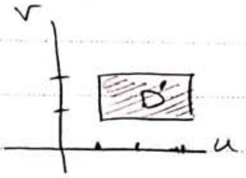
$\begin{cases} x=u+v \\ y=\frac{u}{u+v} \end{cases}$ $\quad D'=\{(u,v):\ 1\le u\le 3,\ 1\le v\le 2\}$

ناحیه در صفحه uov

Subject
Date

81A

$$\iint_D \frac{dA}{(xy)^{2/3}} = \iint_{D' \subseteq uov} u^{-2/3}\left(\frac{1}{u+v}\right) dA' = \int_1^3 \int_1^2 \frac{u^{-2/3}}{u+v}\, dv\, du = \dots$$



نواحی مقدماتی فضای $\mathbb{R}^3$:

۱) ناحیه ی مقدماتی نوع اول (x-ساده):

$$T_1 = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b ,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) ,\ \lambda_1(x,y) \le z \le \lambda_2(x,y)\}$$

که در آن توابع $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ توابعی پیوسته بر $[a,b]$ و λ_1 و λ_2 توابع دو متغیره ی پیوسته بر ناحیه ی P_1

تصویر جسم T_1 در صفحه xoy و ناحیه ی P_1 یک ناحیه مقدماتی یا نرمال در صفحه xoy است.

۲) ناحیه ی مقدماتی نوع دوم (y-ساده):

$$T_2 = \{(x,y,z) \mid c \le y \le d ,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) ,\ \delta_1(x,y) \le z \le \delta_2(x,y)\}$$

که در آن توابع ψ_1 و ψ_2 توابعی پیوسته بر بازه $[c,d]$ و توابع دو متغیره δ_1 و δ_2 توابعی پیوسته بر D_2 تصویر

جسم T_2 در صفحه xoy است به طوری که D_2 ناحیه مقدماتی یا نرمال است.

81B

۳) ناحیه نوع سوم سه‌بعدی فضا (z-ساده):

$$T_3 = \{(x,y,z) \mid e \le z \le f \;,\; \eta_1 \le x \le \eta_2 \;,\; \alpha_1(x,z) \le y \le \alpha_2(x,z)\}$$

$$* \quad T_3 = \{(x,y,z) \mid e \le z \le f \;,\; \delta_1(z) \le y \le \delta_2(z) \;,\; \beta_1(y,z) \le x \le \beta_2(y,z)\} \quad *$$

که در آن η_1 و η_2 توابع پیوسته بر $[e,f]$ و α_1 و α_2 توابع دومتغیره پیوسته بر D_3 تصویر جسم T_3 روی

D_2 β_2 , β_1 δ_2 , δ_1

صفحه xoz ناحیه مقدماتی یا نرمال صفحه هستند.

yoz

۴) ناحیه مقدماتی نوع سه‌بعدی (نرمال ساده): ناحیه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ است که معادلات آن را می‌توان به هر یک از شش ناحیه مقدماتی (x-ساده - y-ساده - z-ساده) نوشت.

۵) ناحیه کلی فضای $\mathbb{R}^3$ = ناحیه (جسم) در فضاست که مقدماتی نمی‌باشد - اما به صورت اجتماعی از نواحی مقدماتی فضا بیان می‌شود.

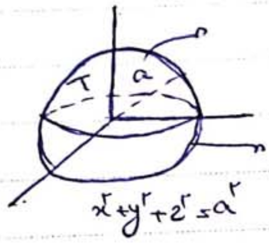
مثال: کره - تاج کروی - قطاع کروی (در قیمت‌ها) - مکعب - مخروط - سهمی‌گون بیضوی - هذلولوی
محدود شده محدود شده محدود شده محدود شده

استوانه - هرم و ... نمونه‌هایی از نواحی نرمال فضای $\mathbb{R}^3$ هستند.
محدود شده

82A

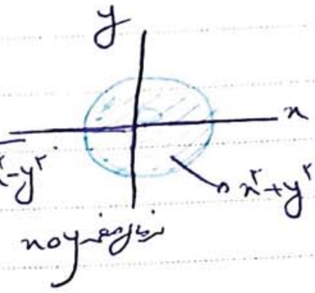
نیم کره بالایی $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

D تصویر کره T



نیم کره پایینی $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$x^2+y^2+z^2=a^2$



کره:

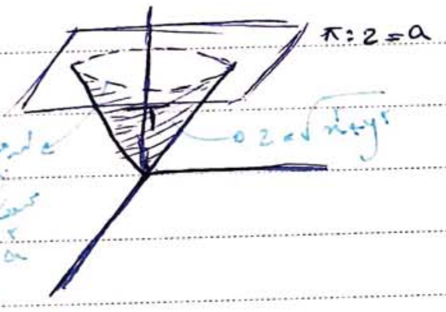
$x^2+y^2=a^2$

تصویر روی صفحه xoy

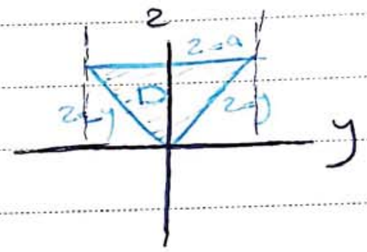
$T=T_1=\{(x,y,z)\mid -a\le x\le a,\ -\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2+x^2},\ -\sqrt{a^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$

$T_1'=\{\quad -a\le y\le a,\ -\sqrt{a^2-y^2}\le x\le\sqrt{a^2-y^2},\ -\sqrt{a^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}\}$

مخروط عمودی:

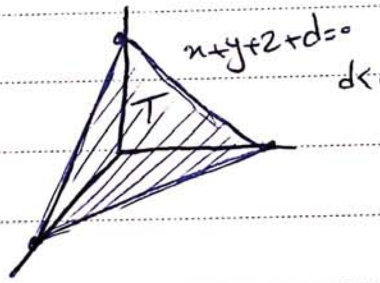


قاعده مخروط
$x^2+y^2=a^2$



$T=\{(x,y,z)\mid \underbrace{-a\le y\le a,\ |y|\le z\le a}_{D},\ \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\text{بدنه مخروط}}\le z\le \underbrace{a}_{\text{لبه مخروط}}\}$

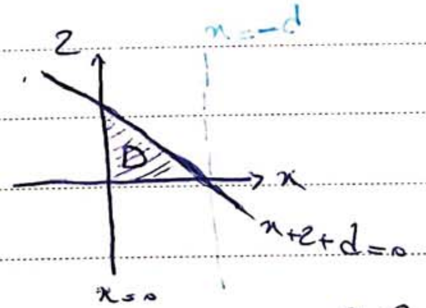
$0\le z\le a\quad -z\le y\le z$



$x+y+z+d=0$

$d<0$

$z=0$



D روی صفحه xoz

D تصویر T بر صفحه xoz

$T=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le -d,\ 0\le z\le -x-d,\ 0\le y\le -x-z-d\}$

PAPCO

Subject:
Date

83A

ناحیه نوع اول T_1 مقدماتی فضا $= \{ (x,y,z) \mid (x,y) \in D \subseteq xoy$ (ناحیه نرمال) $, \lambda_1(x,y) \le z \le \lambda_2(x,y) \}$

$= \{ (x,y,z) \mid a \le x \le b , \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) ,$ ~ $\}$

$= \{ (x,y,z) \mid c \le y \le d , \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) ,$ ~ $\}$

ناحیه نوع دوم مقدماتی فضا $T_2 = \{ (x,y,z) \mid (y,z) \in D \subseteq yoz$ (ناحیه نرمال) $, \mu_1(y,z) \le x \le \mu_2(y,z) \}$

$= \{ (x,y,z) \mid c \le y \le d , \alpha_1(y) \le z \le \alpha_2(y) ,$ ~ $\}$

$= \{ (x,y,z) \mid e \le z \le f ; \beta_1(z) \le y \le \beta_2(z) ,$ ~ $\}$

ناحیه نوع سوم مقدماتی فضا $T_3 = \{ (x,y,z) \mid (x,z) \in D \subseteq xoz$ (ناحیه نرمال) $, \gamma_1(x,z) \le y \le \gamma_2(x,z) \}$

$= \{ (x,y,z) \mid a \le x \le b , \varphi_1(x) \le z \le \varphi_2(x) ,$ ~ $\}$

$= \{ (x,y,z) \mid e \le z \le f ; \psi_1(z) \le x \le \psi_2(z) ,$ " $\}$

$T_4 = T_1 = T_2 = T_3$

ناحیه مقدماتی نرمال (ساده) فضا

Subject:
Date

انتگرال سه‌گانه: فرض کنید جسم توپر و کران‌دار T درون یک ناحیه مکعب مستطیل در فضای $\mathbb{R}^3$ محدود شده باشد به طوری که $T \subseteq [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ و تابع سه متغیره $F(x,y,z)$ روی جسم T تعریف و پیوسته باشد ~~بیان شده باشد~~

هرگاه مجموعه‌ها $\{x_1=a,\dots,x_n=b\}$ و $\{y_1=c,\dots,y_m=d\}$ و $\{z_1=e,\dots,z_l=f\}$

افرازهای دلخواه از بازه‌ها به ترتیب $[a,b]$، $[c,d]$، $[e,f]$ باشند که جسم T به وسیله این افرازها

به جزء مکعب مستطیل (منشورها) R_{ijk} تقسیم شده باشد و $\Delta(V_{ijk})$ حجم جزء منشورها R_{ijk}

باشد به طوری که نقطه c_{ijk} یک نقطه دلخواه درون جزء منشور R_{ijk} باشد و مجموع ریمان

را تشکیل دهیم $\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} F(c_{ijk})\,\Delta(V_{ijk})$ چنانچه تعداد تقسیمات n، m و l به طور جداگانه به ∞

میل کند به گونه‌ای که جزء حجم‌ها $\Delta(V_{ijk})$ به صفر میل کند با حدگیری روی مجموع ریمان فوق، حد حاصل

موجود و متناهی باشد:

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} F(c_{ijk})\,\Delta(V_{ijk})\right) < +\infty \quad (*)$$

در این صورت گوییم تابع ضابطه F روی سطح جسم T دارای انتگرال سه‌گانه است و داریم:

$$\iiint_T F(x,y,z)\,dV = (*)$$

نکته: هرگاه $F(x,y,z)=1$ (تابع ثابت 1) آن‌گاه انتگرال سه‌گانه

(در تعریف قبل) روی جسم توپر T، حجم جسم T را بیان می‌کند.

$$V(T)=\iiint_T dV$$

84A

قضایا و خواص انتگرال سه‌گانه :

① قضیه فوبینی: هر تابع سه متغیره پیوسته روی حجم توپر کران‌دار (محدود) T دارای انتگرال سه‌گانه است.

② قضیه فوبینی: هر تابع سه متغیره کران‌دار روی حجم توپر کران‌دار T به طوری که تعداد نقاط ناپیوستگی آن تابع بر اجتماع متناهی از رویه‌ها واقع باشند انتگرال پذیر سه‌گانه است.

③ هرگاه توابع (پیوسته) سه متغیره $f(x,y,z)$ و $g(x,y,z)$ بر ناحیه کران‌دار T انتگرال پذیر سه‌گانه باشند آنگاه: تابع سه متغیره $f \pm cg$ $(c:cte)$ ، تابع سه متغیره fg و تابع سه متغیره f/g (مشروط بر آنکه $g(x,y,z) \neq 0$ بر حجم T) انتگرال پذیر سه‌گانه هستند و داریم:

$$\iiint_T (f+cg)(x,y,z)\,dv = \iiint_T f(x,y,z)\,dv + c\iiint_T g(x,y,z)\,dv$$

$$\iiint_T (fg)(x,y,z)\,dv \neq \left(\iiint_T f(x,y,z)\,dv\right)\left(\iiint_T g(x,y,z)\,dv\right)$$

④ قضیه مقدار میانی انتگرال سه‌گانه: هرگاه تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ بر حجم بسته و کران‌دار T پیوسته باشد آنگاه انتگرال سه‌گانه تابع f بر حجم T در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\underbrace{(\min_T f)}_{m}\underbrace{\iiint_T dv}_{V(T)} \leq \iiint_T f(x,y,z)\,dv \leq \underbrace{(\max_T f)}_{M}\underbrace{\iiint_T dv}_{V(T)}$$

Subject:
Date

انتگرال مکرر سه‌گانه : فرض کنید $f(x,y,z)$ که تابع سه متغیره پیوسته بر جسم توپر کران‌دار T باشد آن‌گاه انتگرال مکرر سه‌گانه f بر ناحیه T به فرم زیر بیان می‌شود :

الف) هرگاه T ناحیه نوع اول مقدماتی فضای $\mathbb{R}^3$ باشند آن‌گاه انتگرال مکرر f بر T به صورت :

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\underbrace{\int_{\lambda_1(x,y)}^{\lambda_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz}_{h(x,y)\ \text{پیوسته بر}\ D} \right) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \left(\int_{\lambda_1(x,y)}^{\lambda_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx \right) dy$$

$$T = \{ (x,y,z) \mid \underset{\text{نرمال}}{(x,y) \in D} \subseteq xoy \ ;\ \lambda_1(x,y) \le z \le \lambda_2(x,y) \}$$

λ_1, λ_2 توابع پیوسته بر ناحیه نرمال D درون صفحه $\underline{xoy}$

ب) هرگاه T ناحیه نوع دوم مقدماتی فضای $\mathbb{R}^3$ باشد انتگرال مکرر f بر T بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \left(\int_{\mu_1(y,z)}^{\mu_2(y,z)} f(x,y,z)\, dx \right) dz \right) dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\psi_1(z)}^{\psi_2(z)} \left(\int_{\mu_1(y,z)}^{\mu_2(y,z)} f(x,y,z)\, dx \right) dy \right) dz$$

که در آن μ_1 و μ_2 توابع پیوسته بر ناحیه نرمال D درون صفحه $\underline{yoz}$

PAPCO

8.5A

ج) اگر ناحیه T ناحیه نوع سوم مقدماتی فضای $\mathbb{R}^3$ باشد انتگرال مکرر f بر T به صورت زیر است:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)} \left(\underbrace{\int_{\gamma_1(x,z)}^{\gamma_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy}_{g(x,z)\ \text{پیوسته بر}\ D} \right) dx \right) dz = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \left(\int_{\gamma_1(x,z)}^{\gamma_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dz \right) dx$$

که در آن γ_1 و γ_2 توابع پیوسته بر ناحیه نرمال D درون صفحه xz

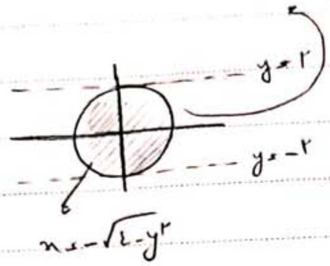
د) خاصیت تعویض ترتیب انتگرال گیری): هرگاه T ناحیه نوع سوم مقدماتی (نرمال ساده) فضای $\mathbb{R}^3$ باشد انتگرال مکرر f بر ناحیه T به وسیله یکی از 6 انتگرال های مکرر حالات (الف) (ب) یا (ج) قابل محاسبه است.

هـ) هرگاه جسم T ناحیه مقدماتی فضای $\mathbb{R}^3$ نباشد ولی به صورت اجتماعی از نواحی مقدماتی فضا بیان شود در این صورت انتگرال مکرر تابع f بر ناحیه T به صورت مجموعی از انتگرال ها مکرر f بر نواحی مقدماتی تشکیل دهنده جسم T بیان می شود.

⑤ قضیه فوبینی: هرگاه $f(x,y,z)$ تابع پیوسته ای باشد که بر جسم توپر و کران دار T تعریف شده باشد. در این شرایط تعریف انتگرال سه گانه صدق کند آن گاه انتگرال سه گانه f بر ناحیه T به وسیله انتگرال ها مکرر f بر ناحیه T محاسبه می شود.

85B:

Subject :
Date

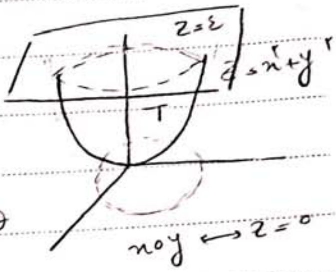


مثال $V(T)=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{0}^{x^2+y^2} dz\,dx\,dy=?$

$x=\pm\sqrt{4-y^2}$

$\Downarrow$

$x^2+y^2=4$



$xoy \leftrightarrow z=0$

$=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)\,dx\,dy \underset{\text{قطبی}}{=} \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2} r^2\cdot r\,dr\,d\theta$

ناحیه قطبی شده D: $\begin{cases}0\leq\theta\leq 2\pi\\ 0\leq r\leq 2\end{cases}$

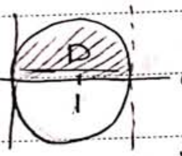
استوانه T روی (صفحه xoy

$=\underbrace{\left(\int_{0}^{2\pi}d\theta\right)}_{2\pi}\underbrace{\left(\int_{0}^{2}r^3dr\right)}_{\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2=4}=8\pi$

مثال $I=\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{0}^{3} z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

$0\leq z\leq 3$

تصویر T در صفحه xoy: $D=\{(x,y): 0\leq x\leq 2 \ ,\ 0\leq y\leq\sqrt{2x-x^2}\}$

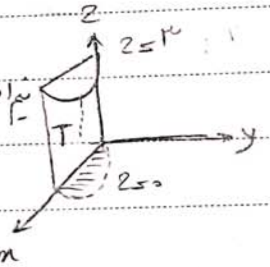


$y=0 \quad y=\sqrt{2x-x^2}$

$y^2+(x^2-2x+1)=+1$

$y^2+(x-1)^2=1$

نیم استوانه مستدیر قائم



$I=\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,\underbrace{\left(\frac{1}{2}z^2\Big|^{3}\right)}_{\frac{9}{2}}dy\,dx$

$=\frac{9}{2}\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx \overset{\text{قطبی}}{=} \frac{9}{2}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos\theta} r\cdot r\,dr\,d\theta$

ناحیه قطبی شده D در xoy: $\begin{cases}0\leq\theta\leq\pi/2\\ 0\leq r\leq 2\cos\theta\end{cases}$

$=\frac{9}{4}\int_{0}^{\pi/2}8\cos^3\theta\,d\theta=12\int_{0}^{\pi/2}\cos^2\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$

$=12\int_{0}^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta=\dots$

$u=\sin\theta$

$du=\cos\theta\,d\theta$

نیم دایره بالایی $y=\sqrt{2x-x^2}$ و مرز ناحیه D $\xrightarrow{\text{قطبی}} r\sin\theta=\sqrt{2(r\cos\theta)-r^2\cos^2\theta}$

$\longleftrightarrow r^2\sin^2\theta=2r\cos\theta-r^2\cos^2\theta$

$\Longleftrightarrow r^2=2r\cos\theta \xrightarrow{r\neq 0} r=2\cos\theta$

PAPCO

~~$y^2+(x-1)^2=1$~~ $\xrightarrow{\text{قطبی}}$

$y=\sin\theta$

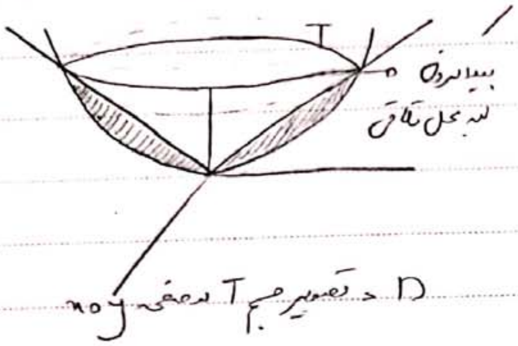
$x-1=\cos\theta \rightarrow x=\cos\theta+1$

مثال) حجم ناحیه محصور به سطوح $z=x^2+y^2$ و رویه مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

T: فضای بین دو رویه مخروط و سهمیگون منظور

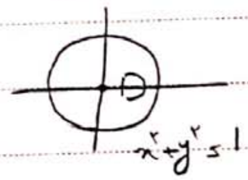
T: بیرون مخروط و درون سهمیگون

$$V(T)=\iiint_T dV$$



بیابیم نقاط برخورد و تصویر تلاقی $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \longleftrightarrow z=1$ تصویر T: $x^2+y^2\leq 1$

D = تصویر جسم T در صفحه xoy



D قطبی: $\begin{cases} 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \end{cases}$

$z=x^2+y^2 \rightarrow z=r^2$

$z=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow z=r$

$$V(T)=\iint_D \int_{r^2}^{r} dz\, \underbrace{dA}_{\text{فرم مساحت } D} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^1 r(r-r^2)\,dr}_{\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1}\,d\theta = 2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{6}$$

قضیه تغییر سیستم مختصات در انتگرال سه گانه (قضیه ژاکوبی): فرض کنید نگاشت T یک ناحیه R (حجم توپر) موجود در فضای xyz (فضای $\mathbb{R}^3$ در سیستم مختصات دکارتی) را به ناحیه R' در سیستم مختصات uvw نظیر کند به طوری که T نگاشت 1-1 و پوشا، پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشد، ژاکوبین تغییر سیستم مختصات از (x,y,z) به (u,v,w) ناصفر باشد (یعنی

$$\left(|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0\right)$$

آنگاه: انتگرال سه گانه در سیستم مختصات دکارتی به وسیله انتگرال سه گانه در سیستم مختصات (u,v,w) در ناحیه R' محاسبه می‌شود و داریم:

$$\iiint_{R\subseteq xyz} f(x,y,z)\,dv = \iiint_{R'\subseteq uvw} f\big(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)\big)\,|J|\,dv'$$

منظور از dv, dv' عنصر حجم‌ها در ناحیه‌های R, R' می‌باشند.

کاربرد قضیه ژاکوبی در انتگرال سه گانه برای سیستم های مختصات استوانه ای و کروی:

الف) **سیستم استوانه ای:** هرگاه تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ در سیستم دکارتی xyz در شرایط قضیه ژاکوبی صدق کند و بخواهیم انتگرال سه گانه f روی ناحیه R درون فضای xyz را در سیستم استوانه ای محاسبه کنیم. داریم:

$$\text{سیستم استوانه ای}\begin{cases} x = r\cos\theta, & \theta\in[0,2\pi] \\ y = r\sin\theta & r\geq 0 \\ z = z \end{cases}\qquad |J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$$

$$\underbrace{(x,y,z)}_{\text{سیستم دکارتی}} \longrightarrow \underbrace{(r,\theta,z)}_{\text{سیستم استوانه ای}}$$

Subject: 87B
Date

بنا به قضیه ژاکوبی داریم:

$$\iiint_{R \subseteq xoyoz} f(x,y,z)\, dv = \iiint_{R' \subseteq r\theta z} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dv'$$

$dv' = dr\, d\theta\, dz$

$dv = dx\, dy\, dz$

نکته: ① هرگاه در ضابطه تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ عبارات x^2+y^2 ، $\sqrt{x^2+y^2}$ و $tg^{-1}(\frac{y}{x})$ ظاهر شود و یا در معادلات ناحیه R در فضای $\mathbb{R}^3$ این عبارات دیده شود از سیستم استوانه‌ای (تعمیم سیستم قطبی) در استدلال سه‌گانه استفاده می‌شود.

② هرگاه جسم توپر T بفرم استوانه، مخروط، سهمیگون بیضوی یا سهموی باشد و یا تصویر جسم T در صفحه xoy به فرم دیسک یا بخشی از دیسک، قطاع، تاج دیده شود بهتر است از سیستم استوانه‌ای استفاده شود.

ب) سیستم کروی: هرگاه تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ در سیستم دکارتی xyz در شرایط قضیه ژاکوبی صدق کند بطوریکه بتوان انتگرال سه‌گانه f را در سیستم کروی بیان کرد آن گاه:

سیستم کروی
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi & , \theta \in [0, 2\pi] \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi & \\ z = \rho\cos\varphi & , \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

θ: زاویه با محور x ها

φ: زاویه با محور z ها

$$|J| = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} \right| = \rho^2 \sin\varphi$$

ρ: شعاع کره

$(x,y,z) \rightarrow (\rho,\theta,\varphi)$

دکارتی — کروی

88A

بنابه تن ژاکوبی داریم:

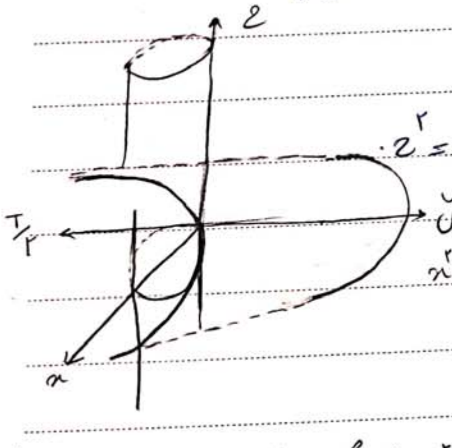
$$\iiint\limits_{R\subseteq xyz} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{R\subseteq \rho\theta\varphi} f(\rho\cos\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,dV'$$

که در آن dV و dV' به ترتیب عنصر حجم های ناحیه های R و R' هستند.

نکته: ① هرگاه در ضابطه تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ عبارات برحسب $x^2+y^2+z^2$ یا توابعی برحسب θ و φ ظاهر شود و یا در معادلات ناحیه R در فضای xyz این عبارات رخ دهد بهتر است از سیستم کروی برای محاسبه انتگرال سه گانه استفاده شود.

② هرگاه ناحیه R در فضای $\mathbb{R}^3$ به فرم کره، بخشی از کره (قطاع و تاج کروی)، مخروط (استوانه) باشد بهتر است از سیستم کروی استفاده شود.

فضای کروی



مثال) حجم جسم محدود به استوانه $x^2+y^2=2x$ و استوانه سهموی $z^2=4x$. (به شکل ناودون)

$x^2+y^2-2x=0 \longleftrightarrow (x^2-2x+1)+y^2=1 \longleftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$

استوانه مستدیر قائم با قاعده به مرکز $(1,0)$ و شعاع 1

هرگاه به امتداد صفحه xoy، جسم T محصور به استوانه $x^2+y^2=2x$ و $z^2=4x$ را برش بزنیم، جسم $T/2$ (به دلیل تقارن) بدست آوردیم:

$$V(T)=2V(T/2)\ ,\quad V(T/2)=\iiint\limits_{T/2\subseteq xyz} dV \overset{\text{سیستم استوانه‌ای}}{=} \iiint\limits_{T'\subseteq r\theta z} r\,dV'$$

نسبت به صفحه افقی xoy $z=0$

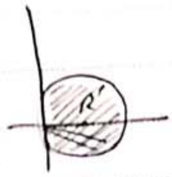
T' همان جسم $T/2$ در سیستم استوانه‌ای

88B'

Subject:
Date:

R' = قاعده استوانه مستدیر قائم = تصویر T' روی صفحه xoy

$R'\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\theta \end{cases}$



$x^2+y^2 = 2x \xrightarrow{\text{قطبی}} r^2 = 2r\cos\theta \xrightarrow{r\neq 0} r = 2\cos\theta$

$T': \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2\cos\theta \\ 0 \le z \le \sqrt{4x} = 2\sqrt{x} = 2\sqrt{2\cos\theta} \end{cases}$

سه بعدی جسم اصلی به سطح
سطح افقی $z=0$

$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{2\sqrt{r\cos\theta}} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta} 2r\sqrt{r\cos\theta}\,dr\right)d\theta =$

$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos\theta}\times\frac{2}{5}r^{5/2}\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \dots = A>0$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \longrightarrow V(T) = \boxed{2A}$

مثال) حجم جسم محدود به کره (درون) $x^2+y^2+z^2=2az$ و مخروط (درون) $x^2+y^2-z^2=0$.
$(a>0)$

$x^2+y^2+z^2-2az=0 \longleftrightarrow x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$

کره به مرکز $(0,0,a)$ و شعاع a

T تبدیل شده جسم $T': \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \varphi_0 = \pi/4 \\ 0 \le \rho \le 2a\cos\varphi \end{cases}$

$x^2+y^2-z^2 \longleftrightarrow \underbrace{z = \sqrt{x^2+y^2}}_{\text{مخروط بالایی}} \xrightarrow{\varphi_0=\pi/4}$

$z = \underbrace{(\cot\varphi_0)}\sqrt{x^2+y^2}$

φ_0: زاویه مولد مخروط با استوانه با محور z ها

$x^2+y^2+z^2 = 2az \xrightarrow[\text{کروی}]{\text{به مختصات}} \rho^2 = 2a\rho\cos\varphi$

$\xrightarrow{\rho\neq 0} \underbrace{\rho = 2a\cos\varphi}_{\text{کران بالای } \rho}$

$V(T) = \iiint_{T} dV \underset{\text{دکارتی}}{\overset{\text{تغییر}}{=}} \iiint_{T'} \rho^2\sin\varphi\,dV'$

$T \subseteq xyz \xrightarrow[\text{کروی}]{\text{به مختصات}} T' \subseteq \rho\theta\varphi$

Subject:
Date

EDA.

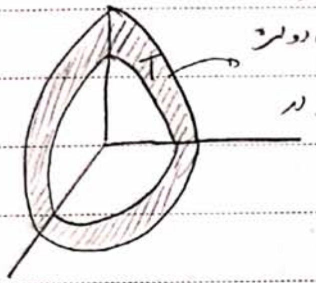
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\right)d\varphi\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,(8a^3\cos^3\varphi)\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{-1}{4}\cos^4\varphi\Big|_0^{\pi/4}\right)d\theta = \dots \qquad u=\cos\varphi \to du=-\sin\varphi\,d\varphi$$

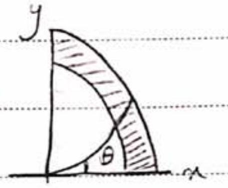
مثال) مطلوب است محاسبه $\iiint_T yz\,dV$ که در آن T بخشی از غشاء کروی است؟

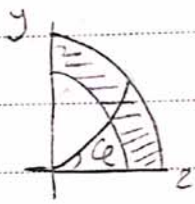
$1\le x^2+y^2+z^2\le 4$ در $\frac{1}{8}$ اول فضای

$$\iiint yz\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_1^2 (\rho\sin\theta\sin\varphi)(\rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$



T فضای بین دو کره به شعاع ۱ و ۲ در $\frac{1}{8}$ اول





$$T:\ \underbrace{\begin{cases} 0\le\theta\le\pi/2 \\ 0\le\varphi\le\pi/2 \\ 1\le\rho\le 2\end{cases}}_{\text{غشاء کروی}}$$ در مختصات کروی

$$=\Big(\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta}_{-\cos\theta|_0^{\pi/2}}\Big)\Big(\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi}_{\frac{1}{3}\sin^3\varphi|_0^{\pi/2}}\Big)\Big(\underbrace{\int_1^2\rho^4\,d\rho}_{\frac{1}{5}\rho^5|_1^2}\Big)$$

مثال) مطلوب است محاسبه

$$I=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx\,dy\,dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$$

$\frac{1}{8}$ اول فضای: $\begin{cases} 0\le x\le+\infty \\ 0\le y\le+\infty \\ 0\le z\le+\infty\end{cases} \xleftrightarrow[\text{کروی}]{\text{در مختصات}} \underbrace{\begin{cases} 0\le\theta\le\pi/2 \\ 0\le\varphi\le\pi/2 \\ 0\le\rho\le+\infty\end{cases}}_{\text{۱/۸ اول فضای در مختصات کروی}}$

$$I=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty}\frac{\rho^2\sin\varphi}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \Big(\underbrace{\int_0^{\pi/2}d\theta}_{\pi/2}\Big)\Big(\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi}_{-\cos\varphi|_0^{\pi/2}=1}\Big)\Big(\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho}_{*}\Big)$$

Subject: جلسه ... مبحث ...
Date:

89B

$$\circledast = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho$$

$$\int \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho = \int \frac{(\rho^2+1)-1}{(1+\rho^2)^2}\,d\rho = \underbrace{\int \frac{d\rho}{1+\rho^2}}_{tg^{-1}\rho} - \underbrace{\int \frac{d\rho}{(1+\rho^2)^2}}_{n=1,\ a=1} = \cdots$$

$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}}$ برحسب $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ بدست می‌آید:

silver man: فصل تغییر متغیر جلد 2

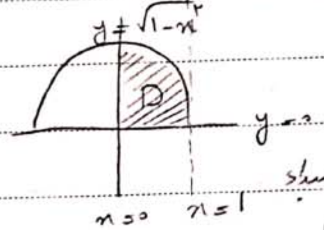
$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ $\qquad \frac{2ax}{(a^2+x^2)^n}$ ----

$dv = \frac{dx}{a^2+x^2}$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = \frac{2ax}{(a^2+x^2)^{n+1}} - \frac{1}{2}\,\frac{a}{(a^2+x^2)}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} \quad ?$$

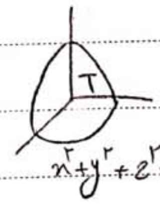
مطلوبست ($I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$?

$T = \begin{cases} 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{نیم‌کره بالایی} \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ $\xleftrightarrow{\text{در مختصات کروی}}$ $T = \begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$



$T = \frac{1}{8}$ کره به مرکز مبداء و به شعاع 1 در $\frac{1}{8}$ اول فضا

D تصویر ربع آن در صفحه xy



$f(x,y,z) = x^2+y^2 \xrightarrow{\text{در مختصات کروی}} (\rho\cos\theta\sin\varphi)^2 + (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2 = \rho^2\sin^2\varphi\,\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1} = \rho^2\sin^2\varphi$

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{1} (\rho^2\sin^2\varphi)(\rho^2\sin\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^1 \rho^4\,d\rho\right)$$

PAPCO

مثال حجم ناحیه T محصور به استوانه‌ها هذلولوی سهمی $xy=1, xy=9, xz=4, xz=36, yz=25, yz=49$.

با یک قضیه تغییر مختصات گوناگون می‌توان در سیستم مختصات مناسب (u,v,w)

$$V(T) = \iiint_{T \subseteq xyz} dV$$

مشابه دیده می‌شود برای T $\quad J = \left| \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| \neq 0$ برای این کار کافی است از معادلات ناحیه T استفاده شود

معادلات هم سطح

$$① \begin{cases} u = xy \\ v = xz \\ w = yz \end{cases} \qquad T' : \text{تصویر } T \text{ در سیستم } (u,v,w) : \begin{cases} 1 \le u \le 9 \\ 4 \le v \le 36 \\ 25 \le w \le 49 \end{cases}$$

$$uz = vy = wx = xyz \qquad \frac{u}{v} = \frac{y}{z}, \quad \frac{u}{v}w = y^2 \longrightarrow \boxed{y = u^{1/2} v^{-1/2} w^{1/2}}$$

جایگذاری در معادله اول $\boxed{x = u^{1/2} v^{1/2} w^{-1/2}}$ جایگذاری در معادله دوم $\boxed{z = u^{-1/2} v^{1/2} w^{1/2}}$

$$\begin{cases} x = u^{1/2} v^{1/2} w^{-1/2} \\ y = u^{1/2} v^{-1/2} w^{1/2} \\ z = u^{-1/2} v^{1/2} w^{1/2} \end{cases} \qquad J = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2}w^{-1/2} & \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2}w^{-1/2} & -\frac{1}{2}u^{1/2}v^{1/2}w^{-3/2} \\ \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2}w^{1/2} & -\frac{1}{2}u^{1/2}v^{-3/2}w^{1/2} & \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2}w^{-1/2} \\ -\frac{1}{2}u^{-3/2}v^{1/2}w^{1/2} & \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2}w^{1/2} & \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2}w^{-1/2} \end{vmatrix}$$

$$= u^{-1/2}v^{1/2}w^{-1/2}\Big(\underbrace{\tfrac{-1}{4}v^{-1} - \tfrac{1}{4}v^{-1}}_{-\frac{1}{2}v^{-1}}\Big) - \Big(u^{1/2}v^{-1/2}w^{-1/2}\big(\underbrace{\tfrac{1}{4}u^{-1} + \tfrac{1}{4}u^{-1}}_{\frac{1}{2}u^{-1}}\big)\Big) + u^{1/2}v^{1/2}w^{-3/2}$$

$$\Big(\cancel{\tfrac{1}{4}u^{-1}v^{-1}w - \tfrac{1}{4}u^{-1}v^{-1}w}\Big) = \frac{-1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2}w^{-1/2} - \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2}w^{-1/2} = u^{-1/2}v^{-1/2}w^{-1/2} \neq 0$$

در ناحیه T'

90B

برای محاسبه حجم T بنابه قضیه فوبینی داریم:

$$|J| = u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}}$$

$$V(T) = \iiint_T dV = \iiint_{T' \in uvw} |J|\, dV' = \int_1^9 \left(\int_4^{36} \left(\int_{25}^{49} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}}\, dw \right) dv \right) du$$

$$= \left(\int_1^9 u^{-\frac{1}{2}}\, du \right)\left(\int_4^{36} v^{-\frac{1}{2}}\, dv \right)\left(\int_{25}^{49} w^{-\frac{1}{2}}\, dw \right)$$

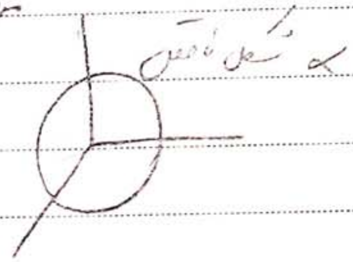
مثال) $\iiint_T z^2\, dV$ را که در آن T ناحیه بین کره‌های $x^2+y^2+z^2=4$ (به مرکز مبدا) و $x^2+y^2+z^2=4z$.

T درون کره

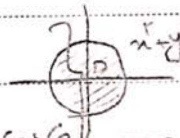
$$x^2+y^2+z^2-4z=0 \longleftrightarrow x^2+y^2+(z-2)^2=4 \longrightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$$ مرکز

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2+z^2=4z \end{cases} \longrightarrow \underset{\text{صفحه}}{\boxed{z=1}} \xrightarrow[\text{معادلات}]{\text{جایگذاری در}} \underset{\text{دایره‌ای}}{x^2+y^2=3}$$

شکل ناحیه



حجم T در مختصات کروی



$$x^2+y^2+z^2=4 \xrightarrow{\text{مختصات کروی}} \rho^2=4 \rightarrow \rho=2$$

$$x^2+y^2+z^2=4z \xrightarrow[\text{کروی}]{\text{مختصات}} \rho^2=4\rho\cos\varphi \xrightarrow{\rho\neq 0} \rho=4\cos\varphi \longrightarrow 4\cos\varphi \le \rho \le 2$$

$$T: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ 4\cos\varphi \le \rho \le 2 \end{cases} \qquad f(x,y,z) = z^2 \xrightarrow[\text{کروی}]{\text{مختصات}} f(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2\cos^2\varphi$$

ژاکوبین کروی

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{4\cos\varphi}^{2} (\rho^2\cos^2\varphi)(\rho^2\sin\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}_{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin\varphi \left(\frac{1}{5}\rho^5\Big|_{4\cos\varphi}^{2}\right) d\varphi\right)$$

$$= \frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi/2} 32\cos^2\varphi\sin\varphi - 14\times 44\cos^7\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \overset{\text{تغییر متغیر}}{\cdots} \quad \begin{cases} u=\cos\varphi \\ du=-\sin\varphi\, d\varphi \end{cases}$$

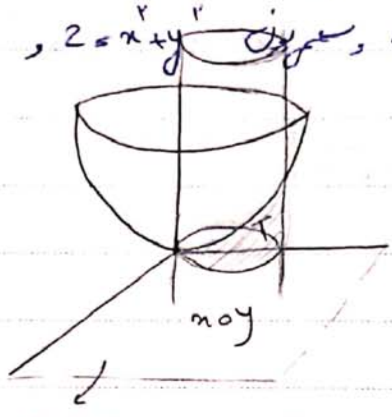
Subject

Date

91A

مثال ۱) $\iiint_T (x^3+y^3)\,dV$ که در آن T محدود به استوانه $x^2+y^2=y$ و سهمیگون $z=x^2+y^2$ و

صفحه xoy . T درون استوانه و بیرون سهمیگون

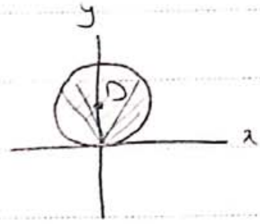


$x^2+y^2-y=0 \longrightarrow x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

D تصویر جسم T در صفحه xoy

جسم T در سیستم استوانه‌ای

$$T':\begin{cases} 0\le\theta\le\pi \\ 0\le r\le\sin\theta \\ 0\le z\le r^2 \end{cases}$$



$x^2+y^2=y \xrightarrow{\text{قطبی}} r^2=r\sin\theta \xrightarrow{r\neq0} r=\sin\theta$

$0\le z\le x^2+y^2 \xrightarrow{\text{قطبی}} 0\le z\le r^2$

$f(x,y,z)=x^3+y^3 \longrightarrow f(r,\theta,z)=r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$

$$\iiint_{T\subseteq xyz}(x^3+y^3)\,dV=\iiint_{T'\subseteq r\theta z} r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\,(r)\,.\,dV'$$

ژاکوبین استوانه‌ای

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{\sin\theta}\left(\int_0^{r^2} r^4(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\,dz\right)dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{\sin\theta} r^6(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{7}\int_0^{\pi}(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\,.\,r^7\Big|_0^{\sin\theta}d\theta=\frac{1}{7}\int_0^{\pi}(\cos^3\theta\sin^7\theta+\sin^{10}\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{7}\Big(\underbrace{\int_0^{\pi}\cos^3\theta\sin^7\theta\,d\theta}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^{10}\theta\,d\theta}_{\mathrm{II}}\Big)$$

(I) $\cos^3\theta\sin^7\theta=(1-\sin^2\theta)\sin^7\theta\cos\theta \qquad u=\sin\theta \longleftrightarrow du=\cos\theta.d\theta$

(I) $=\left(\frac{1}{8}\sin^8\theta-\frac{1}{10}\sin^{10}\theta\right)\Big|_0^{\pi/2}+\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\cdots \qquad \sin\pi=\sin0=0 \qquad \int_0^{\pi}=\int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}$

شکستن حدود انتگرال

(II) $\sin^{10}\theta=(\sin^2\theta)^5=\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right)^5 \xrightarrow[\text{با کاهش توان‌ها}]{\text{اعمال اتحاد توان ۵}} \cdots$

دوتا دوتا

(تاکی توان زوج و توان فرد)

PAPCO

یال مخروط

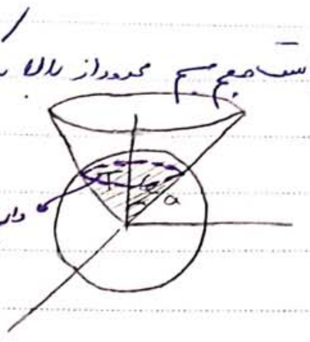
مثال) مطلوب است حجم جسم محدود از بالا به کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ و از پایین به مخروط $z=(\cot\varphi_0)\sqrt{x^2+y^2}$

$0<\varphi_0<\pi$, cte

T در مختصات کروی:
- $0\le\theta\le 2\pi$ — زاویه دوار
- $0\le\varphi\le\varphi_0$ — زاویه یال مخروط
- $0\le\rho\le a$

T' متناظر مختصات کروی T

دایره حاصل از تلاقی کره و مخروط

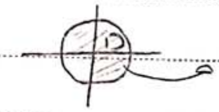


$$x^2+y^2+z^2=a^2 \xrightarrow{\text{کروی}} \rho^2=a^2 \Rightarrow \rho\le a$$

$$V(T)=\iiint_{T\subseteq xoy} dv=\iiint_{T'\subseteq \rho\theta\varphi}\rho^2\sin\varphi\, dv'=\int_0^{2\pi}\int_0^{\varphi_0}\int_0^{a}\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi$$

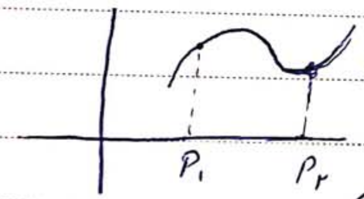
$$=\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)}_{2\pi}\underbrace{\left(\int_0^{\varphi_0}\sin\varphi\, d\varphi\right)}_{-\cos\varphi\big|_0^{\varphi_0}=1-\cos\varphi_0}\underbrace{\left(\int_0^{a}\rho^2 d\rho\right)}_{\frac{\rho^3}{3}\big|_0^{a}=\frac{1}{3}a^3}=\frac{2\pi}{3}a^3(1-\cos\varphi_0)$$

تصویر T بر صفحه xoy : D



دایره صفحه

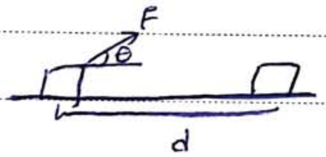
* انتگرال منحنی الخط (انتگرال خط)



$c: y=f(x)$

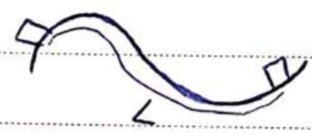
$c:\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\\ a\le t\le b\end{cases}$

طول قوس خم c بین P_1 و P_2 : $L=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$



کار انجام شده $w=Fd\cos\theta$

تابع n متغیره حقیقی = میدان اسکالر n متغیره



$w=FL\cos\theta$

Subject
Date

فرض کنید $f(x,y,z)$ یک تابع سه متغیره حقیقی (میدان اسکالر) پیوسته در امتداد خم پیوسته و مشتق پذیر $c: r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ برای $a \leq t \leq b$ باشد، در این صورت می‌توان با تعمیم مفهوم کار انجام شده توسط میدان نیروی اسکالری F در امتداد مسیر خم c به انتگرال خط تابع f در امتداد خم c دست یافت و آن را به صورت زیر نمایش داد و تعریف می‌کنیم:

$$\int_c f(x,y,z)\, ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t)) \underbrace{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}_{\|r'(t)\|}\, dt$$

فرم طول قوس خم c در بازه $[a,b]$

$$ds = \|r'(t)\|\, dt$$

مثال) مطلوب است محاسبه انتگرال خط $\int_c \overbrace{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{f(x,y,z)}\, ds$ که در آن c خم

$$c: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = 4t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$x'(t) = -3\sin t, \quad y'(t) = 3\cos t, \quad z'(t) = 4$$

$$r'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 4) \to \|r'(t)\| = \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

$$f(x,y,z) = f(x(t),y(t),z(t)) = \frac{4t}{\sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t}} = \frac{4}{3}t$$

$$\int_c \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\, ds = \int_0^\pi \frac{4}{3}t \times 5\, dt = \frac{20}{3}\int_0^\pi t\, dt = \frac{20}{3} \times \frac{t^2}{2}\Big|_0^\pi = \frac{10}{3}(\pi^2)$$

Subject: $\oint \vec F\, d\vec r$ → میدان برداری $\int_C \vec F\cdot d\vec r$ 93A

Date: (*) $\oint f\, ds$ → میدان اسکالر $\int_C f\, ds$ Vector field

میدان برداری: هر تابع چند متغیره برداری را یک میدان برداری می‌نامیم.

یک میدان برداری n-متغیره $\vec F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ یک تابع n-متغیره برداری با m مؤلفه می‌باشد.

$(x_1,\dots,x_n) \to (y_1,\dots,y_m)$

در حالت خاص: $m=n=2$: $\vec F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ میدان برداری دو متغیره دو مؤلفه‌ای

$(x,y) \to (P(x,y), Q(x,y))$

مؤلفه‌های میدان برداری $\vec F$

در حالت: $m=n=3$: $\vec F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ میدان برداری سه متغیره سه مؤلفه‌ای

$(x,y,z) \to (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

~~$\oint f(x(t),\dots)\,\|r'(t)\|$~~

انتگرال خط (منحنی الخط): میدان برداری در امتداد مسیر یک خم: فرض کنید میدان برداری $\vec F$ در امتداد خم به طور پیوسته مشتق‌پذیر $C: \vec r(t)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و در این صورت انتگرال خط میدان برداری $\vec F$ در امتداد خم C که با نماد $\int_C \vec F \cdot d\vec r$ (ضرب داخلی) نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_C \vec F \cdot d\vec r = \int_a^b \underbrace{F(x(t), y(t), \dots) \cdot \vec r\,'(t)\, dt}_{\text{تابع حقیقی از } [a,b] \to \mathbb{R} \text{ پیوسته}} \quad (*)$$

$$= \int_a^b P(x,y,\dots)\,dx + Q(x,y,\dots)\,dy + \cdots$$

$C: \vec r(t) = (x(t), y(t), \dots)$, $a \le t \le b$

$d\vec r = r'(t)\,dt = (x'(t)\,dt, y'(t)\,dt, \dots) = (dx, dy, \dots)$

$\vec F(x,y,\dots) = (P(x,y,\dots), Q(x,y,\dots), \dots)$

Subject:
Date

93B

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{P(x,y,\ldots)}\,dx + \underbrace{Q(x,y,\ldots)}\,dy + \cdots$$

تابع چند متغیره حقیقی

⚠ توجه

با توجه به اینکه میدان برداری $\vec{F} = (P(x,y,\ldots), Q(x,y,\ldots), \ldots)$ دارای مؤلفه‌ای است که این مؤلفه‌ها خود توابع چند متغیره حقیقی (میدان اسکالر) هستند پس حاصل ضرب داخلی $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ به فرم مجموعی از حاصل ضرب‌ها میدان‌ها اسکالر P و Q و ... در دیفرانسیل متغیرها dx و dy و ... می‌باشد.

بنا به تعریف ⊛ از انتگرال خط میدان برداری $\vec{F}$ در امتداد خم C را می‌توان به فرم زیر بیان کرد.

(**) $$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b P(x(t),y(t),\ldots)\,dx + Q(x(t),y(t),\ldots)\,dy + \cdots$$

در حالت خاص $n=2$:
$$\int_C F\cdot dr = \int_a^b P(x(t),y(t))\,dx + Q(x(t),y(t))\,dy$$

در حالت $n=3$ داریم:
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))\,dx + Q(x(t),y(t),z(t))\,dy + R(x(t),y(t),z(t))\,dz$$

گاهی اوقات در تعریف معادل (**) از نمایش دیگری انتگرال خط میدان برداری $\vec{F}$ در امتداد خم C استفاده می‌شود، داریم:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C P(x,y,\ldots)\,dx + Q(x,y,\ldots)\,dy + \cdots \qquad (***)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$C: \vec r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, t^3)$

مثال) مطلوب است محاسبه $\int_C \underbrace{yz}_{P}\,dx + \underbrace{xz}_{Q}\,dy + \underbrace{xy}_{R}\,dz = \int_C \vec F\cdot d\vec r$ که در آن $C: x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

مقید به صعودی $0 \le t \le 1$

$C: \vec r(t) = (t, t^2, t^3)$

میدان برداری $\vec F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$

$$\int_C yz\,\underbrace{dx}_{x'(t)dt} + xz\,\underbrace{dy}_{y'(t)dt} + xy\,\underbrace{dz}_{z'(t)dt} = \int_0^1 t^5\,dt + t^4\times 2t\,dt + t^3\times 3t^2\,dt$$

$$= \int_0^1 6t^5\,dt = t^6\Big|_0^1 = \boxed{1}$$

مثال) مطلوب است محاسبه $\int_C \underbrace{(3x^2-6yz)\,dx + (2y+3xz)\,dy + (1-4xyz^2)\,dz}_{\vec F\cdot d\vec r}$ که در آن C پاره خط از نقطه $\overset{A}{(0,0,0)}$ به نقطه $\overset{B}{(1,1,1)}$.

$dx = x'(t)dt,\quad dy = y'(t)dt,\quad dz = z'(t)dt$

میدان برداری $\vec F(x,y,z) = (3x^2-6yz,\ 2y+3xz,\ 1-4xyz^2)$

$l: \begin{cases} \vec n = \vec{AB} \\ \vec P = A \text{ یا } B \end{cases}$

در فضا $C: \vec r(t) = (t, t, t)$ ، $0 \le t \le 1$

برای راستای کار

پاره خط ⟵ $0 \le t \le 1$

که به صورت ...

$l: \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} = t$

$l: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ if $0 \le t \le 1$ ⟵ معادله پاره خط

$$\int_C \vec F\cdot d\vec r = \int_0^1 (3t^2-6t^2)\,dt + (2t+3t^2)\,dt + (1-4t^4)\,dt$$

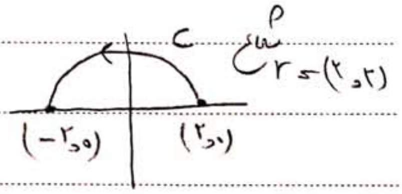
$$= \int_0^1 (-4t^4+2t+1)\,dt = \dots$$

$0 \le t \le 1$: به ازای $t=0$ نقطه شروع، به ازای $t=1$ نقطه پایان

مثال) مطلوب است محاسبه $\int_C \underbrace{\frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2}}_{\vec F\cdot d\vec r}$ که در آن C نیم دایره

if $C: \begin{cases} x = 2\cos t + x_0 \\ y = 2\sin t + y_0 \end{cases}$ (مختصات مرکز دایره: x_0، y_0) ، $0 \le t \le \pi$

شعاع دایره



در حالت کلی $\begin{cases} x = r\cos t + x_0 \\ y = r\sin t + y_0 \end{cases}$

میدان برداری $\vec F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$

در صفحه

$$\int_C \vec F\cdot d\vec r = \int_a^b \vec F(x(t), y(t))\cdot d\vec r(t)$$

94B

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos t-\sin t)\times(-2\sin t)\,dt + \frac{1}{2}(\cos t+\sin t)\times 2\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \underbrace{(\cos^2 t+\sin^2 t)}_{1}\,dt = \int_0^{\pi} dt = t\Big|_0^{\pi} = \boxed{\pi}$$

نکته: انتگرال خط میدان اسکالر و میدان برداری در امتداد مسیر بسته:

شروع و پایان در هم منطبق باشد

مسیر بسته = هرگاه خم C به معادله $C: \vec{r}(t)$ در بازه $[a,b]$ داده شده باشد C را خم بسته گوییم اگر $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$:

نقطه پایان خم C

نقطه شروع خم C

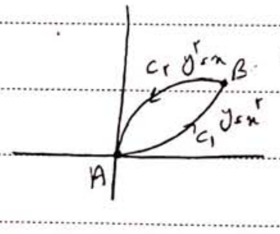
هرگاه $f(x,y,\dots)$ یک میدان اسکالر و $\vec{F}(x,y,\dots)$ یک میدان برداری باشند که در امتداد خم C به طور پیوسته مشتق‌پذیر و بسته $C: \vec{r}(t)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند آنگاه انتگرال‌های خط میدان اسکالر f و میدان برداری $\vec{F}$ بر امتداد خم C را با نمادها $\oint_C f\,ds$ و $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ نمایش می‌دهند.

مقادیر این انتگرال‌ها خط با همان فرمول‌های (*) و (**) و (***) بیان می‌شوند.

مثال: مطلوب است محاسبه $\oint_C \overbrace{xy}^{P}\,dx + \overbrace{x^2}^{Q}\,dy$ که در آن C منحنی بسته محدود به سهمی‌های زیر در جهت ... $y^2 = x$, $y = x^2$

$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

جهت حرکت به صورت پادساعت‌گرد ~~پیموده~~ پیموده شده است.



$\vec{F}(x,y) = (xy, x^2)$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases} \rightarrow x^4 = x \rightarrow x=0,1 \rightarrow y=0,1$$

$A(0,0)$, $B(1,1)$

بسته $C = C_1 \cup C_2$

$$\oint_{C=C_1\cup C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{I}} + \underbrace{\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{II}}$$

PAPCO

95A

Subject:
Date

$C_1 : \vec{r_1(t)} = (x_1(t), y_1(t))$

I $\int_{C_1} \vec{F}.\vec{dr} = \int_0^1 F(x_1(t), y_1(t)) . (x_1'(t), y_1'(t))\, dt = \int_0^1 (t^3, t^2) . (1, 2t)\, dt$

$= \int_0^1 (t^3 + 2t^3)\, dt = 3\int_0^1 t^3\, dt$

$C_1 = \vec{r_1(t)} = (t, t^2)$?
$0 \le t \le 1$

$C_2 : \vec{r_2(t)} = (1-t, \sqrt{1-t})$

$0 \le t \le 1$ $\quad C_2 : \vec{r_2(t)} = (x_2(t), y_2(t))$

II $\int_{C_2} \vec{F}.\vec{dr} = \int_0^1 F(x_2(t), y_2(t)) . (x_2'(t), y_2'(t))\, dt = \int_0^1 ((1-t)^{\frac{3}{2}}, (1-t)^{\frac{3}{2}}) . (-1, \frac{-1}{2\sqrt{1-t}})\, dt$

$= -\frac{3}{2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{3}{2}}\, dt = $ II

$\Rightarrow \int_C \vec{F}.\vec{dr} = $ I + II

* خواص و قضایای انتگرال خط میدان اسکالر و میدان برداری بر امتداد خم :

1) هر میدان اسکالر f و هر میدان برداری $\vec{F}$ پیوسته بر امتداد یک خم به طور پیوسته مشتق پذیر $C: \vec{r(t)}$ بر یک بازه $[a, b]$ دارای انتگرال خط است.

2) هرگاه f_1, f_2 دو میدان اسکالر و $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ دو میدان برداری پیوسته بر یک خم به طور پیوسته مشتق پذیر $C: \vec{r(t)}$ بر بازه $[a, b]$ باشند آنگاه میدان اسکالر $f_1 + \lambda f_2$ و $\vec{F_1} + \lambda \vec{F_2}$ بر خم C دارای انتگرال خط است.
$(\lambda \in \mathbb{R})$
اسکالر — میدان برداری

و داریم :

$$\int_C (f_1 + \lambda f_2)\, ds = \int_C f_1\, ds + \lambda \int_C f_2\, ds$$

$$\int_C (\overrightarrow{F_1 + \lambda F_2}) . \vec{ds} = \int_C \vec{F_1} . \vec{ds} + \lambda \int_C \vec{F_2} . \vec{ds}$$

Subject:
Date

③ هرگاه f یک میدان اسکالر و $\vec{F}$ یک میدان برداری بر امتداد خم ها به طور پیوسته مشتق پذیر C_i $(i=1,2,\dots,n)$ باشند و $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$ آنگاه میدان اسکالر f و میدان برداری $\vec{F}$ بر خم C دارای انتگرال خط است.

و داریم:

$$\int_C f\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f\,ds$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

توجه شود که در هر قطعه و فواصل مرزی خم C می توانند تکه تکه پیوسته و مشتق پذیر باشد.

معرفی یک نماد: هرگاه C یک خم باشد که نقطه A را به نقطه B وصل کند آن گاه "$-C$" خمی است که همان مسیر خم C را می پیماید به طوری که نقطه B را به نقطه A وصل می کند. به عبارت دیگر، خم "$-C$" خلاف جهت خم C را می پیماید.

④ هرگاه میدان اسکالر f و میدان برداری $\vec{F}$ پیوسته بر امتداد خم به طور پیوسته (یا تکه ای پیوسته) مشتق پذیر C دارای انتگرال خط باشند آن گاه میدان اسکالر f و میدان برداری $\vec{F}$ بر امتداد خم "$-C$" نیز دارای انتگرال خط هستند و داریم:

$$\int_{-C} f\,ds = -\int_C f\,ds$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$\int_{-C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

⑤ هرگاه میدان اسکالر f و میدان برداری $\vec{F}$ پیوسته بر امتداد خم به طور پیوسته (تکه ای پیوسته) مشتق پذیر C دارای انتگرال خط باشند آن گاه:

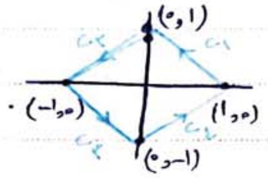
$$\left|\int_C f\,ds\right| \le \int_C |f|\,ds \quad , \quad \left|\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}\right| \le \int_C \underbrace{\|\vec{F}\|}_{\text{میدان اسکالر}}\,ds$$

96A

Subject

Date

مثال) انتگرال $\oint_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ که C مربع به رئوس $(0,1)$ و $(1,0)$ و $(0,-1)$ و $(-1,0)$ که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده است.



$C = c_1 \cup c_2 \cup c_3 \cup c_4$

$c_1 : x+y=1$ پاره‌خط واصل از $(1,0)$ به $(0,1)$ $\longleftrightarrow c_1 : r_1(t) = (1-t, t) \quad 0 \le t \le 1$

$c_2 : y-x=-1 \longleftrightarrow c_2 : r_2(t) = (-t, 1-t) \quad 0 \le t \le 1$

$c_3 : x+y=-1 \longleftrightarrow c_3 = r_3(t) = (t-1, -t) \quad 0 \le t \le 1$ ؟ مؤلفه‌ها $r(t)$

$c_4 : y-x=-1 \longleftrightarrow c_4 : r_4(t) = (t, t-1) \quad 0 \le t \le 1$

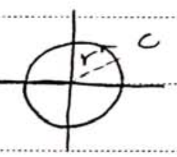
$$\vec{F}(x,y) = \Big(\underbrace{\frac{1}{|x|+|y|}}_{P(x,y)}, \underbrace{\frac{1}{|x|+|y|}}_{Q(x,y)}\Big)$$

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \frac{dx+dy}{x+y} = \int_0^1 -dt+dt = 0$$

$$\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \frac{dx+dy}{-x-y} = \int_0^1 dt-dt = 0$$

$$\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \frac{dx+dy}{-x+y} = \int_0^1 -dt-dt = -2t\Big|_0^1 = \boxed{-2}$$

مثال) مطلوب است محاسبه $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ انتگرال $\vec{F}(x,y) = \frac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}$ روی دایره C به مرکز مبدا.



در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، ابتدا مثلثاتی $x(t)$ $y(t)$

$C : \vec{r(t)} = (r\cos t, r\sin t)$ ، پارامتری دایره

$0 \le t \le 2\pi$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}(x(t), y(t)) \cdot (x'(t)\,dt, y'(t)\,dt)$$

$$= \Big(\frac{-r\sin t}{r^2}, \frac{r\cos t}{r^2}\Big) \cdot (-r\sin t\,dt, r\cos t\,dt)$$

$$= \Big(\frac{-1}{r}\sin t, \frac{1}{r}\cos t\Big) \cdot (-r\sin t, r\cos t)\,dt$$

$$= \big(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}\big)\,dt = dt$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} dt = \boxed{2\pi}$$

PAPCO

Subject
Date

96 B

استقلال از مسیر انتگرال خط میدان برداری :

استقلال از مسیر : فرض کنید میدان برداری $\vec{F}$ بر امتداد خم به طور پیوسته مشتق پذیر $c: \vec{r}(t)$

در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد به طوری که c منحنی واصل بین نقاط $A=r(a)$ و $B=r(b)$ باشد. انتگرال خط $\oint_c \vec{F}.d\vec{r}$ را

مستقل از مسیر خم c نامید هرگاه مقدار انتگرال خط وابسته به نقاط A و B باشد و هیچ وابستگی به مسیر پیموده

شده c از A به B نداشته باشد.

شرط لازم و کافی برای انتگرال خط مستقل از مسیر خم : هرگاه $\vec{F}$ یک میدان برداری پیوسته مشتق پذیر بر

جایی شامل امتداد مسیر خم به طور پیوسته شامل امتداد مسیر خم به طور پیوسته مشتق پذیر $c: \vec{r}(t)$ باشد

به طوری که خم c نقاط A و B را با هم وصل کند آنگاه انتگرال خط $\oint \vec{F}.d\vec{r}$ مستقل از مسیر پیموده شده توسط خم

c است. اگر و تنها اگر میدان برداری منفی به نام $\vec{U}$ موجود باشد به طوری که در سرتاسر آن ناحیه داشته باشیم :

$$\vec{F} = \vec{\nabla} U \quad \text{قضیه اساسی انتگرال خط} \longleftrightarrow \quad \oint_c \vec{F}.d\vec{r} = U(B) - U(A)$$

$\vec{\nabla} U$ گرادیان میدان اسکالر U در هر نقطه داده شده $\qquad \vec{\nabla} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}(x,y), \dots\right)$

شرط میدان گرادیان بودن و یافتن تابع پتانسیل وابسته به میدان گرادیان :

فرض کنید میدان برداری $\vec{F}$ یک میدان گرادیان بر ناحیه شامل به طور پیوسته مشتق پذیر و واصل نقاط A و B

PAPCO

97A

Subject
Date

باشند و میدان اسکالر u تابع پتانسیل وابسته به $\vec{F}$ ، آن گاه :

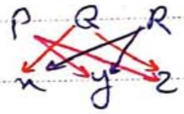
الف) هرگاه $\vec{F}$ میدان برداری دو متغیره است $F(P(x,y), Q(x,y))$ برناحیه R درون صفحه xoy الزاماً داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

ب) $\vec{F}$ میدان برداری سه متغیره $F(x,y,z) = (Q(x,y,z), P(x,y,z), R(x,y,z))$ برناحیه T درون فضای x و z الزاماً داریم:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) \;/\; \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,z)$$



یافتن تابع پتانسیل وابسته به میدان برداری. فرض کنید $\vec{F}$ یک میدان برداری ، میدان اسکالر u تابع پتانسیل وابسته به آن باشد ، بدین صورت داریم : $F = \nabla u$ برای یافتن تابع پتانسیل u می بایست یک دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول (دو متغیره و سه ...) را بیابیم که تابع u جواب عمومی آن باشد به طوری که این معادله دیفرانسیل همان معادله کامل است: شرط کامل بودن معادله دیفرانسیل داده شده = میدان برداری بودن F

$$F = \vec{\nabla u} \longleftrightarrow \exists u(x,y,\dots) = \begin{cases} P(x,y,\dots) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,\dots) \\ Q(x,y,\dots) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,\dots) \\ \dots \end{cases}$$

$$F(x,y,\dots) = (P(x,y,\dots), Q(x,y,\dots), \dots)$$

حالت خاص $n=2$:

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$$

$$\exists u(x,y) = \begin{cases} P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \\ Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Subject
Date

97B

$$\exists u(x,y,z) = \begin{cases} P(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x} \\ Q(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial y} \\ R(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$$

حالت خاص $n=3$:

$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

مثال) آیا $F(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$ میدان برداری است؟ تابع پتانسیل دارد؟ F ?

$\vec{F}$ میدان برداری R^2 $\longleftrightarrow$ $\frac{\partial Q}{\partial x} \overset{?}{=} \frac{\partial P}{\partial y}$

$\vec{F}$ میدان برداری $\longleftrightarrow$ R^2 برقرار $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y$

u تابع پتانسیل F $\longleftrightarrow$ $F = \nabla u \longleftrightarrow \exists u(x,y) = \begin{cases} P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \\ Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$ $\longrightarrow$ هر دو حاصل

$\frac{\partial u}{\partial x} = P \longrightarrow u(x,y) = \int P(x,y)\, dx + g(y) = \int e^x \sin y\, dx + g(y)$

$e^x \sin y + g(y)$ $\quad e^x \cos y = Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y + g'(y)$

نسبت به مشتق گیری

y به

$g'(y) = 0 \longrightarrow g(y) = 0$ یا $c \to ct_e$ $\quad \boxed{u(x,y) = e^x \sin y + c}$ تابع پتانسیل وابسته به میدان برداری

مثال) $F(x,y,z) = (y^2 z^3 + \cos x, 2xyz^3 - e^{-y}, 3xy^2 z^2 - 1)$ آیا $\vec{F}$ میدان برداری است؟ تابع

پتانسیل وابسته به F ?

98A

Subject
Date

مثال) مطلوب است محاسبه $\int_C (4xy^2-y^3)\,dx + (4x^2y-3xy^2)\,dy$ که در آن C مسیر واصل نقاط $(1,2)$ به $(3,4)$.

اگر درباره نقاط مسیر صحبت نشده یعنی مستقل از مسیر است در غیر این صورت باید چک کرد

$\vec{F}(x,y) = (\underbrace{4xy^2-y^3}_{P}, \underbrace{4x^2y-3xy^2}_{Q})$ میدان $\vec{F}$ برداری در R^2 $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial Q}{\partial x} \overset{?}{=} \frac{\partial P}{\partial y}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy - 3y^2 = \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy - 3y^2 \longrightarrow$ میدان $\vec{F}$ برداری در R^2

$$\exists\, u(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P = 4xy^2 - y^3 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q = 4x^2y - 3xy^2 \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial y} \overset{?}{=} Q \qquad u(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + \underbrace{g(x)}_{\text{مشتق بگیر}}$

$u(x,y) = 2x^2y^2 - xy^3 + g(x) \xrightarrow[\text{نسبت به } x]{\text{مشتق بگیر}} 4xy^2 - y^3 \overset{*}{=} \frac{\partial u}{\partial x} = 4xy^2 - y^3 + g'(x)$

میدان $\vec{F}$ برداری $\longleftrightarrow$ مستقل از مسیر $\quad \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \longleftrightarrow \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = u(B) - u(A)$ که قضیه اساسی

$A(1,2) \qquad B(3,4)$

Subject
Date

98B

$$\int_{(۱,۲)}^{(۳,۴)} \vec{F}.\vec{dr} = u(۳,۴) - u(۱,۲) = \dots$$

- هرگاه $\vec{F}$ یک میدان برداری باشد در ناحیه شامل خم بسته به طور پیوسته مشتق‌پذیر، آنگاه:

$$\oint_c \vec{F}.\vec{dr} = 0$$

99A

جهت مثبت خم: هرگاه $C: r(t)$ یک خم بسته پیوسته (یا تکه‌ای پیوسته) در بازه $[a,b]$ باشد و ناظر مسیر خم C

را بپیماید و به نقطه شروع حرکت خود بازگردد به طوری که همواره ناحیه محصور R به مرز خم را در طرف

(مرز ناحیه $=C$)

چپ خود ببیند آنگاه جهت پیموده شدن خم را "جهت مثبت" می‌نامیم در غیر این صورت جهت خم

را "جهت منفی" می‌نامیم. مسیر مرز ناحیه محصور R را با نماد $C=\partial R$ نمایش می‌دهیم.

ساده

خم ساده: خم $C: r(t)$ را در بازه $[a,b]$ ساده گوییم هرگاه خم C خودش را در هیچ نقطه t قطع نکرده

باشد (خودمتقاطعی نداشته باشد). به عبارت دیگر خم C را ساده گوییم هرگاه فقط دارای یک حفره (ناحیه

محصور R) باشد.

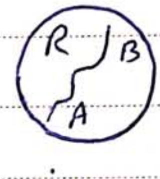
$\forall t_1,t_2 \in [a,b] \quad r(t_1)\neq r(t_2) \longleftarrow$ عدم خودمتقاطعی

$t_1\neq t_2 \quad r(t_1) = r(t_2) \longleftarrow$ خودمتقاطعی ∞

غیرساده

ناحیه همبند: ناحیه R را همبند (متصل) گوییم هرگاه هر دو نقطه آن را بتوان به وسیله حداقل مسیر یک

خم پیوسته به هم وصل کرد به طوری که تمام این مسیر درون این ناحیه قرار گیرد.



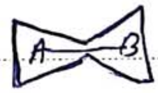
همبند

همبند

R: اجتماع دو شکل

بدون نقطه تماس

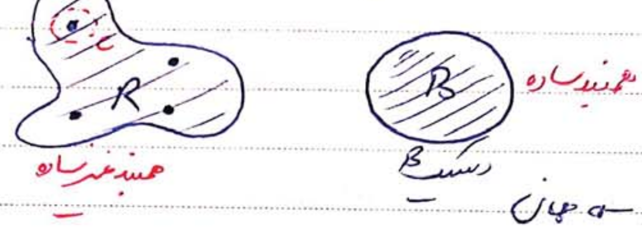
غیرهمبند



Subject
Date

99B

ناحیه همبند ساده: ناحیه R را همبند ساده گوییم هرگاه R ناحیه همبند باشد و هر گونه خم بسته ساده واقع در R در نظر بگیریم، ناحیه محصور به مرز C کاملاً درون ناحیه R قرار بگیرد.



نکته: جهت مثبت در ناحیه همبند ساده به جهان خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.

به عبارت دیگر ناحیه همبند R اگر حفره دار نباشد همبند ساده است).

قضیه گرین (در صفحه): فرض کنید $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ یک میدان برداری دو متغیره پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته در ناحیه همبند ساده R با مرز بسته ساده C که در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) محصور شده است، داده شده باشد. آن گاه انتگرال خط میدان برداری $\vec{F}$ در امتداد خم بسته ساده $C = \partial R$ (مرز) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \oint_{C=\partial R} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_{R\subseteq xoy} \overbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}^{\text{میدان اسکالر دو متغیره پیوسته}} dA$$

تبدیل انتگرال خط به انتگرال دوگانه — قضیه گرین

نتیجه: هرگاه $\vec{F}(x,y)$ میدان برداری روی ناحیه همبند ساده R با مرز بسته ساده C با جهت مثبت پایستار باشد آن گاه

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

مثال) مطلوب است محاسبه $\oint_C \underbrace{(y+\ln x)}_{P}dx + \underbrace{(x^3+e^{-y})}_{Q}dy$ که در آن C مثلث به رئوس (۱و۰)، (۲و۰) و (۲و۱)

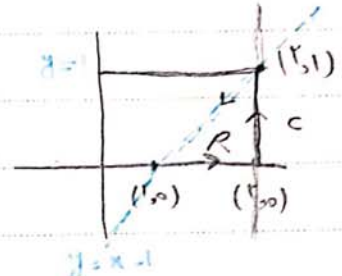
R درون مثلث

C مرز مثلث

$\vec F(x,y)=(y+\ln x,\ x^3+e^{-y})$ پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته

R ناحیه همبند ساده با مرز بسته ساده در جهت مثبت C

$\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2 \neq \frac{\partial P}{\partial y}=1$ میدان $\vec F(x,y)$ پایستار نیست



$\oint_C \vec F\cdot d\vec r = \iint_R (3x^2-1)\,dA$ شرایط گرین داریم

$R\in xoy$ درون مرز C

R درون مثلث $=\{(x,y);\ 0\le y\le 1,\ y+1\le x\le 2\}$

$=\int_0^1\int_{y+1}^2 (3x^2-1)\,dx\,dy = ---$

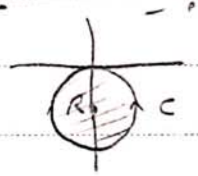
مثال) مطلوب است محاسبه $\oint_C \frac{xy^2}{1+x^2}dx + y\ln(1+x^2)dy$ که در آن C دایره $x^2+y^2+2y=0$

$x^2+(y+1)^2=1$

$\vec F$ بر درون دایره C پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته

$\vec F(x,y)=\left(\frac{xy^2}{1+x^2},\ y\ln(1+x^2)\right)$ C= مرز بسته ساده

R: همبند ساده



$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2xy}{1+x^2} = \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2xy}{1+x^2}$ بر ناحیه R ← $\vec F$ بر ناحیه R درون C دارای میدان پایستار است.

پس $\oint_C \vec F\cdot d\vec r=0$

قضیه گرین در حالت خاص ← محاسبه مساحت ناحیه همبند ساده R محصور به مرز بسته ساده C:

هرگاه در قضیه گرین میدان برداری $\vec F(x,y)$ به فرم $\vec F(x,y)=(-y,0)$ یا $\vec F(x,y)=(0,x)$ و یا

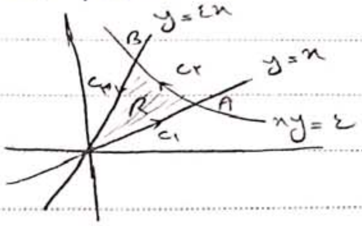
$\vec F(x,y)=(-y,x)$ باشد می‌توان مساحت ناحیه همبند ساده R محصور به مرز بسته ساده C را به صورت های زیر محاسبه کرد

الف) $\oint_C -y\,dx=\iint_R dA = A(R)$ / ب) $\oint_C x\,dy=\iint_R dA = A(R)$

ج) $\oint_C -y\,dx+x\,dy = 2\iint_R dA = 2A(R) \to A(R)=\frac{1}{2}\oint_C -y\,dx+x\,dy$

Subject
Date

مثال: مساحت ناحیه R محصور به منحنی $xy=4$ و خطوط $x=y$ و $y=4x$ در ربع اول



$$\iint_R dA = A(R) = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy$$
$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

$\begin{cases} x=y \\ xy=4\end{cases} \to x^2=4 \xrightarrow{\text{ربع اول}} x=2 \to A=(2,2)$ نقطه تلاقی

پارامتری $C_1: x=y$ ، $0\le x\le 2$ ، $C_1: \vec{r_1}(t)=(t,t)$ $0\le t\le 2$ یا $C_1:\vec{r_1}(t)=(2t,2t)$ $0\le t\le 1$

$\begin{cases} xy=4 \\ y=4x\end{cases} \to 4x^2=4 \to x^2=1 \xrightarrow{\text{ربع اول}} \boxed{x=1} \to B(1,4)$ نقطه تلاقی

$C_2: xy=4$ ، $1\le x\le 2$ ، $-C_2: \vec{r_2}(t)=(t,\frac{4}{t})$ $1\le t\le 2$ یا $C_2: \vec{r_2}(t)=(2-t,\frac{4}{2-t})$ $0\le t\le 1$

$-C_3: \vec{r_3}(t)=(t,4t)$ $0\le t\le 1$ یا $C_3: \vec{r_3}(t)=(2-t, 4(2-t))$ $1\le t\le 2$

$A(R)=\frac12\oint_C -y\,dx+x\,dy = \oint_C x\,dy = \oint_C -y\,dx \to A(R)=\oint_C x\,dy$; $C=C_1\cup C_2\cup C_3$

$\vec{H}(x,y)=x$, $I_1=\int_{C_1} x\,dy = \int_0^1 2t\times 2dt = 4\int_0^1 t\,dt = 4(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1) = 2$

$I_2=\int_{C_2} x\,dy = \int_0^1 (2-t)\times(\frac{4}{(2-t)^2}dt) = \int_0^1 \frac{4}{2-t}dt = 4\int \frac{dt}{2-t} = -4\ln(2-t)\Big|_0^1$

$I_3=\int_{C_3} x\,dy = \int_1^2 (2-t)(-4dt) = \cdots$

$A(R)=I_1+I_2+I_3$

راه دوم

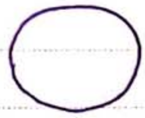
تعویض ژاکوبی $\begin{cases}u=\frac{y}{x}\\ v=xy\end{cases}$ برای R $|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\ne 0$

$y=u^{\frac12}v^{\frac12}$, $x=u^{-\frac12}v^{\frac12}$ $R:\begin{cases}1\le u\le 4\\ \frac{1}{4}u\le v\le 4\end{cases}$ $A(R)=\iint_R dA$

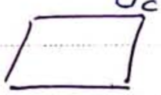
۱۰۱۸

مثال) فرض کنید C یک منحنی بسته تکه‌ای هموار (تکه‌ای پیوسته مشتق‌پذیر) و در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (جهت مثبت) پیموده شده باشد. مطلوب است محاسبه $\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = 2\pi$

C مبدا را در بر دارد (محتوای مبدا)

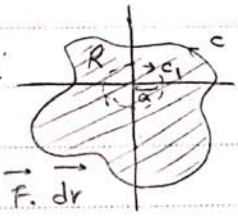


هموار



تکه‌ای هموار

ناحیه R بین C و C_1



$C' = C \cup C_1$

با جهت منفی / با جهت مثبت بسته ساده

$\oint_{C'} \vec{F}\cdot\vec{dr} = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr} + \int_{C_1} \vec{F}\cdot\vec{dr}$ (*)

$\overset{?}{=} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$ میدان برداری $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ در ناحیه R بین C و C_1 (که مبدا جزء R نیست) به طور پیوسته مشتق‌پذیر با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \overset{\text{بر ناحیه } R}{=} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\vec{F}$ بر ناحیه R میدان گرادیان

(*) $\rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr} + \oint_{C_1} \vec{F}\cdot\vec{dr} = 0$

نتیجه گرین $0 = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

C_1: دایره حول مبدا به شعاع a

جهت مثبت $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr} = -\oint_{C_1} \vec{F}\cdot\vec{dr} = \oint_{-C_1} \vec{F}\cdot\vec{dr}$

(با جهت مثبت (خلاف عقربه‌های ساعت))

$-C_1 : \vec{r(t)} = (a\cos t, a\sin t)$

$\oint_{-C_1} \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a\sin t}{a^2}, \frac{a\cos t}{a^2}\right)\cdot(-a\sin t\,dt, a\cos t\,dt)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$

$dr = (dx, dy) = (x'(t)\,dt, y'(t)\,dt)$

$= \int_0^{2\pi} (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1})\, dt = 2\pi$

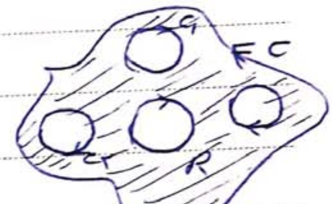
Subject
Date

تعمیم قضیه گرین به نواحی همبند غیرساده (همبند چندگانه):

فرض کنید ناحیه همبند غیرساده (چندگانه) R با تعداد متناهی n حفره به مرزهای درونی $c_1, \dots, c_n$ که با جهت منفی (عقربه‌های ساعت) پیموده شده باشند و مرز بیرونی c که با جهت مثبت (خلاف عقربه‌های ساعت) پیموده شده است، محصور شده باشد و $\vec{F}(x,y)$ میدان برداری دو متغیره‌ای باشد که بر ناحیه R پیوسته و به طور پیوسته دارای مشتقات جزئی مرتبه اول باشد آنگاه:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r} + \sum_{i=1}^{n} \oint_{c_i} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

R محصور بین مرزها — معادل اسکالر دو متغیره — بیرونی با جهت مثبت — درونی با جهت منفی



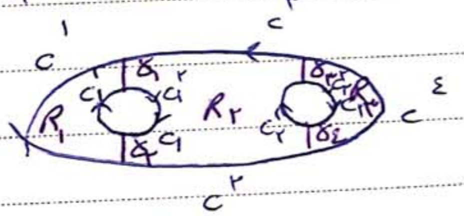
نتیجه: هرگاه $\vec{F}$ میدان برداری بر ناحیه همبند چندگانه R محصور به مرز بیرونی c با جهت مثبت و مرزهای درونی c_i با جهت‌ها منفی باشد آنگاه:

$$\underbrace{\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{جهت مثبت}} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\oint_{-c_i} \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{جهت مثبت}}$$

$c = c_1 \cup c_2 \cup c_3 \cup c_4$

$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ همبند چندگانه

R_j: همبند ساده $(j=1,2,3)$



ناحیه R_1

جهت مثبت $\partial R_1 = c^1 \cup \delta_2 \cup \delta_1 \cup c_1^1$

$$\iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{\partial R_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad (1)$$

Subject
Date

ناحیه R_2 : (۲)

$$\partial R_2 = -\gamma_1 \cup c_1^2 \cup -\gamma_2 \cup c^2 \cup \gamma_4 \cup c_2^1 \cup \gamma_3 \cup c^3$$

$$\iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{\partial R_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ناحیه R_3 : (۳)

$$\partial R_3 = c^4 \cup -\gamma_3 \cup c_3^2 \cup -\gamma_4 \qquad \iint_{R_3} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{\partial R_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$① + ② + ③ \to \iint_{R_1} (\quad) dA + \iint_{R_2} (\quad) dA + \iint_{R_3} (\quad) dA = \iint_{R} (\quad) dA$$

$$\left(\int_{c^1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_1} + \int_{c_3^1}\right) + \left(\int_{-\gamma_1} + \int_{-\gamma_2} + \int_{c_1^2} + \int_{c^2} + \int_{\gamma_4} + \int_{c_2^1} + \int_{\gamma_3} + \int_{c^3}\right) + \left(\int_{c^4} + \int_{-\gamma_3} + \int_{c_3^2} + \int_{-\gamma_4}\right) = \underline{\int_{c^1}} + \underline{\underline{\int_{c_1^1}}} + \underline{\underline{\int_{c_1^2}}} + \underline{\int_{c_3}} + \underline{\underline{\int_{c_3^1}}} + \underline{\int_{c^3}} + \underline{\int_{c^4}} + \underline{\underline{\int_{c_3^2}}} = \int_{c} + \int_{c_1} + \int_{c_3}$$

تعبیر فیزیکی و هندسی انتگرال خط:

① مفهوم شار (flow): فرض کنید $\vec{F}$ یک میدان برداری (میدان نیرو) و $c: \vec{r}(t)$ یک خم پیوسته به طوری که میدان برداری $\vec{F}$ در امتداد خم c پیوسته باشد. آنگاه شار میدان $\vec{F}$ به موازات خم c به صورت انتگرال خط

$$\int_c \underbrace{\vec{F}\cdot\vec{T}}_{\text{میدان اسکالر}}\, ds = \int_c \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad (*)$$

تعریف می‌شود که در آن $\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$

PAPCO

102 B

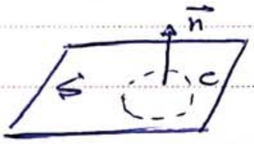
Subject

Date

از نظر فیزیکی، مفهوم شار میدان نیروی $\vec F$ در امتداد خم عبارت است از حجم سیال گذرنده در واحد زمان از سطح با مرز خم C.

(۲) گردش: هرگاه در تعریف شار میدان نیروی $\vec F$ به موازات خم C، مسیر خم C بسته باشد، آنگاه انتگرال خط (*) را گردش میدان بردار نیروی $\vec F$ حول خم C می‌نامیم. $\oint_C \vec F\cdot d\vec r$

(۳) هرگاه مسیر بسته خم C مرز (لبه) یک رویه جهت‌دار پیوسته تکه‌ای هموار S باشد و $\vec n$ بردار قائم بر سطح رویه S با جهت رو به بیرون باشد، آنگاه شار گذرنده توسط میدان بردار $\vec F$ به موازات مرز C از رابطه $\oint_C \vec F\cdot\vec n\,ds$ به دست می‌آید.



(۴) در حالت خاص: هرگاه $\vec n = \vec T\times\vec k$ که در آن $\vec k$ بردار ثابت (۰،۰،۱) و $\vec T = \frac{d\vec r}{ds}$ باشد

$\vec F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$

شار گذرنده توسط $\vec F$ در امتداد خم C مثبت $= \oint_C \vec F\cdot\vec n\,ds = \oint_C M\,dy - N\,dx$ ** $\quad \vec n = \vec T\times\vec k = \left(\frac{dy}{ds}, \frac{-dx}{ds}\right)$

مثال) مطلوب است محاسبه شار میدان $\vec F(x,y) = (\underbrace{x^2+y^2}_{M}, \underbrace{(x+2y)^2}_{N})$ در امتداد خم C مثلث به رئوس (۰،۰) و (۱،۱) و (۰،۲).

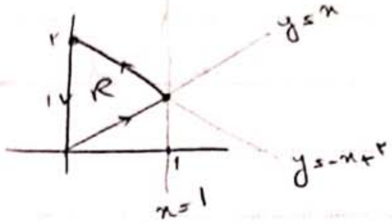
به کمک رابطه ** داریم:

$\oint_C \vec F\cdot\vec n\,ds = \oint_C \underbrace{(x^2+y^2)}_{Q}dy \underbrace{- (x+2y)^2}_{P} dx \overset{\text{قضیه گرین}}{=} \dots \quad \vec n = \vec T\times\vec k$

R ناحیه محصور درون مرز بسته با جهت مثبت $\xrightarrow{\text{قانون گرین}} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_R \underbrace{2x + 4(x+2y)}_{6x+8y}\, dA$

PAPCO

Subject
Date



$$R=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ x\le y\le -x+2\}$$
$$=\int_0^1\left(\int_x^{-x+2} 4x+8y\,dy\right)dx$$

$$y-2=\frac{1-2}{1-0}x$$

تعبیر هندسی انتگرال خط

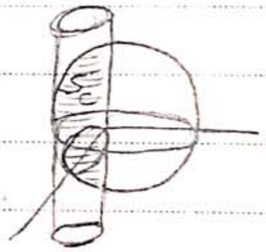
فرض کنید S رویه به معادله $z=f(x,y)$ و C یک خم پیوسته و S_C قسمتی از استوانه تولید شده با استفاده از خم C

محصور به صفحه xoy و رویه S، آن‌گاه انتگرال خط $\int_C f\,ds$ مساحت جانبی استوانه S_C می‌باشد.

مثال: مساحت سطح قسمتی از استوانه $x^2+y^2=2x$ محصور به کره $S: x^2+y^2+z^2=4$

$x^2+y^2-2x=0 \to (x-1)^2+y^2=1$ دایره — S_C استوانه مستدیر قائم

$C: x^2+y^2=2x$ قاعده استوانه مستدیر



S_C سطح جانبی استوانه محصور $\quad A(S_C)=2A(S_C')=2\int_{C: x^2+y^2=2x}\sqrt{4-x^2-y^2}\,ds$

xoy استوانه محصور بین کره بالای صفحه

$C: (x-1)^2+y^2=1 \longleftrightarrow C: \vec{r}(t)=\begin{cases} x(t)=1+\cos t\\ y(t)=\sin t\end{cases}$ $\qquad C: \vec{r}(t)=(1+\cos t,\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$

$r=1$

$f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2} \longrightarrow f(x(t),y(t))=\sqrt{4-(1+\cos t)^2-\sin^2 t}=\sqrt{2-2\cos t}=\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$

$=2\sin\frac{t}{2}$

$\vec{r}'(t)=(-\sin t,\cos t)$, $\|\vec{r}'(t)\|=1$

$A(S_C)=2\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\times 1\,dt=4\left(\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt\right)$

$$\int_C f\,ds=\int_a^b f(x(t),y(t))\underbrace{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}_{\|\vec{r}'(t)\|}\,dt$$

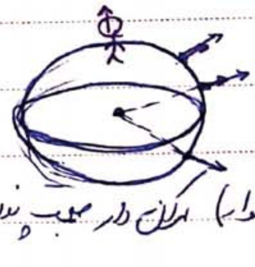
Subject
Date

انتگرال سطح (انتگرال رویه، سطح جانبی)

رویه جهت پذیر (جهت دار): هرگاه S یک رویه هموار پیوسته مشتق پذیر (یا قطعه قطعه مشتق پذیر) باشد و C هر خم بسته ساده روی سطح رویه S باشد (را بپیمایند) و ناظر مسیر خم C روی سطح رویه یکدور بپیماید به طوری که بردار عمود بر ~~سطح ناظر~~ سطح رویه S همواره بر سر ناظر رو به بیرون عمود باشد، پس از طی مسیر خم C از نقطه شروع و بازگشت به نقطه شروع، بردار عمود بر سر ناظر، تغییر جهت ندهد آن گاه رویه S را رویه جهت پذیر می نامیم. (رویه ای که درون و بیرون دارد را مشخص.)

به عبارت دیگر، چنانچه بردار عمود بر سر ناظر با حرکت ناظر در امتداد خم C به طور پیوسته تغییر کند اما عمود بودنش بر سر ناظر تغییر نکند. آن گاه رویه S را رویه جهت پذیر می گویند.

(به عبارت دیگر معادلاً هرگاه رویه S دارا سمت درون و سمت بیرون (دو طرفه) باشد، رویه S جهت پذیر است).



انتگرال سطح: فرض کنید S یک رویه هموار (یا قطعه قطعه هموار) و دارای جهت پذیر با ضابطه $z=f(x,y)$ و با بردار قائم $\vec{n}$ رو به بیرون بر سطح رویه S داده شده باشد و تابع $g(x,y,z)$ یک میدان اسکالر پیوسته یا (تکه ای پیوسته) بر سطح رویه S باشد، آن گاه انتگرال سطح از میدان اسکالر g در امتداد سطح رویه S

Subject

Date

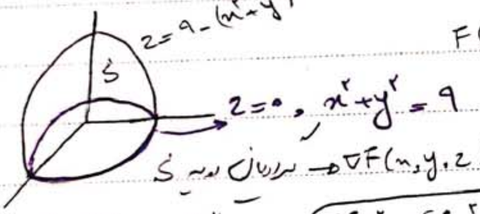
از روابط زیر محاسبه می‌شود

$$\int_S g(x,y,z)\,ds = \iint_{R\subseteq xoy} g(x,y,f(x,y))\sqrt{\left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2+1}\;dA$$

تصویر S در صفحه xoy

که در آن ds جزء مساحت خاص سطح رویه S و dA جزء مساحت ناحیه تصویر شده R ، عبارت داخل انتگرال دوگانه، طول بردار قائم رو به بیرون $\vec{n}$ بر سطح رویه S است.

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال سطح $\int_S \underbrace{(x^2+y^2)}_{g(x,y,z)}\,ds$ که در آن S سهمی‌گون $z=9-\underbrace{(x^2+y^2)}_{f(x,y)}$ و بالای صفحه xoy.



$F(x,y,z) = z-9+(x^2+y^2)$

$z=0,\ x^2+y^2=9$

بردار نرمال رویه S ← $\nabla F(x,y,z) = \left(\frac{\delta F}{\delta x}, \frac{\delta F}{\delta y}, \frac{\delta F}{\delta z}\right) = (2x,2x,1)$

$\|\nabla F(x,y,z)\| = \sqrt{\left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)^2+\left(\frac{\delta F}{\delta y}\right)^2+1} = \sqrt{4x^2+4x^2+1}$

R در دستگاه قطبی: $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le 3\end{cases}$

$\int_S (x^2+y^2)\,ds = \iint_R (x^2+y^2)\sqrt{4x^2+4x^2+1}\;dA$

تصویر S در صفحه xoy

$u=4r^2+1 \to r^2=\frac{u-1}{4}$, $du=8r\,dr$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\sqrt{4r^2+1}\times r\,dr\,d\theta = \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}\right)\left(\int_0^3 r^3\sqrt{4r^2+1}\,dr\right)$

$A=\int_0^3 r^3\sqrt{4r^2+1}\,dr = \frac{1}{8}\int_1^{37} u^{1/2}\left(\frac{u-1}{4}\right)du = \frac{1}{32}\int_1^{37}\left(u^{3/2}-u^{1/2}\right)du = \cdots$

انتگرال سطح: تعمیم انتگرال دوگانه به سطح یک رویه در فضا (انتگرال دوگانه بر ناحیه یک صفحه تعریف می‌شود)

نکته: در حالت خاص: $g(x,y,z)=1$ (میدان اسکالر) انتگرال سطح $\int_S g(x,y,z)\,ds$ به (مساحت)

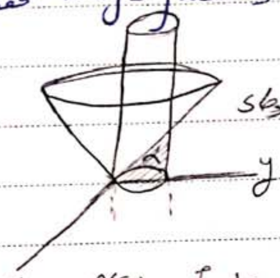
Subject
Date

سطح جانبی پوسته رویه S تبدیل می‌شود.

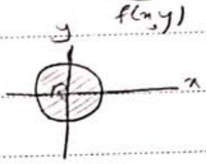
سطح جانبی رویه‌ی S برابر است: $A(S)=\int_S dS=\iint_{R\subseteq xoy}\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2+1}\,dA$

تصویر S در xoy

مثال) مساحت (سطح جانبی) بخشی از مخروط $z=\sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y)}}$ که بین صفحه xoy و استوانه $x^2+y^2=2y$ محصور شده است.



R تصویر بخشی از مخروط که بر صفحه xoy



$A(S)=\int_S dS=\iint_{R\subseteq xoy}\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2+1}\,dA=\iint_R\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}\,dA$

$=\iint_R\sqrt{(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2})+1}\,dA=\iint_R\sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}\iint_R dA$ قطبی $R=\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\0\le r\le 2\sin\theta\end{cases}$

$x^2+y^2=2y \xrightarrow{\text{قطبی}} r^2=2r\sin\theta \to r=2\sin\theta$

$=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\sin\theta} r\,dr\right)d\theta$

Subject

Date

نکته: صورت دیگر مفهوم انتگرال سطح یک رویه جهت پذیر کران دار به صورت زیر بیان می‌شود:

فرض کنید S یک رویه جهت پذیر کران دار با ضابطه $S: \underbrace{F(x,y,z)=c}_{\text{سطوح تراز}}$ دارا باشد و $f(x,y,z)$

تابع سه متغیره پیوسته بر سطح رویه S باشد: آن گاه انتگرال سطح تابع f در امتداد سطح رویه S از دستور زیر

محاسبه می‌شود:

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \underset{R\subseteq xoy \text{ تصویر رویه S در صفحه xoy}}{\iint} f(x,y,g(x,y))\,\frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F\cdot \vec{k}|}\,dA$$

که در آن ∇F بردار گرادیان تابع ضابطه رویه است و تابع $g(x,y)$ از حل معادله $F(x,y,z)=0$

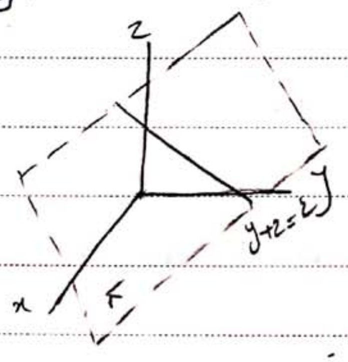
به دست آوردن متغیر z برحسب x و y به فرم $z=g(x,y)$ به دست می‌آید و داریم:

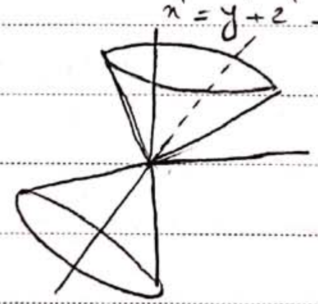
$$\|\nabla F\| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \qquad k=(0,0,1)$$

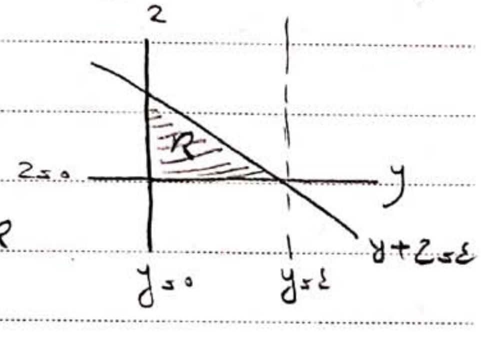
$$\frac{\|\nabla F\|}{|\nabla \vec{F}\cdot \vec{k}|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+1}$$

مثال) مساحت قسمتی از مخروط $x^2-y^2-z^2=0$ که در $\frac{1}{8}$ اول فضا است و توسط صفحه $\pi: y+z=4$

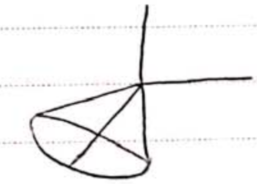
$x^2=y^2+z^2 \to x=g(y,z)$ جدا شده است محاسبه کنید.







R تصویر بخشی از مخروط بریده شده توسط صفحه $\pi: y+z=4$ از صفحه yoz



$F(x,y,z)=x^2-y^2-z^2$

$\nabla \vec{F}(x,y,z)=(2x,2y,2z) \qquad \|\nabla \vec{F}\|=\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}$

$|\nabla \vec{F}\cdot\vec{i}|=2|x| \qquad \dfrac{\|\nabla \vec{F}\|}{|\nabla \vec{F}\cdot\vec{i}|}=\sqrt{\dfrac{x^2}{z^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+1} \qquad R=\{(x,y)\mid 0\le y\le 4,\ 0\le z\le 4-y\}$

$$\int_S ds=\iint_{R\subseteq yoz}\frac{\|\nabla F\|}{|\nabla \vec{F}\cdot\vec{i}|}\,dA=\iint_{R\subseteq yoz}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2}}\,dA \overset{x^2=y^2+z^2}{=} \iint_{R\subseteq yoz}\sqrt{2}\,dA=$$

$$\sqrt{2}\int_0^4\int_0^{4-y}dz\,dy=\cdots$$

شار گذرنده توسط میدان بردار (میدان نیروها) در امتداد سطح رویه جهت پذیر:

هرگاه S یک رویه جهت پذیر و درون دار و هموار (قطعه قطعه هموار) با ضابطه $S: g(x,y,z)=c$ و $\vec{F}$ یک میدان برداری (میدان نیروی) پیوسته بر سطح رویه S باشد و $\vec{n}$ بردار قائم بر سطح رویه S و رو به بیرون باشد ($\vec{n}$ به طور پیوسته تغییر کرده و مشتق پذیر است). آن گاه شار گذرنده توسط میدان نیروی $\vec{F}$ در امتداد سطح رویه S از دستور زیر بدست می آید.

$$\iint\left(F\cdot\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}\right)\|\nabla g\|\,dA$$

میدان انتگرال

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iint_{R\subseteq xoy}(\vec{F}\cdot\vec{n})(x,y,h(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+1}\;dA$$

تصویر S روی صفحه xoy

که در آن تابع $h(x,y)$ از حل معادله ضابطه رویه S برای متغیر z نسبت به متغیرهای x و y بدست می آید.

$g(x,y,z)=c \longrightarrow z=h(x,y)$

و بردار $\vec{n}$ بردار یکه نرمال سطح رویه S است و داریم:

$$n=\frac{\nabla\vec{g}}{\|\nabla\vec{g}\|}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تذکر: در محاسبه شار گذرنده توسط میدان نیرو در امتداد سطح رویه جهت پذیر، علامت شار نشان داده شده جهت ورودی یا خروجی شار عبوری است به عبارت دیگر، علامت "+" جهت ورودی و علامت "−" خروجی شار عبوری را نشان می دهد.

مثال) شار گذرنده توسط میدان $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ بر سطح رویه $z=\underbrace{\overbrace{\sqrt{9-x^2-y^2}}^{h(x,y)}}_{g(x,y,z)}$ که در آن $\vec n$ بردار یکه قائم بالایی (رو به بیرون) برگ است.

$$g(x,y,z)=\sqrt{9-x^2-y^2}-z=0$$

$$\nabla g(x,y,z)=\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}},\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}},-1\right) \; / \; \|\nabla g\|=\sqrt{\frac{x^2+y^2+9-x^2-y^2}{9-x^2-y^2}}=\sqrt{\frac{9}{9-x^2-y^2}}=$$

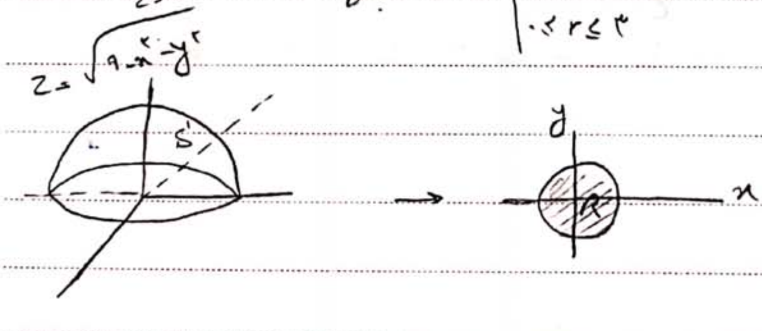
$$\frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}}, \quad \vec n=\frac{\nabla \vec g}{\|\nabla \vec g\|}=\left(\frac{-x}{3},\frac{-y}{3},-\frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{3}\right)$$

$$\underbrace{(\vec F\cdot\vec n)}_{\text{میدان اسکالر}}(x,y,h(x,y))=-\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}+\sqrt{9-x^2-y^2}\left(-\frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{3}\right)=\frac{-x^2-y^2-(9-x^2-y^2)}{3}=-3$$

شار گذرنده توسط F در امتداد S: $\iint_S \vec F\cdot\vec n\, ds=\iint_{R\subseteq xoy} \overbrace{(-3)}^{\vec F\cdot\vec n}\times\frac{3}{\underbrace{\sqrt{9-x^2-y^2}}_{\|\nabla g\|}}\,dA=-9\iint_R\frac{dA}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

$R=xoy$ تصویر S در صفحه $\rightarrow R: x^2+y^2=9$

قطبی شده $R:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le 3\end{cases}$, $I=\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\frac{1}{\sqrt{9-r^2}}\,r\,dr\,d\theta=\dots$

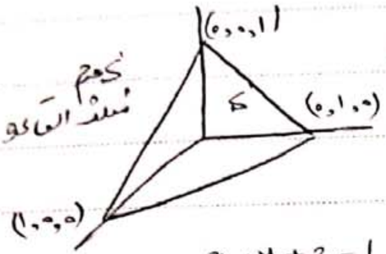


Subject
Date

مثال) شار میدان $F(x,y,z)=(x+y\,,\,y+z\,,\,z+x)$ گذرنده از سطح رویه S که در هشتمی از صفحه $x+y+z=1$

$g(x,y,z)=x+y+z-1=0$

در $\frac{1}{8}$ اول فضای در جهت بردار قائم بیرون سو یا مؤلفه‌ها مثبت



(بردار قائم بر صفحه)

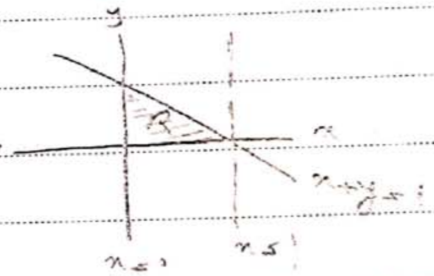
بردار نرمال صفحه $\vec N=(1,1,1)=\nabla g \qquad \vec n=\frac{\vec N}{\|\vec N\|}=\left(\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3}\right)$

$x+y+z=1 \to z=1-x-y=h(x,y)$

$(\vec F\cdot\vec n)(x,y,h(x,y))=\frac{\sqrt3}{3}(x+y)+\frac{\sqrt3}{3}(y+(1-x-y))+\frac{\sqrt3}{3}((1-x-y)+x)=\frac{2\sqrt3}{3}$

$\int_S \vec F\cdot\vec n\,ds=\iint \frac{2\sqrt3}{3}\times\sqrt3\,dA=2\iint_R dA=2\int_0^1\int_0^{1-x} dA=\dots$

تصویر S در صفحه xoy $\quad R\subseteq xoy$



$R=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 1-x\}$

R ناحیه تصویر S در صفحه xoy

$z=0\,,\ x+y+z=1 \xrightarrow{z=0} x+y=1$

شاید برای امتحان نیاد :)

نکته (استقلال سطح نوع دوم): فرض کنید S یک رویه صاف جهت پذیر کران دار همراه با منحنی بسته هموار باشد

$\vec F(x,y,z)=(P(\ ),Q(\ ),R(\ ))$ یک میدان برداری سه مؤلفه‌ای باشد به طوری که میدان های اسکالر P، Q، R

بر رویه S پیوسته باشند و $\vec n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ (کسینوس‌های هادی) بردار یکه قائم بر سطح

رویه S باشد آن گاه شار گذرنده توسط میدان نیروی $\vec F$ در امتداد بردار یکه $\vec n$ از سطح رویه S را انتگرال

سطح نوع دوم می‌نامیم و داریم:

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds =$$

$$\underset{\text{سطحی}}{\iint} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy$$

که در آن

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\|\nabla \vec{F}\|},\quad \cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\|\nabla \vec{F}\|},\quad \cos\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\|\nabla \vec{F}\|}$$

مثال) مطلوب است محاسبه $\iint_S x^2 dy\,dz + y^2 dz\,dx + z^2 dx\,dy$ که در آن S سطح محدود به $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$

(ثابت: a,b,c,r)

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$$

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \qquad \cos\alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\|\nabla \vec{F}\|},\ \cos\beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\|\nabla \vec{F}\|},\ \cos\gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\|\nabla \vec{F}\|}$$

$$\nabla \vec{F} = (2x, 2y, 2z) \qquad \|\nabla \vec{F}\| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$I = \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \int_S \frac{x^3+y^3+z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,ds = \cdots$$

میدان الکتر

Subject
Date

عملگر گرادیان ، دیورژانس و هسته (کرل) :

عملگر گرادیان : نگاشتی (خطی) است که شامل مؤلفه‌ها مشتقات جزئی نسبت به متغیرها x_1 , ... است و با نماد $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots\right)$ نمایش می‌دهند. در واقع عملگر گرادیان نگاشتی است که روی توابع چند متغیره اثر می‌کند و بردار شامل مشتقات جزئی آن توابع را بدست می‌دهد.

فرض کنید $f(x_1, \dots, x_n)$ یک میدان اسکالر n متغیره باشد به این صورت داریم :

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$\vec{\nabla}$: [میدان اسکالر مشتق‌پذیر] $\longrightarrow$ [میدان برداری پیوسته]

خواص عملگر گرادیان :

۱) خاصیت خطی بودن (جمع پذیری) گرادیان : f, g میدان اسکالر ، c_1, c_2 ثابت اختیاری

$$\vec{\nabla}(c_1 f + c_2 g) = c_1 \vec{\nabla} f + c_2 \vec{\nabla} g$$

۲) خاصیت لایب‌نیتز گرادیان

$$\vec{\nabla}(fg) = g \vec{\nabla} f + f \vec{\nabla} g$$

۳) حالت خاص ۲ :

$$\nabla(f^2) = 2f \vec{\nabla} f$$

۴)

$$\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \vec{\nabla} f - f \vec{\nabla} g}{g^2}$$

۵) ϕ تابع حقیقی مشتق پذیر و f میدان اسکالر $\vec{\nabla}(\phi f) = \phi \vec{\nabla} f$

نماد گذاری لاپلاس: هرگاه ∇ عملگر برداری باشد آن گاه لاپلاس که با نماد ∇^2 نمایش داده می‌شود

نماد عملگر (عملگری) است که به صورت $\nabla^2 = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}$ تعریف می‌شود که منظور از "." ضرب داخلی

است. $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

فرض کنید که $\vec{F}$ یک میدان برداری باشد که مؤلفه‌های آن مشتق دوبار به طور پیوسته، مشتق پذیر بر ناحیه

R باشند، آنگاه: $\underbrace{\nabla^2(\vec{F})}_{\text{میدان اسکالر}} = \frac{\partial^2(F)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(F)}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2(F)}{\partial x_n^2}$

که در آن $\nabla^2(\vec{F})$ یک میدان اسکالر (تابع چند متغیره) است.

دیورژانس میدان برداری: هرگاه $\vec{F}$ یک میدان برداری به طور پیوسته مشتق پذیر در ناحیه R باشد، دیورژانس

میدان برداری $\vec{F}$ که با نماد $div(\vec{F})$ نمایش می‌دهیم به صورت: $div(\vec{F}) = \vec{\nabla}.\vec{F}$ تعریف

می‌شود به عبارت دیگر $F = (P, Q, R, \dots)$ $div(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} + \dots$

که در آن $div(\vec{F})$ یک میدان اسکالر است.

$div = \{$میدان‌ها برداری مشتق پذیر$\} \to \{$میدان‌ها اسکالر (پیوسته)$\}$

108B

Subject
Date

خواص دیورژانس

① خاصیت خطی بودن (جمع‌پذیری) دیورژانس

c_1, c_2 ثابت اختیاری

$$\operatorname{div}(c_1\vec{F}+c_2\vec{F}) = c_1 \operatorname{div}(\vec{F}) + c_2 \operatorname{div}(\vec{F})$$

② $\vec{F}$ میدان برداری — f میدان اسکالر

خاصیت لایب‌نیتز دیورژانس:

$$\operatorname{div}(f\vec{F}) = \underbrace{\nabla f\cdot\vec{F}}_{\text{میدان اسکالر}} + \underbrace{f \operatorname{div}(\vec{F})}_{\text{میدان اسکالر}}$$

$$f\vec{F} = (fP, fQ, fR, \dots)$$

③ حالت خاص ۲: $\vec{F}$ برداری ثابت

$\vec{c}$ میدان برداری ثابت (بردارها)

$$\operatorname{div}(f\vec{c}) = \nabla f\cdot\vec{c}$$

④ حالت خاص $\vec{F}$ گرادیان میدان اسکالر:

$$\operatorname{div}(f\nabla f) = \nabla f\cdot\nabla f + f \operatorname{div}(\nabla f)$$

$$= \|\nabla f\|^2 + f(\nabla^2 f)$$

لاپلاسین

$$\operatorname{div}(\nabla f) = (\nabla\cdot\nabla) f = \nabla^2 f$$

مثال ۱)

$$\vec{r} = (\underset{P}{x}, \underset{Q}{y}, \underset{R}{z})$$

$$r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \leftarrow \quad \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = ?$$

② $f = \frac{1}{r}$ $\quad \vec{F} = \vec{r}$ $\quad \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\vec{r} + \frac{1}{r}\operatorname{div}(\vec{r})$

$$\operatorname{div}(\vec{r}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1+1+1 = 3$$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\nabla r}{r^2} = \frac{-\frac{\vec{r}}{r}}{r^2} = \frac{-\vec{r}}{r^3}$$

که خاصیت گرادیان

$$\nabla r = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{1}{r}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{-\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{r} + \frac{3}{r} = \frac{-1}{r^3}\underbrace{(\vec{r}\cdot\vec{r})}_{r^2} + \frac{3}{r} = \frac{-1}{r} + \frac{3}{r} = \boxed{\frac{2}{r}}$$

هسته میدان برداری: فرض کنید $\vec{F}$ یک میدان برداری به طور پیوسته مشتق‌پذیر بر ناحیه R باشد آنگاه،

هسته $\vec{F}$ که با نماد $curl(\vec{F})$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید

$$\overrightarrow{curl(\vec{F})} = \vec{\nabla} \times \vec{F} \qquad \vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$\overrightarrow{curl(\vec{F})} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

برعکس PQR
x با y با z

$$\overrightarrow{curl(\vec{F})} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$curl(\vec{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

تعمیم هسته میدان برداری: هرگاه $\vec{F}$ یک میدان برداری مشتق‌پذیر n متغیره باشد، آنگاه:

$$\overrightarrow{curl(\vec{F})} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

که به وسیله دترمینان یک ماتریس $n \times n$ شامل ~~سطرها~~ سطرها از بردارهای مشتقات جزئی

$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ و سطرهای شامل مؤلفه‌ها میدان و سطرهایی از بردارهای $\vec{i}_2, \vec{i}_3, \dots, \vec{i}_{n-1}$ به دست می‌آید.

که در آن:

$$\vec{i}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

درایه $k+1$ ام

خواص عملگر هسته: c_1, c_2 ثابت، F_1 و F_2 میدان برداری

① خ خطی بودن (جمع‌پذیری) عملگر هسته:

$$\overrightarrow{curl}(c_1\vec{F}_1 + c_2\vec{F}_2) = c_1\left(\overrightarrow{curl(\vec{F}_1)}\right) + c_2\left(\overrightarrow{curl(\vec{F}_2)}\right)$$

Subject
Date

109.B

۲) خ لایب نیتز هست

f میدان اسکالر ـ $\vec{F}$ میدان بردار

$$\overrightarrow{\text{curl}(f\vec{F})} = \underbrace{\vec{\nabla} f \times \vec{F}}_{\text{میدان برداری}} + f\,\underbrace{(\overrightarrow{\text{curl}(\vec{F})})}_{\text{میدان برداری}}$$

۳) حالت خاص $\vec{F} = \vec{c}$ بردار ثابت

$$\overrightarrow{\text{curl}(f\vec{c})} = \vec{\nabla} f \times \vec{c} \quad , \quad \overrightarrow{\text{curl}(\vec{c})} = \vec{0}$$

۴) حالت خاص $\vec{F} = \vec{\nabla} f$

$$\overrightarrow{\text{curl}(f\vec{\nabla} f)} = \underbrace{\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} f}_{\text{صفر}} + f\,(\overrightarrow{\text{curl}(\vec{\nabla} f)}) = f\,(\overrightarrow{\text{curl}(\vec{\nabla} f)})$$

۵) $\text{div}(\overrightarrow{\text{curl}\,\vec{F}}) = 0$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{curl}\,\vec{F}}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} = 0$$

چون $\vec{F}$ میدان بطور پیوسته مشتق پذیر حداقل دوبار است پس ترتیب عملیات مشتق جزئی تعویض می‌شود.

۶) $\vec{F}$ میدان گرادیان (پایستار) است اگر و تنها اگر $\overrightarrow{\text{curl}\,\vec{F}} = \vec{0}$

۷) نتیجه: $\overrightarrow{\text{curl}(\vec{\nabla} f)} = \vec{0}$ ← f تابع پتانسیل وابسته به $\vec{\nabla} f$ بطوریکه f حداقل دوبار به طور پیوسته مشتق پذیر است.

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

110.A

$$\operatorname{div}(\vec F\times\vec G) = \vec G\cdot \overrightarrow{\operatorname{curl}(\vec F)} - \vec F\cdot\overrightarrow{\operatorname{curl}(\vec G)} \qquad (۸)$$

$$\| $$

$$\underbrace{\vec\nabla\cdot(\vec F\times\vec G)}_{\vec\nabla,\ \vec G,\ \vec F\ \text{ضرب سه گانه}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} = ---$$

قضیه دیورژانس: هرگاه S یک رویه جهت پذیر، کران دار، هموار (یا قطعه قطعه هموار) بسته باشد و T فضای درون رویه S باشد و $\vec F$ میدان برداری با مؤلفه های پیوسته مشتق پذیر بر سطح و درون رویه S باشد، $\vec n$ بردار یکه قائم بر سطح رویه S و رو به بیرون باشد، آن گاه شار گذرنده توسط میدان برداری $\vec F$ در امتداد بردار قائم $\vec n$ از سطح رویه S از رابطه زیر بدست می آید:

$$\int_S \vec F\cdot\vec n\, ds = \underbrace{\iiint}_{\text{فضای درون } S\ T} \underbrace{(\operatorname{div}\vec F)}_{\text{میدان انتگرال}}\, dV$$

مثال) مطلوب است محاسبه شار میدان $\vec F(x,y,z) = (z^2-y^2,\ x^2+z^2,\ z^3)$ خارج از کره $S: x^2+y^2+z^2=4$

$\vec n$ بردار یکه قائم بر کره = بردار نرمال یکه شده

S: بسته، کران دار، جهت پذیر، هموار — بر سطح کره

$$\int_S \vec F\cdot\vec n\, ds = \iiint_{T\ \text{درون کره}} (\operatorname{div}(\vec F))\, dV = \iiint_{T\ \text{درون کره}} 3z^2\, dV$$

$$\operatorname{div}(\vec F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$$

T: فضای درون کره = $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \\ 0\le\rho\le 2 \end{cases}$ شعاع کره

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} 3(\rho^2\cos^2\varphi)\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = 3\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^2 \rho^4\, d\rho\right) = 3\times 2\pi\times\frac{2}{3}\times\frac{32}{5} = \frac{4\pi}{5}\times 32 = \frac{128\pi}{5}$$

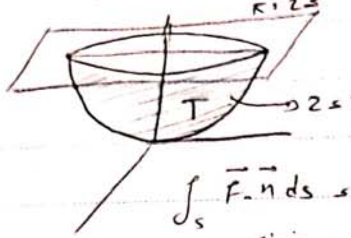
$u = \cos\varphi$
$du = -\sin\varphi\, d\varphi$
$-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}$

$\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^2$

110-B

Subject
Date

مثال ۶: شار میدان $\vec{F}(x,y,z)=(y,z,xz)$ را از سطح بسته ناحیه $x^2+y^2\le z\le 1$ با $x\ge 0$ ...



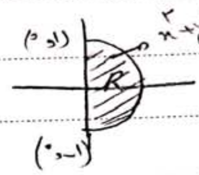
T جسم توپر بسته شده ـ مؤلفه‌های $\vec{F}$ در ناحیه T به طور پیوسته مشتق‌پذیر ـ S جهت بیرونی ـ کران‌دار بسته ـ برقرار ـ شرایط قضیه دیورژانس

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_T (\operatorname{div}\vec{F})\,dV = \iiint_T x\,dV$$

S مرز ناحیه T ـ میدان برداری ـ در مختصات استوانه‌ای

$$T:\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le r\le 1 \\ x^2+y^2\le z\le 1 \end{cases} \quad r^2\le z\le 1$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = 0+0+x = x$$



R تصویر T در صفحه xoy

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_{r^2}^1 (r\cos\theta)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 r^2\,dr\underbrace{\int_{r^2}^1 dz}_{1-r^2}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right)}_{\sin\theta\big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}\left(\underbrace{\int_0^1 r^2(1-r^2)\,dr}_{\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{5}r^5\big|_0^1=\frac{2}{15}}\right) = 2\times\frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

Subject

Date

قضیه استوکس (تعمیم قضیه گرین در فضا) : فرض کنید S یک رویه هموار (یا قطعه قطعه هموار) جهت پذیر کران دار باشد و C یک مرز بسته ساده پیوسته (یا هموار) با جهت مثبت روی سطح رویه S باشد و $\vec{F}(x,y,z)$ یک میدان برداری بطور پیوسته مشتق پذیر با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته بر سطح رویه S باشد آنگاه انتگرال خط $\vec{F}$ در امتداد خم C بوسیله شار میدان برداری $curl(\vec{F})$ بر سطح رویه S محاسبه می شود و داریم:

$$\underbrace{\oint_C}_{\text{منحنی مرزی بسته}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \underbrace{\oint_C}_{\text{مرز رویه } S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{curl\,F}\cdot\vec{n}\, d\sigma$$

که در آن $\vec{n}$ بردار یکه نرمال سوی قائم بر سطح رویه S است که بطور پیوسته تغییر می کند و $d\sigma$ جزء مساحت جانبی سطح رویه S است و

کار انجام شده توسط میدان نیروی F در امتداد خم C = شار گذرنده توسط میدان curl F در امتداد بردار $\vec{n}$ از سطح رویه S

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

$$curl\,\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$curl\,\vec{F} = 0 \longleftrightarrow \vec{F} \text{ میدان پایستار}$$

مثال ۱) مطلوب است محاسبه $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ که در آن C منحنی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ که به صفحه $z=2$ محدود شده است و C مرز بسته رویه S است.

$$\vec{F}(x,y,z) = (\underbrace{x^2}_{P}, \underbrace{y^2}_{Q}, \underbrace{z^2}_{R})$$

111B

Subject
Date

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr} = \oint_C x^2dx + y^2dy + z^2dz = ?$$

با توجه به اینکه $\vec{F}$ و S و C در شرایط قضیه استوکس صدق می‌کند بنابه قضیه استوکس:

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr} = \iint_C \operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z^2}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial x^2}{\partial z} - \frac{\partial z^2}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y}\right)k = (0,0,0)$$

میدان $\vec{F}$ پایستار $\longleftrightarrow \operatorname{curl}\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \oint_C \vec{F}\cdot dr = 0$: انتگرال مستقل از مسیر

مثال) مطلوب است محاسبه $\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr}$ که در آن $\vec{F}(x,y,z) = (-y, x, -z)$ و C منحنی حاصل از برخورد صفحه $z = x$ با کره $x^2+y^2+z^2 = 1$ که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت پیموده شده است

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & -z \end{vmatrix} = (0,0,2) = 2\vec{k}$$

چون $\vec{F}$ و C و S در شرایط قضیه استوکس صدق می‌کند داریم:

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr} = \iint_{S:\,x^2+y^2+z^2=1} (\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n})\,d\sigma \qquad C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z = x \end{cases}$$

$$S: x^2+y^2+z^2 = 1 \longrightarrow g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla\vec{g}}{\|\nabla\vec{g}\|}, \quad \nabla\vec{g} = (2x, 2y, 2z), \quad \|\nabla\vec{g}\| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

$$\operatorname{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr} = 2\iint_S \underbrace{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{\text{میدان اسکالر}}\,d\sigma \;\xrightarrow{\text{انتگرال سطح *}}\; 2\iint_R \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1} \times \|\nabla g(x,y,h(x,y))\|\,dA$$

$f(x,y,z)$ تصویر رویه S در صفحه xoy : R

P4PCO

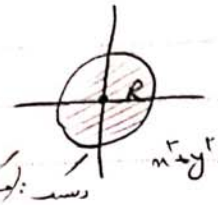
Subject

Date

$$= 4\iint_R \sqrt{1-x^2-y^2}\, dA = 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\; r\, dr\, d\theta = \cdots$$

$S: g(x,y,z)=0 \to z = h(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

نیم کره بالایی



$x^2+y^2 \le 1$ قطبی شد $R: \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

دیسک (اگر در مرکز مبدأ و شعاع یک است)

$$* \iint_S f\, d\sigma = \iint_R f(x,y,h(x,y))\, \|\nabla g\|\, dA$$

R تصویر رویه S در صفحه xoy

نکته: برای بررسی درستی قضایای چون گرین، دیورژانس و استوکس می‌بایست طرفین تساوی موجود در فرمول احکام قضایا را جداگانه تشکیل داد و بررسی شود.

بررسی درستی قضیه استوکس:

طرف چپ $\oint_C \vec F\cdot d\vec r \overset{\text{قضیه ۱۵}}{=\!=} \cdots$ انجام شد یا (انتگرال خط)

? ||

طرف راست $\iint_S \operatorname{curl}\vec F\cdot\vec n\, d\sigma =$ شار گذرنده از $\operatorname{curl}\vec F$ با امتداد $\vec n$ از سطح رویه S

تعریف انتگرال سطح

قضیه دیورژانس $= \iiint_T \operatorname{div}(\operatorname{curl} F)\, dV$ (اگر S بسته باشد)

T: فضای داخل S

$\operatorname{div}\vec F = \vec\nabla\cdot\vec F$

$\overrightarrow{\operatorname{curl}F} = \vec\nabla\times\vec F$

∇f

$\nabla\vec F$

بررسی درستی قضیه دیورژانس: تعریف شار گذرنده از S $=$ $\iint_S \vec F\cdot\vec n\, d\sigma$ طرف چپ

با امتداد $\vec n$ از سطح رویه S (انتگرال سطح)

? ||

طرف راست $\iiint_T (\operatorname{div} F)\, dV \overset{\text{تعریف}}{=\!=}$ انتگرال سه‌گانه

T: فضای حجم S بسته

Subject
Date

بررسی درستی قضیه گرین ،

طرف چپ $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ = تعریف انتگرال خط $\vec{F}$ در امتداد خم بسته C

(ج)11

طرف راست $\iint_R (Q_x - P_y)\, dA \underset{\text{دوگانه}}{\overset{\text{تعریف انتگرال}}{=}}$ ---

/ سطح مرز بسته R /

تمرین: ① فرض کنید f و g میدان‌های اسکالر با مشتقات جزئی پیوسته، و S، C و $\vec{n}$ در شرایط قضیه استوکس صدق کنند آن‌گاه:

الف) $\oint_C \underbrace{(f\nabla g + g\nabla f)}_{\text{میدان برداری}}\cdot d\vec{r} = 0$

ب) $\oint_C f\nabla g\cdot d\vec{r} = \iint_S \underbrace{(\overrightarrow{\nabla f\times\nabla g})}_{\text{ضرب برداری}}\cdot\vec{n}\, d\sigma$

بردار عمود قائم بر سطح S

② فرض کنید f میدان اسکالری با مشتقات پیوسته مشتق‌پذیر بر جسم T باشد و T، S و $\vec{n}$ در شرایط قضیه دیورژانس صدق کنند

ناحیه بسته و جسم پذیر

آن‌گاه: $\iint_S f\vec{n}\, d\sigma = \iiint_T \overrightarrow{\nabla f}\, dV$

(راهنمایی: $\vec{F} = f\vec{C}$ و $\vec{C}$ بردار ثابت)

P4PCO