وزارت علوم تحقیقات و فناوری

مرکز نشر دانشگاهی

جیمز . مانکرز

توپولوژی، نخستین درس

ترجمهٔ یحیی تابش

ابراهیم صالحی

جواد لالی

نادر وکیل

توپولوژی، نخستین درس

جیمز ر. مانکرز

ترجمهٔ یحیی تابش، ابراهیم صالحی، جواد لآلی، نادر وکیل

مرکز نشر دانشگاهی

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

مرکز نشر دانشگاهی

Topology A First Course
James R. Munkres
Prentice-Hall, 1975

توپولوژی، نخستین درس

تألیف جیمز ر. مانکرز

ترجمهٔ یحیی تابش، ابراهیم صالحی، جواد لآلی، نادر وکیل

ویراستهٔ فرخ وطن
ناظر چاپ: علی صادقی
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۶۶
چاپ چهارم ۱۳۸۹
تعداد ۱۰۰۰
لیتوگرافی: وسمه
چاپ و صحافی: سامان
۸۸۰۰ تومان

نشانی فروشگاه مرکزی: خیابان انقلاب، روبه‌روی سینما سپیده، پاساژ خبیری، تلفن: ۶۶۴۰۸۸۹۱ ، ۶۶۴۱۰۶۸۶

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

Munkres, James R

Topology, a first course

مانکرز، جیمز ر
توپولوژی، نخستین درس
عنوان اصلی:
شابک: 978-964-01-0283-1
چاپ چهارم: ۱۳۸۹.
واژه‌نامه: ص.
۱. توپولوژی الف. تابش، یحیی، مترجم. ب. عنوان.
۵۱۴ Q۶۱۱

به‌یاد مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب که حق بزرگی
بر جامعهٔ ریاضی ایران دارد.

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه
پیشگفتار	۱
تذکری به خواننده	۴
قسمت اول	
فصل ۱. نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق	۷
۱ــ۱ مفاهیم بنیادی	۷
۱ــ۲ توابع	۲۱
۱ــ۳ رابطه‌ها	۲۸
۱ــ۴ اعداد صحیح و اعداد حقیقی	۳۹
۱ــ۵ حاصلضرب دکارتی دلخواه	۴۸
۱ــ۶ مجموعه‌های متناهی	۵۳
۱ــ۷ مجموعه‌های شمارا و ناشمارا	۵۹
*۱ــ۸ اصل تعریف بازگشتی	۶۹
۱ــ۹ مجموعه‌های نامتناهی و اصل موضوع انتخاب	۷۴
۱ــ۱۰ مجموعه‌های خوشترتیب	۸۲
*۱ــ۱۱ اصل ماکزیموم	۸۹
* تمرینهای تکمیلی : خوشترتیبی	۹۴

عنوان	صفحه

فصل ۲. فضای توپولوژیك و توابع پیوسته ۹۹

۲ــ۱ فضاهای توپولوژیك ۹۹

۲ــ۲ پایهٔ یك توپولوژی ۱۰۲

۲ــ۳ توپولوژی ترتیبی ۱۱۰

۲ــ۴ توپولوژی حاصلضربی در $X \times Y$ ۱۱۳

۲ــ۵ توپولوژی زیرفضایی ۱۱۶

۲ــ۶ مجموعه‌های بسته و نقاط حدی ۱۲۰

۲ــ۷ توابع پیوسته ۱۳۲

۲ــ۸ توپولوژی حاصلضربی ۱۴۵

۲ــ۹ توپولوژی متری ۱۵۱

۲ــ۱۰ توپولوژی متری (ادامه) ۱۶۳

*۲ــ۱۱ توپولوژی خارج قسمتی ۱۷۴

* تمرینهای تکمیلی: گروههای توپولوژیك ۱۸۶

فصل ۳. همبندی و فشردگی ۱۸۹

۳ــ۱ فضاهای همبند ۱۹۰

۳ــ۲ مجموعه‌های همبند درخط حقیقی ۱۹۶

*۳ــ۳ مؤلفه‌ها و مؤلفه‌های راهی ۲۰۶

*۳ــ۴ همبندی موضعی ۲۰۸

۳ــ۵ فضاهای فشرده ۲۱۲

۳ــ۶ مجموعه‌های فشردهٔ خط حقیقی ۲۲۳

۳ــ۷ فشردگی برحسب نقطهٔ حدی ۲۳۰

*۳ــ۸ فشردگی موضعی ۲۳۶

* تمرینهای تکمیلی: تورها ۲۴۲

فصل ۴. اصول جداسازی و شمارایی ۲۴۷

۴ــ۱ اصول موضوع شمارایی ۲۴۷

۴ــ۲ اصول جداسازی ۲۵۴

عنوان	صفحه

۴ـ۳ لم اوریسون	۲۷۰
۴ـ۴ قضیهٔ متریسازی اوریسون	۲۸۳
*۴ـ۵ افرازهای واحد	۲۹۰
* تمرینهای تکمیلی: مروری بر قسمت اول	۲۹۶

قسمت دوم

فصل ۵. قضیهٔ تیخونوف	۲۹۹
۵ـ۱ قضیهٔ تیخونوف	۲۹۹
۵ـ۲ فضاهای تماماً منتظم	۳۰۷
۵ـ۳ فشرده سازی استون ـ چخ	۳۱۲
فصل ۶. قضایای متریسازی و پیرافشردگی	۳۱۹
۶ـ۱ متناهی بودن موضعی	۳۲۱
۶ـ۲ قضیه متریسازی ناگاتا ـ اسمیرنوف (کفایت)	۳۲۳
۶ـ۳ قضیه ناگاتا ـ اسمیرنوف (لزوم)	۳۲۸
۶ـ۴ پیرافشردگی	۳۳۲
۶ـ۵ قضیهٔ متریسازی اسمیرنوف	۳۴۰
فصل ۷. فضاهای متری تمام وفضاهای تابعی	۳۴۳
۷ـ۱ فضاهای متری تمام	۳۴۵
۷ـ۲ یك منحنی فضاپرکن	۳۵۵
۷ـ۳ فشردگی درفضاهای متری	۳۵۹
۷ـ۴ همگرایی فشرده و همگرایی نقطه‌به‌نقطه	۳۶۶
۷ـ۵ توپولوژی فشرده ـ باز	۳۷۳
۷ـ۶ قضیهٔ آسکولی	۳۷۹
۷ـ۷ فضاهای بئر	۳۸۴
۷ـ۸ یك تابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر	۳۸۹
۷ـ۹ مقدمه‌ای برنظریهٔ ابعاد	۳۹۵

عنوان	صفحه
فصل ۸. گروه بنیادی و فضاهای پوششی	۴۱۵
۸ــ۱ هموتوپی راهها	۴۱۷
۸ــ۲ گروه بنیادی	۴۲۷
۸ــ۳ فضاهای پوششی	۴۳۴
۸ــ۴ گروه بنیادی دایره	۴۴۰
۸ــ۵ گروه بنیادی صفحهٔ سفته	۴۴۹
۸ــ۶ گروه بنیادی S^n	۴۵۵
۸ــ۷ گروههای بنیادی سطوح	۴۵۹
۸ــ۸ نگاشتهای اساسی و غیراساسی	۴۶۶
۸ــ۹ قضیهٔ اساسی جبر	۴۷۱
۸ــ۱۰ میدانهای برداری و نقاط ثابت	۴۷۴
۸ــ۱۱ نوع هموتوپی	۴۸۰
۸ــ۱۲ قضیهٔ جداسازی ژوردان	۴۸۷
۸ــ۱۳ قضیهٔ منحنی ژوردان	۴۹۱
۸ــ۱۴ ردهبندی فضاهای پوششی	۵۰۳
واژهنامهٔ انگلیسی ــ فارسی	۵۱۹
واژهنامهٔ فارسی ــ انگلیسی	۵۳۳
فهرست راهنما	۵۴۹

پیشگفتار

این کتاب برای تدریس در یك درس یك ترمی یا دوترمی در سطح لیسانس یا سال اول فوق لیسانس درنظر گرفته شده است.

هر چند توپولوژی خودبه‌خود موضوع جالبی است، با این حال جزء مبانی پژوهشهای پیشرفته درآنالیز، هندسه، و توپولوژی جبری محسوب می‌شود. دراین باره که مباحث نخستین درس توپولوژی‌چه باید باشد توافقی وجود ندارد؛ برای چنین‌درسی مباحث متعدد مناسبی را می‌توان درنظر گرفت، که هریك برای منظوری مناسب است. درانتخاب مباحث این کتاب، سعی کرده‌ام تا بین دیدگاههای مختلف موازنه‌ای به وجود بیاورم.

پیشنیازها. برای مطالعهٔ این کتاب رسماً به‌هیچ پیشنیازی‌احتیاج نیست. حتی فرض نکرده‌ام که خواننده مقدار زیادی‌ازنظریهٔ مجموعه‌ها می‌داند. همین‌جا باید اضافه کنم که درصورتی که خواننده کمی آنالیز یا «حسابان دقیق» نخوانده باشد، از درك مبنای شهودی مفاهیمی که دربخش‌اول کتاب معرفی می‌شوند عاجز خواهد بود. در صورتی که خواننده کمی آشنایی با توابع پیوسته، مجموعه‌های باز و بسته، فضاهای متری، و مفاهیم مشابه داشته باشد کار بسیار سهل خواهد شد، هرچندکه ما فرض را براین‌آشنایی نگذاشته‌ایم. تنها در فصل۸ فرض‌کرده‌ایم‌که خواننده مقدمات نظریهٔ گروهها را می‌داند.

تا جایی‌که تجربهٔ من نشان می‌دهد، اکثردانشجویان درس توپولوژی با بنیادهای ریاضیات‌آشنایی دارند. البته مقداراین‌آشنایی ازدانشجویی به دانشجوی دیگر بسیارفرق می‌کند. از این‌رو، در ابتدای‌کتاب فصلی را آورده‌ام‌که مطالب لازم از منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها را مرورکرده است. این فصل با مطالب مقدماتی‌آغازمی‌شود، وبه مطالبی‌ختم می‌شودکه می‌توان‌آنهارا «نیمه تخصصی»نامید. دراین فصل مطالبی که دراین‌کتاب موردد احتیاج هستند (وتنها همین مطالب)آورده شده‌اند. اکثردانشجویان با مطالب بخشهای‌اول این فصل‌آشنا هستند، اما بسیاری ازآنها در اواسط فصل مهارت خود را ناکافی می‌بینند. ازاین‌رو، وقت و زحمتی‌که معلم لازم‌است صرف تدریس این فصل بکند عمدتاً به تجربه

واطلاع ریاضی دانشجویان بستگی‌دارد. معقولترین معیاربرای‌آنکه دانشجوبفهمدآمادگی آموختن توپولوژی را دارد یا نه، آن است که بتواند تمرین‌ها را بسهولت (وبدرستی!) حل کند.

کتاب چگونه سازمان یافته است. درصورتی که این کتاب برای درس یك ترمی به‌کار گرفته شود، باید مباحثی ازآن را برگزید. سعی من آن بوده کـه چارچوب کتاب به‌قدری انعطاف‌پذیر باشد که معلم به‌آسانی بتواندآنچه راکه می‌خواهد بگوید.

در قسمت اول کتاب چهار فصل آمده که به عقیدهٔ من باید از مطالب آنها در هردرس مقدماتی توپولوژی نامی برده شود. می‌توان این مطالب‌را «هستهٔ تحویل ناپذیر» توپولوژی نامید که به‌فضاهای توپولوژیك، همبندی، فشردگی (وفشردگی حاصل‌ضرب‌های متناهی)، واصول موضوع شمارایی‌وجدا سازی (تا قضیهٔ متریسازی‌اوریسون) می‌پردازند. بعضی‌از بخشها با نشانهٔ ستاره مشخص شده‌اند؛ این بخشها جزء آن هستهٔ اصلی نیستند و می‌توان آنها را حذف کرد یا بعداً مطالعه کرد، بی‌آنکه به پیوستگی مطالب لطمه‌ای بخورد.

قسمت دوم کتاب ازچهارفصل تشکیل شده است که‌کاملاً ازیکدیگرمستقل‌هستند. این فصلها تنها به مطالب بخش اول بستگی دارند؛ معلم می‌تواند به هرترتیبی که بخواهددرس دهد. همچنین، اگر بخواهد تنها بخشی ازیکی از این فصلها را درس دهد، می‌تواند به نموداراول‌آن فصل مراجعه کند که وابستگی بخشهای‌آن فصل به یکدیگررا نشان می‌دهد. مثلا، معلمی که بخواهد درس‌خود را با برهان قضیهٔ منحنی ژوردان خاتمه دهد، می‌تواند ازنمودار فصل۸ بفهمد که برای این منظور کدام یك‌ازبخشهای فصل۸ ضروری وکدام‌یك حاشیه‌ای هستند.

بعضی‌ازمطالب فصلهای آخر به یك یا چند بخش ستاره‌دارقسمت اول کتاب بستگی دارند. این بستگیها درپانوشت اول هریك ازاین بخشها ونیزدرمقدمهٔ فصل مربوطه تذکر داده شده است. همچنین بعضی‌ازتمرینها به بخشهای ستاره‌دارپیش‌ازخود بستگی دارند، اما این وابستگی‌آشکار است.

برنامه‌های درسی ممکن. اغلب معلمانی کـه این کتاب را برای درس یك ترمی به‌کار می‌برند میل دارند که مطالب «هسته‌ای» قسمت اول را همراه بـا قضیهٔ تیخونوف (بخش ۵ــ۱) به‌کارببرند. بسیاری موضوعات دیگری را نیزاضافه می‌کنند. مثلاً، ممکن است کسی بخشهای ستاره‌دارقسمت اول‌را نیزدرنظر بگیرد. (مثلاً، خود من حداقل‌فشردگی موضعی را نیز درس می‌دهم.) یا ممکن است یك یا دومبحث قسمت دوم را درنظر بگیرد. مثلاً، فشرده سازی استون ـ چخ (بخش ۵ــ۳)، قضیهٔ متریسازی (فصل ۶)، منحنی پئانو (بخش ۷ــ۲)، یك یا هردوشکل قضیهٔ آسکولی (بخش ۷ــ۳ و بخش ۷ــ۶)، نظریهٔ ابعاد (بخش ۷ــ۹)، گروههای بنیادی وکاربردهایشان (بخش ۸ــ۱ تا بخش ۸ــ۱۰)، یا قضیهٔ منحنی ژوردان (بخش۸ــ۱۳). خود من درکلاسهای مختلف هریك ازاین مباحث رادرس داده‌ام.

معلمی که بخواهد به توپولوژی جبری تکیه کند، یکی از برنامه‌های درسی ممکن

عبارت است از فصلهای ۱ تا ۳ به همراه همهٔ فصل ۸. حذف فصل ۴ مشکلی به وجـود نمی‌آورد ، به شرط آنکه ازتمرین ۵ دربخش ۸-۱۲ صرف‌نظر شود ، زیرا دراین تمرین ازمفهوم فضای نرمال استفاده شده است.

برنامهٔ درسی دیگربرنامه‌ای است که کمیتهٔ دروس لیسانس ریاضی (وابسته به‌انجمن ریاضی آمریکا) برای یك درس یك ترمی برای سال‌اول فوق لیسانس پیشنهاد کرده است. این برنامه شامل فصلهای ۲، ۳، و ۴ ، وبه دنبال آن بخشهای ۵-۱؛ ۶-۱ ، ۶-۳ ، ۶-۴؛ ۷-۱ ؛ ۸-۱ تا ۸-۵ ، بخشهای ۸-۸ تا ۸-۱۱ ، وبخش ۸-۱۴. در این برنامه فرض براین است که خواننده با نظریهٔ مجموعه‌ها درسطح فصل ۱ این کتاب آشنایی دارد.

برای یك درس دوترمی ، می‌توان بخوبی همهٔ کتاب را درس داد.

جیمز ر. مانکرز

تذکری به خواننده

دونکته محتاج توضیح‌اند — تمرینها ومثالها.

مسائل بخش کلیدی آموزش ریاضیات هستند. هیچکس با مطالعهٔ صرف تعریفها، قضیه‌ها، ومثالهایی که در کتاب آمده‌اند توپولوژی یاد نخواهد گرفت. او باید قسمتی از کار را خود برعهده بگیرد. تمرینها برای همین منظور آورده شده‌اند.

از لحاظ دشواری تمرینها متفاوت‌اند، تمرینهای ساده‌تر معمولاً در ابتدا آورده شده‌اند. بعضی‌ازتمرینها بررسی سرراست تعریفها ومثالهای‌آن بخش هستند تا معلوم شود که‌آنها را فهمیده‌اید یا نه. بقیه چندان سرراست‌نیستند. مثلاً، ممکن‌است درتمرینی‌خواسته شودکه قضیه‌ای ازمتن را تعمیم دهید. گرچه ممکن است جواب این تمرین به نوبهٔ خود جالب باشد، اما هدف اصلی از این نوع تمرینها آن است‌که شما اثبات مورد نظر را بدقت مطالعه‌کنید، به همهٔ ایده‌های‌آن مسلط شوید، آن‌قدر مسلط (البته امیدوارم!) که چیزی بیشتر از حفظ‌کردن معمولی باشد.

بعضی‌از تمرینها به صورت «باز» عرضه شده‌اند. دانشجویان معمولاً این کار را بیهوده می‌دانند. هنگامی‌که ازآنها پرسیده می‌شود «آیا هرفضای لیندلوف منتظم، نرمال است؟» با خشم جواب می‌دهند «نمی‌دانم چه ازجانم می‌خواهید! بالاخره بایدآن راثابت کنم یا برایش مثال ناقض بیاورم؟» اما به‌اطلاعتان‌برسانم‌که ریاضیات (خارج‌ازکتابهای درسی) معمولاً همین طوراست. اغلب اوقات، ریاضیدان بایك حدس یا سؤال سروکار دارد، و او نمی‌داندکه پاسخ درست کدام است. شما باید دراین زمینه‌کمی تجربه‌کسب کنید.

چند تمرین انگشت‌شمار که مشکلتر از بقیه هستند با ستاره مشخص شده‌اند. اما دشواری‌آنها به قدری است‌که بهترین شاگردکلاس من معمولاً می‌تواندآنها را حل‌کند.

قسمت مهم‌دیگر تسلط برمبحثی‌ازریاضیات، آشنایی با مجموعهٔ مفیدی ازمثالهاست. البته باید با مثالهای مهمی‌که منشأ نظریه بوده‌اند، ومثالهایی‌که مهمترین‌کاربردهای نظریه هستندآشنا شد. امادانشجوباید باچند مثال ناقض هم‌آشنا باشد تا بتواند حدسهای‌مشکوك را بیازماید.

درمطالعهٔ توپولوژی وقت گذراندن با«مثالهای ناقض عجیب وغریب» ساده‌ترین کار است. ساختن‌آنها ابتکار می‌خواهد، ومعمولاً بسیار جالب است. اما این مثالهای ناقض موضوع توپولوژی نیستند. خوشبختانه، برای نخستین درس توپولوژی به تعداد زیادی ازآنها احتیاج نداریم؛ چند مثال ناقض انگشت‌شمار برای اکثرموارد به کارمی‌آید. این هم فهرست آنها:

R^J ، حاصل‌ضرب خط حقیقی درخودش، با توپولوژی یکنواخت و توپولوژی جعبه‌ای.

R_l ، خط حقیقی با توپولوژی‌ای که یك پایه‌اش بازه‌های $[a, b)$ هستند.

S_Ω ، کوچکترین مجموعهٔ خوش‌ترتیب ناشمارا ناپذیر.

$I \times I$ ، مربع واحد بسته، با توپولوژی ترتیب قاموسی.

این مثالها را باید به‌خاطربسپرید وبرآنها مسلط شوید؛ آنها را کراراً به‌کارخواهیم برد.

قسمت اول

۱

نظریهٔ مجموعه‌ها و منطق

برای مطالعهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها، مانند بیشتر ریاضیدانان، ما نیز ساده‌ترین راه‌را پیش می‌گیریم. فرض می‌کنیم معنایی که از اصطلاح «مجموعه‌ای از اشیاء» مستفاد می‌شود به‌طور شهودی روشن است، و بر این اساس، بدون تحلیل بیشتر مفهوم مجموعه، به بررسی مطالب دیگر می‌پردازیم. اصولاً، تحلیل مفهوم مجموعه امری است مربوط به مبانی ریاضیات و منطق ریاضی، و هدف ما مطالعه در این زمینه‌ها نیست.

علمای منطق ریاضی به تفصیل نظریهٔ مجموعه‌ها را تحلیل کرده و اصول موضوعی برای آن تدوین کرده‌اند. هریك از این اصول موضوع، گویای خاصیتی از مجموعه‌هاست که ریاضیدانان جملگی بر آن توافق‌دارند، و این اصول روی‌هم بنیادی به قدرکافی‌جامع و توانا برای بناکردن بقیهٔ ریاضیات فراهم می‌کنند.

متأسفانه بی‌دقتی در به کارگیری نظریهٔ مجموعه‌ها، و تنها شهود را اساس کار قرار دادن، می‌تواند موجب بروز تناقضات شود. در واقع، یکی‌ازدلایل اصل موضوعی کردن نظریهٔ مجموعه‌ها، فرمولبندی قواعدی برای کار با مجموعه‌هاست که ازبروز این گونه تناقضات جلوگیری می‌کند. اگرچه ما صریحاً این اصول موضوع را بررسی نخواهیم کرد، ولی از قواعدی پیروی می‌کنیم که ازاین اصول ناشی می‌شوند. دراین کتاب، شما با مشاهدهٔ موادگوناگون وبا شرکت خودتان دراین‌کار، چگونگی‌کار با مجموعه‌ها را به روش «نوآموزی» خواهید آموخت. ممکن است درمرحله‌ای از مطالعات خود خواستار بررسی دقیقتر و مفصلتری‌ازنظریهٔ مجموعه‌ها باشید. دراین‌صورت، یك دورهٔ منطق‌یامبانی ریاضیات بسیاربجا خواهد بود.

۱-۱ مفاهیم بنیادی

دراینجا مفاهیم مربوط به‌نظریهٔ مجموعه‌هارا معرفی می‌کنیم واصطلاحات وعلامات اساسی

را متذکر می‌شویم. درضمن، نکاتی ازمنطق مقدماتی راکه بنا به‌تجربهٔ ماممکن است موجب بروز ابهاماتی شوند موردبحث قرارمی‌دهیم.

علائم اساسی

معمولاً حروف بزرگ A ، B ، ... را بـرای نمایش **مجموعه‌ها** و حروف کـوچك a ، b ، ... را برای نمایش اشیاء یا **اعضای** متعلق به‌این مجموعه‌ها ، به‌کارمی‌بریم. اگر شیء a به مجموعهٔ A تعلق داشته باشد ، این امررا با

$$a \in A$$

نشان می‌دهیم. درصورتی‌که a به مجموعهٔ A تعلق نداشته باشد ، می‌نویسیم

$$a \notin A.$$

نماد تساوی ، $=$ ، در سرتاسر این کتاب به معنی تساوی منطقی به کار رفته است. بنابراین،وقتی که می‌نویسیم $a=b$، مقصود این‌است که «a» و«b» هردواسامی‌یك شیء‌اند. مثلاً، وقتی که درحساب می‌نویسیم ۲/۴ = ۱/۲ ، درحقیقت معنای اخیرمورد نظراست. به طریق مشابه ، تساوی $A=B$ مبین این واقعیت است که «A» و «B» نمادهایی برای نمایش یك مجموعه‌اند ؛ یعنی ، A و B دقیقاً ازاعضای یکسانی تشکیل شده‌اند.

اگر a و b دوشیء متمایز باشند ، می‌نویسیم $a \neq b$ ؛ واگر A و B دومجموعهٔ متمایزباشند، می‌نویسیم $A \neq B$. مثلاً، اگرAمجموعهٔهمهٔ اعدادحقیقی‌نامنفی وB مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی مثبت باشدآنگاه $A \neq B$ ، زیرا $0 \in A$ درصورتی‌که $0 \notin B$.

اگرهرعضو A عضوی‌از B نیزباشد، گوییم A **زیر مجموعهٔ** B است؛ واین‌مطلب را به صورت

$$A \subset B$$

می‌نویسیم. دراین تعریف ، لازم نیست A متمایز از B باشد ؛ در حقیقت ، اگر $A=B$ آنگـاه $A \subset B$ و $B \subset A$ هردو راست‌اند. درحالتی‌که $A \subset B$ و A متمایز از B باشد ، A را یك **زیر مجموعهٔ سرهٔ** B می‌نامیم ومی‌نویسیم

$$A \subsetneqq B$$

اکنون این سؤال مطرح می‌شودکه چگونه یك مجموعه را باید مشخص‌کرد؟ اگر مجموعهٔ مورد نظر تنها چند عضو داشته بـاشد ،به‌آسانی می‌توان فهرستی از اسامی اشیاء متعلق به‌آن تهیه‌کرد ونوشت ، «A مجموعه‌ای است متشکل از a ، b ، و c .» این گزاره را چنین می‌نویسیم

$$A=\{a, b, c\},$$

که دراینجا ابروها جهت احاطهٔ اسامی اعضای A به‌کار رفته‌اند.

اما ، روش معمولی برای مشخص کردن یك مجموعه چنین است که مجموعه‌ای از اشیاء ، مانند A ، و خاصیتی را که اعضای A ممکن است واجد یا فاقد آن باشند درنظر می گیریم ومجموعهٔ همهٔ اعضایی‌از A راکه واجد این خاصیت‌اند تشکیل می‌دهیم. مثلاً، با درنظر گرفتن مجموعهٔ اعداد حقیقی ، می‌توان زیرمجموعه‌ای ازآن را با خاصیت «عدد صحیح زوج بودن» تشکیل داد. به‌زبان نمادها ، این مطلب را به صورت ذیل می‌نویسیم :

$$B=\{x|\text{یك عدد صحیح زوج است } x\}.$$

دراینجا ، ابروهاوخط عمودی ، بترتیب ، جانشین کلمات «مجموعهٔ» و «که» هستندو تساوی اخیر چنین خوانده می‌شود: « B مجموعهٔ همهٔ xهایی است که x یك عدد صحیح زوج است. »

اجتماع مجموعه‌ها و معنای « یا »

با دومجموعهٔ مفروض A و B می‌توان مجموعه‌هایی متشکل‌ازهمهٔ‌اعضای A وهمهٔ‌اعضای B ساخت. این مجموعه را **اجتماع** A و B می‌نامیم وبه $A \cup B$ نمایش می‌دهیم. به بیان صوری

$$A\cup B=\{x|x\in A \quad \text{یا} \quad x\in B\}$$

دراینجا می‌باید مکثی کنیم و دقیقاً مقصود خودرا ازبه‌کاربردن گزارهٔ «$x \in A$ یا $x \in B$» توضیح دهیم.

درمکالمات روزمره ، لفظ « یا » دارای ابهام است. گزاره «P یا Q» گاه به معنی «P یا Q یا هردو» وگاه به معنی «P یا Q ولی نه هردو» به‌کارمی‌رود ومعنای مورد نظر از قراین تشخیص داده می‌شود. مثلاً، فرض کنیم معلمی دوتن ازمحصلین خود رامخاطب قرارمی‌دهد ومی گوید:

«خانم الف ، دانشجویانی‌که دراین درس ثبت نام می‌کنند یا درسی درجبرخطی یا درسی‌در آنالیزراگذرانده‌اند.»

«آقای ب ، یا باید درامتحان‌آخرترم دست‌کم ۱۲ بگیرید یا رد خواهید شد.»

خانم‌الف ازفحوای کلام‌کاملاً متوجه می‌شودکه مقصود معلم‌این است‌که«دانشجویان درسی درجبرخطی یا درسی درآنالیزیا هردو راگذرانده‌اند» ، وآقای ب می‌داند مقصود این است‌که «یا باید نمرهٔ ۱۲ بیاورد و یا رد می‌شود ولی نه هردو». در واقع ، راست بودن توأم هردوگزاره ، آقای ب را فوق‌العاده متأثرخواهدکرد!

در ریاضیات نمی‌توان یك چنین ابهامی را تحمل‌کرد. باید فقط یکی ازاین معانی را انتخاب‌کرد و به‌آن پابند بود ، درغیر این صورت ، اشتباهات زیادی رخ می‌دهد. از این‌رو ، ریاضیدانان توافق کرده‌اندکه « یا » را به معنای نخست‌آن به‌کاربیرند. بنابراین، گزارهٔ «P یا Q» همواره به معنی «P یا Q یا هردو» است. درمواردی‌که مقصود

«P یا Q ولی نه هردو» باشد، باید صریحاً قید «ولی نه هردو» را ذکر کرد.

با این توضیحات، تساوی معرف $A \cup B$ بدون ابهام است؛ این تعریف بیان می‌کند که $A \cup B$ مجموعهٔ همهٔ x هایی است که x به A یا به B ویا به هردو تعلق دارند.

مقطع مجموعه‌ها، مجموعهٔ تهی، و معنای «اگر ... آنگاه»

با دومجموعهٔ مفروض A و B به طریقی دیگرمی‌توان مجموعه‌هایی ساخت، وآن عبارت است ازمجموعهٔ اعضای مشترك بین A و B. این مجموعه را **مقطع** دومجموعهٔ A و B می‌نامیم وبه $A \cap B$ نمایش می‌دهیم. به بیان صوری

$$A \cap B = \{x | x \in B \ \text{و} \ x \in A\}$$

دراینجانیزمانند تعریف اجتماع مشکلی‌وجود داردکه البته درمعنی «و» نیست‌بلکه‌ازنوع دیگری است. این مشکل، هنگامی بروزمی‌کندکه A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند. باید دید دراین مورد معنی نماد $A \cap B$ چیست؟

برای مواجهه با این پیشامد، قرار داد ویژه‌ای وضع می‌کنیم. مجموعهٔ خاصی به نام **مجموعهٔ تهی**، که با $\varnothing$ نمایش‌داده می‌شود به جرگهٔ مجموعه‌ها وارد می‌کنیم وآن‌را به عنوان «مجموعهٔ بدون عضو» درنظرمی گیریم.

اگر A و B عضومشترکی نداشته باشند، آنها را دو **مجموعهٔ جدا ازهم** می‌نامیم وبرطبق قرارداد فوق چنین می‌نویسیم:

$$A \cap B = \varnothing.$$

مفهوم «مجموعهٔ تهی»، به نظر بعضی‌از دانشجویان ناخوشایند جلوه می‌کند. آنها می‌گویندکه «چگونه می‌توانید مجموعه‌ای بدون هیچ‌چیز درآن داشته باشید؟» این مسئله مشابه مسئله‌ای است که قرنها قبل، هنگامی که عدد صفر برای اولین بار معرفی شد، رخ داد.

مجموعهٔ تهی قرار دادی بیش نیست، وبدون‌آن نیز ریاضیات می‌تواند به خوبی پیشرفت کند. ولی، مجموعهٔ تهی قرارداد بسیارمناسبی است، چون دربیان واثبات‌قضایا به میزان قابل ملاحظه‌ای موجب تسهیل‌کار می‌شود. مثلاً، بدون این قرارداد، قبل‌از به‌کار بردن علامت $A \cap B$ باید ثابت کردکه دومجموعهٔ A و B عضومشترك دارند؛ همچنین، علامت

$$C = \{x | \text{را دارد} \ \text{خاصیت مشخصی} \ x \ \text{و} \ x \in A\}$$

را اگرهیچ عضوی از A، مانند x، آن خاصیت را نداشته باشد، نمی‌توان به‌کار برد. بسیارآسانتراست توافق کنیم‌که،درچنین حالاتی، $A \cap B$ و C مساوی مجموعهٔ‌تهی‌اند.

چون مجموعهٔ تهی‌صرفاً قرارداد است، می‌باید ارتباط بین‌آن و مفاهیم تعریف‌شدهٔ

قبلی‌را برقرار کرد. ازآنجاکه $\varnothing$ را «مجموعهٔ بدون عضو» درنظرمی گیریم ، بدیهی‌است قرارداد کنیم که به ازای هرشیء x ، رابطهٔ $x \in \varnothing$ برقرار نیست. همچنین از تعاریف اجتماع ومقطع نتیجه می‌شود که به‌ازای هرمجموعهٔ A داریم

$$A \cup \varnothing = A \quad \text{و} \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

درمورد رابطهٔ جزئیت ، مطلب کمی ظریفتراست. آیا برای مجموعهٔ مفروض A ، می‌توانیم توافق کنیم $\varnothing \subset A$؟ یك بار دیگر می‌باید در مورد نحوهٔ به کار گیری زبان روزمره توسط ریاضیدانان دقت کنیم. عبارت $\varnothing \subset A$ بیان اختصاری این جمله است: «هرعضومتعلق به مجموعهٔ تهی ، به مجموعهٔ A نیز تعلق دارد.» یا به بیان صوریتر ، « به ازای هرشیء x ، اگر x به مجموعهٔ تهی تعلق داشته باشدآنگاه x به A نیز تعلق‌دارد.»

آیا گزارهٔ اخیرراست است؟ بعضی ممکن است بگویند«آری» وبرخی دیگر «نه». این پرسش را تنها با گونه‌ای توافق می‌توان پاسخ داد وهیچ برهانی برای پاسخگویی به‌آن وجود ندارد. توجه داشته باشیدکه‌این گزاره به شکل «اگر P آنگاه Q» است، و در زبان روزمره معنی «اگر . . . آنگاه» مبهم است. این گزاره همواره بدین معنی است که اگر P راست باشد آنگاه Q نیز راست است. گاهی این همهٔ معنی آن است ، ولی گاهی اوقات معنی دیگری از آن استنباط می‌شود ، بدین ترتیب که اگر P دروغ باشد ، Q نیز باید دروغ باشد. معمولاً، ازفحوای کلام تعبیرصحیح آن تشخیص داده می‌شود.

این وضع کاملاً مشابه ابهامی‌است که دراستعمال لفظ « یا » داشتیم. برای نشان‌دادن این تشابه اکنون مثالهای مربوط بـه خانم الف و آقـای ب را بـه صورت شرطی بیان می‌کنیم. معلم به محصلین خود چنین می گوید:

«خانم الف ، هردانشجویی که دراین درس ثبت نام کرده استاگردرسی‌درجبرخطی‌نگذرانده باشدآنگاه درسی درآنالیزگذرانده است.»

«آقای ب ، اگردرامتحان‌آخرترم نمره‌ای‌کمتراز۱۲ بیاوریدآنگاه رد خواهید شد»

خانم الف ازفحوای کلام متوجه می‌شودکه‌اگرمحصلی‌درسی درجبرخطی‌نگذرانده باشد آنگاه درسی درآنالیزگذرانده است ، اما اگر درسی در جبر خطی گذرانده باشد ، ممکن است درسی درآنالیزنیز گذرانده یا نگذرانده باشد. همچنین‌آقای ب می‌داندکه اگرنمره‌ای‌کمتراز ۱۲ بیاورد،درآن درس رد می‌شود ، ولی اگرحداقل نمرهٔ ۱۲ بیاورد، قبول می‌شود.

مجدداً یادآورمی‌شویم که در ریاضیات جایی برای ابهام وجود ندارد ، بنابراین ، ضرورت گزینش تنهایکی از این معانی‌کاملاً آشکار است. ریاضیدانان توافق کرده‌اندکه جملات شرطی را همواره به معنی نخست‌آن به‌کارببرند ، به این ترتیب ، گزارهٔ «اگر P آنگاه Q» بدین معنی است که اگر P راست باشد آنگاه Q نیز راست است ، ولی اگر P دروغ باشد ، ممکن است Q راست یا دروغ باشد.

مثلاً، گزارهٔ زیررا درمورد اعداد حقیقی درنظر بگیرید:

$$\text{اگر } x > ۰ \text{ آنگاه } x^۳ \neq ۰.$$

گزارهٔ اخیر به صورت «اگر P آنگاه Q» است، که در اینجا، P (که **فرض** گزاره نامیده می‌شود) عبارت «$x > ۰$» و Q (که **نتیجهٔ** گزاره نامیده می‌شود) عبارت «$x^۳ \neq ۰$» است. این گزاره راست‌است، زیرا برای‌هرحالتی که در آن‌فرض $x > ۰$ برقرار باشد، نتیجهٔ $x^۳ \neq ۰$ نیزبرقراراست.

گزارهٔ دیگری که درمورد اعداد حقیقی راست می‌باشد، عبارت است از:

$$\text{اگر } x^۲ < ۰ \text{ آنگاه } x = ۲۳.$$

توجه داشته باشید که درهرحالتی که فرض برقرار باشد، نتیجه نیز برقرار است. البته، دراین مثال، هیچ حالتی وجود نداردکه درآن فرض‌گزاره برقرارباشد. گزاره‌ای ازاین نوع راگاهی **به انتفای مقدم راست** می‌نامند.

اکنون به مجموعهٔ تهی‌وجزئیت بازمی‌گردیم. ملاحظه می‌کنیم که رابطهٔ $\varnothing \subset A$، به معنی«اگر $x \in \varnothing$ آنگاه $x \in A$» است که خود به‌انتفای مقدم برقرار است. بنابراین، به‌ازای هرمجموعهٔ دلخواه A، رابطهٔ $\varnothing \subset A$ به انتفای مقدم راست است.

عکس نقیض و عکس

بحث‌ما درمورد ساختمان «اگر ... آنگاه» به درنظرگرفتن نکتهٔ دیگری ازمنطق‌مقدماتی، که‌گاه مشکلاتی ایجاد می‌کند، منجر می‌شود. این بحث به رابطهٔ بین یك گزاره، عکس نقیض آن، و عکس آن مربوط است.

«اگر Q راست نباشد آنگاه P راست نیست» را **عکس نقیض** گزارهٔ «اگر P آنگاه Q» می‌نامیم. مثلاً، عکس نقیض گزارهٔ

$$\text{اگر } x > ۰ \text{ آنگاه } x^۳ \neq ۰،$$

عبارت است ازگزارهٔ

$$\text{اگر } x^۳ = ۰ \text{ آنگاه } x > ۰ \text{ راست نیست.}$$

توجه کنید که هم این‌گزاره وهم عکس نقیض‌آن راست‌اند. همچنین، گزارهٔ

$$\text{اگر } x \neq ۲۳ \text{ آنگاه } x^۲ < ۰ \text{ راست نیست}$$

عکس نقیض گزارهٔ ذیل است:

$$\text{اگر } x^۲ < ۰ \text{ آنگاه } x = ۲۳.$$

دراینجا نیزهم گزاره وهم عکس نقیض آن گزاره‌های راستی درمورد اعداد حقیقی‌اند.

باملاحظهٔ مثالهای‌اخیر به‌نظرمی‌رسد که‌احتمالاً رابطه‌ای بین‌یك گزاره وعکس نقیض

آن برقراراست. در حقیقت همین‌طور است ؛ این دو گزاره دو روش برای بیان یك مقصودند و هریك ازآنها راست است اگر وفقط اگر دیگری راست باشد ؛ یعنی ، منطقاً معادل‌اند.

اثبات این مطلب دشوارنیست. ابتدا چند علامت را معرفی می‌کنیم. برای اختصار در فرمول‌نویسی ، گزارهٔ «اگر P آنگاه Q» را به صورت

$$P \Longrightarrow Q,$$

می‌نویسیم و می‌خوانیم «P مستلزم Q است». در نتیجه ، عکس نقیض $P \Longrightarrow Q$ را می‌توان به صورت

$$(\sim Q) \Longrightarrow (\sim P)$$

بیان کرد ، که دراینجا «$\sim Q$» جانشین «Q راست نیست» شده است.

تنها موردی که «$P \Longrightarrow Q$» می‌تواند دروغ باشد آن است که فرض P راست و نتیجهٔ Q دروغ باشد. درسایر موارد ، $P \Longrightarrow Q$ راست است. به طریقی مشابه ، تنها موردی که $(\sim Q) \Longrightarrow (\sim P)$ می‌تواند دروغ باشد ، آن است که فرض $(\sim Q)$ راست ونتیجهٔ $(\sim P)$ دروغ باشد. این درست مثل این است که بگوییم Q دروغ و P راست است. و این ، دقیقاً همان وضعیتی است که درآن $P \Longrightarrow Q$ گزاره‌ای دروغ است. پس ، این دوگزاره یا هردو راست‌اند ویا هردو دروغ ؛ یعنی ، منطقاً معادل‌اند. به‌همین مناسبت، ازاین به‌بعد، اثبات قضیه‌ای به‌صورت $(\sim Q) \Longrightarrow (\sim P)$را به عنوان استدلالی برای «$P \Longrightarrow Q$» می‌پذیریم.

از گزارهٔ $P \Longrightarrow Q$ گزارهٔ دیگری می‌توان ساخت ، وآن گزارهٔ

$$Q \Longrightarrow P،$$

است ، که **عکس** $P \Longrightarrow Q$ نامیده می‌شود. باید همواره محتاط باشیم که عکس‌وعکس نقیض یك گزاره را ازیکدیگر تمیز دهیم. یك گزاره و عکس نقیض‌آن منطقاً معادل‌اند ، و حال‌آنکه از راست بودن یك‌گزاره ابداً نمی‌توان چیزی دربارهٔ راستی یا دروغی عکس آن گفت. مثلاً ، عکس‌گزارهٔ راست

اگر $x > 0$ آنگاه $x^3 \neq 0$ ،

عبارت است از

اگر $x^3 \neq 0$ آنگاه $x > 0$ ،

که دروغ است.

مواردی راکه $P \Longrightarrow Q$ وعکس‌آن $Q \Longrightarrow P$ هردو راست باشند با علامت

$$P \Longleftrightarrow Q$$

بیان می‌کنیم ومی‌خوانیم «P برقراراست اگروفقط اگر Q برقرارباشد.»

نقیض

برای به‌دست‌آوردن عکس نقیض گزارهٔ $P \Longrightarrow Q$ باید اطلاعاتی در زمینهٔ ساختن گزارهٔ «$\sim P$» ، که نقیض P خوانده می‌شود، داشته باشیم. ساختن نقیض در بیشتر موارد مشکلی به وجود نمی‌آورد ؛ ولی گاه در گزاره‌هایی که شامل عبارات «به ازای هر» و «به ازای دست کم یکی» هستند اشتباهاتی رخ می‌دهد. عبارات اخیر را سورهای منطقی می‌نامیم.

برای توضیح بیشتر ، فرض کنیم X یك مجموعه ، A زیر مجموعه‌ای از آن ، و P حکمی درمورد اعضای X باشد. گزارهٔ ذیل را درنظر بگیرید :

(*) به‌ازای هر x از A ، حکم P برقرار است.

نقیض گزارهٔ اخیر را چگونه باید ساخت؟ ابتدا مسئله را به زبان مجموعه‌ها بیان می‌کنیم. فرض کنیم B مجموعهٔ همهٔ اعضای x از X باشد که به ازای آنها P برقرار است. در این صورت ، گزارهٔ (*) دقیقاً بدین معنی است که A زیرمجموعه‌ای از B است. نقیض این گزاره این است که A زیرمجموعهٔ B نیست ؛ یعنی ، دست کم یك عضو در A وجود دارد که به B تعلق ندارد. ترجمهٔ عبارت اخیر به زبان معمولی چنین می‌شود :

به‌ازای دست کم یك $x \in A$ ، P برقرار نیست.

بنابراین ، برای ساختن نقیض گزارهٔ (*) ، کافی است که سور «به ازای دست کم یکی» را جانشین «به‌ازای هر» کنیم ، و به جای گزارهٔ P نقیض آن را قرار دهیم.

این عمل در جهت عکس نیز به کار می‌رود ؛ نقیض گزارهٔ

به‌ازای دست کم یك $x \in A$ ، گزارهٔ Q برقرار است،

عبارت است از گزارهٔ

به‌ازای هر $x \in A$ ، گزارهٔ Q برقرار نیست.

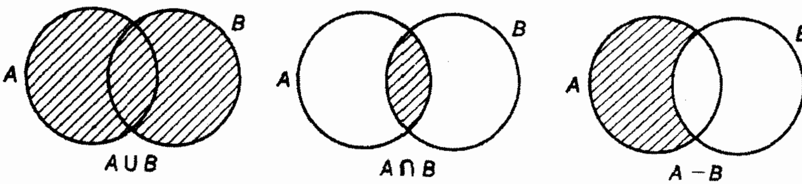
تفاضل دو مجموعه

اکنون به بحث خود در مورد مجموعه‌ها باز می‌گردیم. عمل دیگری بر مجموعه‌ها هست که بعضی مواقع به کار می‌رود ، و آن تفاضل دو مجموعه است. این عمل را که با $A-B$ نمایش داده می‌شود ، به صورت مجموعه‌ای متشکل از عضوهایی از A که در B نیستند تعریف می‌شود. به بیان صوری ،

$$A-B=\{x \mid x \notin B \text{ و } x \in A\}.$$

گاهی اوقات ، $A-B$ را متمم B نسبت به A ، یا متمم B در A ، می گویند.

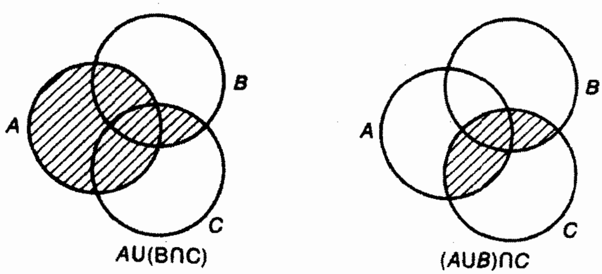
اعمال سه گانهٔ فوق درمورد مجموعه‌ها ، درشکل ۱ نموده شده‌اند.



شکل ۱

قواعد نظریهٔ مجموعه‌ها

به وسیلهٔ عملهای مجموعه‌ای ، می‌توان از مجموعه‌هــای مفروض مجموعه‌هــای جدیدی ساخت. مانند جبر ، جهت مشخص کــردن ترتیب عملهای انجام شده پرانتزهایی بــه کار می‌بریم. مثلاً، $A\cup(B\cap C)$ به‌معنی اجتماع دومجموعهٔ A و $B\cap C$ است، درصورتی که، $(A\cup B)\cap C$ یعنی مقطع دومجموعهٔ $A\cup B$ و C. همان طور که شکل ۲ نشان می‌دهد، دومجموعهٔ حاصل، کاملاً متفاوت‌اند.



شکل ۲

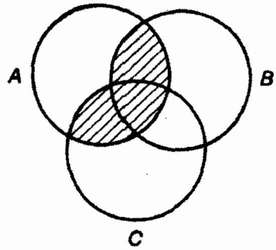
گاهی اوقات ترکیبهای متفاوت این اعمال مجموعهٔ واحدی را بــه بار می‌آورند ؛ چنین مواردی قواعد نظریهٔ مجموعه‌هــا را به دست می‌دهند. مثلاً، به‌ازای هرسه‌مجموعهٔ A ، B ، و C تساوی ذیل برقراراست :

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

این تساوی درشکل ۳ نمایش داده شده است ؛ ناحیهٔ پردازدار مجموعهٔ مورد نظر است ، این مطلب را می‌توانید بامحاسبهٔ ذهنی تحقیق کنید. رابطهٔ فوق را می‌توان به‌عنوان «قانون توزیع پذیری» اعمال $\cap$ و $\cup$ شمرد.

مثالهای دیگرازقوانین نظریهٔ مجموعه‌ها ، دومین «قانون توزیع پذیری»

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$



شکل ۳

و قوانین د مورگن[1] هستند:

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C),$$
$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C).$$

بررسی صحت این قواعد را به خواننده واگذار می‌کنیم. روابط فوق، مهمترین قواعد نظریهٔ مجموعه‌ها هستند، اگر چه می‌توان قواعد دیگری را بیان کرد. قوانین د مورگن را می‌توان به صورت لفظی ذیل بیان کرد که به خاطرسپردن آن آسانتر است:

متمم اجتماع برابر است با مقطع متممها.

متمم مقطع برابر است با اجتماع متممها.

گردایه‌های مجموعه‌ها

اشیاء متعلق به یك مجموعه ممکن است از هر نوعی باشند. مثلاً، می‌توان ازمجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح زوج، یا مجموعهٔ همهٔ ایرانیان چشم زاغ، ویا مجموعهٔ همهٔ کشورهای قارهٔ آسیا صحبت کرد. قبول داریم که فایدهٔ ریاضی بعضی ازاینها محدود است. اما، سومین مثال نکته‌ای را مشخص می‌کند که تاکنون به آن اشاره‌ای نکرده‌ایم: یعنی، اینکه اشیاء متعلق به یك مجموعه ممکن است به نوبهٔ خود مجموعه‌هایی باشند. زیرا، یك کشور مجموعه‌ای است متشکل از شهرهای آن. بنابراین، مجموعهٔ همهٔ کشورهای قارهٔ آسیا مجموعه‌ای است که اعضای آن خود مجموعه‌اند.

اکنون طریق دیگری برای ساختن مجموعه‌های جدید ازمجموعه‌های مفروض داریم. با داشتن مجموعهٔ A، می‌توان مجموعه‌هایی را که اعضای آنها زیرمجموعه‌هایی از A هستند درنظر گرفت. بویژه، می‌توان مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A را ملحوظ داشت، که گاه با نماد $\mathcal{P}(A)$ نمایش داده می‌شود و (به عللی که بعداً توضیح می‌دهیم) **مجموعهٔ توانی** A نامیده می‌شود.

مجموعه‌ای را که اعضای آن مجموعه‌اند، اغلب **گردایه‌ای** ازمجموعه‌ها می‌نامیم و

1. De Morgan

با حروف $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهیم. این تدبیردراستدلالها به ماکمك می کند تا درآن واحد اشیاء ، مجموعه‌هایی از اشیاء ، و گردایه‌هایی ازمجموعه‌هایی ازاشیاء را مورد نظر قراردهیم. مثلاً، ممکن است $\mathcal{A}$ را برای‌نمایش مجموعهٔ همهٔ کشورهای قارهٔ آسیا، حرف بزرگ معمولی A را برای نمایش کشوری آسیایی ، و حرف کوچك a را برای نمایش یکی ازشهرها به‌کارببریم.

دراین مقام تأکید می کنیم که در علامت‌گذاری باید دقت کرد. بین شیء a ، که یك عضو مجموعهٔ A است ، و مجموعهٔ تك عضوی $\{a\}$ ، که زیرمجموعه‌ای از A است ، تفاوت قائلیم . برای آنکه مطلب روشن شود این نکته را درنظر بگیرید که در مورد مجموعهٔ $A=\{a, b, c\}$ گزاره‌های

$$a \in A, \quad \{a\} \subset A, \quad \{a\} \in \mathcal{P}(A)$$

همگی راست‌اند، درحالی که گزاره‌های $\{a\} \in A$ و $a \subset A$ راست نیستند.

اجتماعها و مقطعهای دلخواه

قبلاً مفاهیم اجتماع و مقطع دو مجموعه را تعریف کردیم. چون می‌توان اجتماع و مقطع تعدادی دلخواه ازمجموعه‌ها را نیزساخت ، دلیلی نمی‌بینیم که درمورد این مفاهیم خودرا فقط به دومجموعه مقید کنیم.

فرض کنیم $\mathcal{A}$ گردایه‌ای‌ازمجموعه‌ها باشد. **اجتماع** اعضای $\mathcal{A}$ بنابر تعریف عبارت است از

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A=\{x \mid x \in A \text{ ، } A \in \mathcal{A} \text{ به‌ازای دست‌کم یك}\}.$$

مقطع اعضای $\mathcal{A}$ نیز با تساوی ذیل تعریف می‌شود :

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A=\{x \mid x \in A \text{ ، } A \in \mathcal{A} \text{ به‌ازای هر}\}.$$

در تعریفات بالا ، اگر اتفاقاً یکی از اعضای $\mathcal{A}$ مجموعهٔ تهی باشد ، مشکلی ایجاد نمی‌شود. ولی اگر $\mathcal{A}$ خود مجموعهٔ تهی باشد آنگاه تصمیم گرفتن درمورد معنایی که این تعریفات دارند (اگراصولاً معنایی داشته باشند) اندکی ظریف است. با به‌کاربردن کلمه به‌کلمهٔ تعاریف ، ملاحظه می کنیم که هیچ عضوی مانند x وجودنداردکه درخاصیت معرف اجتماع اعضای $\mathcal{A}$ صدق کند. بنابراین ، اگر $\mathcal{A}$ تهی باشد ، موجه است که بگوییم

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A=\varnothing$$

ازطرف دیگر ، هر x درخاصیت معرف مقطع اعضای $\mathcal{A}$ به انتفای مقدم صدق می کند. دراینجا این سؤال پیش می‌آید که هر x ازکدام مجموعه؟ اگر«عالم سخن» مجموعهٔ وسیع مفروضی مانند X باشد ، و فقط بحث دربارهٔ زیرمجموعه‌های آن باشد ، هنگامی که $\mathcal{A}$ تهی است ، قراردادن

$$\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A = X$$

موجه است. اما همهٔ ریاضیدانان از این قرارداد پیروی نمی‌کنند. ما جهت احتراز از این اشکال، هنگامی که $\mathscr{A}$ تهی است، مقطع را تعریف نمی‌کنیم.

حاصل‌ضربهای دکارتی

روشی دیگر برای ساختن مجموعه‌های جدید ازمجموعه‌های مفروض هست که متضمن مفهوم «زوج مرتب» اشیاء است. زمانی که هندسهٔ تحلیلی می‌خواندیم، درشروع کار خود را متقاعد کردیم که بعدازانتخاب محور x ها ومحور y هادرصفحه، هر نقطهٔ صفحه رامی‌توان نظیر زوج مرتب منحصربه فردی مانند (x, y) از اعداد حقیقی قرار داد. (در بررسی دقیقترهندسه، احتمالاً بهترین راه برای تعریف صفحه همان مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب اعداد حقیقی است!)

مفهوم زوج مرتب را به مجموعه‌های دلخواه تعمیم می‌دهیم. به‌ازای دو مجموعهٔ مفروض A و B **حاصل‌ضرب دکارتی** آنهـا، کـه به $A\times B$ نمـایش داده می‌شود، مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (a, b) است که a عضوی از A و b عضوی از B است. به بیان صوری

$$A\times B=\{(a, b)\mid b\in B \quad \text{و} \quad a\in A\}.$$

دراین تعریف‌فرض براین‌است که مفهوم«زوج مرتب» قبلاً داده شده است.البته می‌توان همان‌طور که درمورد مفهوم «مجموعه» عمل شد، آن را نیزبه عنوان مفهومی اولیه اختیار کرد، یاآن‌را به‌وسیلهٔ عملهای مجموعه‌ای، که‌قبلاً تعریف شدند، تعریف‌کرد. یك‌تعریف زوج مرتب برحسب عملهای مجموعه‌ای با تساوی ذیل بیان می‌شود:

$$(a, b)=\{\{a\}, \{a, b\}\};$$

در اینجا زوج مرتب (a, b) بـه صورت‌گردایه‌ای از مجموعه‌ها تعریف شده است. اگر $a\neq b$، بنابراین‌تعریف، (a, b) گردایه‌ای‌است متشکل ازدومجموعه که یکی‌ازآنها تك‌عضوی است ودیگری دوعضوی. مختص اول زوج مرتب به هردومجموعه، و مختص دوم تنها به یکی ازاین دو مجموعه تعلق دارد. اگر $a=b$ آنگاه (a, b) گردایه‌ای است تك عضوی که تنها عضوآن $\{a\}$ است، زیرا در این حالت $\{a, b\}=\{a, a\}=\{a\}$ و مختص اول و دوم‌آن هردومساوی تنها عضواین مجموعهٔ تك عضوی هستند.

تصور می‌کنم دور ازحقیقت نیست اگربگوییم که اغلب ریاضیدانان ترجیح می‌دهندکـه زوج مرتب را به عنوان مفهومی اولیه درنظربگیرند تاگردایه‌ای ازمجموعه‌ها!

درباب علامت زوج مرتب نکته‌ای را تذکرمی‌دهیم. متأسفانه در ریاضیات علامت (a, b) برای‌دومعنی کاملاً متفاوت اختصاص یافته است. یکی زوج مرتب اشیاء، که‌بحث آن گذشت، وبا کاربرد دیگرآن‌درآنالیزآشنا شده‌اید؛ اگر a و b دوعدد حقیقی باشند،

نماد (a, b) برای نمایش بازه‌ای به‌کار می‌رود که متشکل از همهٔ اعداد حقیقی x است به‌طوری که $a < x < b$. بیشتر اوقات این ابهام در علامت‌گذاری مشکلی به وجود نمی‌آورد، زیرا معنی (a, b) ازسیاق مطلب روشن است. درمواردی که بیم ابهام می‌رود، برای زوج مرتب (a, b) علامت دیگری اختیارمی کنیم وآن را با نماد

$$a \times b$$

نمایش می‌دهیم.

تمرینها

۱. قوانین توزیع پذیری برای $\cap$ و $\cup$، وهمچنین قوانین د مورگان را ثابت کنید.

۲. تعیین کنید کدامیك ازگزاره‌های زیر برای مجموعه‌های دلخواه A، B، C، و D برقرار است. اگریکی‌از قضایای دوشرطی برقرارنباشد، مشخص کنید که کدامیك ازدو استلزام برقراراست. همچنین، اگریکی ازتساویها برقرارنباشد، مشخص کنید که ازکدام طرف جزئیت برقراراست.

(الف) $C \subset A$ و $C \subset B$ اگروفقط اگر $C \subset (A \cup B)$.

(ب) $C \subset A$ یا $C \subset B$ اگروفقط اگر $C \subset (A \cup B)$.

(پ) $C \subset A$ و $C \subset B$ اگروفقط اگر $C \subset (A \cap B)$.

(ت) $C \subset A$ یا $C \subset B$ اگروفقط اگر $C \subset (A \cap B)$.

(ث) $A-(A-B)=B$.

(ج) $A-(B-A)=A-B$.

(چ) $A \cap (B-C)=(A \cap B)-(A \cap C)$.

(ح) $A \cup (B-C)=(A \cup B)-(A \cup C)$.

(خ) $(A \cap B) \cup (A-B)=A$.

(د) اگر $A \subset C$ و $B \subset D$ آنگاه $A \times B \subset (C \times D)$.

(ذ) عکس گزارهٔ (د).

(ر) عکس گزارهٔ (د) با فرض ناتهی بودن A و B.

(ز) $(A \times B) \cup (C \times D)=(A \cup C) \times (B \cup D)$.

(ژ) $(A \times B) \cap (C \times D)=(A \cap C) \times (B \cap D)$.

(س) $A \times (B-C)=(A \times B)-(A \times C)$.

(ش) $(A-B) \times (C-D)=(A \times C-B \times C)-A \times D$.

(ص) $(A\times B)-(C\times D)=(A-C)\times(B-D)$.

۴. عکس وعکس نقیض گزاره‌های ذیل را بنویسید و تعیین کنید که درهر حالت (احیاناً)، کدامیك ازسه گزاره راست است:

(الف) اگر $x<0$ آنگاه $x^2-x>0$.

(ب) اگر $x>0$ آنگاه $x^2-x>0$.

۴. فرض کنید A و B مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی باشند. مطلوب است تعیین نقیض هریك ازگزاره‌های ذیل:

(الف) به‌ازای هر $a\in A$، $a^2\in B$.

(ب) به‌ازای دست‌کم یك $a\in A$، $a^2\in B$.

(پ) به‌ازای هر $a\in A$، $a^2\notin B$.

(ت) به‌ازای دست‌کم یك $a\notin A$، $a^2\in B$.

۵. فرض کنید $\mathcal{A}$ گردایه‌ای ناتهی ازمجموعه‌ها باشد. راستی هریك از گزاره‌های‌ذیل‌و عکس‌آنها را تعیین‌کنید:

(الف) اگر $x\in\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A$ آنگاه به‌ازای دست‌کم یك $A\in\mathcal{A}$، $x\in A$.

(ب) اگر $x\in\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A$ آنگاه به‌ازای هر $A\in\mathcal{A}$، $x\in A$.

(پ) اگر $x\in\bigcap_{A\in\mathcal{A}}A$ آنگاه به‌ازای دست‌کم یك $A\in\mathcal{A}$، $x\in A$.

(ت) اگر $x\in\bigcap_{A\in\mathcal{A}}A$ آنگاه به‌ازای هر $A\in\mathcal{A}$، $x\in A$.

۶. عکس نقیض هریك ازگزاره‌های تمرین ۵ را بنویسید.

۷. هریك از مجموعه‌های ذیل را با بـه کار بردن نمادهای $\cup$ ، $\cap$ ، و $-$ برحسب مجموعه‌های مفروض A و B و C بیان کنید:

$$D=\{x\mid (x\in C \text{ یا } x\in B) \text{ و } x\in A\},$$
$$E=\{x\mid x\in C \text{ یا } (x\in B \text{ و } x\in A)\},$$
$$F=\{x\mid (\text{اگر } x\in B \text{ آنگاه } x\in C) \text{ و } x\in A\}.$$

۸. اگر A مجموعه‌ای‌دوعضوی باشد، ثابت‌کنید $\mathcal{P}(A)$ چهارعضودارد. اگر A تنها یك عضو داشته باشد، $\mathcal{P}(A)$ چند عضو دارد؟ در مورد یك مجموعهٔ سه عضوی یا مجموعهٔ تهی چه می‌توان گفت؟ چرا $\mathcal{P}(A)$ را مجموعهٔ توانی A می گویند؟

۹. فرض‌کنید R نمایش مجموعهٔاعداد حقیقی باشد. درمورد هریك‌از زیرمجموعه‌های

$R\times R$ که در زیر آمده است، تعیین کنید که آیا مساوی حاصل‌ضرب دکارتی دو زیرمجموعهٔ R هست؟

(الف) $\{(x, y) \mid$ عددی است صحیح $x\}$.

(ب) $\{(x, y) \mid 0 < y \leqslant 1\}$.

(پ) $\{(x, y) \mid y > x\}$.

(ت) $\{(x, y) \mid$ عدد صحیح نیست، ولی y عددی است صحیح $x\}$.

(ث) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

۱-۲ توابع

یکی ازمفاهیمی که به‌کرات باآن مواجه شده‌اید مفهوم تابع است، وبنابراین، یادآوری نقش محوری آن در همهٔ ریاضیات ضرورتی ندارد. دراین بخش، تعریف ریاضی دقیقی برای تابع ارائه می‌دهیم وبعضی‌ازمفاهیم وابسته به‌آن را بررسی می‌کنیم.

معمولاً تابع را به‌عنوان قاعده‌ای درنظر می‌گیرند که به هرعضوی ازمجموعهٔ A، عضوی ازمجموعهٔ B را نظیرمی‌کند. درحسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال)، اغلب تابع را با فرمول ساده‌ای مانند $f(x) = 3x^2 + 2$ بیان می‌کنند، یاشاید با فرمولی پیچیده‌ترمانند

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k.$$

اغلب حتی اسمی ازمجموعه‌های A و B به میان نمی‌آورند، با این قراردادکه B را مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی و A را مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی‌ای که به‌ازای آنها قاعدهٔ مورد نظربا معنی باشد اختیارمی‌کنند.

اما، هرقدردرمباحث گوناگون ریاضی جلوتربرویم، لزوم دقت بیشتردرمفهوم تابع آشکارترمی‌شود. ریاضیدانان‌دربارهٔ توابع به همان‌گونه‌که ماتوصیف‌کردیم می‌اندیشند، ولی تعریفی که به‌کارمی‌برند دقیقتراست. نخست، تعریف ذیل را می‌آوریم:

تعریف. یك **قاعدهٔ تناظر**، زیرمجموعه‌ای مانند r ازحاصل‌ضرب دکارتی $C\times D$ است، با این خاصیت‌که هرعضو C حداکثر یك بار به عنوان مختص اول یك زوج مرتب متعلق به r ظاهرمی‌شود.

بنابراین، زیرمجموعهٔ r از $C\times D$ وقتی یك قاعدهٔ تناظراست که

$$[(c, d') \in r \text{ و } (c, d) \in r] \implies [d = d'].$$

ما r را به عنوان طریقه‌ای درنظرمی‌گیریم که به هرعضو c از C عضوی مانند d از D راکه $(c, d) \in r$ نظیرمی‌کند.

به‌ازای قاعدهٔ تناظر مفروض r، بنابرتعریف، زیر مجموعهٔ C را که از تمام

مختصهای اول اعضای r تشکیل شده است **حوزهٔ تعریف** r ، و مجموعهٔ همهٔ مختصهای دوم اعضای r را **مجموعهٔ تصویر** آن می‌گوییم. به بیان صوری،

$$\text{حوزهٔ تعریف } r = \{c \mid (c,\ d) \in r \text{ هست که } d \text{ مانند } D \text{ عضوی از}\}.$$

$$\text{تصویر } r = \{d \mid (c,\ d) \in r \text{ هست که } c \text{ مانند } C \text{ عضوی از}\}.$$

توجه کنید که با داشتن قاعدهٔ تناظر r ، حوزهٔ تعریف وتصویر آن کاملاً مشخص می‌شوند.

اکنون می‌توان تابع را تعریف کرد.

تعریف. یك **تابع** f قاعدهٔ تناظری مانند r است ، توأم با مجموعه‌ای مانند B حاوی مجموعهٔ تصویر r. حوزهٔ تعریف قاعدهٔ r را **حوزهٔ تعریف** تابع f ، مجموعهٔ تصویر r را **مجموعهٔ تصویر** f ، ومجموعهٔ B را **حوزهٔ مقادیر** f می‌نامیم.[۱]

اگر f تابعی با حوزهٔ تعریف A وحوزهٔ مقادیر B باشد ، این مطلب را با علامت

$$f : A \longrightarrow B$$

بیان می کنیم و چنین می‌خوانیم «f تابعی از A به B» یا «f نگاشتی است از A بتوی B» یا مختصراً «f مجموعهٔ A را بتوی B می‌نگارد». گاه تابع را به عنوان یك تبدیل هندسی تصور می‌کنند که نقاط A را به نقاط B تغییرمکان فیزیکی می‌دهد.

اگر $f : A \rightarrow B$ و a عضوی از A باشد ، تنها عضو B را که این قاعده به a نظیر می‌کند به $f(a)$ نشان می‌دهیم ؛ وآن را **مقدار** تابع f در a ، یا **تصویر** a تحت تابع f می گوییم. به بیان صوری ، اگر r قاعدهٔ تناظرتابع f باشدآنگاه $f(a)$ همان عضویکتای B است که $(a,\ f(a)) \in r$.

با به‌کاربردن این علامت ، می‌توان به همان روشی که اغلب درتعریف توابع‌به‌کار می‌رود بـازگشت ، بدون آنکه ازدقت مطلب کاسته شود. مثلاً ، اگر R مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد ، می‌توان چنین نوشت :

«f تابعی است با قاعدهٔ $\{(x,\ x^{۲}+۱) \mid x \in R\}$ وبا حوزهٔ مقادیر R.»

یا اینکه

«فرض کنیم $f : R \rightarrow R$ تابعی است با ضابطهٔ $f(x) = x^{۲}+۱$.»

هـردوعبارت یك تـابع را مشخص می‌کنند. ولی جملهٔ « فرض کنیم f تـابع $f(x) = x^{۲}+۱$ باشد» برای مشخص کردن یك‌تابع‌کافی نیست ، زیرا جملهٔ اخیر نه‌حوزهٔ تعریف تابع f را مشخص می کند ونه حوزهٔ مقادیر آن‌را.

---

۱. درآنالیز، تمایل به این است که واژهٔ «حوزهٔ مقادیر» رابرای اشاره به‌آنچه که ما «مجموعهٔ تصویر» f نامیده‌ایم به‌کارببرند. درآنجا ازنامگذاری مجموعهٔ B اجتناب می‌شود.

تعریف. اگر $f: A \to B$ و $A_\circ$ زیرمجموعه‌ای از A باشد، بنابر تعریف، **تحدید** f به $A_\circ$ عبارت است از تابعی از $A_\circ$ بتوی B با قاعدهٔ

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A_\circ\},$$

این تابع را به $f \mid A_\circ$ نمایش می‌دهیم وچنین می‌خوانیم «تحدید f به $A_\circ$».

مثال ۱. فرض‌کنیم R مجموعهٔ اعداد حقیقی و R_+ مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی باشد. توابع ذیل را درنظربگیرید،

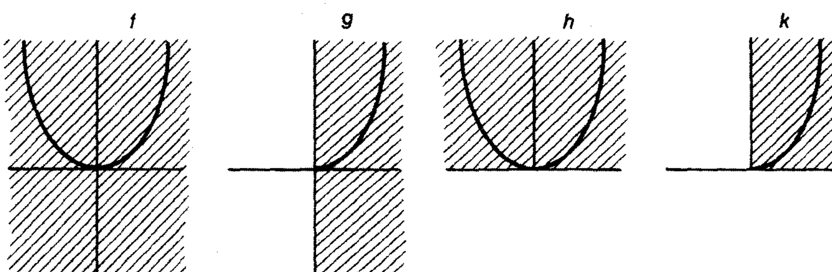
$R \longrightarrow R$ ، f که با $f(x)=x^2$ تعریف می‌شود،

$R \longrightarrow R_+$ ، g که با $g(x)=x^2$ تعریف می‌شود،

$R_+ \longrightarrow R$ ، h که با $h(x)=x^2$ تعریف می‌شود،

$R_+ \longrightarrow R_+$ ، k که با $k(x)=x^2$ تعریف می‌شود.

توابع f و g از یکدیگر متمایزند، زیرا قواعد تناظرآنهـا زیرمجموعه‌های متفاوتی از $R \times R$ هستند. تابع g تحدید تابع f به R_+ است. تابع h نیزمتمایزاز f است، زیرا اگرچه قواعد تناظر توابع h و f هردویك مجموعه‌اند، ولی حوزهٔ مقادیری که برای h مشخص شده است با حوزهٔ مقادیر تعیین شده برای f تفاوت دارد. تابع k متمایزاز هرسه تابع دیگراست. این توابع درشکل ۴ نمایانده شده‌اند.



شکل ۴

فرض‌کنیم $f: A \to B$. اگـر $A_\circ$ زیرمجموعه‌ای از A باشد، مجموعهٔ همهٔ تصاویر نقاط $A_\circ$ را تحت f با $f(A_\circ)$ نمـایش می‌دهیم و آن را **تصویر** $A_\circ$ تحت f می‌نامیم. به بیان صوری:

$$f(A_\circ)=\{b \mid b=f(a) \text{ هست‌که } A_\circ \text{ یی در } a\}.$$

ازطرف‌دیگر، اگر $B_\circ$ زیرمجموعه‌ای‌از B باشد، مجموعهٔ همهٔ اعضای A راکه‌تصویر

آنها تحت f در B قرار دارد ، به $f^{-1}(B_0)$ نشان می‌دهیم و آن را **تصویر عکس** B_0 تحت f می‌نامیم. به بیان صوری ،

$$f^{-1}(B_0)=\{a \mid f(a)\in B_0\}.$$

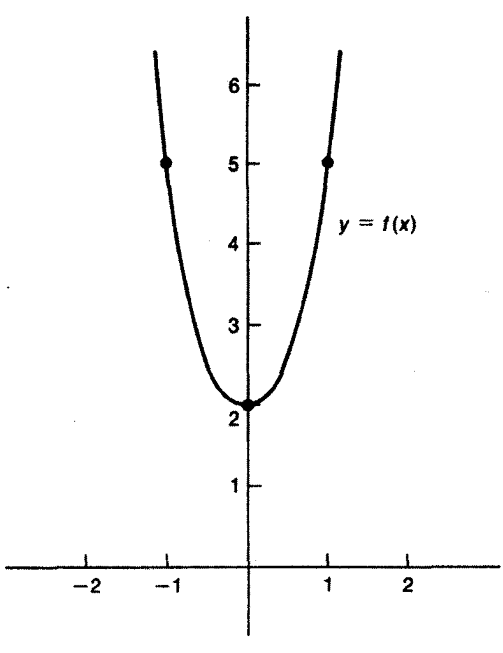
البته ، ممکن است تصویر هیچ عضو A در B_0 قرار نگیرد ؛ دراین حالت $f^{-1}(B_0)$ *تهی* است.

کاربرد درست علامات f و f^{-1} مستلزم دقت و رعایت بعضی نکات است. مثلاً ، عمل f^{-1} برزیرمجموعه‌های B بسیار دلپذیراست ؛ یعنی جزئیت ، اجتماع ، مقطع ، و تفاضل مجموعه‌ها را حفظ می کند ، اما عمل f برزیر مجموعه‌های A ، همهٔ این عملهای مجموعه‌ای را حفظ نمی کند. تمرینات ۲و۳ ملاحظه شوند.

به‌عنوان مثالی دیگر، چنانکه مثال ذیل نشان می‌دهد، روابط $A_0 = f^{-1}(f(A_0))$ و $f(f^{-1}(B_0)) = B_0$ درحالت کلی برقرارنیستند: قواعد درست ، به قرارذیل‌اندکه بررسی درستی آنها را به خواننده وامی گذاریم : اگر $f: A \to B$ آنگاه

به‌ازای $A_0 \subset A$ ، $f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0$ ،

به‌ازای $B_0 \subset B$ ، $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$.



شکل ۵

مثال ۲. تابع f ، $R \to R$ را به طوری‌که $f(x)=۳x^{۲}+۲$ درنظر می‌گیریم (شکل ۵). فرض‌کنیم $[a, b]$ نمایش بازهٔ بستهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ باشد. دراین صورت ،

$$f^{-۱}(f([۰, ۱]))=f^{-۱}([۲, ۵])=[-۱, ۱],$$

$$f(f^{-۱}([۰, ۵]))=f([-۱, ۱])=[۲, ۵].$$

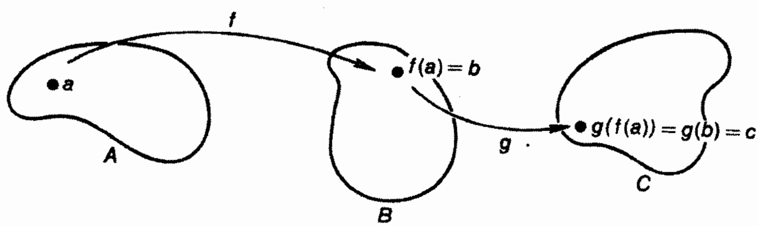
تحدید یك تابع‌وتغییردادن حوزهٔ مقادیر آن ، دوطریقه برای ساختن توابع جدیداز توابع مفروض است. طریقهٔ دیگر ، تشکیل تابع مرکب دوتابع است.

تعریف. به‌ازای دو تابع مفروض $f : A \to B$ و $g : B \to C$ ، **تابع مرکب** f و g ، که به $g \circ f$ نشان داده می‌شود ، بنابرتعریف ، تابع $g \circ f : A \to C$ است که با ضابطهٔ $(g \circ f)(a)=g(f(a))$ تعریف می‌شود.

به بیان صوری ، $g \circ f$ تابعی است از A به C با قاعدهٔ تناظر

$$\{(a, c) \mid \text{یی در } B \text{ هست که } f(a)=b \text{ و } g(b)=c \; b\}.$$

اغلب تابع مرکب $g \circ f$ را ، چنانکه در شکل ۶ نمایانده شده است ، بـه صورت یك تغییرمکان فیزیکی نقطهٔ a به $f(a)$ وسپس تغییرمکان $f(a)$ به $g(f(a))$ مجسم می‌کنیم.



شکل ۶

توجه داشته باشید که $g \circ f$ تنها وقتی تعریف می‌شود کـه حوزهٔ مقادیر f برابر حوزهٔ تعریف g باشد.

مثال ۳. تـابع مرکب توابع f ، $R \to R$ ، بـه طوری‌کـه $f(x)=۳x^{۲}+۲$ ، و g : $R \to R$. به طوری‌که $g(x)=۵x$ عبارت است‌ازتابع $g \circ f$ ، $R \to R$ به‌طوری‌که

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(۳x^{۲}+۲)=۵(۳x^{۲}+۲).$$

دراین مورد ، $f \circ g$ را نیز می‌توان تشکیل داد ؛ تابع $f \circ g$ ، $R \to R$ ، که با $g \circ f$ بکلی متفاوت است ، چنین تعریف می‌شود ،

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(۵x)=۳(۵x)^{۲}+۲.$$

تعریف. تابع $f : A \to B$ را **یك‌به‌یك** گوییم درصورتی که تصاویرهردونقطهٔ متمایز A تحت f متمایز باشند، و آن را **پوشا** گوییم (یا گوییم f مجموعهٔ A را **بروی** B می‌نگارد) هرگاه هرعضو B تصویرعضوی از A تحت f باشد. اگر f هم یك‌به‌یك و هم‌پوشا باشد، آن را **دوسویی** (یا **تناظریك‌به‌یك**) می‌نامیم.

به بیان صوریتر، درصورتی f یك‌به‌یك است که

$$[f(a)=f(a')] \implies [a=a'],$$

ودرصورتی پوشاست که

$$[b \in B] \implies [b=f(a) \text{ ، } a \in A \text{ به‌ازای دست کم یك}].$$

یك‌به‌یك بودن f فقط به قاعدهٔ تناظر f بستگی‌دارد، وحال‌آنکه پوشا بودن‌آن به‌حوزهٔ مقادیر f نیزمربوط است. بررسی این مطالب را به خواننده واگذارمی‌کنیم که تابع مرکب دوتابع یك‌به‌یك تابعی است یك‌به‌یك؛ و تابع مرکب دوتابع پوشا تابعی است پوشا؛ درنتیجه، تابع مرکب دوتابع دوسویی تابعی است دوسویی.

اگر f دوسویی باشد، تابعی‌از B به A موسوم به **تابع معکوس** f موجوداست، وآن را با f^{-1} نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر b از B، $f^{-1}(b)$ راآن عضویکتای a از A اختیارمی‌کنیم که $f(a)=b$. به‌ازای عضومفروض b از B، به موجب پوشا بودن f، چنین aیی در A موجود است؛ یك‌به‌یك بودن f مستلزم این است که این‌عضو a یکتاست. به‌آسانی می‌توان دریافت که اگر f تابعی دوسویی باشد آنگاه f^{-1} نیز دوسویی است.

مثال ۴. به توابع f، g، h، و k مثال۱ (شکل۴) بازمی‌گردیم. تابع $f: R \to R$ با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ نه یك‌به‌یك است ونه پوشا. تحدید f به‌اعداد حقیقی نامنفی، یعنی g، یك‌به‌یك است ولی پوشا نیست. اما تابع h، $R \to \overline{R}_+$ که با تغییر دادن حوزهٔ مقادیر f به دست‌آمده است پوشاست ولی یك‌به‌یك نیست. تابع k، $\overline{R}_+ \to \overline{R}_+$ حاصل تحدید حوزهٔ تعریف و تغییردادن حوزهٔ مقادیر f، هم یك‌به‌یك است و هم پوشا، درنتیجه معکوس دارد. معکوس‌آن تابعی است‌که معمولاً تابع جذر نامیده می‌شود.

لم ذیل، که اثبات‌آن را به‌عنوان تمرین به خواننده محول می‌کنیم، ضابطهٔ‌مفیدی برای نشان دادن دوسویی بودن تابع مفروض f است:

۰۱۰۲ لم فرض کنیم $f: A \to B$. اگر توابع $g: B \to A$ و $h: B \to A$ موجود باشند به قسمتی که به‌ازای هر a از A، $g(f(a))=a$ و به‌ازای هر b از B، $f(h(b))=b$ آنگاه f دوسویی است و $g=h=f^{-1}$.

توجه کنید که اگر $f: A \to B$ دوسویی و $B_0 \subset B$، علامت $f^{-1}(B_0)$ دو

معنی‌دارد: یکی تصویرعکس B_0 تحت f ودیگری تصویر B_0 تحت تابع $f^{-1} : B \to A$؛ حاصل هردو درست یك زیرمجموعهٔ A است. بنابراین، ابهامی پیش نخواهد آمد.

تمرینها

۱. فرض کنید $f : A \to B$ و $A_0 \subset A$ و $B_0 \subset B$.

(الف) ثابت کنید که $f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0$ وتساوی وقتی برقرار است که f یك‌به‌یك باشد.

(ب) ثابت کنید که $f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0$ و تساوی وقتی برقراراست که f پوشا باشد.

۲. فرض کنید $f : A \to B$، و به‌ازای $i = 0$ و $i = 1$، $A_i \subset A$ و $B_i \subset B$. ثابت کنید f^{-1} جزئیت، اجتماع، مقطع، وتفاضل مجموعه‌ها را حفظ می‌کند؛ یعنی،

(الف) اگر $B_0 \subset B_1$ آنگاه $f^{-1}(B_0) \subset f^{-1}(B_1)$.

(ب) $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$.

(پ) $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$.

(ت) $f^{-1}(B_0 - B_1) = f^{-1}(B_0) - f^{-1}(B_1)$.

ثابت کنید f فقط جزئیت واجتماع را حفظ می‌کند؛ یعنی،

(ث) اگر $A_0 \subset A_1$ آنگاه $f(A_0) \subset f(A_1)$.

(ج) $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$.

(چ) $f(A_0 \cap A_1) \subset f(A_0) \cap f(A_1)$؛ مثالی بیاورید که‌درآن تساوی برقرار نباشد.

(ح) $f(A_0 - A_1) \supset f(A_0) - f(A_1)$؛ مثالی بیاورید که‌درآن تساوی برقرار نباشد.

۳. ثابت کنید که قسمتهای (ب)، (پ)، (ج)، و (چ) تمرین ۲ به‌ازای اجتماعها و مقطعهای دلخواه نیز برقراراست.

۴. فرض کنید $f : A \to B$ و $g : B \to C$.

(الف) اگر $C_0 \subset C$ آنگاه $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$.

(ب) اگر f و g یك‌به‌یك باشند آنگاه $g \circ f$ نیزیك به یك است.

(پ) اگر $g \circ f$ یک‌به‌یک باشد، چه حکمی در مورد یک‌به‌یک بودن f و g می‌توان کرد؟

(ت) اگر f و g پوشا باشد، $g \circ f$ نیز پوشاست.

(ث) اگر $f \circ g$ پوشا باشد، چه حکمی در مورد پوشا بودن f و g می‌توان کرد؟

(ج) جوابهای قسمتهای (ب) تا (ث) را به صورت قضیه‌ای خلاصه کنید.

۵. در حالت کلی، **تابع همانی** مجموعهٔ C را با i_C نمایش می‌دهیم. یعنی، $i_C : C \to C$ تابعی است که به‌ازای هر x از C باقاعدهٔ تناظر $i_C(x)=x$ تعریف می‌شود. تابع $g : B \to A$ را **معکوس چپ** تابع مفروض $f : A \to B$ گوییم، هرگاه $g \circ f = i_A$؛ وتابع $h : B \to A$ را **معکوس راست** f خوانیم، درصورتی که $f \circ h = i_B$.

(الف) ثابت کنید اگر f معکوس چپ داشته باشد، یک‌به‌یک است؛ واگرمعکوس راست داشته باشد، پوشاست.

(ب) مثالی ازتابعی ارائه دهید که معکوس چپ داشته باشد ولی معکوس راست نداشته باشد.

(پ) مثالی ازتابعی ارائه دهید که معکوس راست داشته باشد ولی معکوس چپ نداشته باشد.

(ت) آیا ممکن است که یک تابع بیش‌از یک معکوس چپ داشته باشد؟ بیش‌از یک معکوس راست چطور؟

(ث) ثابت کنیداگر f دارای معکوس چپ g ومعکوس راست h باشدآنگاه f دوسویی است و $g=h=f^{-1}$.

۶. فرض کنید $f : R \to R$ تابعی با ضابطهٔ $f(x)=x^3-x$ باشد. با تحدید مناسب حوزهٔ تعریف و حوزهٔ مقادیر f، ازروی f یک تابع دوسویی مانند g به دست آورید. نمودار g و g^{-1} را رسم کنید. (برای انتخاب g امکانات متعددی وجود دارد.)

۱-۳ رابطه‌ها

مفهومی که ازبعضی جهات خیلی کلیترازمفهوم تابع است، مفهوم رابطه (یا نسبت) است. دراین بخش، معنی موردنظر ریاضیدانان را ازرابطه تعریف می‌کنیم، و دونوع رابطه را که در ریاضیات فراوان‌پیش می‌آیند، یعنی رابطهٔ هم‌ارزی و رابطهٔ ترتیبی ساده را بررسی می‌کنیم.

تعریف. یك رابطه (یا نسبت) در مجموعهٔ A ، زیر مجموعهٔ C از حاصل‌ضرب دکارتی $A\times A$ است.

اگر C یك رابطه در A باشد، علامت xCy را به همان معنی $(x, y)\in C$ به‌کارمی‌بریم وچنین می‌خوانیم «x رابطهٔ C به y دارد».
قاعدهٔ تناظر r برای تابع $f: A \to A$ نیززیرمجموعه‌ای از $A\times A$ است.ولی، زیرمجموعه‌ای ازنوعی بسیارخاص: یعنی زیر مجموعه‌ای که درآن هرعضو A دقیقاً یك بار به عنوان مختص اول یك عضو r ظاهرمی‌شود؛ درحالی‌که هر زیرمجموعهٔ دلخواه $A\times A$ رابطه‌ای در A است.

مثال ۱. فرض کنیم P مجموعهٔ همهٔ مردم جهان باشد، و $D\subset P\times P$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$D=\{(x, y)\,|\, x \text{ ازاعقاب } y \text{ است}\}$$

دراین صورت، D رابطه‌ای در P است. جملات «x نسبت D به y دارد» و«x ازاعقاب y است» هردویك معنی دارند وآن این است‌که $(x, y)\in D$. در ذیل، دو رابطهٔ دیگر در P ارائه می‌شوند:

$$B=\{(x, y)\,|\, x \text{ نیایی داردکه ازنیاکان } y \text{ است}\},$$
$$S=\{(x, y)\,|\, \text{والدین } x \text{ والدین } y \text{ نیزهستند}\}.$$

می‌توان رابطهٔ B را «رابطهٔ همخونی» و رابطهٔ S را «رابطهٔ خواهری و برادری» نامید. این سه رابطه خواص کاملاً متفاوتی دارند. مثلاً، رابطهٔ همخونی B متقارن است (اگر x همخون y باشدآنگاه y نیزهمخون x است)، درصورتی‌که‌رابطهٔ D چنین نیست. بزودی به این سه رابطه بازمی‌گردیم.

رابطه‌های هم‌ارزی و افرازها

رابطهٔ C درمجموعهٔ A را **رابطهٔ هم‌ارزی** خوانیم درصورتی‌که درشرایط سه گانهٔ ذیل صدق کند:

(۱) (انعکاسی) به‌ازای هر x در A، xCx.
(۲) (تقارن) اگر xCy آنگاه yCx.
(۳) (تعدی) اگر xCy و yCz آنگاه xCz.

مثال ۲. درمیان رابطه‌هایی‌که درمثال ۱ تعریف شدند، رابطهٔ D نه منعکس است و نه متقارن، درحالی‌که رابطهٔ B متعدی نیست (بچه‌های من با من وهمسرم رابطهٔ همخونی دارند، ولی من و همسرم این رابطه را نداریم!) به‌آسانی می‌توانیدببینیدکه S رابطه‌ای هم‌ارزی است.

اگرچه رابطه یك مجموعه است، ولی دلیلی نمی‌بینیم که آن را با حروف بزرگ، یا اصلاً با نوع خاصی از حروف، نشان دهیم. نمادهای دیگر هم از عهدهٔ این کار برمی‌آیند. از آن جمله نماد «$\sim$» است که اغلب برای نشان دادن رابطه‌ای هم‌ارزی به‌کار می‌رود. خواص رابطهٔ هم‌ارزی به‌وسیلهٔ این نماد به صورت ذیل بیان می‌شوند:

(۱) به‌ازای هر x در A، $x \sim x$.

(۲) اگر $x \sim y$ آنگاه $y \sim x$.

(۳) اگر $x \sim y$ و $y \sim z$ آنگاه $x \sim z$.

نمادهای بسیار دیگری برای نمایاندن رابطه‌های هم‌ارزی خاصی ساخته شده‌اند که با بعضی از آنها در این کتاب آشنا خواهید شد.

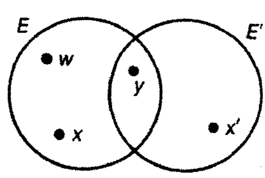
فرض کنیم $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی در مجموعهٔ A و x عضوی از A باشد. زیرمجموعهٔ E از A را که **ردهٔ هم‌ارزی** x خوانده می‌شود، چنین تعریف می‌کنیم:

$$E=\{y \mid y \sim x\}.$$

توجه کنید که ردهٔ هم‌ارزی E شامل x است، زیرا $x \sim x$. رده‌های هم‌ارزی دارای خاصیت ذیل‌اند:

۳.۱۰ لم دو ردهٔ هم‌ارزی E و E' یا مساوی‌اند و یا جدا از هم.

برهان. فرض کنیم E ردهٔ هم‌ارزی x، و E' ردهٔ هم‌ارزی x' باشد. فرض کنیم $E \cap E'$ تهی نباشد؛ y را عضوی از $E \cap E'$ اختیار می‌کنیم (شکل ۷). اکنون ثابت می‌کنیم $E=E'$.



شکل ۷

بنابر تعریف، داریم $y \sim x$ و $y \sim x'$. بنابر خاصیت تقارن، نتیجه می‌شود که $x \sim y$ و $y \sim x'$؛ و بنابر خاصیت تعدی، $x \sim x'$. حال اگر w عضو دلخواهی از E باشد، بنابر تعریف، $w \sim x$؛ با توجه به خاصیت تعدی خواهیم داشت $w \sim x'$. نتیجه می‌گیریم که $E \subset E'$.

به همین قیاس می‌توان نتیجه گرفت که $E' \subset E$، و از آنجا، $E=E'$. $\square$

اگر رابطه‌ای هم‌ارزی در مجموعهٔ A داده شده باشد، گردایهٔ همهٔ رده‌های هم‌ارزی

برحسب این رابطه را به $\mathscr{E}$ نمایش می‌دهیم. بنابرلم فوق، اعضای متمایز $\mathscr{E}$ جدا ازهم‌اند. بعلاوه، اجتماع اعضای $\mathscr{E}$ مساوی A است، زیرا هرعضو A بـه یك ردهٔ هم‌ارزی تعلق دارد. گردایهٔ $\mathscr{E}$ مثالی خاص ازمفهومی است که افراز A نامیده می‌شود:

تعریف. یك **افراز** مجموعهٔ A گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های جدا از هم A است به‌طوری که اجتماع آنها مساوی A باشد.

مطالعهٔ رابطه‌های هم‌ارزی در مجموعهٔ A و مطالعهٔ افرازهای مجموعهٔ A در واقع یك چیزهستند: به‌ازای هرافراز $\mathscr{D}$ از A، دقیقاً یك رابطهٔ هم‌ارزی در A موجود است که $\mathscr{D}$ گردایهٔ رده‌های هم‌ارزی آن است.

برهان آن دشوار نیست. برای نشان دادن اینکه $\mathscr{D}$ از رابطه‌ای هم‌ارزی به دست می‌آید، رابطهٔ C را در A چنین تعریف می‌کنیم: xCy اگر x و y به یك عضو $\mathscr{D}$ تعلق داشته باشند. تقارن C بدیهی است؛ انعکاسی بودن C نتیجهٔ این است کـه اجتماع اعضای $\mathscr{D}$ برابرمجموعهٔ A است؛ تعدی C نتیجهٔ این است کـه اعضای متمایز $\mathscr{D}$ جدا ازهم‌هستند. به آسانی ملاحظه می‌شود که گردایهٔ رده‌های هم‌ارزی حاصل از C دقیقاً همان گردایهٔ $\mathscr{D}$ است.

بـرای نشان دادن یکتایی این رابطهٔ هم‌ارزی، فـرض کنیم C_1 و C_2 دو رابطهٔ هم‌ارزی باشند که یك گردایهٔ $\mathscr{D}$ از رده‌های هم‌ارزی را به دست می‌دهند. به‌ازای عضو مفروض $x \in A$، ثابت می‌کنیم: yC_1x اگروفقط اگر yC_2x، که ازآن نتیجه می‌شود که $C_1 = C_2$. فرض کنیم E_1 ردهٔ هم‌ارزی x برحسب رابطهٔ C_1، و E_2 ردهٔ هم‌ارزی x برحسب رابطهٔ C_2 باشد. دراین‌صورت، E_1 عضوی است‌از $\mathscr{D}$، بنابراین، مساوی عضویکتایی ازآن مانند D است که شامل x است. به دلیلی مشابه، E_2 باید مساوی D باشد. از طرف دیگر، بنابر تعریف، E_1 مجموعه‌ای است متشکل از همهٔ yهایی کـه yC_1x؛ و E_2 مجموعه‌ای‌است متشکل‌ازهمهٔ yهایی که yC_2x. چون $E_1 = D = E_2$، حکم برقرار است.

مثال ۳. دونقطهٔ واقع درصفحه را هم‌ارز می‌گیریم اگرفاصلهٔ آنها تا مبدأ یکی باشد. بوضوح، خواص انعکاسی، تقارن، و تعدی برقرارند. دراین مورد، $\mathscr{E}$، گردایهٔ رده‌های هم‌ارزی عبارت است ازهمهٔ دایره‌هایی که مرکزآنها مبدأ مختصات است، به‌علاوهٔ، مجموعه‌ای که فقط مبدأ را دربردارد.

مثال ۴. دونقطهٔ واقع درصفحه را وقتی هم‌ارز خوانیم اگرعرضهای آنها مساوی باشند. دراین مورد، گردایهٔ رده‌های هم‌ارزی مجموعهٔ همهٔ خطوط مستقیم موازی محور xهاست.

مثال ۵. فرض کنیم $\mathscr{L}$ مجموعهٔ همهٔ خطوط مستقیم صفحه و موازی با خط $y = -x$ باشد. دراین صورت، $\mathscr{L}$ یك افراز صفحه است، زیرا هرنقطهٔ صفحه برچنین خطی قرار دارد وهردوخط متمایز ازاین نوع ازهم جدا هستند. افراز $\mathscr{L}$ از رابطـهٔ هم‌ارزی ذیل

به‌دست می‌آید ، (x_1, y_1) و (x_2, y_2) فقط وقتی هم‌ارزند که $x_1+y_1=x_2+y_2$.

مثال ۶. فرض‌کنیم $\mathcal{L}'$ مجموعهٔ همهٔ خطوط مستقیم صفحه باشد. دراین صورت ، $\mathcal{L}'$ یك‌افراز صفحه نیست ، زیرا لزومی ندارد اعضای متمایز $\mathcal{L}'$ جدا از هم باشند ؛ دوخط ممکن است یکدیگررا قطع‌کنند بی‌آنکه مساوی باشند.

رابطه‌های ترتیبی

رابطهٔ C در A را وقتی یك **رابطهٔ ترتیبی** (یا یك **ترتیب ساده** ، یا یك **ترتیب خطی**) گوییم که واجد خواص ذیل باشد :

(۱) (مقایسه‌پذیری) به ازای هر x و y در A به طوری‌که $x \neq y$ ، یا xCy یا yCx.

(۲) (نامنعکس بودن) هیچ عضو x از A در رابطهٔ xCx صدق نمی‌کند.

(۳) (تعدی) اگر xCy و yCz آنگاه xCz.

توجه‌کنید که خاصیت (۱) به تنهایی مانع این نیست که به‌ازای دو عضو x و y از A ، هردو رابطهٔ xCy و yCx برقرارباشند (چون «یا» بدین معنی است که «یکی یا دیگری یا هردو»). ولی خواص (۲) و (۳) باهم این امکان را از میان برمی‌دارند ؛ زیرا اگر xCy و yCx هردو برقرارباشند ، بنابرتعدی داریم xCx ، واین با نامنعکس بودن رابطهٔ C تناقض دارد.

مثال ۷. مجموعهٔ همهٔ ازواج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی را که درآن $x < y$ درنظر می‌گیریم. این مجموعه رابطه‌ای ترتیبی است‌که «رابطهٔ ترتیب معمولی» در خط حقیقی خوانده می‌شوند. با رابطهٔ ترتیبی ذیل درخط حقیقی کمترآشنایی دارید؛ گوییم xCy هرگاه $x^2 < y^2$ ، یا اگر $x^2=y^2$ آنگاه $x < y$. می‌توانید ترتیبی بودن رابطهٔ C را خود بررسی‌کنید.

مثال ۸. مجدداً روابط بین انسانها را ، که در مثال ۱ ذکرشد ، درنظرمی‌گیریم. رابطهٔ همخونی B در هیچیك از خواص رابطهٔ ترتیبی صدق نمی‌کند ، و رابطهٔ S تنها در شرط (۳) صدق می‌کند. رفتار رابطهٔ D تا اندازه‌ای بهتر است ، زیرا D واجد خواص (۲) و (۳) است ، ولی فاقد خاصیت مقایسه‌پذیری است . چون در ریاضیات به اندازهٔ کافی با رابطه‌هایی که درخواص (۲) و (۳) صدق می‌کنند روبرومی‌شویم، ارزش‌آن را دارد که اسم خاصی برآنها بگذاریم. رابطه‌هایی ازاین قبیل‌را، که بعداً‌آنها را بررسی خواهیم کرد (بخش ۱ــ۱۱ ملاحظه شود) ، رابطه‌های ترتیبی جزئی اکید می‌نامند.

همان‌طور که نماد $\sim$ نماد عمومی برای‌رابطهٔ هم‌ارزی است ، نماد «کوچکتری»، یعنی $<$ ، نیز عموماً برای نمایش رابطه‌ای ترتیبی به‌کارمی‌رود. بااین علامتگذاری ،

خواص رابطهٔ ترتیبی چنین بیان می‌شوند:

(۱) اگر $x \neq y$ آنگاه یا $x < y$ یا $y < x$.

(۲) اگر $x < y$ آنگاه $x \neq y$.

(۳) اگر $x < y$ و $y < z$ آنگاه $x < z$.

ما علامت $x \leqslant y$ را به معنی «$x < y$ ویا $x = y$» و علامت $y > x$ را به معنی «$x < y$» به‌کارمی‌بریم، وبه جای «$x < y$ و $y < z$» می‌نویسیم $x < y < z$.

تعریف. اگر $>$ رابطه‌ای ترتیبی درمجموعهٔ X باشد، مجموعهٔ

$$\{x \mid a < x < b\}$$

را با علامت (a, b) نمایش می‌دهیم وآن را یك **بازهٔ باز** در X می‌نامیم. اگر این مجموعه تهی باشد، a را **سابق بلافصل** b و b را **تالی بلافصل** a می‌نامیم.

تعریف. فرض‌کنیم $>_A$ و $>_B$، بترتیب، رابطه‌هایی ترتیبی در مجموعه‌های A و B باشند. دومجموعهٔ A و B را وقتی دارای یك **نوع ترتیب** گوییم‌که تناظری دوسویی بین‌آنها برقرارباشد به‌طوری که ترتیب‌را حفظ‌کند؛ یعنی تابعی دوسویی مانند $f: A \to B$ وجود داشته باشدکه

$$a_1 <_A a_2 \implies f(a_1) <_B f(a_2).$$

مثال ۹. بازهٔ $(-1, 1)$ از اعداد حقیقی همان نوع ترتیب را داراست‌که خود R (مجموعهٔ اعداد حقیقی)، زیرا می‌توانید بررسی‌کنیدکه $f: (-1, 1) \to R$ باضابطهٔ

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

تناظری دوسویی وحافظ ترتیب‌است. این‌تناظر در شکل ۸ نمایش داده شده است.

مثال ۱۰. زیرمجموعه‌های $A = \{0\} \cup (1, 2)$ و

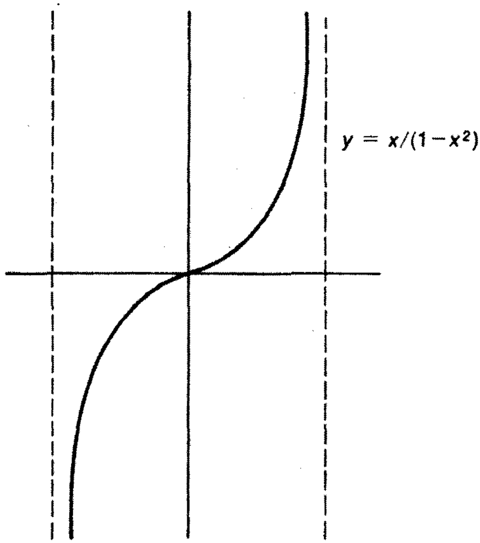
$$[0, 1) = \{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$$

از R دارای یك نوع ترتیب‌اند، زیرا تابع $f: A \to [0, 1)$ با ضابطهٔ

$$f(0) = 0,$$

$$f(x) = x - 1 \qquad x \in (1, 2) \text{ به‌ازای }$$

تناظری یك‌به‌یك و حافظ ترتیب است.



شکل ۸

طریقه‌ای جالب برای تعریف رابطه‌ای ترتیبی، که در بعضی‌از مثالهای‌آتی مفید خواهد بود، به قرارذیل است:

تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه، بترتیب، دارای رابطه‌های ترتیبی $<_A$ و $<_B$ باشند. رابطهٔ ترتیبی $<$ را در $A \times B$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$a_1 \times b_1 < a_2 \times b_2$$

درصورتی‌که $a_1 <_A a_2$ ، یا آنکه $a_1 = a_2$ و $b_1 <_B b_2$. این رابطه را **رابطهٔ ترتیبی قاموسی** می‌خوانند.

بررسی اینکه رابطهٔ اخیررابطه‌ای‌ترتیبی‌است مستلزم ملاحظهٔ چندین حالت‌است که آن را به خواننده واگذارمی‌کنیم.

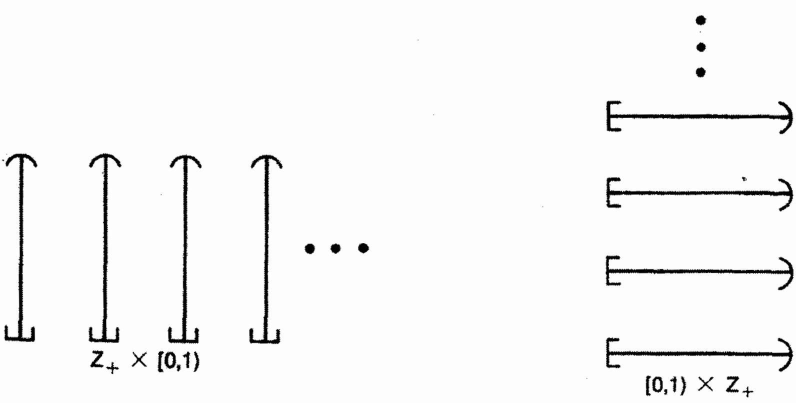
دلیل انتخاب این اصطلاح کاملاً آشکار است. ضابطهٔ تعریف $<$ مشابه ضابطه‌ای است‌که برای مرتب کردن واژه‌ها درلغت‌نامه‌ها به‌کار می‌رود. برای دو واژهٔ مفروض، نخست حروف اول آن دو را مقایسه می‌کنند و آنها را برطبق ترتیب قرار گرفتن حروف اول‌آنها درالفبای زبان مرتب می‌کنند. اگرحروف اول دو واژه یکی باشد، حروف‌دوم آنها را مقایسه می‌کنند وبرطبق‌آن واژه‌ها را مرتب می‌کنند، واین‌کار را ادامه می‌دهند.

مثال ۱۱. ترتیب قاموسی را در صفحهٔ $R \times R$ درنظر می‌گیریم. دراین ترتیب نقطهٔ p ازکلیهٔ نقاطی‌که روی خط قائم گذرنده بر p قرار دارند و دربالای این نقطه هستند کوچکتراست، همچنین p ازهمهٔ نقاط سمت راست این خط قائم کوچکتراست.

مثال ۰۱۲ مجموعهٔ $[0, 1)$ ازاعداد حقیقی و Z_+ ، یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، را با ترتیب معمولی درنظرمی‌گیریم. مجموعهٔ $Z_+ \times [0, 1)$ با ترتیب قاموسی ، ومجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی یك نوع ترتیب دارند ؛ زیرا تابع

$$f(n \times t) = n + t - 1$$

تناظر دوسویی حافظ ترتیب مورد نظر است. از طرف دیگر ، مجموعهٔ $[0, 1) \times Z_+$ با ترتیب قاموسی دارای نوع ترتیب کاملاً متفاوتی است. مثلاً ، هرعضو این مجموعهٔ مرتب دارای یك تالی بلافصل است. این دومجموعه درشکل ۹ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۹

یکی ازخواص مجموعهٔ اعداد حقیقی که ممکن است قبلاً با آن مواجه شده باشید «خاصیت کوچکترین کران بالا» است. این خاصیت را می‌توان برای هرمجموعهٔ مرتب دلخواهی تعریف کرد. برای این منظور ابتدا به چند تعریف مقدماتی نیازمندیم.

فرض کنیم A مجموعه‌ای مرتب برحسب رابطهٔ $<$ ، و A_0 زیرمجموعه‌ای از A باشد. عضو b را **بزرگترین عضو** A_0 گوییم درصورتی که $b \in A_0$ و به‌ازای هر $x \in A_0$ ، $x \leqslant b$. به طریقی مشابه ، a را در صورتی **کوچکترین عضو** A_0 گوییم که $a \in A_0$ و به‌ازای هر $x \in A_0$، $a \leqslant x$. به‌آسانی دیده می‌شود که هرمجموعه حداکثر یك بزرگترین عضو ، و حداکثر یك کوچکترین عضو دارد.

زیرمجموعهٔ A_0 از A را **از بالا کراندار** خوانیم درصورتی که عضوی مانند b در A موجود باشد به طوری که به‌ازای هر $x \in A_0$ ، $x \leqslant b$ ؛ دراین صورت ، b را یك **کران بالای** A_0 می‌نامیم. اگرمجموعهٔ همهٔ کرانهای بالای A_0 دارای کوچکترین عضو باشد ، آن عضورا **کوچکترین کران بالای** A_0 می‌نامیم وآن‌را باعلامت $\operatorname{lub} A_0$ نمایش می‌دهیم ؛ $\operatorname{lub} A_0$ ممکن است به A_0 تعلق داشته یا نداشته باشد ؛ اگر به A_0 تعلق داشته باشد ، دراین صورت بزرگترین عضو A_0 است.

به طریق مشابه، $A_{\circ}$ را **از پایین کراندار** گوییم هرگاه عضوی مانند a در A موجود باشد به طوری‌که به‌ازای هر $x \in A_{\circ}$، $a \leqslant x$؛ a را یك **کران پایین** $A_{\circ}$ می‌نامیم. اگرمجموعهٔ همهٔ کرانهای پایین $A_{\circ}$ دارای بزرگترین عضو باشد، آن عضورا **بزرگترین کران پایین** $A_{\circ}$ می‌نامند و با $\mathrm{glb}\, A_{\circ}$ نمایش می‌دهیم؛ $\mathrm{glb}\, A_{\circ}$ ممکن است به $A_{\circ}$ تعلق داشته یانداشته باشد. اگر به $A_{\circ}$ تعلق داشته باشد، دراین صورت کوچکترین عضو $A_{\circ}$ است.

اکنون می‌توانیم خاصیت کوچکترین کران بالا را تعریف کنیم:

تعریف. مجموعهٔ مرتب A را دارای **خاصیت کوچکترین کران بالا** گوییم هر گاه هرزیرمجموعهٔ ناتهی $A_{\circ}$ از A که از بالاکراندار باشد دارای یك کوچکترین کران بالا باشد.

به همین ترتیب، اگرهرزیرمجموعهٔ ناتهی $A_{\circ}$ از A کـه از پایین کراندار است دارای یك بزرگترین کران پایین باشد، گوییم A دارای **خاصیت بزرگترین کران پایین** است. اثبات این حکم را که A دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست اگر وفقط اگر دارای خاصیت بزرگترین کران پایین باشد، به عنوان تمرین به خواننده وا گذارمی‌کنیم.

مثال ۱۳. زیرمجموعهٔ $A=(-۱, ۱)$ ازاعداد حقیقی را با ترتیب معمولی درنظر می‌گیریم. با فرض اینکه اعداد حقیقی دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست، نتیجه می‌گیریم که این مجموعه نیز خاصیت کوچکترین کران بالا را دارد. زیرا به‌ازای هرزیر- مجموعهٔ A کـه کران بالایی در A داشته باشد، کـوچکترین کران بالای آن (در اعداد حقیقی) باید متعلق‌به A باشد. مثلاً، زیرمجموعهٔ $\{-۱/۲n \mid n \in Z_+\}$ از A رادرنظر می‌گیریم. اگر چه این مجموعه فاقد بزرگترین عضو است، ولی در A کوچکترین کران بالا دارد، وآن صفراست.

از طرف دیگر مجموعهٔ $B=(-۱, \circ) \cup (\circ, ۱)$ خاصیت کوچکترین کران بالا را ندارد. مثلاً، هرعضو $(\circ, ۱)$ یك کران بالای زیر مجموعهٔ $\{-۱/۲n \mid n \in Z_+\}$ از B است، درنتیجه این مجموعه ازبالاکرانداراست ولی در B کوچکترین کران بالا ندارد.

تمرینها

رابطه‌های هم‌ارزی

۱. دو نقطهٔ $(x_{\circ}, y_{\circ})$ و $(x_{۱}, y_{۱})$ از صفحه را هم‌ارز می گیریم درصورتی‌که $y_{\circ}-x_{\circ}^{۲}=y_{۱}-x_{۱}^{۲}$. بررسی کنیدکـه این رابطه رابطه‌ای هم‌ارزی است و رده‌های هم‌ارزی آن را مشخص کنید.

۲. فرض کنید C رابطه‌ای درمجموعهٔ A باشد. اگر $A_{\circ} \subset A$ رابطهٔ $C \cap (A_{\circ} \times A_{\circ})$ را **تحدید** C به $A_{\circ}$ می‌خوانیم. ثابت کنید کـه تحدید یك رابطهٔ هم‌ارزی خود رابطه‌ای هم‌ارزی است.

۳. آنچه درزیرمی‌آید برای «اثبات» این حکم‌است که هر رابطهٔ متقارن ومتعدی مانند C منعکس نیزهست : «چون C متقارن است ، aCb مستلزم bCa است ، از aCb و bCa نتیجه می‌گیریم aCa ، و این همان نتیجهٔ مطلوب است.» نقص این استدلال درکجاست؟

۴. فرض‌کنید تابع $f: A \to B$ پوشا باشد. رابطهٔ $\sim$ را در A چنین تعریف می‌کنیم :

$$a_0 \sim a_1 \text{ هرگاه } f(a_0) = f(a_1).$$

(الف) ثابت‌کنید $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی است.

(ب) فرض‌کنید A^* مجموعهٔ‌رده‌های هم‌ارزی‌باشد. ثابت‌کنید تناظری دوسویی بین A^* و B برقراراست.

۵. زیرمجموعه‌های S و S' ازصفحه راکه چنین تعریف شده‌اند درنظربگیرید :

$$S = \{(x, y) \mid y = x + 1 \text{ و } 0 < x < 2\},$$

$$S' = \{(x, y) \mid y - x \text{ عددی است صحیح}\}.$$

(الف) ثابت‌کنید S' رابطه‌ای هم‌ارزی درخط حقیقی است و $S \subset S'$. رده‌های هم‌ارزی S' را مشخص‌کنید.

(ب) به‌ازای هرگردایه از رابطه‌های هم‌ارزی در مجموعهٔ A ، ثابت‌کنید مقطع آنها نیزرابطه‌ای هم‌ارزی در A است.

(پ) فرض‌کنید T مقطع همهٔ رابطه‌های هم‌ارزی خط حقیقی‌که حاوی S اند باشد. رابطهٔ هم‌ارزی T و رده‌های هم‌ارزی‌آن راتوصیف‌کنید.

رابطه‌های ترتیبی

۶. رابطهٔ ذیل را درصفحه تعریف می‌کنیم :

$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$$

هرگاه $y_0 - x_0^2 < y_1 - x_1^2$ ، یاآنکه $y_0 - x_0^2 = y_1 - x_1^2$ و $x_0 < x_1$.
ثابت‌کنیدکه $<$ رابطه‌ای ترتیبی درصفحه است وتعبیرهندسی‌آن را شرح دهید.

۷. ثابت‌کنیدکه تحدید رابطه‌ای ترتیبی یك رابطهٔ ترتیبی است.

۸. بررسی‌کنید رابطه‌ای‌که درمثال ۷ تعریف شده رابطه‌ای ترتیبی است.

۹. بررسی‌کنیدکه ترتیب قاموسی رابطه‌ای ترتیبی است.

۱۰. (الف) ثابت‌کنیدکه‌نگاشت $f: (-1, 1) \to R$ که درمثال۹ تعریف‌شد حافظ‌ترتیب است.

(ب) ثابت کنید که ضابطهٔ $g(y)=۲y/[۱+(۱+۴y^۲)^{۱/۲}]$ تابعی مانند $g: R \to (-۱, ۱)$ را تعریف می‌کند که هم معکوس چپ و هم معکوس راست f است.

۱۱. ثابت کنید که هر عضو هر مجموعهٔ مرتب حداکثر یك سابق بلافصل و حداکثر یك تالی بلافصل دارد. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ مجموعه‌ای مرتب حداکثر یك کوچکترین عضو و حداکثر یك بزرگترین عضو دارد.

۱۲. فرض کنید Z_+ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشد. رابطه‌های ترتیبی ذیل را در $Z_+ \times Z_+$ در نظر بگیرید:

(الف) ترتیب قاموسی.

(ب) $(x_۰, y_۰) < (x_۱, y_۱)$ هرگاه $x_۰ - y_۰ < x_۱ - y_۱$، یا آنکه $x_۰ - y_۰ = x_۱ - y_۱$ و $y_۰ < y_۱$.

(پ) $(x_۰, y_۰) < (x_۱ y_۱)$ هرگاه $x_۰ + y_۰ < x_۱ + y_۱$، یا آنکه $x_۰ + y_۰ = x_۱ + y_۱$ و $y_۰ < y_۱$.

در این سه رابطه اعضایی که سابق بلافصل دارند کدام‌اند؟ درهرمورد، آیا مجموعهٔ مورد بحث کوچکترین عضو دارد؟ ثابت کنید که این سه رابطه نوع ترتیبهای متفاوت دارند.

۱۳. ثابت کنید:

قضیه. اگر مجموعهٔ مرتب A خاصیت کوچکترین کران بالا را داشته باشد آنگاه خاصیت بزرگترین کران پایین را نیز دارد

۱۴. فرض کنید C رابطه‌ای در A باشد. رابطهٔ جدید D در A را چنین تعریف می‌کنیم: $(b, a) \in D$ هرگاه $(a, b) \in C$.

(الف) ثابت کنید که C متقارن است اگر و فقط اگر $C = D$.

(ب) اگر C رابطه‌ای ترتیبی باشد، D نیز رابطه‌ای ترتیبی است.

(پ) عکس قضیهٔ تمرین ۱۳ را ثابت کنید.

۱۵. فرض کنید خط حقیقی دارای خاصیت کوچکترین کران بالا است.

(الف) ثابت کنید مجموعه‌های

$$[۰, ۱] = \{x \mid ۰ \leqslant x \leqslant ۱\},$$

$$[۰, ۱) = \{x \mid ۰ \leqslant x < ۱\}$$

خاصیت کوچکترین کران بالا را دارند.

(ب) آیا مجموعهٔ $[0, 1] \times [0, 1]$ باترتیب قاموسی دارای خاصیت کوچکترین کران بالا هست؟ درمورد مجموعه‌های $[0, 1) \times [0, 1]$ و $[0, 1] \times (0, 1]$ چه می‌توان گفت؟

۱-۴ اعداد صحیح و اعداد حقیقی

آنچه را که تاکنون گفته‌ایم شاید بتوان بنیادهای منطقی مطالعهٔ ما در توپولوژی نامید ــ یعنی‌مفاهیم مقدماتی نظریهٔ مجموعه‌ها. اینك، به‌آنچه که ممکن است بنیادهای ریاضی این تحقیق نامیده شود می‌پردازیم ــ یعنی دستگاه اعداد صحیح و اعداد حقیقی. درمثالها و تمرینهای بخشهای گذشته به‌طورغیر رسمی‌آنها را به کار برده‌ایم. ولی، اکنون می‌خواهیم به‌روشی رسمیتر و دقیقتری‌آنها را بررسی کنیم.

یك طریق تأسیس این بنیادها، ساختن دستگاه اعداد حقیقی فقط بـه وسیلهٔ اصول موضوعهٔ نظریهٔ مجموعه‌هاست ــ به‌طوری کـه می‌توان گفت ساختن آنها با دست خـالی انجام می‌شود. این طریقهٔ دستیابی به این بنیادها، به‌کوشش وزمان بسیار نیاز دارد، و بیشتراز دیدگاه منطقی مورد توجه است تا ریاضی.

طریق دوم، فرض کردن مجموعه‌ای‌ازاصول موضوع برای اعداد حقیقی وکار بااین اصول است. دراین بخش، ما نیزهمین شیوه را برای ساختن اعداد حقیقی برگزیده‌ایم. به بیان‌دقیقتر، مجموعه‌ای‌ازاصول موضوع برای اعداد حقیقی ارائه می کنیم، وچگونگی استخراج خواص مأنوس اعداد صحیح‌وحقیقی‌را ازآنها بیان می کنیم. لیکن اثبات بیشتر آنها را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. اگر بااین مطالب از پیش آشنایی دارید، توصیف ما آنها را در یادتان تازه می‌کند. اگـر چنین نیست، برای اطمینان از آگاهی خود دربارهٔ بنیادهای ریاضی، بد نیست به تفصیل تمرینها را انجام دهید.

درابتدا، به تعریفی ازنظریهٔ مجموعه‌ها نیاز داریم.

تعریف. عمل دوتایی درمجموعهٔ A تابعی‌است‌که $A \times A$ رابتوی A می‌نگارد.

در مورد عملی دوتایی مانند f در مجموعهٔ A، معمولاً علامتگذاریی متفاوت از علامتگذاری استانده برای توابع، که در بخش ۱ــ۲ به کاربرده شدند، به کار می بریم. به‌جای‌آنکه مقدارتابع f را درنقطهٔ (a, a') به $f(a, a')$ نشان دهیم، معمولاً علامت تابع را بین دومختص نقطهٔ مورد نظرقرارمی‌دهیم،ومقدارتابع را در (a, a') به‌صورت afa' می‌نویسیم. بعلاوه، (همان گونه که درمورد رابطه‌ها دیدیم) معمولترآن است کـه برای نمایش عملی دوتایی نمادی غیرازحروف به‌کارمی‌برند. نمادهایی کـه اغلب مورد استفاده‌قرارمی گیرندعبارت‌اند ازنمادجمع $+$، نمادضرب. و $\circ$، وستاره $*$؛ ولی‌نمادهای متعدد دیگری نیز به‌کارمی روند.

فرض

فرض می‌کنیم مجموعه‌ای مانند R ، موسوم به مجموعهٔ **اعداد حقیقی** ، دو عمل دوتایی $+$ و $.$ در R که آنها را به ترتیب اعمال **جمع** و **ضرب** می‌نامیم ، و یك رابطهٔ ترتیبی مانند $>$ در R موجودند به‌طوری که خواص زیر برقرارند:

خواص جبری

(۱) به‌ازای هر x ، y ، و z از R ،

$$(x+y)+z=x+(y+z),$$
$$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z).$$

(۲) به‌ازای هر x و y از R ،

$$x+y=y+x,$$
$$x\cdot y=y\cdot x.$$

(۳) عضو یکتایی از R موسوم بـه **صفر** ، که‌آن را با 0 نشان می‌دهیم ، موجود است به‌طوری که به‌ازای هر $x\in R$ ، $x+0=x$.
عضو یکتایی از R، متمایز از صفر، موسوم به **یك**، که‌آن را با 1 نشان می‌دهیم ، موجود است به طوری که به ازای هر $x\in R$ ، $x\cdot 1=x$

(۴) به‌ازای هر x از R ، عضو یکتای y از R موجود است بـه طوری کـه $x+y=0$. به‌ازای هر x از R و متمایز از صفر، y یکتایی در R موجود است به طوری که $x\cdot y=1$.

(۵) به‌ازای هر x ، y ، و z از R ،

$$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z).$$

خاصیت توأم جبری و ترتیبی

(۶) اگر $x>y$ آنگاه $x+z>y+z$.
اگر $x>y$ و $z>0$ آنگاه $x\cdot z>y\cdot z$.

خواص ترتیبی

(۷) رابطهٔ ترتیبی $>$ دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست.

(۸) اگر $x>y$ آنگاه عضوی مانند z موجود است به طوری کـه $x>z$ و $z>y$.

ازخواص (۱) ـ (۵) ، «قوانین جبری»ای که باآنها آشنایی دارید نتیجه می‌شوند. به‌ازای هر x ، عدد y را که $x+y=۰$ ، با $-x$ نشان می‌دهیم وآن را **قرینهٔ x** می‌نامیم. **عمل تفریق** را با فرمول $z-x=z+(-x)$ تعریف می کنیم. به طریق مشابه به‌ازای هر x ناصفر، عدد y راکه $x \cdot y=۱$ با $۱/x$ نشان می‌دهیم، وآن را **عکس** x می‌نامیم. **خارج قسمت** z/x را بافرمول $z/x=z\cdot(۱/x)$ تعریف می کنیم. قوانین معمولی علامات، وقوانین جمع و ضرب کسرها به‌عنوان قضیه ثابت می‌شوند. این قوانین جبری را در تمرین ۱ درآخراین بخش آورده‌ایم. اغلب به‌جای $x \cdot y$ مختصراً می‌نویسیم xy.

باافزودن خاصیت (۶) به خواص (۱) ـ (۵) می‌توان «قوانین نامساویها» را ثابت کرد، که ازآن جمله‌اند:

$$\text{اگر } x>y \text{ و } z<۰ \text{ آنگاه } x\cdot z<y\cdot z.$$

$$-۱<۰ \quad \text{و} \quad ۰<۱$$

قوانین نامساویها را در تمرین ۲ آورده‌ایم.

بنا بر تعریف، عدد x را **مثبت** خوانیم درصورتی که $x>۰$ ؛ واگر $x<۰$ آنگاه گوییم x **منفی** است. مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت را با R_+ ، و اعداد حقیقی نامنفی را (به عللی که بعداً توضیح خواهیم داد) با $\bar{R}_+$ نشان می‌دهیم.

خواص (۱) ـ (۶) در جبر نوین خواص شناخته‌شده‌ای هستند. هر مجموعه با دو عمل دوتایی که در خواص (۱) ـ (۶) صدق کند، در جبر، یك **میدان** نامیده می‌شود؛ اگر این میدان رابطه‌ای ترتیبی واجد خاصیت (۶) هم داشته باشد، آن را **میدان مرتب** می‌نامند.

ازطرف دیگر، خواص (۷) و (۸) در توپولوژی خواص شناخته‌شده‌ای هستند. این خواص فقط متضمن رابطهٔ ترتیبی‌اند؛ هرمجموعه با رابطه‌ای ترتیبی که در شرایط (۷) و (۸) صدق کند، درتوپولوژی **پیوستار خطی** نامیده می‌شود.

اکنون اگربه خواص میدان مرتب [خواص (۱) ـ (۶)] اصول موضوع پیوستار خطی [خواص (۷) و (۸)] را ملحق کنیم، فهرست حاصل مشتمل برزوایدی است. بخصوص، خاصیت (۸) را می‌توان از سایرین نتیجه‌گرفت؛ به فرض آنکه $x<y$ ، می‌توان نشان دادکه $z=(x+y)/(۱+۱)$ در شرط (۸) صدق می کند. باوجود این، برای تأکید این نکته که (۸) وخاصیت کوچکترین کران بالا دوخاصیت مهم رابطهٔ ترتیبی R هستند، خاصیت(۸) را در فهرست‌خواص اساسی اعداد حقیقی درج کرده‌ایم. چنانچه در فصل ۳ خواهید دید، بیشترخواص توپولوژیك R را ازهمین دو خاصیت می‌توان نتیجه‌گرفت.

دراین فهرست، چیزی وجود نداردکه به ما بگوید عدد صحیح چیست. اینك، فقط با به کار گرفتن خواص (۱) ـ (۶) ، اعداد صحیح را تعریف می کنیم. برای این

منظور، نخست تعریف ذیل را می‌آوریم: زیر مجموعهٔ A از اعداد حقیقی را **استقرایی** می‌نامیم درصورتی که به‌ازای هر x از A، $x+۱$ نیزعضوی از A باشد.

تعریف. فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ گردایهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های استقرایی R باشد که شامل ۱ هستند. مجموعهٔ **اعداد صحیح مثبت** را، کــه به Z_+ نمایش داده می‌شود، با معادلهٔ ذیل تعریف می‌کنیم:

$$Z_+ = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A.$$

توجه‌کنید کــه R_+، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، مجموعه‌ای است شامل ۱ و در ضمن استقرایی (اگر $x > ۰$ آنگاه $x+۱ > ۰$). پس، R_+ عضوی است از $\mathcal{A}$، در نتیجه $Z_+ \subset R_+$، بنابراین، چنانکه از گــزینش نام Z_+ برمی‌آید، اعضای Z_+ در واقع مثبت‌اند. در حقیقت، به‌آسانی دیده می‌شود که ۱ کوچکترین عضو Z_+ است. زیرا مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x که $x \geqslant ۱$، استقرایی است وشامل ۱.

خواص اساسی Z_+، که بسهولت ازتعریف‌آن نتیجه می‌شوند، عبارت‌اند:

(۱) $۱ \in Z_+$.

(۲) Z_+ استقرایی است.

(۳) (اصل استقرا). اگر $Z_\circ$ مجموعه‌ای استقرایی‌از اعداد صحیح مثبت وشامل۱ باشدآنگاه $Z_\circ = Z_+$.

مجموعهٔ **اعداد صحیح** کــه به Z نمایش داده می‌شود، بنابر تعریف، مجموعه‌ای است متشکل از اعــداد صحیح مثبت Z_+، عدد ۰، وقرینه‌هــای اعضای Z_+. ثــابت می‌شودکه حاصل‌جمع، تفاضل، و حاصل‌ضرب دو عدد صحیح عددی است صحیح، ولی خارج قسمت‌آنها ضرورت نداردکه عددی صحیح باشد. مجموعهٔ خارج قسمتهای اعداد صحیح را مجموعه **اعداد گویا** می‌نامیم وآن را با Q نمایش می‌دهیم.

همچنین، ثابت می‌شودکــه به‌ازای هرعدد صحیح مفروض n، هیچ عدد صحیح دیگری مانند a موجود نیست‌که $n < a < n+۱$.

همهٔ اینها مطالبی مأنوس‌اند. خاصیتی از اعداد صحیح مثبت‌که ممکن است چندان شناخته شده نباشد، عبارت است از:

۴.۱. قضیه (خاصیت خوشترتیبی) هر زیر مجموعهٔ ناتهی Z_+ دارای کــوچکترین عضو است.

برهان. اگر $n \in Z_+$ آنگاه مجموعهٔ $\{x \mid x\in Z \text{ و } ۱ \leqslant x \leqslant n\}$ را باعلامت $\{۱, \ldots, n\}$ نشان می‌دهیم. چون هیچ عدد صحیحی بین n و $n+۱$ وجود ندارد پس

$$\{۱, \ldots, n+۱\} = \{۱, \ldots, n\} \cup \{n+۱\}.$$

نخست « به استقرا » ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر $n \in Z_+$ ، حکم ذیل برقرار است: هر زیرمجموعهٔ ناتهی مجموعهٔ $\{1, \ldots, n\}$ کوچکترین عضو دارد.

فرض کنیم $Z_\circ$ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبتی باشد که حکم بالا در مورد آنها برقرار است. در این صورت $1 \in Z_\circ$. زیرا اگر $n = 1$ ، تنها زیر مجموعهٔ ناتهی $\{1, \ldots, n\}$ خود مجموعهٔ $\{1\}$ است. حال، به فرض آنکه $n \in Z_\circ$ نشان می‌دهیم که $n+1 \in Z_\circ$. بدین منظور، فرض کنیم C زیر مجموعه‌ای ناتهی از مجموعهٔ $\{1, \ldots, n+1\}$ باشد. اگر C فقط $n+1$ را در برداشته باشد آنگاه $n+1$ کوچکترین عضو C است. در غیر این صورت، مجموعهٔ $C \cap \{1, \ldots, n\}$ را، که ناتهی است، درنظر می گیریم. چون $n \in Z_\circ$ ، مجموعهٔ اخیر کوچکترین عضو دارد ، که خود به خود کوچکترین عضو C نیز هست. بنابراین، $Z_\circ$ مجموعه‌ای است استقرایی و شامل ۱ ، پس $Z_\circ = Z_+$. در نتیجه ، گزارهٔ فوق به‌ازای هر $n \in Z_+$ راست است.

اکنون به اثبات قضیه می‌پردازیم. فرض کنیم D زیر مجموعه‌ای ناتهی از Z_+ باشد. عضوی از D مانند n انتخاب می‌کنیم. در این صورت، مجموعهٔ $A = D \cap \{1, \ldots, n\}$ ناتهی است، و درنتیجه کوچکترین عضو دارد. این کوچکترین عضو خود به خود کوچکترین عضو D نیز هست. □

تا کنون هرچه انجام داده‌ایم ، برپایهٔ اصول موضوع میدان مرتب ، یعنی خواص (۱) ـ (۶) اعداد حقیقی ، استوار شده است. پس چه وقت (۷) ، یعنی خاصیت کوچکترین کران بالا ، لازم می‌شود؟

یکی از کاربردهای اصل موضوع کوچکترین کران بالا در اثبات این قضیه است که Z_+ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت در R کران بالا ندارد . این ، **خاصیت ارشمیدسی ترتیب** خط حقیقی است. برای اثبات آن ، فرض می کنیم Z_+ کران بالایی دارد و از آن تناقضی درمی‌آوریم. اگر Z_+ کران بالایی داشته باشد ، کوچکترین کران بالایی مانند b خواهد داشت. عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد که $n > b - 1$ ؛ زیرا در غیر این صورت ، $b - 1$ کران بالایی کوچکتر از b برای Z_+ خواهد بود. بنابراین $n+1 > b$ ، که خلاف این حقیقت است که b کران بالایی برای Z_+ است.

اصل موضوع کوچکترین کران بالا همچنین برای اثبات احکام دیگری در مورد R نیز به‌کار می‌رود. به عنوان نمونه ، این اصل برای اثبات وجود یك جذر مثبت یکتای $\sqrt{x}$ ، به‌ازای هرعدد حقیقی مثبت ، به‌کار گرفته می‌شود. این مطلب به نوبهٔ خود می‌تواند برای اثبات وجود اعداد حقیقی غیرگویا به‌کار رود ، $\sqrt{2}$ مثال ساده‌ای از آن است.

ما ، نماد ۲ را برای نمایش ۱ + ۱ ، نماد ۳ را برای نمایش ۱ + ۲ ، وهمین‌طور تمامی نمادهای استاندهٔ اعداد صحیح مثبت را به کار می‌بریم. در واقع ، به این طریق به هرعدد صحیح مثبت ، نمادی یکتا تعلق می گیرد ، ولی‌چون ما نیازی به این مطلب نداریم از اثبات‌آن در می گذریم.

اثبات این خواص اعداد صحیح و اعداد حقیقی همراه با اثبات چند خاصیت مورد نیاز دیگر را به‌اجمال در تمرینهای زیر متذکر شده‌ایم.

تمرینها

۱. به‌کمک اصول موضوع (۱) ـ (۵) «قوانین جبری» ذیل را برای R ثابت کنید:

(الف) اگر $x+y=x$ آنگاه $y=0$.

(ب) $0 \cdot x = 0$. [راهنمایی: $x \cdot (0+x)$ را محاسبه کنید.]

(پ) $-0=0$.

(ت) $-(-x)=x$.

(ث) $x(-y)=-(xy)=(-x)y$.

(ج) $(-1)x=-x$.

(چ) $x(y-z)=xy-xz$.

(ح) $-(x+y)=-x-y$ ؛ $-(x-y)=-x+y$.

(خ) اگر $x\neq 0$ و $x \cdot y=x$ آنگاه $y=1$.

(د) اگر $x\neq 0$ آنگاه $\frac{x}{x}=1$.

(ذ) $\frac{x}{1}=x$.

(ر) اگر $x\neq 0$ و $y\neq 0$ آنگاه $xy\neq 0$.

(ز) اگر $y\neq 0$ و $z\neq 0$ آنگاه $\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{yz}$.

(ژ) اگر $y\neq 0$ و $z\neq 0$ آنگاه $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{w}{z}\right)=\frac{xw}{yz}$.

(س) اگر $y\neq 0$ و $z\neq 0$ آنگاه $\frac{x}{y}+\frac{w}{z}=\frac{xz+wy}{yz}$.

(ش) اگر $x\neq 0$ آنگاه $\frac{1}{x}\neq 0$.

(ص) اگر $z\neq 0$ و $w\neq 0$ آنگاه $\frac{1}{\frac{w}{z}}=\frac{z}{w}$.

(ض) اگر $y \neq \circ$ و $z \neq \circ$ و $w \neq \circ$ آنگاه $\frac{xz}{yw} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{w}{z}}$.

(ط) اگر $y \neq \circ$ آنگاه $a\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ax}{y}$.

(ظ) اگر $y \neq \circ$ آنگاه $-\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{-y} = \frac{-x}{y}$.

۲. به‌کمك اصول موضوع (۱)-(۶) و نتایج تمرین ۱، «قوانین نامساویها»ی ذیل را برای R ثابت‌کنید:

(الف) اگر $x > y$ و $w > z$ آنگاه $x+w > y+z$.

(ب) اگر $x > \circ$ و $y > \circ$ آنگاه $x+y > \circ$ و $x \cdot y > \circ$.

(پ) $-x < \circ \iff x > \circ$.

(ت) $-x < -y \iff x > y$.

(ث) اگر $x > y$ و $z < \circ$ آنگاه $xz < yz$.

(ج) اگر $x \neq \circ$ آنگاه $x^{۲} > \circ$، که در آن، $x^{۲} = x \cdot x$.

(چ) $-۱ < \circ < ۱$.

(ح) $xy > \circ$ اگر و فقط اگر x و y هردو مثبت یا هردو منفی باشند.

(خ) اگر $x > \circ$ آنگاه $\frac{۱}{x} > \circ$.

(د) اگر $x > y > \circ$ آنگاه $\frac{۱}{x} < \frac{۱}{y}$.

(ذ) اگر $x < y$ آنگاه $x < \frac{x+y}{۲} < y$.

۳. (الف) اگر $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های استقرایی باشد، ثابت کنید که مقطع اعضای $\mathcal{A}$ نیز مجموعه‌ای استقرایی است.

(ب) خواص اساسی (۱) و (۲) و (۳) را برای Z_+ ثابت‌کنید.

۴. (الف) ثابت‌کنید اگر $a \in Z_+$ آنگاه $a-۱ \in Z_+ \cup \{\circ\}$. [راهنمایی: ثابت کنید که مجموعهٔ $X = \{x \mid x \in R$ و $x-۱ \in Z_+ \cup \{\circ\}\}$ استقرایی و شامل ۱ است.]

(ب) ثابت‌کنید که اگر $n \in Z$، هیچ عضوی مانند a که $a \in Z$ وجود ندارد

به طوری که $n < a < n+1$. [راهنمایی: ابتدا به‌ازای $n \in Z_+$ ثابت کنید.]

۵. (الف) به استقرا ثابت کنید که به‌ازای هر $n \in Z_+$، هرزیر مجموعهٔ ناتهی مجموعهٔ $\{1, \ldots, n\}$ بزرگترین عضو دارد.

(ب) توضیح دهید که چرا از (الف) نمی‌توان نتیجه گرفت که هرزیر مجموعهٔ ناتهی Z_+ بزرگترین عضو دارد.

۶. خواص ذیل را برای Z و Z_+ ثابت کنید:

(الف) اگر a و b عضو Z_+ باشند آنگاه $a+b \in Z_+$. [راهنمایی: به‌ازای عضو مفروض $a \in Z_+$، ثابت کنید که مجموعهٔ

$$X = \{x \mid x \in R \text{ و } a+x \in Z_+\}$$

استقرایی و شامل ۱ است.]

(ب) اگر $a \in Z_+$ و $b \in Z_+$ آنگاه $a \cdot b \in Z_+$.

(پ) اگر $c \in Z$ و $d \in Z$ آنگاه $c+d \in Z$. [راهنمایی: نخست حکم را به‌ازای $d = 1$ ثابت کنید.]

(ت) اگر $c \in Z$ و $d \in Z$ آنگاه $c-d \in Z$.

(ث) اگر $c \in Z$ و $d \in Z$ آنگاه $c \cdot d \in Z$.

(ج) اگر $x > 1$ آنگاه $\frac{1}{x} \notin Z$.

۷. فرض کنید $a \in R$، به‌ازای $n \in Z$ نمای a را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^1 = a,$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

(برای بحث در تعریفات استقرایی، بخش ۱-۷ را ملاحظه کنید.) ثابت کنید که به‌ازای n و m از Z و a و b از R،

$$a^n a^m = a^{n+m},$$

$$(a^n)^m = a^{nm},$$

$$a^m b^m = (ab)^m.$$

فرمولهای فوق، **قوانین نماها** نامیده می‌شوند. [راهنمایی: n را ثابت بگیرید و تساویها را به استقرا نسبت به m ثابت کنید.]

۸. فرض کنید $a \in R$ و $a \neq 0$. تعریف می‌کنیم $a^0 = 1$، و به‌ازای $n \in Z_+$، $a^{-n} = 1/a^n$. ثابت کنید قوانین نماها به‌ازای هردوعضوناصفر R مانند a و b و هردو عدد صحیح m و n برقرار است.

۹. فرض کنید اصل موضوع کوچکترین کران بالا در R برقرار باشد.

(الف) ثابت کنید که $\mathrm{glb}\left\{\frac{1}{n} \mid n \in Z_+\right\} = 0$.

(ب) ثابت کنید به‌ازای هر a که $0 < a < 1$، $\mathrm{glb}\{a^n \mid n \in Z_+\} = 0$.

[راهنمایی: فرض کنید $h = \frac{1-a}{a}$، ثابت کنید که $a^n \leqslant \frac{1}{1+nh}$.]

۱۰. فرض کنید اصل موضوع کوچکترین کران بالا برقرار باشد.

(الف) ثابت کنید هرزیر مجموعهٔ ناتهی Z که از بالا کراندار باشد بزرگترین عضو دارد.

(ب) ثابت کنید اگر $x \notin Z$ آنگاه تنها یك عدد صحیح مانند n هست که $n < x < n+1$.

(پ) ثابت کنید اگر $x - y > 1$ آنگاه دست‌کم یك‌عدد صحیح مانند n هست که $y < n < x$.

(ت) ثابت کنید اگر $y < x$ آنگاه عددی گویا مانند z موجود است که $y < z < x$.

۱۱. فرض کنید اصل موضوع کوچکترین کران بالا برقرار باشد، به‌طریق ذیل ثابت‌کنید که هرعدد مثبتی مانند a درست یك ریشهٔ مثبت دارد:

(الف) ثابت کنید‌که اگر $x > 0$ و $0 \leqslant h < 1$ آنگاه

$$(x+h)^2 \leqslant x^2 + h(2x+1),$$

$$(x-h)^2 \geqslant x^2 - h(2x).$$

(ب) فرض کنید $x > 0$. ثابت کنید‌که اگر $x^2 < a$ آنگاه به‌ازای یك $h > 0$، $(x+h)^2 < a$؛ و اگر $x^2 > a$ آنگاه به‌ازای یك $h > 0$، $(x-h)^2 > a$.

(پ) فرض کنید $a > 0$، و B مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x باشد به طوری که $x^2 < a$. ثابت کنید که B از بالا کراندار است و دست‌کم یك عضو مثبت دارد. فرض کنید $b = \mathrm{lub}\, B$؛ ثابت کنید که $b^2 = a$.

(ت) ثابت کنید‌که اگر b و c دو عدد مثبت باشند و $b^2 = c^2$ آنگاه $b = c$.

۱۲. عدد صحیح m را زوج گوییم درصورتی که $m/۲ \in Z$ ، و در غیر این صورت گوییم m فرد است.

(الف) ثابت کنید اگر m فرد باشد آنگاه nی در Z هست که $m=۲n+۱$.
[راهنمایی: n را چنان انتخاب کنید که $n < m/۲ < n+۱$.]

(ب) اگر p و q فرد باشند آنگاه $p \cdot q$ و p^n به ازای هر $n \in Z$ نیز فرد هستند.

(پ) ثابت کنید که اگر a عدد گویای مثبتی باشد آنگاه m و nی در Z هستند که $a=m/n$ که‌در آن m و n هردوزوج نیستند. [راهنمایی: فرض کنید n کوچکترین عضو مجموعهٔ $\{x \mid x \in Z_+ \text{ و } x \cdot a \in Z_+\}$ باشد.]

(ت) قضیه. $\sqrt{۲}$ گنگ است.

۱-۵ حاصل‌ضرب دکارتی دلخواه

قبلاً $A \times B$ یعنی حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعهٔ A و B را تعریف کردیم. اکنون حاصل‌ضرب دکارتی تعداد دلخواهی از مجموعه‌ها را تعریف می‌کنیم. ابتدا چند حالت خاص را درنظر می‌گیریم، و سپس تعریف کلی را بیان می‌کنیم.

طبق معمول $\{۱, \ldots, m\}$ نمایش مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت a است به‌طوری که $۱ \leqslant a \leqslant m$. برای مجموعهٔ مفروض X ، یك **m‌تایی** از اعضای X را به صورت تابعی مانند

$$\mathbf{x}:\{۱, \ldots, m\} \longrightarrow X$$

تعریف می‌کنیم. اگر $\mathbf{x}$ یك mتایی باشد، اغلب مقدار $\mathbf{x}$ را در i به‌جای $\mathbf{x}(i)$ به x_i ، و خود $\mathbf{x}$ را با نماد

$$(x_۱, \ldots, x_m)$$

نشان می‌دهیم. مجموعهٔ همهٔ mتایی‌ها از اعضای X را به X^m نمایش می‌دهیم.

حال می‌توانیم حاصل‌ضرب دکارتی را تعریف کنیم.

تعریف. فرض‌کنیم $\{A_۱, \ldots, A_m\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌ها باشد که با اعداد صحیح مثبت از ۱ تا m اندیسگذاری شده‌اند و $X=A_۱ \cup \cdots \cup A_m$ **حاصل‌ضرب دکارتی** این گردایهٔ اندیسدار از مجموعه‌ها، که به

$$A_۱ \times \cdots \times A_m \quad \text{یا} \quad \Pi_{i=۱}^{m} A_i$$

نمایش داده می‌شود، عبارت‌است‌از مجموعهٔ همهٔ mتایی‌های $(x_۱, \ldots, x_m)$ ازاعضای X که به‌ازای هر i ، $x_i \in A_i$.

مثال ۱. اینك برای نماد $A\times B$ دو تعریف داریم. یکی‌از اینها همان تعریف سابق است، که برطبق‌آن $A\times B$ مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتبی است مانند (a, b) که $a\in A$ و $b\in B$. تعریف دوم، که هم‌اکنون ملاحظه شد، $A\times B$ را به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ توابعی مانند $\mathbf{x}: \{1, 2\} \longrightarrow A\cup B$ معرفی می‌کنند که $\mathbf{x}(1)\in A$ و $\mathbf{x}(2)\in B$. دراینجا، یك تناظر یك‌به‌یك بدیهی‌بین این دو مجموعه موجود است‌که تحت‌آن زوج مرتب (a, b) نظیر تابع $\mathbf{x}$ است به‌طوری که $\mathbf{x}(1)=a$ و $\mathbf{x}(2)=b$. چون عموماً این تابع $\mathbf{x}$ را نیز با نماد (a, b) نمایش می‌دهیم،خود این نماد تناظر مذکور را به‌ذهن می‌آورد. بنابراین، درمورد حاصل‌ضرب دکارتی دومجموعه، تعریف کلی‌حاصل‌ضرب دکارتی اساساً به‌همان‌تعریف سابق بازمی‌گردد.

مثال ۲. حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B\times C$ با حاصل‌ضرب دکارتی $A\times(B\times C)$ و $(A\times B)\times C$ چه تفاوتی دارد؛ اختلاف‌آنها بسیاراندك است. تناظرهای دوسویی بدیهی بین این مجموعه‌ها وجود دارندکه به شرح زیرنموده شده‌اند؛

$$(a, b, c) \longleftrightarrow (a, (b, c)) \longleftrightarrow ((a, b), c).$$

برای تعمیم تعریف سابق به‌همان قیاس عمل می‌کنیم. فرض‌کنیم X مجموعه‌ای مفروض باشد، یك **ωتایی** ازاعضای X عبارت است ازتابعی مانند

$$\mathbf{x}: Z_+ \longrightarrow X;$$

چنین تابعی را **دنباله**، یا **دنبالهٔ نامتناهی**، از اعضای X نیز می‌نامیم. اگر $\mathbf{x}$ یك ωتایی باشد، اغلب مقدار تابع $\mathbf{x}$ را در i به‌جای $\mathbf{x}(i)$ به x_i و خود تابع $\mathbf{x}$ را با نماد

$$(x_1, x_2, \dots) \quad \text{یا} \quad (x_n)_{n\in Z_+}$$

نشان می‌دهیم. مجموعهٔ همهٔ ωتایی‌ها ازاعضای X را به X^ω نمایش می‌دهیم.

تعریف. فرض‌کنیم $\{A_1, \dots, A_n, \dots\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌ها باشدکه با اعداد صحیح مثبت اندیسگذاری شده‌اند. همچنین، فرض‌کنیم X اجتماع مجموعه‌های واقع در این گردایه باشد. **حاصل‌ضرب دکارتی** این گردایهٔ اندیسدار از مجموعه‌ها، که به

$$A_1\times A_2\times \cdots \quad \text{یا} \quad \Pi_{i\in Z_+}A_i$$

نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعهٔ همهٔ ωتایی‌هایی مانند $(x_1, x_2, \dots)$ از اعضای X به‌طوری‌که به‌ازای هر i، $x_i\in A_i$.

ملاحظه کنیدکه این‌تعاریف مستلزم متمایز بودن مجموعه‌های A_i نیستند. درواقع، ممکن است همهٔ آنها مساوی مجموعه‌ای مانند X باشند. در این حالت، حاصل‌ضرب

دکارتی $A_1 \times \ldots \times A_m$ چیزی جز مجموعهٔ X^m متشکل ازهمهٔ mتایی‌ها از اعضای X نیست ؛ و حاصل‌ضرب $\ldots \times A_1 \times A_2$ نیزهمان مجموعهٔ X^ω متشکل از همهٔ ωتایی‌ها از اعضای X است.

مثال ۳. اگر R مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد آنگاه R^m عبارت است از مجموعهٔ همهٔ mتایی‌ها از اعداد حقیقی ، که اغلب **فضای اقلیدسی mبعدی** نامیده می‌شود (اگر چه اقلیدس هرگز اطلاعی ازآن نداشته است). به‌همین قیاس ، R^ω ، که گاهی «فضای اقلیدسی بینهایت بعدی» نامیده می‌شود عبارت است از مجموعهٔ همهٔ ωتایی‌هـای $(x_1, x_2, \ldots)$ از اعداد حقیقی ، یعنی مجموعهٔ همهٔ توابع $R \longrightarrow Z_+ : \mathbf{x}$.

اکنون به تعریف کلی حاصل‌ضرب دکارتی ، کـه این تعاریف را به عنوان حالاتی خاص دربرمی گیرد ، باز می گردیم. نخست، باید منظور خود را ازیك «گردایهٔ اندیسدار از مجموعه‌ها» که به‌طورضمنی در بالاآمده است به صورتی دقیقتر درآوریم.

تعریف. فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از مجموعه‌ها باشد. یك **تابع اندیسگذار** برای $\mathcal{A}$ عبارت از تـابعی است پوشا مانند f از مجموعه‌ای مانند J ، موسوم بـه **مجموعهٔ اندیس** ، به $\mathcal{A}$. گردایهٔ $\mathcal{A}$ توأم با تابع اندیسگذار f را یك **خانوادهٔ اندیسدار از مجموعه‌ها** می‌خوانیم.

به‌ازای عضومفروض α از J ، ازاین به‌بعد مجموعهٔ $f(\alpha)$ را با نماد A_α، وخود این خانوادهٔ اندیسدار را با نماد

$$\{A_\alpha\}_{\alpha \in J},$$

نمایش می‌دهیم وآن را چنین می‌خوانیم : «خانوادهٔ همهٔ A_αها ، وقتی‌کـه α بر J تغییر می‌کند.» موقعی که مجموعهٔ اندیس مشخص است ، تنها به نوشتن $\{A_\alpha\}$ اکتفا می کنیم.

توجه‌کنید کـه اگرچه یك تابع اندیسگذار باید پوشا باشد ، لازم نیست یك‌به‌یك باشد و کاملاً امکان داردکـه $\alpha \neq \beta$ ، ولی مجموعه‌های A_α و A_β هردو یك عضو $\mathcal{A}$ باشند.

یکی از موارد کاربرد توابع اندیسگذار ، در نمادگـذاری جدید برای اجتماع و مقطع دلخواه مجموعه‌هاست. فرض‌کنیم $f : J \longrightarrow \mathcal{A}$ یك تابع اندیسگذار برای $\mathcal{A}$ ، و A_α نمایش $f(\alpha)$ باشد. دراین صورت ، بنابر تعریف :

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \text{ ، به‌ازای دست‌کم یك } \alpha \in J\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \text{ ، به‌ازای هر } \alpha \in J\}.$$

در واقع ، اینها فقط علامات جـدیدی برای مفاهیم تعریف شدهٔ سابق هستند ؛ به‌آسانی (و به‌کمك پوشا بودن تابع اندیسگذار) دیده می‌شود که اولی برابر اجتماع همهٔ اعضای

$\mathcal{A}$ و دومی مساوی مقطع همهٔ اعضای $\mathcal{A}$ است.

کاربرد اصلی توابع اندیسگذار در تعریف حاصل‌ضربهای دکارتی دلخواه است: فرض کنیم J یك مجموعهٔ اندیس و X مجموعه‌ای دلخواه باشد. یك **Jتایی** از اعضای X را به‌صورت تابعی مانند $\mathbf{x}: J \longrightarrow X$ تعریف می‌کنیم. اگر α عضوی از J باشد، اغلب مقدار تابع $\mathbf{x}$ در α را به‌جای $\mathbf{x}(\alpha)$ با x_α وخود تابع $\mathbf{x}$ را با نماد

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J}$$

نشان می‌دهیم، که به‌ازای یك مجموعهٔ اندیس دلخواه مانند J حتی‌الامکان تفاوتی با یك «نماد Jتایی» ندارد. مجموعهٔ همهٔ Jتایی از اعضای X را به X^J نمایش می‌دهیم.

تعریف. فرض کنیم $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ یك خانوادهٔ اندیسدار از مجموعه‌ها باشد، و $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$. **حاصل‌ضرب دکارتی** این خانوادهٔ اندیسدار، که به

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$$

نمایش داده می‌شود،عبارت است از مجموعهٔ همهٔ Jتایی‌هایی مانند $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ از اعضای X به‌طوری که به‌ازای هر α از J، $x_\alpha \in A_\alpha$.

به بیانی دیگر، این حاصل‌ضرب دکارتی، همان مجموعهٔ همهٔ توابع

$$\mathbf{x}: J \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$$

است که به‌ازای هر α از J، $\mathbf{x}(\alpha) \in A_\alpha$.

اگر مجموعهٔ اندیس J مشخص باشد، گاهی این حاصل‌ضرب را مختصراً به $\prod A_\alpha$، و عضو عمومی‌آن را به (x_α) نمایش می‌دهیم.

اگر همهٔ مجموعه‌های A_α مساوی مجموعه‌ای مانند X باشند، حاصل‌ضرب $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ همان مجموعهٔ X^J، یعنی مجموعهٔ همهٔ Jتایی‌ها از اعضای X است. در هنگام‌کار با X^J، برای نمایش اعضای‌آن، بسته به‌اینکه‌کدامیك مناسبتر باشد، گاه «نماد Jتایی» وگاه علامتگذاری مربوط به‌توابع را به‌کارمی‌بریم.

تمرینها

۱. ثابت کنید که تناظری دوسویی بین $A \times B$ و $B \times A$ موجود است.

۲. (الف) نشان دهید که اگر $n > 1$ آنگاه تناظری دوسویی بین مجموعه‌های ذیل برقرار است:

$$(A_1 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n \quad \text{و} \quad A_1 \times \cdots \times A_n.$$

(ب) فرض کنید J یك مجموعهٔ اندیس باشد؛ و $J=K\cup L$ ، که در آن، K و L جدا ازهم و ناتهی‌اند. ثابت کنید که تناظری دوسویی بین مجموعه‌های

$$(\Pi_{\alpha\in K}A_\alpha)\times(\Pi_{\alpha\in L}A_\alpha) \quad \text{و} \quad \Pi_{\alpha\in J}A_\alpha$$

برقرار است.

۳. فرض کنید J مجموعه‌ای‌اندیس (ناتهی) باشد. دو خانوادهٔ اندیسدار $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ و $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ را درنظر بگیرید و ثابت کنید که:

(الف) اگر به‌ازای هر α از J، $A'_\alpha\subset A_\alpha$، آنگاه $\Pi_{\alpha\in J}A'_\alpha\subset\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha$.[1]

(ب) عکس (الف)، درصورتی که $\Pi_{\alpha\in J}A'_\alpha$ ناتهی باشد، برقرار است.

(پ) $(\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha)\cap(\Pi_{\alpha\in J}B_\alpha)=\Pi_{\alpha\in J}(A_\alpha\cap B_\alpha)$.

(ت) $(\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha)\cup(\Pi_{\alpha\in J}B_\alpha)\subset\Pi_{\alpha\in J}(A_\alpha\cup B_\alpha)$.

(ث) اگر دست‌کم یکی از A_αها تهی باشد آنگاه $\Pi_{\alpha\in J}A_\alpha$ تهی است. در حالتی که هر A_α ناتهی است، چه حکمی می‌توانید بکنید؟ (تمرین ۴ از بخش ۱ـ۹ ملاحظه شود.)

۴. فرض کنید $n\in Z_+$، $m\in Z_+$، و $X\neq\varnothing$.

(الف) اگر $m\leqslant n$ آنگاه نگاشتی یك‌به‌یك مانند $f:X^m\to X^n$ بیابید.

(ب) نگاشتی دوسویی مانند $g:X^m\times X^n\to X^{m+n}$ بیابید.

(پ) نگاشتی یك‌به‌یك مانند $h:X^n\to X^\omega$ بیابید.

(ت) نگاشتی دوسویی مانند $k:X^n\times X^\omega\to X^\omega$ بیابید.

(ث) نگاشتی دوسویی مانند $l:X^\omega\times X^\omega\to X^\omega$ بیابید.

(ج) اگر $A\subset B$، نگاشتی یك‌به‌یك مانند $m:X^A\to X^B$ بیابید.

۵. کدامیك از زیر مجموعه‌های ذیل از R^ω را می‌توان به‌صورت حاصلضرب دکارتی زیر مجموعه‌هایی از R بیان کرد؟

(الف) $\{\mathbf{x}\mid$ به‌ازای هر i، x_i عددی است صحیح$\}$.

(ب) $\{\mathbf{x}\mid x_i\geqslant i$ به‌ازای هر $i\}$.

(پ) $\{\mathbf{x}\mid$ به‌ازای هر $i\geqslant 100$، x_i عددی است صحیح$\}$.

(ت) $\{\mathbf{x}\mid x_2=x_3\}$.

---

۱. به‌بیان دقیقتر، به‌ازای تابع مفروضی مانند $\mathbf{x}:J\to\cup A'_\alpha$، قبل‌از اینکه آن را به‌عنوان تابعی از J به $\cup A_\alpha$ درنظر بگیریم، باید حوزهٔ مقادیرآن را تغییر دهیم. این تغییر حوزهٔ مقادیر را، درمواقع کار با حاصلضربهای دکارتی، عملاً نادیده می‌گیریم.

۱-۶ مجموعه‌های متناهی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ، مجموعه‌های شمارا و ناشمارا ، انـواعی از مجموعه‌ها هستند که احتمالاً پیش‌ازاین باآنها برخورد کرده‌اید. باوجود این ، دراین بخش و بخش بعدی به بررسی آنها می‌پردازیم ، این نه‌تنها بدین جهت است که می‌خواهیم ازآگاهی شما ازآنها اطمینان حاصل کنیم ، بلکه بیشتربه دلیل توضیح بعضی نکات ویژهٔ منطقی است که بعداً باآنها مواجه خواهیم شد. نخست ، مجموعه‌های متناهی را در نظر می‌گیریم.

یادآوری می‌کنیم که اگر n عدد صحیح مثبتی باشدآنگاه

$$\{x \mid ۱ \leqslant x \leqslant n \text{ و } x \in Z_+\}$$

را به $\{۱, \ldots, n\}$ نمایش می‌دهیم. این مجموعـه را یك **قطعه** از اعداد صحیح مثبت می‌نامیم. مجموعه‌های $\{۱, \ldots, n\}$ نمونهٔ نخستین آن مجموعه‌هایی هستند کـه متناهی خوانده می‌شوند.

تعریف. مجموعهٔ A را **متناهی** گوییم درصورتی‌که یا تهی باشد ویا به‌ازای nی در Z_+ تناظری دوسویی مانند

$$f : A \longrightarrow \{۱, \ldots, n\}$$

موجود باشد. در حالت‌اول ، گوییم A **دارای صفر عضو** است ؛ و درحالت دوم ، گوییم A **دارای n عضو** است.

مثلاً ، خود مجموعهٔ $\{۱, \ldots, n\}$ دارای n عضواست. زیرا تابع‌همانی تناظری دوسویی است بین این مجموعه و خودش.

اینك، بدقت توجه کنید که : تا اینجا هنوزثابت نکرده‌ایم که به‌ازای مجموعهٔ متناهی مفروض A ، عدهٔ اعضایی «که A دارد» ، به‌طور یکتا توسط A معین می‌شود. برطبق‌آنچه که تا به‌حال در این‌کتاب گفته‌ایم ، ممکن است تناظرهایی دوسویی بین مجموعهٔ مفروض A و مجموعه‌های متفاوتی مانند $\{۱, \ldots, n\}$ و $\{۱, \ldots, m\}$ موجود باشد. شاید این امکان مضحك به‌نظر آید، زیرا درست مثل این است که بگوییم ممکن است دو نفر مهره‌های داخل یك جعبه را بشمارند و دو جواب متفاوت بـه‌دست آورند ، و هردو جواب درست باشند. تجربهٔ زندگی روزمرهٔ ما از شمردن ، این امکان‌را رد می‌کند ، و در حقیقت اثبات این مطلب برای مقادیر کوچك n ، مانند ۱ ، ۲ ، و یا ۳ آسان است. اما وقتی کـه n ، مثلاً، ۵ میلیون باشد ، اثبات مستقیم‌آن خواسته‌ای است ناممکن.

حتی اثبات تجربی نیز برای چنین مقادیر بزرگ n دشوار است . مثلاً ، می‌توان آزمایشی بدین‌گونه انجام داد که ده نفر را مستقل از یکدیگر به‌کار شمردن گردوهای یك انبار پر از گـردو گمارد. بـا درنظر گرفتن مسائل فیزیکی ، محتمل بـه‌نظر می‌رسد کـه شمارشگران همگی به‌یك جواب نخواهند رسید. البته ، می‌توان این‌طور نتیجه‌گیری کرد

که دست کم یکی از افراد اشتباه کرده است. ولی، این خود به معنی پذیرش درستی نتیجه‌ای است که می‌خواستیم آن‌را به‌روش تجربی ثابت کنیم. توضیح دیگری که می‌توان برای متفاوت بودن نتیجه‌ها آورد این است که واقعاً بین این مجموعهٔ گردوها و دو قطعهٔ متفاوت از اعداد صحیح مثبت تناظرهایی دوسویی برقرار است.

در زندگی واقعی، ما توضیح نخست‌را می‌پذیریم. یعنی، براساس تجربه‌های خود در شمردن عدهٔ اعضای مجموعه‌های نسبتاً کوچك، می‌پذیریم که این نتایج در مورد مجموعه‌های بزرگ دلخواه نیز برقرارند.

ولی، در ریاضیات (برخلاف زندگی واقعی)، شخص اجباری ندارد که این حکم را تنها براساس اعتقاد بپذیرد. اگر این حکم به‌جای اینکه برحسب عمل فیزیکی شمردن بیان شده باشد، به‌زبان وجود تناظرهای دوسویی فرمولبندی شود، قابل اثبات ریاضی است. ما بزودی ثابت‌خواهیم کرد که اگر $m \neq n$ آنگاه تناظرهایی دوسویی که مجموعهٔ A را هم بر $\{۱, \ldots, n\}$ و هم بر $\{۱, \ldots, m\}$ بنگارد وجود ندارند.

واقعیات «شهوداً بدیهی» دیگری دربارهٔ مجموعه‌های متناهی موجودند که قابل اثبات ریاضی‌اند؛ دراین بخش پاره‌ای از آنها را ثابت می‌کنیم و بقیه را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم. مطلب را با این واقعیت ساده آغاز می‌کنیم:

۱۰۶. لم فرض کنیم n یك عدد صحیح مثبت، A یك مجموعه، و $a_۰$ عضوی از A باشد. در این صورت، تناظری دوسویی مانند f بین مجموعهٔ A و مجموعهٔ $\{۱, \ldots, n+۱\}$ موجود است اگر و فقط اگر تناظری دوسویی مانند g بین مجموعه‌های $A-\{a_۰\}$ و $\{۱, \ldots, n\}$ وجود داشته باشد.

برهان. باید دو استلزام را ثابت کنیم. ابتدا، فرض می‌کنیم که تناظری دوسویی مانند

$$g : A-\{a_۰\} \longrightarrow \{۱, \ldots, n\}$$

موجود باشد. تابع $f : A \rightarrow \{۱, \ldots, n+۱\}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = g(x) \quad \text{،} \; x \in A-\{a_۰\} \; \text{به‌ازای}$$

$$f(a_۰) = n+۱.$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که f دوسویی است.

برای اثبات عکس آن، فرض کنیم تناظری دوسویی مانند

$$f : A \longrightarrow \{۱, \ldots, n+۱\}$$

موجود باشد. اگر $f(a_۰) = n+۱$، کار آسان است؛ دراین حالت تحدید تابع f به $A-\{a_۰\}$، یعنی $f \mid A-\{a_۰\}$ تناظردوسویی مطلوب بین $A-\{a_۰\}$ و $\{۱, \ldots, n\}$

است. درغیر این صورت، فرض کنیم $f(a_0)=m$ و a_1 عضوی از A باشد که $f(a_1)=n+1$. دراین‌صورت، $a_1 \neq a_0$. حال تابع جدیدی مانند

$$h: A \longrightarrow \{1, \ldots, n+1\}$$

را چنین تعریف می‌کنیم:

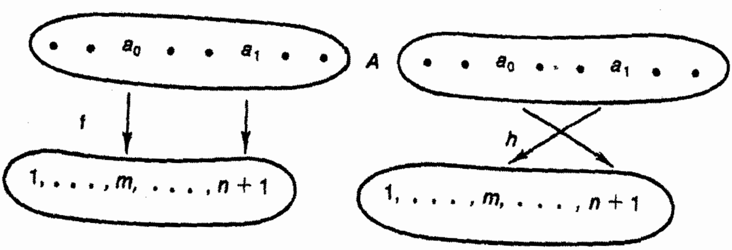
$$h(a_0)=n+1,$$

$$h(a_1)=m,$$

به‌ازای $x \in A-\{a_0\}-\{a_1\}$، $h(x)=f(x)$.

(شکل ۱۰ ملاحظه شود.) به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که h دوسویی است.

اکنون به‌همان حالت ساده سابق بازگشتیم؛ تحدید $h \mid A-\{a_0\}$ تناظر دوسویی مطلوب بین $A-\{a_0\}$ و $\{1, \ldots, n\}$ است.□



شکل ۱۰

ازاین لم چند نتیجهٔ مفید به‌دست می‌آید:

۲.۶ قضیه فرض کنیم A یک مجموعه باشد، و به‌ازای عددی مانند $n \in Z_+$، تناظری دوسویی مانند $f: A \to \{1, \ldots, n\}$ موجود باشد. دراین صورت، اگر B زیرمجموعهٔ سره‌ای از A باشد، هیچ تناظردوسویی بین B و مجموعهٔ $\{1, \ldots, n\}$ وجود ندارد؛ ولی (به‌شرط آنکه $B \neq \varnothing$) عضوی از Z_+ مانند m هست که $m < n$، و تناظری دوسویی مانند $h: B \to \{1, \ldots, m\}$ موجود است.

برهان. درحالتی‌که $B=\varnothing$ حکم بدیهی است. زیرا هیچ تناظر دوسویی بین مجموعهٔ تهی B و مجموعهٔ ناتهی $\{1, \ldots, n\}$ نمی‌تواند موجود باشد.

اکنون قضیه را «به‌استقرا» ثابت می‌کنیم. فرض کنیم Z_0 مجموعهٔ آن اعداد صحیح مثبتی باشد که به‌ازای آنها قضیه برقرار است. ثابت می‌کنیم Z_0 شامل یک و استقرایی

است. از اینجا، تساوی $Z_{\circ}=Z_{+}$ نتیجه می‌شود. بنابراین، قضیه به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n برقرار است.

ابتدا، حکم را در حالتی که $n=۱$ ثابت می‌کنیم. دراین حالت A مجموعهٔ تك‌عضوی $\{a\}$ است، و تنها زیر مجموعهٔ سرهٔ آن مجموعهٔ تهی است.

اکنون فرض می‌کنیم قضیه به‌ازای n برقرار باشد؛ ثابت می‌کنیم که به‌ازای $n+۱$ نیز برقرار است. فرض کنیم $f: A \to \{۱, \ldots, n+۱\}$ تابعی دوسویی و B یك زیر مجموعهٔ سرهٔ ناتهی A باشد. یك عضو $a_{\circ}$ از B و یك عضو $a_{۱}$ از $A-B$ را انتخاب می‌کنیم. با به‌کار بستن لم سابق نتیجه می‌گیریم که تناظری دوسویی مانند

$$g: A-\{a_{\circ}\} \longrightarrow \{۱, \ldots, n\}$$

موجود است. حال می‌گوییم $B-\{a_{\circ}\}$ زیر مجموعهٔ سرهٔ $A-\{a_{\circ}\}$ است. زیرا $a_{۱}$ به $A-\{a_{\circ}\}$ تعلق دارد ولی به $B-\{a_{\circ}\}$ تعلق ندارد. چون فرض کردیم قضیه به‌ازای n برقرار است، نتیجه می‌گیریم که:

(۱) هیچ تناظر دوسویی $h: B-\{a_{\circ}\} \to \{۱, \ldots, n\}$ موجود نیست.

(۲) یا $B-\{a_{\circ}\}=\varnothing$؛ و یا به‌ازای عددی مانند p، که $p<n$، تناظری دوسویی مانند

$$k: B-\{a_{\circ}\} \longrightarrow \{۱, \ldots, p\}$$

موجود است. ترکیب لم پیش و (۱) ایجاب می‌کند که هیچ تناظر دوسویی بین B و $\{۱, \ldots, n+۱\}$ موجود نیست. بدین گونه، نیمی از خواستهٔ ما ثابت می‌شود. برای اثبات نیمهٔ دوم، ملاحظه کنید که اگر $B-\{a_{\circ}\}=\varnothing$ آنگاه تناظری دوسویی بین B و $\{۱\}$ موجود است؛ و اگر $B-\{a_{\circ}\}\neq\varnothing$، می‌توان با به‌کار بستن لم سابق همراه با (۲)، نتیجه گرفت که تناظری دوسویی بین B و $\{۱, \ldots, p+۱\}$ موجود است. درهرحال، چنانکه می‌خواستیم، به‌ازای عددی مانند m که $m<n+۱$، تناظری دوسویی بین B و $\{۱, \ldots, m\}$ موجود است.

حال اصل استقرا نشان می‌دهد که قضیه برای هر $n \in Z_{+}$ برقرار است. □

۳.۶ نتیجه اگر A متناهی باشد آنگاه هیچ تناظر دوسویی بین A و زیر مجموعهٔ سره‌ای از آن وجود ندارد.

برهان. فرض کنیم B زیر مجموعهٔ سره‌ای از A و $f: A \to B$ تابعی دوسویی باشد. با توجه به‌فرض، به‌ازای عددی مانند n، تابعی دوسویی مانند $g: A \to \{۱, \ldots, n\}$ موجود است. بنابراین، تابع مرکب $g \circ f^{-۱}$ تناظری دوسویی بین B و $\{۱, \ldots, n\}$ است، و این با قضیهٔ قبل متناقض است. □

۴.۶ نتیجه عدهٔ اعضای مجموعهٔ متناهی A به‌طوریکتا توسط A مشخص می‌شود.

برهان. فرض کنیم $m<n$، و تناظرهای دوسویی ذیل موجود باشند:

$$f : A \longrightarrow \{1, \ldots, n\},$$
$$g : A \longrightarrow \{1, \ldots, m\}.$$

دراین صورت، تابع مرکب

$$g \circ f^{-1} : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$$

تناظری دوسویی بین $\{1, \ldots, n\}$ و یك زیر مجموعهٔ سرهٔ خودش است که با نتیجهٔ پیش تناقض دارد. □

۵.۶ نتیجه اگر B زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ متناهی A باشد آنگاه B نیز متناهی است. اگر B زیر مجموعهٔ سرهٔ A باشد آنگاه عدهٔ اعضای B از عدهٔ اعضای A کمتر است.

۶.۶ نتیجه Z_+ متناهی نیست.

برهان. تابع $f : Z_+ \to Z_+ - \{1\}$ باضابطهٔ $f(n) = n+1$ تناظری‌دوسویی بین Z_+ و یك زیر مجموعهٔ سرهٔ آن است. □

۷.۶ قضیه فرض کنیم B مجموعه‌ای ناتهی و n عدد صحیح مثبتی باشد. دراین‌صورت، گزاره‌های ذیل با یکدیگر معادل‌اند:

(۱) تابعی پوشا مانند $f : \{1, \ldots, n\} \to B$ موجود است.

(۲) تابعی یك‌به‌یك مانند $g : B \to \{1, \ldots, n\}$ موجود است.

(۳) B متناهی و حداکثر n عضو دارد.

برهان. ثابت می‌کنیم که

$$(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (1);$$

این برای اثبات معادل بودن گزاره‌های فوق کافی است. فرض کنیم $A = \{1, \ldots, n\}$.

$(1) \Longrightarrow (2)$. با داشتن تابع پوشای $f : A \to B$، تابع $g : B \to A$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$.g(b) = \text{کوچکترین عضو مجموعهٔ } f^{-1}(\{b\})$$

از آنجا که f پوشاست، مجموعهٔ $f^{-1}(\{b\})$ ناتهی است. می‌دانیم که چون Z_+ خوشترتیب است، هرزیر مجموعهٔ ناتهی آن کوچکترین عضو یکتایی دارد. بنابراین، g خوشتعریف است. تابع g یك‌به‌یك است، زیرا اگر $b \neq b'$ آنگاه مجموعه‌های $f^{-1}(\{b\})$ و $f^{-1}(\{b'\})$ جدا ازهم‌اند، و درنتیجه، کوچکترین اعضای آنها نیز باید متفاوت باشند.

(۳) $\Longrightarrow$ (۲). فرض کنیم $g: B \to A$ یک‌به‌یک و C مجموعهٔ تصویر $g(B)$ باشد. دراین صورت، تابع $g': B \to C$، که با تغییر دادن حوزهٔ مقادیر تابع g به‌دست آمده است، دوسویی است. چون C زیر مجموعه‌ای از $A=\{۱, \ldots, n\}$ است، به‌ازای عددی مانند p، که $p \leqslant n$، تناظری دوسویی مانند $h: C \to \{۱, \ldots, p\}$ موجود است. تابع مرکب $h \circ g'$ تناظری دوسویی بین B و $\{۱, \ldots, p\}$ است.

(۱) $\Longrightarrow$ (۳). فرض کنیم مجموعهٔ B دارای m عضو باشد، که درآن $n \geqslant m \geqslant ۱$. دراین صورت، تناظری دوسویی مانند

$$h: \{۱, \ldots, m\} \longrightarrow B$$

موجود است. اگر $m=n$ آنگاه h یک تابع پوشا از A بروی B است، و این همان است که می‌خواستیم. اگر $m < n$ آنگاه به‌ازای هر i، که $m < i \leqslant n$، با قرار دادن $f(i)=h(۱)$، تابع h را به تابع پوشای $f: \{۱, \ldots, n\} \to B$ گسترش می‌دهیم. □

۶.۸ نتیجه فرض کنیم $\{A\}_{\alpha \in J}$ خانواده‌ای اندیسدار از مجموعه‌ها باشد. اگر مجموعهٔ اندیس J و هریک از مجموعه‌های A_α متناهی باشند آنگاه مجموعه‌های

$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha \quad \text{و} \quad \prod_{\alpha \in J} A_\alpha$$

نیز متناهی‌اند.

به‌بیان مختصر، این قضیه بیان می‌کند که اجتماعهای متناهی و حاصلضربهای متناهی ازمجموعه‌های متناهی، متناهی‌اند. اثبات را به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.

تمرینها

۱. (الف) کلیهٔ نگاشتهای یک‌به‌یک

$$f: \{۱, ۲, ۳\} \longrightarrow \{۱, ۲, ۳, ۴\}$$

را بنویسید. ثابت کنید که هیچیک ازآنها دوسویی نیست. (این، برهانی مستقیم برای این مطلب است که یک مجموعهٔ سه عضوی، چهار عضو ندارد.)

(ب) چند نگاشت یک‌به‌یک

$$f: \{۱, \ldots, ۸\} \longrightarrow \{۱, \ldots, ۱۵\}$$

موجود است؟ (از اینجا متوجه می‌شوید که چراکسی میل ندارد مستقیماً ثابت کند که هیچ تناظر دوسویی بین این دو مجموعه وجود ندارد.)

۲. ثابت کنید که اگر B متناهی نباشد و $B \subset A$ آنگاه A هم متناهی نیست.

۳. فرض کنید X مجموعهٔ دو عضوی $\{\text{۱} ,\text{۰}\}$ باشد. تناظری دوسویی بین X^{ω} و یك زیر مجموعهٔ سرهٔ آن بیابید.

۴. فرض کنید A یك مجموعهٔ متناهی ناتهی و مرتب به‌ترتیب ساده باشد.
(الف) ثابت کنید که A دارای بزرگترین عضو است. [راهنمایی: به استقرا نسبت به‌عدهٔ اعضای A استدلال کنید.]
(ب) ثابت کنید که A و قطعه‌ای از اعداد صحیح مثبت یك نوع ترتیب دارند.

۵. (الف) ثابت کنید که $A \cup B$ متناهی است اگر و فقط اگر A و B متناهی باشند.
(ب) فرض کنید $J \neq \varnothing$. ثابت کنید اگر J متناهی و به‌ازای هر $\alpha \in J$ مجموعهٔ A_α متناهی باشد آنگاه $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ مجموعه‌ای است متناهی.
(پ) عکس (ب) تا چه اندازه برقرار است؟

۶. (الف) ثابت کنید که اگر A و B متناهی باشند آنگاه $A \times B$ نیز متناهی است.
(ب) فرض کنید $J \neq \varnothing$. ثابت کنید که اگر J و هریك از مجموعه‌های A_α متناهی باشند آنگاه $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ نیز متناهی است.
(پ) عکس (ب) تا چه اندازه برقرار است؟

۷. ثابت کنید که اگر A متناهی باشد آنگاه $\mathcal{P}(A)$، مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های A، نیز متناهی است. [راهنمایی: فرض کنید X مجموعهٔ دو عضوی $\{\text{۱} ,\text{۰}\}$ باشد. تناظری دوسویی بین $\mathcal{P}(A)$ و حاصلضرب دکارتی X^A تعریف کنید.]

۸. فرض کنید A و B دو مجموعهٔ مفروض باشند و $\mathcal{F}$ مجموعهٔ همهٔ توابع $f: A \to B$ باشد. ثابت کنید که اگر A و B متناهی باشند، $\mathcal{F}$ نیز متناهی است.

۱-۷ مجموعه‌های شمارا و ناشمارا

همان گونه که مجموعه‌های $\{\text{۱}, \ldots, n\}$ نخستین نمونهٔ مجموعه‌های متناهی‌اند، Z_+ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت نخستین نمونهٔ مجموعه‌های موسوم به شمارای نامتناهی است. در این بخش، به بررسی چنین مجموعه‌هایی خواهیم پرداخت؛ همچنین، مجموعه‌هایی می‌سازیم که نه متناهی و نه شمارای نامتناهی‌اند. این بررسی، به‌نوبهٔ خود ما را به‌بحثی در «تعریفات استقرایی» رهنمون می‌سازد.

تعریف. مجموعهٔ A را **نامتناهی** گوییم درصورتی که متناهی نباشد. اگر تناظری دوسویی مانند

$$f: Z_+ \longrightarrow A$$

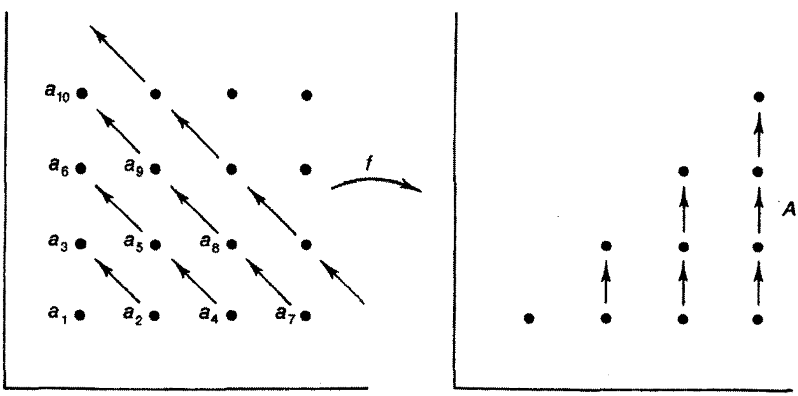
موجود باشد آنگاه A را **شمارای نامتناهی** می‌نامیم.

مثال ۱. مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح، شمارای نامتناهی است. زیرا بسهولت می‌توان دید که تابع $f: Z \to Z_+$ با ضابطهٔ

$$f(n)=\begin{cases} 2n & \text{اگر } n>0 \\ -2n+1 & \text{اگر } n\leqslant 0 \end{cases}$$

تناظری دوسویی است.

مثال ۲. حاصل‌ضرب $Z_+\times Z_+$ شمارای نامتناهی است. اگر اعضای حاصل‌ضرب $Z_+\times Z_+$ را با نقاط صحیح واقع در ربع اول صفحه نمایش دهیم آنگاه قسمت چپ‌شکل ۱۱ چگونگی «شمردن» این نقاط را، یعنی چگونگی برقرارکردن تناظری دوسویی بین آنها و اعداد صحیح نامنفی را، پیشنهاد می‌کند.



شکل ۱۱

البته، شکل را نمی‌توان جایگزین استدلال کرد. ولی، شکل راه استدلال را به ذهن القا می‌کند. A را زیرمجموعه‌ای از $Z_+\times Z_+$، متشکل ازهمهٔ زوجهای (x, y) که $y\leqslant x$، اختیار کنید. ابتدا، تناظری دوسویی مانند $f: Z_+\times Z_+ \to A$ با ضابطهٔ

$$f(x, y)=(x+y-1, y)$$

تعریف می‌کنیم. سپس، با تعریف تابع $g: A \to Z_+$ با ضابطهٔ

$$g(x, y)=\frac{1}{2}(x-1)x+y$$

تناظری دوسویی بین A و اعداد صحیح مثبت برقرار می‌سازیم.

برای اثبات اینکه مجموعهٔ $Z_+\times Z_+$ شمارای نامتناهی است، بعداً برهان دیگری ارائه می‌کنیم.

تعریف. مجموعه‌ای را **شمارا** گوییم درصورتی‌که متناهی ویا شمارای نامتناهی باشد. اگر مجموعه‌ای شمارا نباشدآن را **ناشمارا** می‌نامیم.

در مورد مجموعه‌های شمارا قضیه‌ای مشابه به قضیهٔ ۷.۶ داریم که بدین شرح است:

۱۰.۷ قضیه فرض کنیم B مجموعه‌ای ناتهی باشد. دراین صورت، گزاره‌های ذیل با یکدیگر معادل‌اند:

(۱) تابعی پوشا مانند $f: Z_+ \to B$ موجود است.

(۲) تابعی یك‌به‌یك مانند $g: B \to Z_+$ موجود است.

(۳) B شماراست.

برهان. استلزامهای (۱) $\Longrightarrow$ (۳) $\Longrightarrow$ (۲) $\Longrightarrow$ (۱) را ثابت می‌کنیم.

(۲) $\Longleftarrow$ (۱). فرض کنیم $f: Z_+ \to B$ تابعی‌پوشا باشد. تابع $g:B \to Z_+$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$g(b) = f^{-1}(\{b\}) \text{ کوچکترین عضو مجموعهٔ } .$$

چون f پوشاست، $f^{-1}(\{b\})$ ناتهی است، بنابراین g خوشتعریف است. نگاشت g یك‌به‌یك است. زیرا اگر $b \neq b'$ آنگاه $f^{-1}(\{b\})$ و $f^{-1}(\{b'\})$ دو مجموعهٔ جدا ازهم‌اند، ودرنتیجه‌کوچکترین اعضای‌آنها متمایزند.

(۳) $\Longleftarrow$ (۲). فرض کنیم $g: B \to Z_+$ یك‌به‌یك باشد. ثابت می‌کنیم B شماراست. با تغییر دادن حوزهٔ مقادیر g می‌توان به تناظری دوسویی از B به زیر-مجموعه‌ای از Z_+ دست یافت. بنابراین، برای رسیدن به‌نتیجهٔ مورد نظرکافی است ثابت کنیم هر زیرمجموعهٔ Z_+ شماراست. پس، فرض کنیم C زیرمجموعه‌ای از Z_+ باشد.

اگر C متناهی باشد، بنابر تعریف، شماراست. پس، فرض‌کنیم C نامتناهی باشد. دراین صورت، باید ثابت‌کنیم‌که C شمارای نامتناهی است. یعنی، بایدتناظری دوسویی مانند $h: Z_+ \to C$ برقرار کنیم.

h را «به استقرا» چنین تعریف می‌کنیم: $h(1)$ راکوچکترین عضو C می‌گیریم؛ این عضو وجود دارد، زیرا هر زیرمجموعهٔ ناتهی C از Z_+ دارای‌کوچکترین عضو است. حال فرض‌کنیم $h(1)$، . . .، $h(n-1)$ تعریف‌شده باشند. $h(n)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$h(n) = [C - h(\{1, \ldots, n-1\})] \text{ کوچکترین عضو } .$$

مجموعهٔ $C - h(\{1, \ldots, n-1\})$ تهی نیست؛ زیرا اگر تهی باشد آنگاه $h: \{1, \ldots, n-1\} \to C$ پوشاست، و درنتیجه، C متناهی خواهد بود (بنابر قضیهٔ ۷.۶). بنابراین، h خوشتعریف است. به این ترتیب، به‌ازای هر $n \in Z_+$، تابع $h(n)$ را به استقرا تعریف کرده‌ایم.

اثبات یك‌به‌یك بودن h بسیار آسان است. فرض کنیم $m < n$ ، ملاحظه می‌کنیم که $h(m)$ عضو مجموعهٔ $h(\{۱, \ldots, n-۱\})$ است و حال آنکه $h(n)$ ، بنابر تعریف، به‌این مجموعه تعلق ندارد. پس $h(m) \neq h(n)$.

برای اثبات پوشا بودن h ، فرض کنیم c عضو دلخواهی از C باشد؛ ثابت می‌کنیم که c در حوزهٔ مقادیر h قرار دارد. نخست، ملاحظه کنید که $h(Z_+)$ نمی‌تواند زیر-مجموعهٔ، مجموعهٔ متناهی $\{۱, \ldots, c\}$ باشد، زیرا $h(Z_+)$ نامتناهی است (h یك‌به‌یك است). بنابراین، n ی در Z_+ موجود است به‌طوری که $h(n) > c$. فرض کنیم m کوچکترین عضو Z_+ باشد که $h(m) \geqslant c$. دراین صورت، به‌ازای هر $i < m$ ، باید داشته باشیم $h(i) < c$. بنابراین، c به مجموعهٔ $h(\{۱, \ldots, m-۱\})$ تعلق ندارد. از طرفی چون $h(m)$ کوچکترین عضو مجموعهٔ $C - h(\{۱, \ldots, m-۱\})$ تعریف‌شده است، باید داشته‌باشیم $h(m) \leqslant c$. از این دو نامساوی باهم، تساوی مطلوب $h(m) = c$ به‌دست می‌آید.

$(۱) \Longrightarrow (۳)$. فرض کنیم B شمارا باشد. اگر B شمارای نامتناهی باشد آنگاه، بنابر تعریف، تناظری دوسویی مانند $f: Z_+ \rightarrow B$ موجود و حکم برقرار است. اگر B متناهی باشد به ازای عضوی از Z_+ ، مانند n ، تناظری دوسویی مانند $h: \{۱, \ldots, n\} \rightarrow B$ موجود است (یادآوری می‌کنیم که $B \neq \varnothing$). اکنون می‌توان تابع h را به تابع پوشای $f: Z_+ \rightarrow B$ با قرار دادن

$$f(i) = \begin{cases} h(i) & \text{به‌ازای } ۱ \leqslant i \leqslant n، \\ h(۱) & \text{به‌ازای } i > n، \end{cases}$$

گسترش داد. بنابراین، اثبات قضیه تمام است. □

۲.۷ نتیجه هرزیر مجموعهٔ یك مجموعهٔ شمارا، شماراست.

۳.۷ نتیجه مجموعهٔ $Z_+ \times Z_+$ شمارای نامتناهی است.

برهان. نظر به‌قضیهٔ قبل، کافی است که نگاشتی یك‌به‌یك مانند $f: Z_+ \times Z_+ \rightarrow Z_+$ بسازیم. برای این منظور، f را چنین تعریف می‌کنیم

$$f(n, m) = ۲^n \cdot ۳^m.$$

بررسی یك‌به‌یك بودن f آسان است. فرض کنیم $۲^n \cdot ۳^m = ۲^p \cdot ۳^q$. اگر $n < p$ آنگاه $۳^m = ۲^{p-n} ۳^q$ ، که این با فرد بودن ۳^m ، به‌ازای هر m ، تناقض دارد. بنابراین، $n = p$. درنتیجه، $۳^q = ۳^m$. حال اگر $m < q$ آنگاه $۳^{q-m} = ۱$ ، که تناقضی دیگر است. پس $m = q$. □

مثال ۳. Q_+ مجموعهٔ اعداد گویای مثبت شمارای نامتناهی است. زیرا تابع $g: Z_+ \times Z_+ \rightarrow Q_+$ باضابطهٔ

$$g(n,\ m) = \frac{m}{n}$$

پوشاست. چون $Z_+ \times Z_+$ شماراست، تابعی پوشا مانند $f: Z_+ \rightarrow Z_+ \times Z_+$ نیز موجود است. در نتیجه، تابع مرکب $g \circ f: Z_+ \rightarrow Q_+$ پوشاست. بنابراین، Q_+ شماراست. البته، Q_+ نامتناهی هم هست، زیرا حاوی Z_+ است.

به‌عنوان تمرین ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا شمارای نامتناهی است.

در برهان قضیهٔ ۱.۷، که‌در آن ما کمی پارا فراتراز اصول منطق گذاشته‌ایم، نکته‌ای وجود دارد. این نکته در اثبات استلزام (۳) $\Longrightarrow$ (۲) واقع است، درآنجا که گفتیم «بنابر اصل استقرا» به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n تابع h تعریف شده است. احتمالاً قبل‌از این هم استدلالهایی این چنین را، بی هیچ چون‌وچرایی دربارهٔ مجاز بودن آنها، دیده‌اید. ما نیز در تمرینهای بخش ۱ــ۴، برای تعریف a^n، چنین استدلالی را به‌کار بردیم.

اما دراینجا مسئله‌ای مطرح است، وآن اینکه اصل استقرا فقط می گوید که اگر $Z_\circ$ زیر مجموعه‌ای استقرایی از اعداد صحیح مثبت و شامل یك باشد آنگاه $Z_\circ = Z_+$. به‌منظور استفاده ازاین اصل‌در اثبات یك قضیه «به استقرا» برهان‌را چنین شروع می کنند: «فرض کنیم $Z_\circ$ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبتی باشد که به‌ازای‌آنها قضیه راست‌است»، سپس ثابت می‌کنند که $1 \in Z_\circ$ و $Z_\circ$ استقرایی است، و در نتیجه $Z_\circ$ باید همان Z_+ باشد.

ولی، ما در قضیهٔ فوق در حقیقت قضیه‌ای را به استقرا ثابت نکرده‌ایم، بلکه چیزی را به استقرا تعریف کرده‌ایم. دراین مورد، شروع برهان باید چگونه باشد؟ آیا می‌توانیم جملهٔ «فرض‌کنیم $Z_\circ$ مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیحی باشدکه به‌ازای‌آنها تابع h تعریف شده است» راآغازکارخود قرار دهیم؟ ازآنجاکه h در ابتدای برهان هیچ معنایی ندارد، این‌کار ناموجه است. نماد h تنها درضمن برهان معنی پیدا می کند. بنابراین‌چیز بیشتری مورد نیاز است.

آنچه مورد نیازاست اصل دیگری‌است موسوم به اصل تعریف بازگشتی. دربرهان قضیهٔ فوق می‌خواستیم حکم کنیم به‌اینکه:

زیرمجموعهٔ نامتناهی C از Z_+ مفروض است، تابع یکتایی مانند $h: Z_+ \rightarrow C$ موجود است که دردستورذیل صدق می کند:

$$(*) \qquad \begin{aligned} &h(1) = C \text{ کوچکترین عضو} \\ &h(i) = [C - h(\{1, \ldots, i-1\})] \text{ کوچکترین عضو}\ \ \text{،}\ i > 1 \text{ به‌ازای} \end{aligned}$$

دستور (*) را یك **دستور بازگشتی** برای h می‌خوانند؛ این‌دستور h را برحسب خودش تعریف می‌کند. تعریفی راکه با یك چنین دستوری ارائه شود **تعریف بازگشتی** می‌نامیم.

اما، در به‌کارگیری تعریف بازگشتی ممکن است‌که شخص با پاره‌ای مشکلات منطقی مواجه شود. همهٔ دستورهای بازگشتی بامعنی نیستند. مثلاً، دستور بازگشتی

$$h(i) = [C - h(\{۱, \ldots, i+۱\})] \text{ کوچکترین عضو مجموعهٔ }$$

ناقض خود است؛ زیرا اگرچه $h(i)$ الزاماً به مجموعهٔ $h(\{۱, \ldots, i+۱\})$ تعلق‌دارد، ولی این دستور می‌گوید به‌آن متعلق نیست. مثال دیگر پارادوکس قدیمی ذیل است:

فرض‌کنیم آرایشگر شهر سویل[1] صورت‌کسانی را می‌تراشد که خودشان صورت خود را نمی‌تراشند. صورت‌آرایشگر را چه‌کسی خواهد تراشید؟

دراین گزاره آرایشگر دوبار ظاهر می‌شود، یك‌بار در عبارت «آرایشگر شهر سویل» و بار دیگر به عنوان عضوی از مجموعهٔ «مردان شهر سویل»؛ و این تعریف برای‌کسی که آرایشگر صورتش را می‌تراشد تعریفی بازگشتی است وناقض خود است.

باوجود این، بعضی‌از دستورهای بازگشتی با معنی‌اند. به بیان صریحتر، اصل ذیل برقرار است:

اصل تعریف بازگشتی. فرض کنیم A مجموعه‌ای باشد. اگر دستوری داشته‌باشیم که $h(۱)$ را به‌عنوان عضوی‌یکتا از A تعریف کند و به‌ازای هر $i > ۱$، $h(i)$ را به‌طور یکتا به عنوان عضوی از A و برحسب مقادیر h،به ازای اعداد صحیح مثبت کوچکتر از i، تعریف کند آنگاه این دستور تابع یکتای $h: Z_+ \rightarrow A$ را مشخص می‌کند.

این اصلی است‌که ما عملاً آن‌را در برهان قضیهٔ ۱.۷ به‌کار بردیم. اگر بخواهید می‌توانیدآن را بدون هیچ دلیلی بپذیرید. اما، با استفاده از اصل استقرا، می‌توان آن‌را بدقت اثبات کرد. در بخش آتی آن را دقیقتر بیان می‌کنیم وچگونگی اثبات آن را می‌نمایانیم.

ریاضیدانان بندرت‌صریحاً به‌این‌اصل اشاره می‌کنند. برهانهایی که‌آنها می‌نویسند اغلب شبیه برهان ما برای قضیهٔ ۱.۷ است؛ یعنی برهانی‌که درآن برای تعریف یك‌تابع به «اصل استقرا» استناد می‌کنند، وحال آنکه در حقیقت اصل تعریف بازگشتی را به‌کار می‌برند. در این‌کتاب ما نیز از وسواس و موشکافی غیر ضروری اجتناب کرده از آنان پیروی می‌کنیم.

اکنون قواعد بیشتری برای شناسایی شماره‌ای مجموعه‌ها می‌آوریم.

۴.۷ قضیه اجتماع شمارای مجموعه‌های شمارا، شماراست.

برهان. فرض‌کنیم $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ خانواده‌ای اندیسدار از مجموعه‌های شمارا باشد،

1. Seville

که‌در آن مجموعهٔ اندیس J شماراست. حالتی که $J=\varnothing$ بدیهی است. پس فرض کنیم $J\neq\varnothing$. همچنین، برای سهولت، هریك از مجموعه‌های A_α را ناتهی می‌گیریم؛ این فرض هیچ چیزی را تغییر نمی‌دهد.

چون‌هرمجموعهٔ A_α شماراست، به‌ازای هر α، می‌توان‌تابع‌پوشای $f_\alpha:Z_+\to A_\alpha$ را اختیارکرد. همچنین، می‌توان تابع پوشای $g:Z_+\to J$ را برگزید. اکنون تابع

$$h:Z_+\times Z_+\longrightarrow \bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha$$

را چنین تعریف می‌کنیم:

$$h(n,\ m)=f_{g(n)}(m)$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که h پوشاست. چون بین $Z_+\times Z_+$ و Z_+ تناظری دوسویی وجود دارد، شمارایی اجتماع موردنظر از قضیهٔ ۱.۷ نتیجه می‌شود. □

۵.۷. قضیه هرحاصل‌ضرب متناهی از مجموعه‌های شمارا، شماراست.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که حاصل‌ضرب دومجموعهٔ شمارای A و B شماراست. حکم در حالتی که A یا B تهی باشد بدیهی است. در غیر این صورت، توابع پوشای $f:Z_+\to A$ و $g:Z_+\to B$ را برمی‌گزینیم. تابع $h:Z_+\times Z_+\to A\times B$ با ضابطهٔ $h(n,\ m)=(f(n),\ g(m))$ پوشاست، وبنابراین $A\times B$ شماراست.

درحالت‌کلی، به‌استقرا استدلال می‌کنیم. فرض‌کنیم که اگر هریك از A_iها شمارا باشند، دراین صورت $A_1\times\cdots\times A_{n-1}$ شماراست. مطلب‌را در مورد $A_1\times\cdots\times A_n$ ثابت می‌کنیم. نخست، ملاحظه می‌کنیم که تناظر دوسویی

$$g:A_1\times\cdots\times A_n\longrightarrow (A_1\times\cdots\times A_{n-1})\times A_n$$

با ضابطهٔ

$$g(x_1,\ldots,x_n)=((x_1,\ldots,x_{n-1}),\ x_n)$$

موجود است. چون، بنا برفرض استقرا، مجموعهٔ $A_1\times\cdots\times A_{n-1}$ شماراست، و بنابرفرض، A_n نیز شماراست، همان‌طورکه در قسمت اول قضیه ثابت شد، حاصل‌ضرب این‌دو مجموعه نیز شمارا خواهد بود. در نتیجه، $A_1\times\cdots\times A_n$ نیز شماراست. □

در اینجا حکم بسیار وسوسه‌انگیز «حاصل‌ضرب شمارای مجموعه‌های شمارا، شماراست» به‌ذهن می‌رسد. ولی این‌حکم برقرار نیست:

۶.۷. قضیه فرض‌کنیم X مجموعهٔ دوعضوی $\{0,1\}$ باشد. در این‌صورت، مجموعهٔ X^ω شمارا نیست.

برهان. ثابت می‌کنیم که به‌ازای هرتابع مفروضی مانند

$$g:Z_+\longrightarrow X^\omega$$

این تابع نمی‌تواند پوشا باشد. برای این‌منظور، فرض کنیم

$$g(n) = (x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \cdots, x_{nm}, \cdots)$$

که درآن هر x_{ij} مساوی ۰ ویا ۱ است. اکنون نقطهٔ $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)$ از X^ω را چنین تعریف می‌کنیم:

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{به‌ازای } x_{nn} = 1 \\ 1 & \text{به‌ازای } x_{nn} = 0 \end{cases}$$

(اگر اعداد x_{ni} را دریك‌آرایهٔ مستطیلی بنویسیم، x_{nn} ها عناصر قطری این‌آرایه خواهند بود؛ ما $\mathbf{y}$ را چنان برگزیده‌ایم که nمین مختص‌آن با درایهٔ قطری x_{nn} متفاوت است.)

$\mathbf{y}$ عضوی است از X^ω و در تصویر تابع g قرار ندارد؛ زیرا به‌ازای هرمقدار مفروض n، دو نقطهٔ $g(n)$ و $\mathbf{y}$ دست‌کم در nمین مختص تفاوت دارند. بنابراین، g پوشا نیست. □

حاصل‌ضرب دکارتی $\{0, 1\}^\omega$ مثالی از مجموعه‌ای ناشماراست. مثال دیگر از این قرار است:

۷.۰۷ قضیه $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ یعنی مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbb{Z}_+$ ناشماراست.

برهان. یك روش اثبات این قضیه این است که ثابت‌کنیم تناظری دوسویی بین $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ و $\{0, 1\}^\omega$ برقرار است. این برهان به‌صورت مسئله‌ای درتمرینهای این‌بخش آمده است.

استدلال دیگر سرراست‌تراست. ثابت می‌کنیم‌که اگر A مجموعهٔ دلخواهی‌باشد، هیچ تابع پوشایی مانند $g : A \to \mathcal{P}(A)$ وجود ندارد. ازاینجا، بویژه نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ شمارا نیست.

پس فرض‌کنیم $g : A \to \mathcal{P}(A)$ تابعی باشد. به‌ازای هر $a \in A$، تصویر a، یعنی $g(a)$، یك زیرمجموعهٔ A است‌که ممکن است شامل a باشد یا نباشد. فرض‌کنیم B مجموعهٔ همهٔ اعضای a از A باشد به‌طوری‌که a به $g(a)$ تعلق ندارد؛

$$B = \{a \mid a \in A - g(a)\}.$$

حال ممکن است‌که B تهی ویا ممکن است خود A باشد، اما این امر موجب اشکالی نمی‌شود. مدعی هستیم که B زیرمجموعهٔ A است و در تصویر g قرار ندارد. برای اثبات، فرض‌کنیم به‌ازای عضوی از A مانند a_0، $B = g(a_0)$. می‌پرسیم که a_0 به B تعلق دارد یانه؟ بنابرتعریف B،

$$a_0 \in B \iff a_0 \in A - g(a_0) \iff a_0 \in A - B.$$

پس درهرحالت به‌تناقض برمی‌خوریم. □

تااینجا وجود مجموعه‌های ناشمارا را ثابت کرده‌ایم. اما هنوزسخنی از مأنوسترین مجموعهٔ ناشمارا، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی به‌میان نیاورده‌ایم. احتمالاً اثبات ناشمارایی R را قبلاً دیده‌اید. اگرفرض کنیم هر عدد حقیقی‌دارای نمایشی یکتا توسط کسراعشاری نامتناهی باشد (به‌شرط آنکه منتهی‌شدن نمایش یک‌عدد به‌یک ردیف نامتناهی از ۹ها ممنوع باشد) آنگاه با مختصر تغییری درروش قطری برهان قضیهٔ ۶.۷، می‌توان‌ناشمارایی اعداد حقیقی‌را ثابت کرد. اما، این برهان ازجهاتی بسیار رضایت‌بخش نیست؛ یکی‌اینکه نمایش اعشاری نامتناهی عددی حقیقی به‌هیچ‌وجه از نتایج مقدماتی اصول موضوع نیست و اثبات‌آن مستلزم بحث مفصلی است؛ دلیل دیگر اینکه ناشمارایی R در واقع به‌بسط اعشاری نامتناهی اعضای R ویا، در واقع، به‌هیچیک از خواص جبری R بستگی ندارد. وفقط به‌خواص‌ترتیبی R مربوط است. مابعداً (بخش۳ـ۶) ناشمارایی R را تنها به‌کمک خواص ترتیبی‌آن ثابت می‌کنیم.

تمرینها

۱. ثابت کنید که Q شمارای نامتناهی است.

۲. ثابت کنید که نگاشتهای f و g ی مثالهای ۱ و ۲ دوسویی‌اند.

۳. فرض کنید A یك مجموعه و X مجموعهٔ دوعضوی $\{۱ ,۰\}$ باشد. ثابت کنید که تناظری دوسویی بین $\mathcal{P}(A)$، مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A، و حاصلضرب دکارتی X^A موجود است.

۴. (الف) عددحقیقی x را **جبری** (روی اعداد گویا) خوانیم درصورتی که درمعادله‌ای بسجمله‌ای با درجهٔ مثبت مانند

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0$$

باضرایب‌گویای a_i، صدق کند. بافرض اینکه هرمعادلهٔ بسجمله‌ای تنها تعداد متناهی ریشه داشته‌باشد، ثابت کنید که مجموعهٔ اعداد جبری شماراست.
(ب) عددی حقیقی را وقتی **متعالی** خوانیم که جبری نباشد. با فرض ناشمارایی مجموعهٔ اعداد حقیقی، ثابت کنید مجموعهٔ اعداد متعالی نیز ناشماراست. (تا حدی شگفت‌انگیز است که تنها بادوعدد متعالی e و π مأنوسیم. حتی اثبات متعالی‌بودن این‌دو عدد هم‌کاری است دشوار.)

۵. مطلوب است تعیین شمارایی هریك از مجموعه‌های ذیل. برای جوابهای خود دلیل بیاورید.

(الف) مجموعهٔ A متشکل از همهٔ توابعی مانند $f:\{0, 1\} \rightarrow Z_+$.
(ب) مجموعهٔ B_n متشکل از همهٔ توابعی مانند $f:\{1, \ldots, n\} \rightarrow Z_+$.
(پ) مجموعهٔ $C=\bigcup_{n\in Z_+} B_n$.
(ت) مجموعهٔ D متشکل از همهٔ توابعی مانند $f: Z_+ \rightarrow Z_+$.
(ث) مجموعهٔ E متشکل از همهٔ توابعی مانند $f: Z_+ \rightarrow \{0, 1\}$.
(ج) مجموعهٔ F متشکل ازهمهٔ توابعی مانند $f: Z_+ \rightarrow \{0, 1\}$ که «سرانجام صفرند». [وقتی که می گوییم تابع f **سرانجام صفر** است، مقصود این است که عددصحیح مثبتی مانند N هست که، به‌ازای هر n، اگر $n \geqslant N$ آنگاه $f(n)=0$.]
(چ) مجموعهٔ G متشکل از همهٔ توابعی مانند $f: Z_+ \rightarrow Z_+$ که سرانجام ۱ هستند.
(ح) مجموعهٔ H متشکل از همهٔ توابعی مانند $f: Z_+ \rightarrow Z_+$ که سرانجام ثابت‌اند.
(خ) مجموعهٔ I متشکل از همهٔ زیرمجموعه‌های دوعضوی Z_+.
(د) مجموعهٔ J متشکل از همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی Z_+.

۶. اگر تناظری دوسویی بین مجموعه‌های A و B برقرارباشد، گوییم این‌دو مجموعه **یك‌عدد اصلی دارند**.
(الف) ثابت کنید که اگر $B \subset A$ ونگاشتی یك به‌یك مانند

$$f: A \longrightarrow B$$

موجود باشدآنگاه A و B یك‌عدد اصلی‌دارند. [راهنمایی: A_nها و B_nها را چنین تعریف می‌کنیم؛ $A_1=A$ ، $B_1=B$ ، و به‌ازای $n>1$ ، $A_n=f(A_{n-1})$ و $B_n=f(B_{n-1})$. (بازهم تعریفی بازگشتی!) توجه‌کنید که

$$A_1 \supset B_1 \supset A_2 \supset B_2 \supset A_3 \supset \cdots.$$

اکنون تابع $h: A \rightarrow B$ را باضابطهٔ ذیل تعریف کنید:

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{اگر به‌ازای } n \text{ ی } x \in A_n - B_n\text{،} \\ x & \text{در غیر این صورت،} \end{cases}$$
]

(ب) قضیه (قضیهٔ شرودر ـ برنشتاین[1]) اگر توابع یك به یك $f: A \rightarrow C$ و $g: C \rightarrow A$ وجود داشته‌باشندآنگاه A و B یك‌عدد اصلی دارند.

۷. ثابت کنید که مجموعه‌های D و E تمرین ۵ یك‌عدد اصلی دارند.

---
1. Schroeder - Bernstein

۸. فرض کنید $X=\{۰,۱\}$، و $\mathcal{B}$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های شمارای X^ω باشد. ثابت کنید که X^ω و $\mathcal{B}$ یك‌عدد اصلی دارند.

۹. (الف) دستور بازگشتی

$$h(۱)=۱,$$
$$(*)\qquad h(۲)=۲,$$
$$h(n)=[h(n+۱)]^۲-[h(n-۱)]^۲ \quad \text{به‌ازای } n\geqslant ۲،.$$

از نوعی نیست که اصل تعریف بازگشتی شامل آن شود. با وجود این، ثابت کنید که تابعی مانند $h:Z_+ \to R$ وجود دارد که در این دستور صدق می‌کند. [راهنمایی: دستور(*) را چنان بازنویسی کنید که اصل مذکور را بتوان در مورد آن به‌کاربرد و فرض کنید h مثبت است.]

(ب) ثابت کنید که دستور (*) درقسمت (الف)، تابع h را به‌طوریکتا مشخص نمی‌کند. [راهنمایی: اگر h تابع مثبتی باشد که در دستور(*) صدق کندآنگاه تابع f را چنین تعریف کنید: به‌ازای $i\neq ۳$، $f(i)=h(i)$، و $f(۳)=-h(۳)$.]

(پ) ثابت کنید که تابعی مانند $h:Z_+ \to R$ وجود ندارد که دردستوربازگشتی ذیل صدق کند

$$h(۱)=۱,$$
$$h(۲)=۲,$$
$$h(n)=[h(n+۱)]^۲+[h(n-۱)]^۲ \quad \text{به‌ازای } n\geqslant ۲،.$$

*۸-۱ اصل تعریف بازگشتی

پیش از اینکه صورت کلی اصل تعریف بازگشتی‌را در نظر بگیریم،آن‌را در حالت‌خاص، که در قضیهٔ ۱.۷ به‌کارگرفته شد، ثابت می‌کنیم. این‌کار، هنگام درنظرگرفتن حالت کلی، ایدهٔ اصلی اثبات را روشنتر می‌کند.

بنابراین، به‌ازای زیرمجموعهٔ نامتناهی مفروض C از Z_+، دستور بازگشتی ذیل را برای تابعی مانند $h:Z_+ \to C$ درنظر می‌گیریم:

$$(*)\qquad h(۱)=\text{کوچکترین عضو مجموعهٔ } C,$$
$$h(i)=\text{کوچکترین عضومجموعهٔ}[C-h(\{۱,\dots,i-۱\})] \quad \text{به‌ازای } i>۱،.$$

ثابت می‌کنیم که تابع یکتای $h:Z_+ \to C$ وجود دارد که در این دستور بازگشتی صدق می‌کند.

نخستین گام، اثبات وجود توابعی‌است که برقطعات $\{۱,\ldots,n\}$ از Z_+ تعریف می‌شوند و در شرط (*) صدق می‌کنند:

۱.۰۸ لم اگر $n \in Z_+$ آنگاه تابعی مانند

$$f:\{۱,\cdots,n\} \to C$$

موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر i درحوزهٔ تعریف خود در (*) صدق می‌کند.

برهان. نکتهٔ اصلی این است که این‌لم گزاره‌ای وابسته به n است. بنابراین، قابل اثبات به‌وسیلهٔ‌استقرا است. فرض‌کنیم $Z_\circ$ مجموعهٔ‌همهٔ n هایی باشد‌که به‌ازای‌آنها‌این‌لم برقراراست. ثابت می‌کنیم‌که $Z_\circ$ شامل یك واستقرایی است؛ وازاینجا نتیجه می‌شود‌که $Z_\circ = Z_+$. لم به‌ازای $n=۱$ برقرار است، زیرا تابع $f:\{۱\} \to C$ باضابطهٔ

$$f(۱) = \text{کوچکترین عضو } C$$

در (*) صدق می‌کند.

فرض‌کنیم لم به‌ازای $n-۱$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم به‌ازای n نیز برقرار است. بنابرفرض استقرا، تابعی مانند $f':\{۱,\ldots,n-۱\} \to C$ موجود است که به‌ازای هر i در حوزهٔ تعریف خود در (*) صدق می‌کند. اکنون تابع $f:\{۱,\ldots,n\} \to C$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(i) = f'(i) \quad \text{،}\; i \in \{۱,\ldots,n-۱\} \text{ به‌ازای}\text{،}$$

$$f(n) = [C - f'(\{۱,\ldots,n-۱\})] \text{ کوچکترین عضو}.$$

چون C نامتناهی‌است، f' پوشا نیست؛ درنتیجه، مجموعهٔ $C - f'(\{۱,\ldots,n-۱\})$ ناتهی است، و $f(n)$ خوشتعریف است. توجه کنید‌که این تعریف قابل قبول است، چون f را برحسب f' تعریف کردیم نه برحسب خودش.

به آسانی ملاحظه می‌شود که f به‌ازای هر i در حوزهٔ تعریف خود در (*) صدق می‌کند. به‌ازای $i \leqslant n-۱$، چون تابع f مساوی f' است، f در (*) صدق می‌کند. همچنین، به‌ازای $i=n$، f در (*) صدق می‌کند، زیرا بنابرتعریف،

$$f(n) = [C - f'(\{۱,\ldots,n-۱\})] \text{ کوچکترین عضو}$$

و $f'(\{۱,\ldots,n-۱\}) = f(\{۱,\ldots,n-۱\})$. □

۲.۰۸ لم اگرتوابع $f:\{۱,\ldots,n\} \to C$ و $g:\{۱,\ldots,m\} \to C$ به‌ازای هر i از حوزهٔ تعریف خود در (*) صدق کنند آنگاه به‌ازای هر i که درحوزهٔ تعریف هردوتابع قرارداشته باشد، $f(i)=g(i)$.

برهان. فرض‌کنیم چنین نباشد. i را کوچکترین عدد صحیح مثبتی قرار می‌دهیم که به‌ازای‌آن $f(i) \neq g(i)$. البته $i \neq ۱$، زیرا بنابر (*)،

$$f(\text{۱}) = C \text{ کوچکترین عضو } = g(\text{۱})$$

پس، $i > \text{۱}$ و به‌ازای هر j که $j < i$ ، $f(j) = g(j)$. زیرا f و g در (*) صدق می کنند،

$$f(i) = [C - f(\{\text{۱}, \ldots, i-\text{۱}\})] \text{ کوچکترین عضو},$$

$$g(i) = [C - g(\{\text{۱}, \ldots, i-\text{۱}\})] \text{ کوچکترین عضو}.$$

چون $f(\{\text{۱}, \ldots, i-\text{۱}\}) = g(\{\text{۱}, \ldots, i-\text{۱}\})$ ، خواهیم داشت $f(i) = g(i)$ ، واین با انتخاب i متناقض است.□

۸.۳. قضیه تابعی یکتا مانند $h : Z_+ \longrightarrow C$ وجود دارد که به ازای هر $i \in Z_+$، در (*) صدق می‌کند.

برهان. بنابرلم ۱.۸، به‌ازای هر n، تابعی از $\{\text{۱}, \ldots, n\}$ بتوی C وجود دارد که به‌ازای هر i از حوزهٔ تعریف خود در (*) صدق می کند. بنابرلم ۲.۸، به‌ازای n مفروض، این تابع منحصر به‌فرد است؛ یعنی هردوتابعی که در (*) صدق کنند و حوزهٔ تعریفشان یکی باشد باید مساوی باشند. فرض‌کنیم $f_n : \{\text{۱}, \ldots, n\} \to C$ این تابع یکتا باشد.

اینك مرحلهٔ اساسی برهان پیش می‌آید. تابع $h : Z_+ \to C$ را چنان تعریف می‌کنیم که قاعدهٔ تناظرآن، U، اجتماع همهٔ قاعده‌های تناظر توابع f_n باشد. قاعدهٔ تناظر تابع f_n زیرمجموعه‌ای از $\{\text{۱}, \ldots, n\} \times C$ است؛ بنابراین، U زیرمجموعه‌ای از $Z_+ \times C$ است. باید ثابت‌کنیم که U قاعدهٔ تناظری برای‌تابعی مانند $h : Z_+ \to C$ است.

یعنی باید ثابت‌کنیم که هرعضو i از Z_+ به عنوان مختص اول تنها یك‌عضو U ظاهر می‌شود. اثبات این موضوع آسان است. عدد صحیح i در حوزهٔ تعریف تابع f_n قرار دارد اگر و فقط اگر $i \leqslant n$. بنابراین، مجموعهٔ اعضایی از U که i مختص اول آنهاست، دقیقاً همان مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتبی است به‌صورت $(i, f_n(i))$، که در آن $i \leqslant n$. اکنون بنابرلم ۲.۸، اگر $i \leqslant n$ و $i \leqslant m$ آنگاه $f_n(i) = f_m(i)$. درنتیجه، همهٔ این اعضای U متساوی‌اند؛ یعنی فقط یك عضودر U هست‌که i مختص‌اول آن‌است.

اثبات صدق کردن h در (*) نیز آسان است؛ وآن نتیجهٔ این واقعیت است‌که:

به‌ازای $i \leqslant n$، $h(i) = f_n(i)$؛

و f_n به‌ازای هر i در حوزهٔ تعریف خود در (*) صدق می کند.

برهان یکتایی کاملاً مشابه برهان لم ۲.۸ است.□

اینك، اصل کلی تعریف بازگشتی‌را فرمولبندی می کنیم. برای اثبات آن چیزتازه‌ای

لازم نیست، بنابراین، آن‌را به‌عنوان تمرین باقی می گذاریم.

۴.۸. قضیه (اصل تعریف‌بازگشتی) فرض‌کنیم A یك مجموعه‌باشد و $a_0 \in A$. فرض کنیم ρ تابعی باشدکه به‌هرتابع fکه قطعه‌ای ازاعداد صحیح مثبت‌را در A می نگارد، عضوی از A را نظیرکند. دراین‌صورت، تابعی یکتا مانند

$$h : Z_+ \longrightarrow A$$

موجود است به‌طوری‌که

$$(*) \qquad \begin{aligned} & h(1)=a_0, \\ & \text{به‌ازای } i>1 ,\quad h(i)=\rho(h|\{1,\dots,i-1\}). \end{aligned}$$

دستور (*) را یك **دستوربازگشتی** برای h می‌خوانیم. این دستور $h(1)$ را معین می کند، و به‌ازای هر i که $i>1$، مقدار h را در i برحسب مقادیر آن به‌ازای اعداد صحیح مثبت کوچکتر از i بیان می کند.

مثال ۱. می‌خواهیم ثابت‌کنیم قضیهٔ ۳.۸ حالت‌خاصی از قضیهٔ فوق است. زیرمجموعهٔ نامتناهی C از Z_+ مفروض است. فرض‌کنیم a_0 کوچکترین عضو C باشد، تابع ρ را چنین تعریف می کنیم.

$$\rho(f)=[C-(\text{مجموعهٔ تصویر } f)] \text{ کوچکترین عضو}.$$

چون C نامتناهی و f نگاشتی است‌که **قطعه‌ای** از Z_+ را بتوی C می‌نگارد، مجموعهٔ تصویر f نمی‌تواند همهٔ مجموعهٔ C باشد. پس ρ خوشتعریف است. بنابرقضیهٔ ۴.۸، تابعی یکتا مانند $h: Z_+ \to C$ موجوداست به‌طوری‌که $h(1)=a_0$ و به‌ازای $i>1$،

$$\begin{aligned} h(i) &= \rho(h|\{1,\dots,i-1\}) \\ &= [C-(h|\{1,\dots,i-1\} \text{ مجموعهٔ تصویر})] \text{ کوچکترین عضو} \\ &= [C-h(\{1,\dots,i-1\})] \text{ کوچکترین عضو} \end{aligned}$$

واین همان است‌که می‌خواستیم.

مثال ۲. به‌ازای عدد حقیقی مفروض a، در تمرینات بخش ۱ــ۴، a^n را با دستور بازگشتی ذیل «تعریف کردیم»:

$$a^1=a,$$

$$a^n=a^{n-1}\cdot a.$$

هدف این است که با به‌کاربردن قضیهٔ ۴.۸، دقیقاً تابعی مانند $h: Z_+ \to R$ چنان تعریف‌کنیم‌که $h(n)=a^n$. برای این‌منظور، فرض‌کنیم‌که a_0 همان عدد حقیقی a باشد،

و تابع ρ را با ضابطهٔ $\rho(f)=f(m).a$ تعریف می‌کنیم، که در آن f قطعه‌ای از Z_+ را بتوی R می‌نگارد و m بزرگترین عضو حوزهٔ تعریف f است. در این‌صورت، تابعی یکتا مانند $h: Z_+ \rightarrow R$ وجود دارد که

$$h(1)=a.$$

به‌ازای $i>1$، $h(i)=\rho(h|\{1,\ldots,i-1\})$.

منظور این است که $h(1)=a$، وبه‌ازای $i>1$ ، $h(i)=h(i-1)a$. حال اگر $h(i)$ را به a^i نمایش‌دهیم خواهیم‌داشت:

$$a^1=a,$$

$$a^i=a^{i-1}\,a.$$

و این همان است که می‌خواستیم.

تمرینها

۱. فرض کنید $(b_1\ ,\ b_2\ ,\ \ldots)$ دنباله‌ای نامتناهی از اعداد حقیقی باشد. مجموع $\sum_{k=1}^n b_k$ به‌استقرا چنین تعریف می‌شود:

به‌ازای $n=1$، $\sum_{k=1}^n b_k=b_1$،

به‌ازای $n>1$، $\sum_{k=1}^n b_k=(\sum_{k=1}^{n-1} b_k)+b_n$.

فرض کنید A مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. ρ را چنان برگزینید که قضیهٔ ۴.۸ را بتوان برای تعریف دقیق این مجموعه به‌کاربست. گاه مجموع $\sum_{k=1}^n b_k$ را با نماد $b_1+b_2+\ldots+b_n$ نشان می‌دهیم.

۲. فرض کنید $(b_1\ ,\ b_2\ ,\ \ldots)$ دنباله‌ای نامتناهی از اعداد حقیقی باشند. حاصل‌ضرب $\Pi_{k=1}^n b_k$ را به‌استقرا چنین تعریف می‌کنیم:

به‌ازای $n=1$، $\Pi_{k=1}^n b_k=b_1$،

به‌ازای $n>1$، $\Pi_{k=1}^n b_k=(\Pi_{k=1}^{n-1} b_k).b_n$.

این حاصل‌ضرب را دقیقاً به‌کمک قضیهٔ ۴.۸ تعریف کنید. گاه $\Pi_{k=1}^n b_k$ را با نماد $b_1b_2\ldots b_n$ نمایش می‌دهیم.

۳. به‌عنوان حالت خاصی از تمرین ۲، به‌ازای $n \in Z_+$، تعریف a^n و $n!$ را به‌دست آورید.

۴. اعداد فیبوناتچی[1] را در نظریهٔ اعداد با دستور بازگشتی ذیل تعریف می‌کنند:

---

1. Fibonacci

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$

$$.\lambda_n = \lambda_{n-1} + \lambda_{n-2} \qquad \text{به‌ازای } n > 2 \text{،}$$

این اعداد را دقیقاً، بااستفاده از قضیهٔ ۴.۸، تعریف کنید.

۵. ثابت کنید که تابعی یکتا مانند $h: Z_+ \to R_+$ وجود دارد که در دستور ذیل صدق می‌کند:

$$h(1) = 3,$$

$$.h(i) = [h(i-1)+1]^{1/2} \qquad \text{به‌ازای } i > 1 \text{،}$$

۶. (الف) ثابت کنید که هیچ تابعی مانند $h: Z_+ \to R_+$ در دستور ذیل صدق نمی‌کند:

$$h(1) = 3,$$

$$.h(i) = [h(i-1)-1]^{1/2} \qquad \text{به‌ازای } i > 1 \text{،}$$

توضیح دهید که چرا این مثال اصل تعریف بازگشتی را نقض نمی‌کند؟

(ب) دستور بازگشتی ذیل را درنظر بگیرید:

$$h(1) = 3,$$

$$.h(i) = \begin{cases} [h(i-1)-1]^{1/2} & \text{اگر } h(i-1) > 1 \text{،} \\ 5 & \text{اگر } h(i-1) \leqslant 1 \text{،} \end{cases} \quad \text{به‌ازای } i > 1$$

ثابت کنید که تابعی یکتا مانند $h: Z_+ \to R_+$ وجود دارد که در این دستور صدق می‌کند.

۷. قضیهٔ ۴.۸ را ثابت کنید.

۱-۹ مجموعه‌های نامتناهی واصل موضوع انتخاب

قبلاً معیارهایی چند برای نامتناهی بودن یك مجموعه به‌دست آوردیم. برای نمونه، می‌دانیم که اگر مجموعهٔ A یك زیر مجموعهٔ شمارای نامتناهی داشته باشد، یا نگاشتی دوسویی بین A و یك زیرمجموعهٔ سرهٔ آن موجود باشد، آنگاه A خودنامتناهی است. ثابت می‌شود که هریك از این خواص برای مشخص کردن مجموعه‌های نامتناهی کافی است. این مطلب را اکنون ثابت می‌کنیم، برهان آن ما را به بحث دربارهٔ نکته‌ای منطقی می‌کشاند که تا به‌حال ازآن سخنی به‌میان نیاورده‌ایم، وآن اصل موضوع انتخاب است.

۱.۹ قضیه فرض‌کنیم A مجموعه‌ای باشد. گزاره‌های ذیل معادل‌اند:

(۱) تابعی یك‌به‌یك مانند $f: Z_+ \to A$ موجود است.
(۲) تابعی دوسویی بین A و یك زیرمجموعهٔ سرهٔ آن موجود است.
(۳) A نامتناهی است.

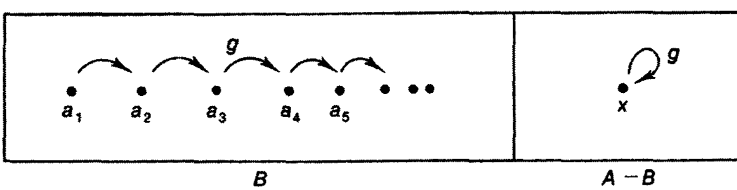
برهان. ثابت می‌کنیم که (۱) $\Longleftarrow$ (۳) $\Longleftarrow$ (۲) $\Longleftarrow$ (۱). برای اثبات (۲) $\Longleftarrow$ (۱)، فرض‌کنیم تابعی یك‌به‌یك مانند $f: Z_+ \to A$ موجود باشد. تصویر Z_+ تحت f را به B و $f(n)$ را به a_n نمایش می‌دهیم. چون f یك به‌یك است، اگر $n \neq m$ آنگاه $a_n \neq a_m$. اکنون نگاشت

$$g: A \to A - \{a_1\}$$

را با ضابطهٔ

$$\text{به‌ازای } a_n \in B \text{،} \quad g(a_n) = a_{n+1}\text{،}$$
$$\text{به‌ازای } x \in A - B \text{،} \quad g(x) = x\text{.}$$

تعریف می‌کنیم. در شکل ۱۲ نگاشت g با یك طرح کلی نشان داده شده است ؛ بسهولت می‌توان ثابت کرد که g دوسویی است.



شکل ۱۲

استلزام (۳) $\Longleftarrow$ (۲) چیزی جزعکس نقیض نتیجهٔ ۳.۶ نیست، بنابراین، قبلاً ثابت شده‌است. برای‌اثبات(۱) $\Longleftarrow$ (۳)، فرض می‌کنیم A نامتناهی باشد و «به‌استقرا» تابعی‌یك به‌یك مانند $f: Z_+ \to A$ می‌سازیم.

نخست، چون A ناتهی است، می‌توان عضوی از آن مانند a_1 را برگزید، و $f(1)$ را مساوی همین عضو برگزیده شده تعریف کرد.

سپس، با فرض اینکه $f(1)$، . . .، $f(n-1)$ تعریف شده باشند، می‌خواهیم $f(n)$ را تعریف کنیم. مجموعهٔ $A - f(\{1, \ldots, n-1\})$ ناتهی است؛ زیرا اگرتهی باشد آنگاه نگاشت $f: \{1, \ldots, n-1\} \to A$ پوشا، و در نتیجه A متناهی است. بنابراین، می‌توان عضوی از مجموعهٔ $A - f(\{1, \ldots, n-1\})$ برگزید و $f(n)$ را مساوی همین عضو تعریف کرد. پس، به‌ازای هر $n \in Z_+$، مقدار $f(n)$ را «با استفاده از اصل استقرا» تعریف کردیم.

به‌آسانی می‌توان دید که f یك به‌یك است. زیرا اگر $m < n$ آنگاه $f(m)$

به‌مجموعهٔ $f(\{۱,\ldots,n-۱\})$ تعلق دارد، وحال آنکه $f(n)$، بنابرتعریف، چنین نیست. پس $f(n)\neq f(m)$. □

جهت آشکار کردن چگونگی استفاده از اصل تعریف بازگشتی دربرهان بالا، اجازه دهید این استدلال «استقرایی» را دوباره با دقت بیشتر بیان کنیم.

مجموعهٔ نامتناهی A مفروض است، برآنیم که تابع $f: Z_+ \rightarrow A$ را به‌روش بازگشتی با دستور ذیل تعریف کنیم:

$$(*)\qquad \begin{aligned} &f(۱)=a_۱,\\ &f(i)=[A-f(\{۱,\ldots,i-۱\})] \text{ عضودلخواهی از } \text{، } i>۱ \text{ به‌ازای }. \end{aligned}$$

ولی این دستور به‌عنوان یك دستوربازگشتی به‌هیچ روی پذیرفتنی نیست! زیرا $f(i)$ را به‌طور یکتا برحسب $f|\{۱,\ldots,i-۱\}$ تعریف نمی‌کند.

از این‌لحاظ دستور اخیر به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای با آن‌دستور بازگشتی، که دربرهان قضیهٔ ۱.۷ در نظر گرفته شده، تفاوت دارد. درآنجا با داشتن یك‌زیرمجموعهٔ نامتناهی از Z_+ مانند C، تابع h را با دستور ذیل تعریف کردیم:

$$\begin{aligned} &h(۱)\stackrel{\text{تعریف}}{=} C \text{ کوچکترین عضو },\\ &h(i)=[C-f(\{۱,\ldots,i-۱\})] \text{ کوچکترین عضو } \text{، } i>۱ \text{ به‌ازای }. \end{aligned}$$

این دستور $h(i)$ را به‌طور یکتا برحسب $h|\{۱,\ldots,i-۱\}$ تعریف می‌کند.

طریقهٔ دیگری که غیرقابل‌قبول‌بودن $(*)$ رابه‌عنوان دستوری بازگشتی‌تأیید می‌کند، این‌است که اگر به‌فرض دستوری بازگشتی باشدآنگاه، بنابراصل‌تعریف بازگشتی، باید تابعی یکتا مانند $f: Z_+ \rightarrow A$ موجود باشد که در $(*)$ صدق کند. اما $(*)$ به‌هیچ‌وجه تابع f را به‌طور یکتا مشخص نمی‌کند. درواقع، این «تعریف» f، متضمن انتخابهایی دلخواه به‌تعداد نامتناهی است.

مطلب این است که برهان ارائه شده برای قضیهٔ ۱.۹، در واقع، برهان نیست. در حقیقت، براساس خواصی از نظریهٔ مجموعه‌ها که تا کنون بحث کردیم، امکان ندارد که بتوان این قضیه را ثابت کرد. چیز بیشتری موردنیاز است.

قبلاً، بعضی ازروشهای مجاز را برای مشخص کردن مجموعه‌ها متذکر شدیم:

(۱) تعریف کردن مجموعه با فهرست کردن اعضای آن، ویا بااختیار کردن مجموعهٔ مفروضی‌مانند A ومشخص کردن زیرمجموعه‌ای‌ازآن‌مانند B، به‌وسیلهٔ‌خاصیتی که اعضای B واجدآن هستند.

(۲) باتشکیل اجتماع یامقطع اعضای گردایه‌ای مفروض از مجموعه‌ها، یا باتشکیل تفاضل دو مجموعه.

(۳) با درنظر گرفتن گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای مفروض.

(۴) باتشکیل حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌ها.

اکنون توجه داشته باشید که قاعدهٔ تناظر تابع f (در قضیهٔ ۱.۹) یك مجموعه است: زیرمجموعه‌ای از $Z_+ \times A$. بنابراین، برای اثبات وجود تابع f باید با بهره‌گیری از روشهای مجاز برای تشکیل مجموعه‌ها، زیرمجموعهٔ مناسبی از $Z_+ \times A$ را ساخت. اما، فقط روشهای داده شدهٔ قبلی برای این منظور کافی نیستند؛ بلکه طریقی نو برای حکم به‌وجود یك مجموعه موردنیاز است. بنابراین، به‌فهرست روشهای مجاز برای تشکیل مجموعه‌ها این اصل موضوع را اضافه می‌کنیم:

اصل موضوع انتخاب. اگر $\mathscr{A}$ گردایهٔ مفروضی ازمجموعه‌های ناتهی جدا ازهم باشد آنگاه مجموعه‌ای مانند C موجود است که دارای درست یك عضو مشترك با هرعضو $\mathscr{A}$ است؛ یعنی، به‌ازای هر $A \in \mathscr{A}$ مجموعهٔ $C \cap A$ فقط یك عضو دارد.

این اصل موضوع حکم به وجود مجموعه‌ای می‌کند که می‌توان آن را مجموعه‌ای در نظر گرفت که با انتخاب یك عضو ازهر مجموعهٔ A از $\mathscr{A}$ به‌دست آمده است.

اصل موضوع انتخاب حکمی کاملاً معقول به‌نظر می‌رسد و، درواقع، امروزه بیشتر ریاضیدانان این اصل موضوع را به عنوان جزئی از نظریهٔ مجموعه‌ها می‌پذیرند و ریاضیات خود را بر آن بنیان می‌نهند. اما، در سالهای گذشته مجادلات بسیاری پیرامون این حکم خاص نظریهٔ مجموعه‌ها بپاخاست. زیرا، به‌یاری این اصل موضوع می‌توان قضایایی ثابت کرد که بعضی از ریاضیدانان از پذیرفتن آنها اکراه داشتند. یکی از اینها قضیهٔ خوشترتیبی است که بزودی وارد بحث آن خواهیم شد. فعلاً، به استفاده از اصل موضوع انتخاب برای برطرف کردن اشکال مذکور در برهان قضیهٔ قبل قناعت می‌کنیم.

نخست، نتیجهٔ ساده‌ای از اصل موضوع انتخاب را ثابت می‌کنیم:

۲.۹ لم (وجود تابع انتخاب) اگر $\mathscr{B}$ گردایه‌ای مفروض ازمجموعه‌های ناتهی (که الزاماً جدا ازهم نیستند) باشد آنگاه تابعی مانند

$$c : \mathscr{B} \longrightarrow \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$$

موجود است که به‌ازای هر $B \in \mathscr{B}$، $c(B)$ عضوی ازمجموعهٔ B است.

تابع c یك **تابع انتخاب** برای گردایهٔ $\mathscr{B}$ نامیده می‌شود.

تفاوت این لم با اصل موضوع انتخاب این است که در این لم ضرورت ندارد که مجموعه‌های تشکیل دهندهٔ $\mathscr{B}$ جدا از هم باشند. مثلاً، می‌توان $\mathscr{B}$ را گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ مفروضی اختیار کرد.

برهان لم. به‌ازای عضو B از $\mathscr{B}$ مجموعهٔ B' را چنین تعریف می‌کنیم:

$$B' = \{(B, x) \mid x \in B\}.$$

یعنی، B' گردایهٔ همهٔ زوجهای مرتبی است که مختص اول آنها مجموعهٔ B و مختص

دومشان عضوی از B است. مجموعهٔ B' زیرمجموعه‌ای است ازحاصل‌ضرب دکارتی

$$\mathcal{B}\times \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B.$$

چون B دست‌کم یك عضو مانند x دارد، مجموعهٔ B' هم دست‌کم عضو (B, x) را دربردارد، وبنابراین ناتهی است.

اکنون ملاحظه می‌کنیم که اگر B_1 و B_2 دوعضو متمایز $\mathcal{B}$ باشندآنگاه B'_1 و B'_2 جدا ازهم خواهند بود. زیرا عضو نوعی B'_1 به‌صورت زوج مرتب (B_1, x_1) است و عضو نوعی B'_2 به‌صورت زوج مرتب (B_2, x_2)، و هیچ‌گاه این دو زوج نمی‌توانند مساوی باشند، چراکه مختص اول‌آنها با یکدیگر تفاوت دارند.

اینك گردایهٔ

$$\mathcal{C}=\{B' \mid B\in\mathcal{B}\}$$

را تشکیل می‌دهیم، که گردایه‌ای است اززیرمجموعه‌های ناتهی وجدا ازهم

$$\mathcal{B}\times \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B.$$

بنابراصل موضوع انتخاب، مجموعه‌ای مانند c موجود است که با هرعضو $\mathcal{C}$ تنها دریك عضومشترك است. ادعای ما این‌است‌که c قاعدهٔ تناظری برای تابع‌انتخاب مطلوب است.

اولاً، c زیرمجموعه‌ای است از

$$\mathcal{B}\times \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B.$$

ثانیاً، c شامل درست یك‌عضو از هرمجموعهٔ B' است؛ بنابراین، به‌ازای هر $B\in\mathcal{B}$، مجموعهٔ c شامل درست یك‌زوج مرتب مانند (B, x) است‌که مختص اول‌آن B است. پس، c براستی قاعدهٔ تناظری برای تابعی از گردایهٔ $\mathcal{B}$ به‌مجموعهٔ $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ است. بالاخره، اگر $(B, x)\in c$ آنگاه x به B تعلق دارد، درنتیجه، همان‌طورکه می‌خواستیم $c(B)\in B$. □

برهان دوم قضیهٔ ۱.۹. به‌کمك این‌لم، می‌توان برهان قضیهٔ ۱.۹ را دقیقتر بیان‌کرد. مجموعهٔ نامتناهی A مفروض است. می‌خواهیم تابعی یك به‌یك مانند $f: Z_+ \rightarrow A$ بسازیم. اگر $\mathcal{B}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی A باشد آنگاه بنابرلم ۲.۹، تابع انتخابی برای $\mathcal{B}$ موجود است؛ یعنی، تابعی مانند

$$c:\mathcal{B} \longrightarrow \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B=A$$

که‌به‌ازای‌هر $B\in\mathcal{B}$، $c(B)\in B$. اکنون تابعی مانند $f: Z_+ \rightarrow A$ بادستورباز گشتی ذیل تعریف می‌کنیم:

$$(*)\qquad \begin{aligned} &f(۱)=c(A),\\ &f(i)=c(A-f(\{۱,\ldots,i-۱\})) \qquad \text{به‌ازای } i>۱. \end{aligned}$$

چون A نامتناهی است، $A-f(\{۱,\ldots,i-۱\})$ ناتهی‌است؛ بنابراین، طرف‌راست

این تساوی با معنی است. حال، چون این دستور $f(i)$ را به‌طور یکتا برحسب $f|\{1, \ldots, i-1\}$ تعریف می‌کند، می‌توان اصل تعریف بازگشتی را به‌کار بست. نتیجه اینکه، تابعی یکتا مانند $f: Z_+ \to A$ موجود است که به‌ازای هر $i \in Z_+$ در(*) صدق می‌کند. یك‌به‌یك بودن f مانند برهان اول ثابت می‌شود. □

ضمن تأکید براین نکته که برای ساختن برهانی منطقاً درست برای قضیهٔ ۱.۹ می‌باید از تابع انتخاب استفاده کرد، در اینجا می‌پذیریم که درعمل اکثر ریاضیدانان چنین نمی‌کنند. ایشان بی‌هیچ دغدغهٔ خاطر باارائهٔ برهانهایی از آن‌سان که ما نخست آوردیم عمل می‌کنند؛ یعنی برهانهایی که متضمن تعدادی نامتناهی انتخاب دلخواه است. آنان به‌این امر واقف‌اندکه در واقع اصل موضوع انتخاب را به‌کار می‌برند؛ ومی‌دانند که اگر لازم باشد، می‌توانند با معرفی تابع انتخاب معینی به‌استدلال خود صورت منطقی رضایت‌بخشتری بدهند. ولی معمولاً زحمت آن‌را به‌خود نمی‌دهند.

ما نیز چنین می‌کنیم. در این‌کتاب چند مورد دیگر از کاربرد مشخص تابع انتخاب خواهید یافت؛ ماتنها وقتی تابع انتخاب‌را معرفی می‌کنیم که بدون‌آن برهان مغشوش‌شود. ولی برهانهای زیادی هم هستندکه در آنها تعدادی نامتناهی انتخاب دلخواه انجام می‌دهیم، ودر هرچنین موردی در واقع به‌طور ضمنی از اصل موضوع انتخاب استفاده می‌کنیم.

اینك باید اقرارکنیم که دریکی از بخشهای‌گذشتهٔ این کتاب برهانی هست‌که در آن تابع معینی را با انجام تعدادی نامتناهی انتخاب دلخواه ساخته‌ایم؛ وما حتی بدون تذکری دربارهٔ اصل موضوع انتخاب ازآن برهان‌گذشتیم. به‌خاطر این «فریب» پوزش می‌خواهیم. یافتن‌آن برهان را به‌خواننده واگذار می‌کنیم!

حال‌نکته‌ای راکه‌آخرین تذکر مادربارهٔ اصل موضوع انتخاب است بیان می‌کنیم. برای اصل موضوع انتخاب دوشکل وجود دارد. یکی از آنها،که می‌توان آن‌را **اصل موضوع انتخاب متناهی** نامید، حکم براین می‌کندکه به‌ازای هرگردایهٔ متناهی $\mathscr{A}$ از مجموعه‌های ناتهی جدا از هم، مجموعه‌ای مانند C موجود است‌که با هرعضو $\mathscr{A}$ درست دریك عضو شریك است. این‌شکل ضعیف اصل موضوع انتخاب همواره موردنیاز است؛ ما نیزآن‌را در بخشهای گذشته بی‌هیچ قیدی به‌کار برده‌ایم. هیچ ریاضیدانی در مورد اصل موضوع انتخاب متناهی تردیدی به‌خود راه نمی‌دهد؛ این اصل جزئی از نظریهٔ مجموعه‌ها برطبق درك همگان است.

شکل قویتر اصل موضوع انتخاب، یعنی‌آنکه در مورد گردایهٔ دلخواه $\mathscr{A}$ از مجموعه‌های ناتهی به‌کار می‌رود، همان است‌که بدرستی «اصل موضوع انتخاب» خوانده می‌شود، وهرگاه ریاضیدانی می‌نویسد «این برهان به‌اصل موضوع انتخاب بستگی‌دارد»، بدون استثنا منظورش همان شکل قویتر اصل موضوع انتخاب است.

تمرینها

۱. فرض کنید $X = \{0, 1\}$. بدون کمك اصل موضوع انتخاب نگاشتی یك به یك مانند $f : Z_+ \to X^\omega$ تعریف کنید.

۲. بدون کمك اصل موضوع انتخاب، درصورت امکان، برای هریك از گردایه‌های ذیل یك تابع انتخاب بیابید:
(الف) $\mathscr{A}$، گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی Z_+.
(ب) $\mathscr{B}$، گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی Z.
(پ) $\mathscr{C}$، گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعهٔ اعدادگویا Q.
(ت) $\mathscr{D}$، گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی X^ω، که درآن $X = \{0, 1\}$.

۳. فرض کنید A مجموعه‌ای مفروض و $\{f_n\}_{n \in Z_+}$ خانوادهٔ اندیسداری از توابع یك به یك مانند

$$f_n : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow A$$

باشد. ثابت کنید که A نامتناهی است. آیا می‌توانید بدون کمك اصل موضوع انتخاب تابعی یك به یك مانند $f : Z_+ \to A$ تعریف کنید؟

۴. ثابت کنید که اصل موضوع انتخاب معادل این گزاره است: به‌ازای هرخانوادهٔ اندیسدار $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ از مجموعه‌های ناتهی، که در آن $J \neq \varnothing$، حاصلضرب دکارتی

$$\Pi_{\alpha \in J} A_\alpha$$

ناتهی است.

۵. در بخش ۱ـ۷، قضیه‌ای هست که برهان‌آن مستلزم تعدادی نامتناهی انتخاب دلخواه است. این‌کدام قضیه است؟ برهان‌آن‌را به‌طریقی بازنویسی کنید که کاربرد اصل موضوع انتخاب صریحاً در آن آشکار شود. (اصل موضوع انتخاب در تعدادی از تمرینهای قبلی نیز به‌کار رفته است.)

۶. (الف) به‌کمك اصل موضوع انتخاب ثابت کنید که اگر تابع $f : A \to B$ پوشا باشدآنگاه f معکوس راستی مانند $h : B \to A$ دارد.
(ب) ثابت‌کنیدکه اگر تابع $f : A \to B$ یك به‌یك و A ناتهی باشدآنگاه f معکوس چپ دارد. آیا اصل موضوع انتخاب مورد نیاز است؟
(پ) اگر A مجموعه‌ای‌دلخواه و $\mathscr{P}(A)$ مجموعهٔ همهٔ‌زیرمجموعه‌های‌آن باشد، ثابت‌کنیدکه هیچ نگاشت یك‌به‌یکی مانند $f : \mathscr{P}(A) \to A$ وجود ندارد.

۷. بیشتر پارادوکسهای مشهور نظریهٔ غیر اصول موضوعی مجموعه‌ها به‌طریقی به‌مفهوم

«مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» مربوط می‌شوند. هیچکدام ازقواعدی که ما برای تشکیل دادن مجموعه‌ها بیان کرده‌ایم به‌ما اجازهٔ درنظر گرفتن چنین مجموعه‌ای را نمی‌دهد. برای این‌کار دلیل خوبی وجـود دارد، چون این مفهوم نـاقض خود است. زیرا فرض کنید $\mathcal{A}$ «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» باشد.

(الف) ثابت کنید که $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$، و از اینجا تناقضی استخراج کنید.

(ب) (پارادوکس راسل[1]). فرض کنید $\mathcal{B}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{A}$ و متشکل از همهٔ مجموعه‌هایی باشد که عضو خود نیستند؛

$$\mathcal{B}=\{A \mid A \notin A \text{ و } A \in \mathcal{A}\}.$$

(البته، ممکن است که هیچ مجموعه‌ای مـانند A وجود نداشته باشد کـه $A \in A$؛ اگر چنین باشد آنگاه $\mathcal{B}=\mathcal{A}$.) آیا $\mathcal{B}$ عضو خود هست یا نه؟

۸. فرض کنید A و B دومجموعهٔ نـاتهی بـاشند. اگر تابعی یك‌به‌یك از B بتوی A وجود داشته‌باشد ولی هیچ‌تابع یك‌به‌یکی از A بتوی B وجود نداشته باشد، گوییم A **عدد اصلی بزرگتر** از B دارد.

(الف) از قضیهٔ ۱.۹ نتیجه بگیرید که هرمجموعهٔ ناشمارا دارای عدد اصلی بزرگتر از Z_+ است.

(ب) ثابت‌کنید که اگر A عدد اصلی بزرگتر از B و B عدد اصلی بزرگتر از C داشته‌باشد آنگاه A عدد اصلی بزرگتر از C دارد.

(پ) دنباله‌ای از مجموعه‌های نامتناهی مـانند... , $A_۲$, $A_۱$ بیابید که به‌ازای هر $n \in Z_+$، $A_{n+۱}$ عدد اصلی بزرگتر از A_n داشته باشد.

(ت) مجموعه‌ای بیابید که به‌ازای هر n، عدد اصلی‌بزرگتر از A_n داشته‌باشد.

*۹. ثابت‌کنید که $\mathcal{P}(Z_+)$ و R یك‌عدد اصلی دارند.

به موجب یك حدس مشهور نظریهٔ مجموعه‌ها، که به فرض پیوستار موسوم است، هیچ مجموعه‌ای نیست کـه عدد اصلی بزرگتر از Z_+ و کوچکتر از R داشته‌بـاشد. فرض تعمیم یافتهٔ پیوستار حکم برآن دارد که به‌ازای هرمجموعهٔ مفروض A، هیچ مجموعه‌ای وجود ندارد که عدداصلی بزرگتر از A وکوچکتراز $\mathcal{P}(A)$ داشته‌باشد. شگفت‌انگیزآنکه ثابت شده است که این‌هردوحکم مستقل ازاصول موضوع معمولی نظریهٔ مجموعه‌هـا هستند. برای مطالعه‌ای ژرف و مشاهدهٔ شرحی خواندنی دراین موضوع به $[S_m]$ مراجعه‌کنید.

---

1. Russell

۱ـ۱۰ مجموعه‌های خوشترتیب

یکی از خواص سودمند Z_+ ، مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت، این است که هرزیرمجموعهٔ ناتهی آن دارای یك کوچکترین عضو است. تعمیم این خاصیت ما را به‌مفهوم مجموعهٔ خوشترتیب رهنمون می کند.

تعریف . مجموعهٔ A با رابطهٔ ترتیبی $>$ **خوشترتیب** خوانیم در صورتی که هرزیرمجموعهٔ ناتهی A دارای یك کوچکترین عضو باشد.

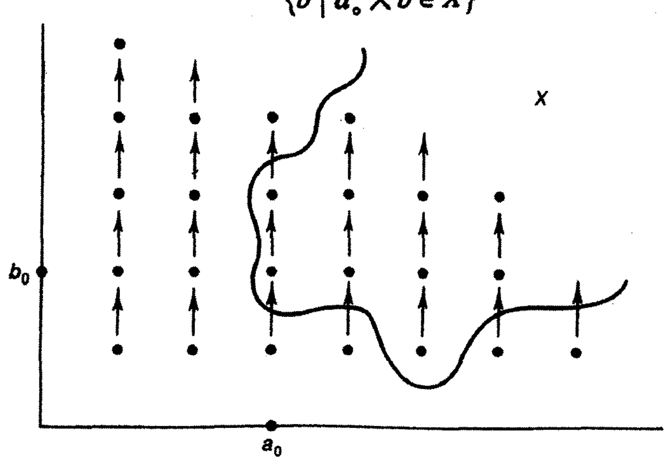
مثال ۱. مجموعهٔ $\{1,2\}\times Z_+$ را با ترتیب قاموسی درنظرمی گیریم. این‌مجموعه را می توان به‌صورت‌دنباله‌ای نامتناهی که به‌دنبال آن دنبالهٔ نامتناهی دیگری قرارداردنمایش‌داد:

$$a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,\dots\,;\,b_1\,,\,b_2\,,\,b_3\,,\,\dots$$

با این قراردادکه هرعضو از همهٔ اعضای سمت راست‌خودکوچکتر باشد. به‌آسانی می‌توان دیدکه هرزیرمجموعهٔ ناتهی این مجموعهٔ مرتب، مانند C ، دارای کوچکترین عضو است: اگر C شامل دست‌کم یکی از a_n ها باشد، کافی است که کوچکترین عضو مقطع C را با دنبالهٔ $a_1\,,\,a_2\,,\dots$ اختیارکنیم؛ واگر C شامل هیچیك از a_n ها نباشدآنگاه زیرمجموعه‌ای از دنبالهٔ $b_1\,,\,b_2\,,\,\dots$ است که طبعاً کوچکترین عضو دارد.

مثال ۲. مجموعهٔ $Z_+\times Z_+$ را با ترتیب قاموسی درنظر می گیریم. این مجموعه را می‌توان به‌صورت دنباله‌ای نامتناهی از دنباله‌های نامتناهی نمایش داد. مدعی هستیم که این مجموعه خوشترتیب است . فرض‌کنیم X زیرمجموعه‌ای ناتهی از $Z_+\times Z_+$ باشد ، A را زیرمجموعه‌ای از Z_+ می‌گیریم که متشکل ازهمهٔ مختصهای اول اعضای X است. مجموعهٔ A دارای‌کوچکترین عضو است؛ آن‌را a_0 می‌نامیم. دراین‌صورت،گردایهٔ

$$\{b \mid a_0\times b\in X\}$$



شکل ۱۳

زیرمجموعه‌ای ناتهی از Z_+ است. فرض کنیم b_0 کوچکترین عضو آن باشد. بنابرتعریف رابطهٔ ترتیب قاموسی، $a_0 \times b_0$ کوچکترین عضو مجموعهٔ X است. (شکل ۱۳ دیده‌شود.)

مثال ۳. مجموعهٔ اعداد صحیح با ترتیب معمولی خوشترتیب نیست. زیرا زیرمجموعه‌ای از آن‌که از همهٔ اعداد صحیح منفی تشکیل شده است، دارای کوچکترین عضو نیست. مجموعهٔ اعداد حقیقی در بازهٔ $1 \geqslant x \geqslant 0$ نیز خوشترتیب نیست. زیرا زیرمجموعه‌ای از آن‌که متشکل است از همهٔ x هایی‌که $1 > x > 0$ کوچکترین عضو ندارد (اگر چه، البته، بزرگترین کران پایین دارد).

برای ساختن مجموعه‌های خوشترتیب چندین طریق وجود دارد؛ دوتای آنها عبارت‌اند از:

(۱) اگر A مجموعه‌ای خوشترتیب باشد آنگاه هرزیرمجموعهٔ A، با تحدید رابطهٔ ترتیبی A به‌آن زیرمجموعه، خوشترتیب است.

(۲) اگر A و B خوشترتیب باشند آنگاه $A \times B$ نیز باترتیب‌قاموسی خوشترتیب است. اثبات (۱) بدیهی است. اثبات (۲) برطبق الگویی است که درمثال ۲ ارائه شد.

از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که مجموعهٔ $Z_+ \times (Z_+ \times Z_+)$ با ترتیب قاموسی خوشترتیب است؛ این مجموعه را می‌توان به‌صورت دنباله‌ای نامتناهی که از دنباله‌هایی نامتناهی از دنباله‌های نامتناهی تشکیل شده است نمایش داد. همچنین $(Z_+)^{4}$، باترتیب قاموسی، خوشترتیب است؛ و الی‌آخر. اما اگر بخواهید که این حکم را به‌حاصل‌ضربی نامتناهی از Z_+ در خودش تعمیم دهید، با مشکلاتی روبرو خواهید شد. این وضع را بزودی بررسی می‌کنیم.

اکنون این سؤال طبیعی مطرح می‌شود که اگر A مجموعهٔ مفروضی بدون رابطهٔ ترتیبی باشد آیا رابطه‌ای ترتیبی در A هست که از A مجموعه‌ای خوشترتیب بسازد؟ اگر A متناهی باشد به‌وسیلهٔ هرنگاشت دوسویی

$$f : A \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$

می‌توان رابطه‌ای ترتیبی در A تعریف کرد که تحت آن A دارای همان نوع ترتیب مجموعهٔ $\{1, \ldots, n\}$ باشد. درواقع، هررابطهٔ ترتیبی درهرمجموعهٔ متناهی را می‌توان به‌همین طریق به‌دست‌آورد:

۱۰.۱۰ قضیه هرمجموعهٔ مرتب متناهی ناتهی دارای نوع ترتیب قطعه‌ای مانند $\{1, \ldots, n\}$ از اعداد صحیح مثبت است. بنابراین، ضرورتاً خوشترتیب است.

برهان. این قضیه در بخش ۱ـ۶ به‌عنوان تمرین‌آمده است؛ در اینجا آن‌را ثابت می‌کنیم. نخست، ثابت می‌کنیم که هرمجموعهٔ متناهی مرتب مانند A دارای بزرگترین عضو است: اگر A مجموعه‌ای یک‌عضوی باشد، این حکم بدیهی است. فرض‌کنیم این

حکم به‌ازای مجموعه‌های $n-1$ عضوی درست باشد، مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، ونیز $a_0 \in A$. در این‌صورت، $A-\{a_0\}$ دارای بزرگترین عضوی مانند a_1 است. بزرگترین عضو مجموعهٔ $\{a_0, a_1\}$ همانا بزرگترین عضو مجموعهٔ A است.

ثانیاً، ثابت می‌کنیم که به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند n، یك‌نگاشت دوسویی حافظ ترتیب بین A و $\{1, \ldots, n\}$ موجوداست: اگر A مجموعه‌ای یك‌عضوی باشد، حکم بدیهی است. پس، فرض‌کنیم حکم به‌ازای مجموعه‌های $n-1$ عضوی درست باشد، وفرض‌کنیم b بزرگترین عضو مجموعهٔ A باشد. بنابرفرض استقرا، یك‌نگاشت دوسویی حافظ ترتیب مانند

$$f': A-\{b\} \longrightarrow \{1, \ldots, n-1\}$$

موجود است. حال نگاشت دوسویی حافظ ترتیب $f: A \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

به‌ازای $x \neq b$، $f(x)=f'(x)$،

$$f(b)=n. \square$$

بنابراین، هرمجموعهٔ مرتب متناهی فقط یك‌نوع ترتیب می‌تواند داشته‌باشد. اما، در مورد مجموعه‌های نامتناهی وضع بکلی متفاوت است. مجموعه‌های خوشترتیب

$$\begin{aligned}&Z_+,\\&\{1, \ldots, n\} \times Z_+,\\&Z_+ \times Z_+,\\&Z_+ \times (Z_+ \times Z_+)\end{aligned}$$

همگی شمارای نامتناهی‌اند، ولی نوع ترتیب‌آنها متفاوت است.

همهٔ مثالهایی که تاکنون از مجموعه‌های خوشترتیب‌آوردیم درباب مجموعه‌های شماراست. سؤال طبیعی‌ای که پیش می‌آید این است که‌آیا می‌توان مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارایی یافت؟

مجموعهٔ ناشمارای واضحی که برای آزمایش به‌نظر می‌رسد عبارت است از حاصل‌ضرب شمارای‌نامتناهی Z_+ درخودش، یعنی

$$X = Z_+ \times Z_+ \times \cdots = (Z_+)^\omega.$$

به‌روش عادی می‌توان ترتیب قاموسی را باتعریف ذیل برای این‌مجموعه تعمیم داد: گوییم

$$(a_1, a_2, \ldots) < (b_1, b_2, \ldots)$$

درصورتی که n ی وجود داشته باشد که $n \geqslant ۱$ و

$$\text{به‌ازای } i < n \text{، } a_i = b_i \quad \text{و} \quad a_n < b_n.$$

درحقیقت، این رابطه رابطه‌ای ترتیبی در X است؛ امامتأسفانه X راخوشترتیب نمی کند. فرض کنیم A مجموعهٔ همهٔ اعضایی از X باشدکه به‌صورت

$$\mathbf{x} = (۱, \ldots, ۱, ۲, ۱, ۱ \cdots),$$

هستند، یعنی درست یك مختص $\mathbf{x}$ برابر ۲ باشد وسایرین همگی مساوی ۱ باشند. واضح است که مجموعهٔ A کوچکترین عضو ندارد.

مثال گذشته نشان می‌دهد که لااقل ترتیب قاموسی، مجموعهٔ $(Z_+)^\omega$ را خوشترتیب نمی کند. آیا رابطهٔ ترتیبی دیگری وجود داردکه، تحت‌آن‌رابطه، این‌مجموعه خوشترتیب باشد؟ هیچکس تاکنون موفق نشده است رابطه‌ای بسازدکه تحت‌آن $(Z_+)^\omega$ خوشترتیب باشد. با وجود این، قضیهٔ مشهور ذیل حکم می کندکه چنین رابطهٔ خوشترتیب کننده‌ای وجود دارد:

قضیه (قضیهٔ خوشترتیبی). اگر A مجموعهٔ دلخواهی باشدآنگاه رابطه‌ای ترتیبی در A موجود است‌که آن‌را خوشترتیب می‌کند.

این‌قضیه در سال ۱۹۰۴ به‌توسط تسرملو[1] ثابت شد، وجهان ریاضی را تکان‌داد. مناظرات قابل‌ملاحظه ای‌درباب‌درستی برهان‌آن در گرفت؛ فقدان‌هر گونه طریق‌سازنده‌ای برای خوشترتیب کردن یك مجموعهٔ ناشمارای دلخواه شك بسیاری را برانگیخت. بالاخره، وقتی که برهان دقیقاً تجزیه و تحلیل شد، تنها نکته‌ای‌که پیدا شد و ممکن بود مورد ایراد واقع شود، ساختمانی بود متضمن تعدادی نامتناهی از انتخابهای دلخواه؛ یعنی، ساختمانی متضمن اصل موضوع انتخاب.

در نتیجه بعضی از ریاضیدانان اصل موضوع انتخاب را طردکردند، و سالها این سؤال معقول در مورد یك‌قضیهٔ جدید برسر زبانها بودکه: آیا برهان آن اصل موضوع انتخاب را دربردارد یا نه؟ هرقضیه‌ای را که اثبات آن متضمن‌کاربست اصل موضوع انتخاب بود، کمابیش سست بنیان می‌شمردند. ریاضیدانان امروزی، روی هم‌رفته، چنین تشویش‌خاطری ندارند. ایشان اصل موضوع انتخاب را به‌عنوان فرضی معقول در نظریهٔ مجموعه‌ها می‌پذیرند، وهمراه‌آن، قضیهٔ خوشترتیبی را هم قبول دارند.

در این کتاب قضیهٔ خوشترتیبی‌را ثابت نمی کنیم. برهان‌آن طولانی است. (اگرچه زیاد هم دشوارنیست) ودردرجهٔ اول بیشتر مورد توجه علمای منطق‌است. برای‌علاقه‌مندان در تمرینات تکمیلی پایان این‌فصل طرح‌برهانی را بیان‌کرده‌ایم.

به‌هرحال، در اثبات قضایای توپولوژی بندرت از قضیهٔ خوشترتیبی استفاده

1. Zermelo

می‌شود؛ ما تنها برای اثبات دوقضیه‌آن‌را به‌کار می‌بریم، یکبار در تمرینهای بخش ۴–۵ و باردیگر در بخش ۶–۳. نقش عمدهٔ قضیهٔ خوشترتیبی برای ما درفراهم‌آوردن مثال نقض خاصی است که بسیار سودمند است.

در حقیقت، برای ساختن این مثال نقض نیازی به‌تمام قدرت قضیهٔ خوشترتیبی نداریم، بلکه‌آنچه نیاز ما را برمی‌آورد نتیجهٔ ضعیفتر ذیل است، که‌آن‌را می‌پذیریم:

نتیجه. مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارایی وجود دارد.

(قابل‌توجه اینکه، می‌توان این حکم ضعیفتر را بدون استفاده از اصل موضوع انتخاب ثابت‌کرد؛ تمرینات تکمیلی دیده شود.)

برای ساختن مثال موردنظر اصطلاحاتی چند موردنیاز است.

تعریف. فرض‌کنیم X مجموعه‌ای مرتب باشد. به‌ازای عضو مفروضی از X مانند α، مجموعهٔ

$$S_\alpha = \{x \mid x < \alpha \text{ و } x \in X\}$$

را **قطعهٔ X در α** می‌نامیم.

۱۰.۲ قضیه مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارایی موجود است‌که هرقطعهٔ‌آن شماراست.

برهان. بنابرفرض، مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارایی مانند X وجود دارد. از این حکم‌نتیجه‌می‌شود که مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارایی مانند Y هست به‌طوری‌که دست‌کم یك قطعهٔ‌آن ناشماراست. مجموعهٔ $X \times \{1, 2\}$، با ترتیب قاموسی، چنین مجموعه‌ای است. زیرا، قطعهٔ‌آن‌درهرعضوکه به‌صورت $x \times 2$ باشدناشماراست. اکنون زیرمجموعه‌ای از Y را درنظرمی‌گیریم که تشکیل شده است از همهٔ اعضایی مانند α که به‌ازای آنها قطعهٔ S_α ناشماراست. اگر Ω را کوچکترین چنین اعضایی بگیریم آنگاه S_Ω مجموعه‌ای است خوشترتیب، ناشمارا، وهرقطعهٔ‌آن شماراست. □

مجموعهٔ خوشترتیب این قضیه موسوم است به‌**مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارای مینیمال**؛ دلیل این‌نامگذاری تا حدی‌آشکار است. در واقع، شرایط قضیه، نوع ترتیب آن را به‌طور یکتا مشخص می‌کند. (تمرینات تکمیلی دیده شود.) در سراسر کتاب این مجموعه‌را به S_Ω نمایش خواهیم‌داد، ونماد $\bar{S}_\Omega$ را برای مجموعهٔ‌خوشترتیب $S_\Omega \cup \{\Omega\}$ به‌کار خواهیم برد.

مفیدترین خاصیت مجموعهٔ S_Ω، برای مقصود ما، در نتیجهٔ ذیل‌آمده است:

۱۰.۳. نتیجه اگر A زیرمجموعه‌ای شمارا از S_Ω باشدآنگاه A کران بالایی در S_Ω دارد.

برهان. فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای شمارا از S_Ω باشد. به‌ازای هر $a \in A$، قطعهٔ S_a شماراست. بنابراین، مجموعهٔ $B = \bigcup_{a \in A} S_a$ نیز شماراست. چون S_Ω ناشماراست، مجموعهٔ B نمی‌تواند مساوی آن باشد؛ فرض کنیم x عضوی از S_Ω باشد که به B تعلق‌ندارد. دراین‌صورت، x کران بالایی برای A است. زیرا، درغیراین‌صورت، اگربرای عضوی از A مانند a داشته‌باشیم $x < a$ آنگاه x به S_a، ودر نتیجه، به B تعلق دارد، و این باانتخاب a متناقض است. □

تمرینها

۱. ثابت کنید که هرمجموعهٔ خوشترتیب دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست.

۲. (الف) ثابت کنید در هر مجموعهٔ خوشترتیب، هرعضوآن به‌استثنای بزرگترین‌عضو (اگر وجود داشته‌باشد) یك‌تالی بلافصل دارد.
(ب) مجموعه‌ای بیابید که خوشترتیب نباشد و هرعضو آن یك تالی بلافصل داشته‌باشد.

۳. با ترتیب قاموسی مجموعه‌های $\{1, 2\} \times Z_+$ و $Z_+ \times \{1, 2\}$ خوشترتیب‌اند. آیا نوع ترتیب آنها یکی است؟

۴. (الف) فرض کنید Z_- مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح منفی با ترتیب معمولی باشد. ثابت کنید که شرط لازم وکافی برای‌آنکه مجموعهٔ مرتب سادهٔ A خوشترتیب نباشد آن است که حاوی زیرمجموعه‌ای با نوع ترتیب Z_- باشد.
(ب) ثابت کنید که اگر A مرتب ساده و هرزیرمجموعهٔ شمارای‌آن خوشترتیب باشدآنگاه A خوشترتیب است.

۵. فرض کنید S_Ω مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارای مینیمال باشد.
(الف) ثابت کنید که S_Ω دارای بزرگترین عضو نیست.
(ب) نشان‌دهید که به‌ازای هر α به‌طوری که $\alpha < \Omega$، مجموعهٔ

$$\{x \mid \alpha < x < \Omega\}$$

ناشماراست.
(پ) فرض کنید زیرمجموعهٔ $X_\circ$ از S_Ω متشکل از همهٔ اعضایی مانند x باشد که x فاقد سابق بلافصل است. ثابت کنید که $X_\circ$ ناشماراست.

۶. فرض کنید J مجموعه‌ای خوشترتیب باشد. زیرمجموعهٔ $J_\circ$ از J را **استقرایی** خوانیم درصورتی که به‌ازای هرعضو J مانند α،

$$(S_\alpha \subset J_\circ) \Longrightarrow \alpha \in J_\circ.$$

قضیه (اصل استقرای ترانسفینی). اگر J خوشترتیب و J_0 یك زیرمجموعهٔ استقرایی آن باشد آنگاه $J=J_0$.

۷. زیرمجموعهٔ J_0 از مجموعهٔ خوشترتیب J را وقتی «نیمه استقرایی» خوانیم که به‌ازای هرعضو J_0 مانند α، تالی بلافصل α (درصورت وجود) به J_0 تعلق‌داشته باشد. با یك‌مثال ثابت‌کنید که اگر J_0 شامل کوچکترین عضو J و نیمه استقرایی باشد، ضرورت ندارد که J_0 مساوی J باشد.

۸. (الف) فرض کنید مجموعه‌های جدا از هم A_1 و A_2، بترتیب، با رابطه‌های $<_1$ و $<_2$ خوشترتیب باشند. در $A_1 \cup A_2$ رابطهٔ ترتیبی $<$ را چنین تعریف می‌کنیم: $a<b$ در صورتی که a و b عضو A_1 و $a<_1 b$، یا a و b عضو A_2 و $a<_2 b$، یا $a\in A_1$ و $b\in A_2$. ثابت کنید که $<$ یك خوشترتیبی است.
(ب) قسمت (الف) را برای خانوادهٔ اندیسداری از مجموعه‌های جدا از هم که با مجموعه‌ای خوشترتیب اندیسگذاری شده است تعمیم دهید.

۹. (الف) ثابت‌کنید که اگر $(Z_+)^n$ و $(Z_+)^{n+1}$ با ترتیب قاموسی مرتب باشند آنگاه $(Z_+)^n$ دارای نوع ترتیب قطعه‌ای از $(Z_+)^{n+1}$ است.
(ب) مجموعه‌ای خوشترتیب بیابید که به‌ازای هر n، دارای قطعه‌ای از نوع ترتیب $(Z_+)^n$ باشد.

۱۰. قضیه. فرض‌کنید J و C دومجموعهٔ خوشترتیب باشند وهیچ تابع پوشایی‌که قطعه‌ای از J را بروی C بنگارد وجود نداشته‌باشد. ثابت‌کنیدکه تابعی یکتامانند $h:J\to C$ وجود داردکه به‌ازای هر $x\in J$،

$$h(x)=[C-h(S_x)] \text{ کوچکترین عضو} \qquad (*)$$

که درآن، S_x قطعهٔ J در x است.

برهان.

(الف) اگر نگاشتهای h و k قطعاتی از J، یا همهٔ J، را بتوی C بنگارند و به‌ازای هر x متعلق به‌حوزهٔ تعریفشان در $(*)$ صدق‌کنند آنگاه ثابت‌کنید که به‌ازای هر x متعلق به‌هردو حوزهٔ تعریف، $h(x)=k(x)$.
(ب) اگر تابعی‌مانند $h:S_\alpha\to C$ موجود باشد که در$(*)$ صدق کند،ثابت‌کنید که تابعی مانند $k:S_\alpha\cup\{\alpha\}\to C$ نیز هست که در $(*)$ صدق می‌کند.
(پ) فرض‌کنید $K\subset J$ وبه‌ازای هر $\alpha\in K$، تابعی مانند $h_\alpha:S_\alpha\to C$ وجود داشته‌باشد که در$(*)$ صدق‌کند. ثابت کنید که تابعی مانند

$$k:\bigcup_{\alpha\in K}S_\alpha\to C$$

هست که در (*) صدق می‌کند.
(ت) به‌وسیلهٔ استقرای ترانسفینی ثابت کنید که به‌ازای هر $\alpha \in J$، تابعی مانند $h: S_\alpha \to C$ هست که در(*) صدق می‌کند.
(ث) قضیه را ثابت کنید.

۱۱. با فرض قضیهٔ خوشترتیبی، ثابت کنید که به‌ازای هردومجموعهٔ A و B، یاآنها یك عدد اصلی دارند یا یکی عدد اصلی بزرگتر ازدیگری دارد. [راهنمایی: اگر تابع پوشایی مانند $f: A \to B$ وجود نداشته‌باشد می‌توان تمرین قبل را به‌کار بست.]

۱۲. قضیه (اصل تعریف بازگشتی ترانسفینی). فرض‌کنید C یك مجموعه، J مجموعه‌ای خوشترتیب، و α_0 کوچکترین عضوآن باشد. همچنین، فرض‌کنید $\mathcal{F}$ مجموعهٔ همهٔ‌توابعی باشدکه قطعه‌ای از J را بتوی C می‌نگارند (ازجمله تابع تهی‌که S_{α_0} را بتوی C می‌نگارد) . به‌ازای تابع مفروض $\rho: \mathcal{F} \to C$، ثابت‌کنیدکه تابعی یکتا مانند $h: J \to C$ وجود داردکه به‌ازای هر $x \in J$،

$$h(x) = \rho(h \mid S_x).$$

[راهنمایی : برهان برطبق طرحی است که در تمرین ۱۰ به اختصار شرح داده شده است.]

* ۱-۱۱ اصل ماکزیموم[1]

چنانکه پیشتر اشاره کردیم ، اصل موضوع انتخاب به‌این قضیهٔ عمیق منجر می‌شود که هر مجموعه را می‌توان خوشترتیب کرد. اصل موضوع انتخاب نتیجهٔ دیگری نیز دارد که در ریاضیات ازآن هم مهمتر است و آن اصلی است موسوم به‌اصل ماکزیموم ، که اینك به‌بحث دربارهٔ‌آن می‌پردازیم.

نخست، یك‌تعریف می‌آوریم. اگر A مجموعهٔ مفروضی باشد ، رابطهٔ $\prec$ را یك **رابطهٔ ترتیبی جزئی اکید** در A نامیم درصورتی‌که دارای دوخاصیت ذیل باشد:

(۱) (نامنعکسی) رابطهٔ $a \prec a$ هیچ‌گاه برقرار نباشد.

(۲) (تعدی) اگر $a \prec b$ و $b \prec c$ آنگاه $a \prec c$.

اینها همان خاصیتهای دوم و سوم رابطه‌های ترتیبی ساده‌اند (بخش ۱-۳ ملاحظه‌شود)؛ خاصیت مقایسه‌پذیری در اینجا حذف شده است. به‌بیان دیگر، رابطهٔ ترتیبی جزئی اکید درست مانند رابطهٔ ترتیبی ساده عمل می‌کند، با این‌تفاوت که به‌ازای هرزوج از اعضای متمایزآن مجموعه، مانند x و y، ضرورت ندارد $x \prec y$ یا $y \prec x$.

اگر $\prec$ رابطهٔ ترتیبی‌جزئی‌اکیدی‌درمجموعهٔ A باشد، امکان داردکه زیرمجموعه‌ای

---

۱. در فصل پنجم این‌بخش دانسته فرض می‌شود.

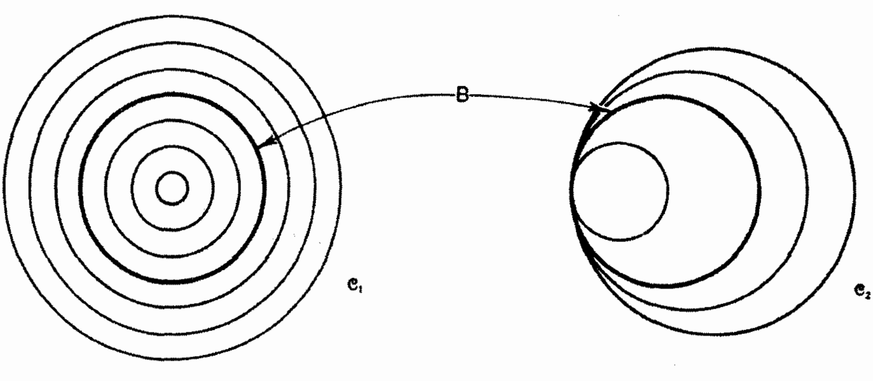
از A مانند B با این رابطه مرتب ساده باشد؛ تنها چیز موردنیاز این است که هرزوج از اعضای B تحت $>$ مقایسه‌پذیر باشند.

اکنون می‌توان اصل ماکزیموم را بیان کرد.

قضیه (اصل ماکزیموم). فرض کنیم $>$ رابطهٔ ترتیبی جزئی اکیدی در مجموعهٔ A باشد، و زیرمجموعهٔ B از A با $>$ مرتب ساده باشد. در این‌صورت، زیرمجموعهٔ مرتب‌سادهٔ ماکزیمالی از A مانند C حاوی B وجود دارد.

به‌بیان‌دیگر، زیرمجموعه‌ای از A مانند C هست که حاوی B است، و C بارابطهٔ $>$ مرتب ساده است و هیچ زیرمجموعهٔ دیگری از A که با $>$ مرتب ساده و C یك زیرمجموعه سرهٔ‌آن باشد وجود ندارد.

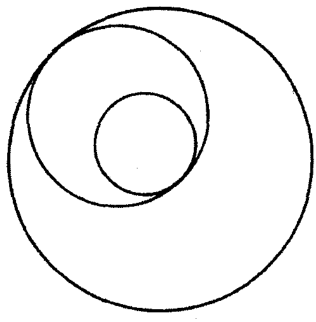
مثال ۱. اگر $\mathcal{A}$ گردایهٔ دلخواهی از مجموعه‌ها باشد، رابطهٔ «جزئیت سره» رابطهٔ ترتیبی جزئی اکیدی در $\mathcal{A}$ است. فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ گردایهٔ همهٔ ناحیه‌های دایره‌ای (داخل دایره‌ها) واقع در یك‌صفحه باشد. یك‌زیرگردایهٔ مرتب سادهٔ ماکزیمال $\mathcal{A}$ عبارت است ازهمهٔ ناحیه‌های دایره‌ای‌که مرکزآنها مبدأ مختصات است. زیرگردایهٔ دیگری که مرتب سادهٔ ماکزیمال است عبارت است از جمیع ناحیه‌های دایره‌ای که کرانه‌های آنها دوایری هستندکه از طرف راست در مبدأ مختصات برمحور yها مماس‌اند. شکل ۱۴ دیده شود.



شکل ۱۴

اکنون، اصل ماکزیموم نه‌تنها وجود یك زیرگردایهٔ مرتب سادهٔ ماکزیمال را در $\mathcal{A}$ تضمین می‌کند، بلکه، به موجب آن، اگرازیك زیرگردایهٔ مرتب سادهٔ دلخواه مانند $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ آغازکنیم، زیرگردایهٔ مرتب سادهٔ ماکزیمالی مانند $\mathcal{C}$ از $\mathcal{A}$ وجود دارد که حاوی $\mathcal{B}$ است. اگر $\mathcal{B}$ تنها از یك‌ناحیهٔ دایره‌ای، مانند B، تشکیل شده‌باشد، به‌آسانی می‌توان

زیرگردایه‌های مرتب‌سادهٔ ماکزیمالی متفاوتی از $\mathcal{A}$ یافت که حاوی B باشند. زیرگردایه‌های $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ ، که درشکل ۱۴ نمایش داده شده‌اند، دونمونه از این نوع‌اند. اما اگر $\mathcal{B}$ از گردایهٔ پیچیده‌تری تشکیل شده‌باشد ، نظیر سه‌ناحیهٔ دایره‌ای که درشکل ۱۵ نمایش داده شده‌اند، یافتن زیرگردایهٔ مرتب سادهٔ ماکزیمالی که حاوی $\mathcal{B}$ باشد متضمن‌کار بیشتری است، که آن‌را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.



شکل ۱۵

مثال ۲. اگر $(x_\circ, y_\circ)$ و (x_1, y_1) دونقطه از صفحهٔ R^2 باشند، رابطهٔ $<$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$(x_\circ\,,\ y_\circ) < (x_1,\ y_1)$$

هرگاه $y_\circ = y_1$ و $x_\circ < x_1$. رابطهٔ $<$ یك رابطهٔ ترتیبی جزئی در R^2 است که تحت‌آن دونقطه فقط وقتی مقایسه‌پذیرند که بریك خط افقی قرار داشته باشند. مجموعه‌های مرتب سادهٔ ماکزیمال، خطوط افقی در R^2 هستند.

می‌توان «برهان» شهودی نسبتاً قابل‌قبولی برای‌اصل ماکزیموم ارائه‌کرد. این‌برهان متضمن طریقه‌ای مرحله به مرحله است‌که می‌توان آن‌را عملاً چنین توصیف کرد. جعبه‌ای اختیار می‌کنیم و همهٔ اعضای B را داخل آن قرار می‌دهیم ، سپس، باقی اعضای A را یك به‌یك می‌آزماییم. ابتدایك‌عضو A راکه در B نیست برمی‌داریم، اگر باهمهٔ‌اعضای B مقایسه‌پذیر بود، آن‌را داخل جعبه قرار می‌دهیم؛ وگرنه، کنارش می‌گذاریم. درحالت کلی، مجموعه‌ای از اعضای داخل جعبه ومجموعه‌ای ازاعضایی که‌آنها را کنار گذاشته‌ایم خواهیم داشت. یکی از اعضای به‌جا ماندهٔ A را برمی‌داریم، اگر باهمهٔ اعضای موجود در جعبه مقایسه‌پذیر بود، آن را هم داخل جعبه قرار می‌دهیم؛ در غیر این‌صورت، کنارش می‌گذاریم، وکار را به‌همین روش ادامه می‌دهیم. پس‌ازبررسی همهٔ اعضای A ، اعضایی که در جعبه‌اند جملگی با یکدیگر مقایسه‌پذیر خواهند بود، بنابراین، مجموعهٔ مرتب ساده‌ای را تشکیل می‌دهند. ازطرف‌دیگر، هرعضوی که درجعبه نباشد، دست‌کم با یکی ازاعضای داخل جعبه مقایسه‌پذیر نیست، زیرا به‌همین‌دلیل کنار گذاشته شده است.درنتیجه،

مجموعهٔ مرتب سادهٔ داخل جعبه ماکزیمال است، زیرا هیچ زیرمجموعهٔ بزرگتر از A نمی‌تواند درشرط مقایسه‌پذیری صدق کند.

البته، ضعف «برهان» فوق وقتی پدیدار می‌شود که می‌گوییم «پس از بررسی همهٔ اعضای A». از کجا بدانیم که اصلاً زمان بررسی همهٔ اعضای A به«پایان می‌رسد»؟

اگر اتفاقاً $A-B$ شمارا باشد، تبدیل این استدلال شهودی به‌برهانی واقعی‌دشوار نیست. موردی را که A شمارای نامتناهی است در نظر می‌گیریم؛ حالت متناهی بودن به‌مراتب آسانتراست. اعضای $A-B$ را به‌وسیلهٔ اعدادصحیح‌مثبت اندیسگذاری‌می‌کنیم:

$$A-B=\{a_1, a_2, \dots\},$$

به‌طوری که به‌اعضای‌متمایز $A-B$ اعداد متمایزی نظیرشود. این‌اندیسگذاری طریقه‌ای به‌دست می‌دهد برای تشخیص اینکه به‌چه‌ترتیب اعضای $A-B$ را آزمایش کنیم، و چگونگی زمان پایان‌آزمایش تمامی‌آنها را بدانیم.

بویژه، تابعی مانند $h: Z_+ \to \{1, 0\}$ چنان تعریف می‌کنیم که مقدارش در i اگر «a_i در جعبه قرار گیرد» مساوی ۰ واگر «a_i کنارگذاشته شود» مقدارش ۱ باشد.

به‌بیان صوریتر، دستور بازگشتی ذیل را در نظر بگیرید:

$h(i)=0$ اگر a_i باهرعضومجموعهٔ $B \cup \{a_j \mid h(j)=0 \text{ و } 1 \leqslant j \leqslant i-1\}$ مقایسه‌پذیر باشد،

$h(i)=0$ درغیراین‌صورت،

بنابراصل تعریف بازگشتی، این دستور تابعی یکتامانند $h: Z_+ \to \{0, 1\}$ را معین می‌کند. بسهولت می‌توان ثابت کرد که مجموعهٔ

$$B \cup \{a_j \mid h(j)=0\},$$

یك‌زیرمجموعهٔ مرتب سادهٔ ماکزیمال A است.

اگر $A-B$ شمارا نباشد، درصورتی‌که قضیهٔ خوشترتیبی را مفروض بگیریم، گونهٔ دیگری از این طریقه کارگرخواهد بود. به‌جای اندیسگذاری اعضای $A-B$ بامجموعهٔ Z_+، آنهارا به‌وسیلهٔ تابعی دوسویی بااعضای مجموعهٔ خوشترتیبی مانند J اندیسگذاری می‌کنیم:

$$A-B=\{a_\alpha \mid \alpha \in J\}.$$

برای این‌منظور، قضیهٔ خوشترتیبی برای تضمین وجود تناظری دوسویی بین $A-B$ و مجموعهٔ خوشترتیبی مانند J موردنیاز است. دراین‌صورت، باقراردادن قطعهٔ S_α به‌جای قطعهٔ $\{1, \dots, i-1\}$ در استدلال بالا، می‌توان به‌همان شیوه ادامه داد. به‌بیان دقیقتر، ضروری است که اصل تعریف بازگشتی را در مورد مجموعه‌های خوشترتیب تعمیم‌دهیم. (تمرین ۱۲ در بخش قبل دیده شود.)

بحث فوق به‌هیچ‌وجه کامل نیست، ولی چگونگی ارتباط قضیهٔ خوشترتیبی و اصل ماکزیموم‌را نشان می‌دهد. درواقع، ثابت می‌شود که‌آنها معادل‌اند؛ هریك مستلزم دیگری است. بعلاوه، هریك ازآنها با اصل موضوع انتخاب معادل است.

در این‌کتاب به‌اثبات اصل ماکزیموم نمی‌پردازیم، زیرا این‌کار مارا ازبحث‌اصلی خود منحرف می‌کند. برای خواستاران، نکات اصلی برهانی ازاین حکم را در تمرینات تکمیلی آورده‌ایم.

نکته‌ای دیگر می‌گوییم و به‌این گفتار پایان می‌دهیم. مقصود خود را از رابطهٔ ترتیبی جزئی اکید تعریف‌کردیم، ولی هنوز سخنی ازخود رابطهٔ ترتیبی جزئی به‌میان نیاورده‌ایم. فرض‌کنیم $>$ رابطهٔ ترتیبی جزئی اکیدی در مجموعهٔ A باشد. $a \leqslant b$ را چنین تعریف‌می‌کنیم: $a < b$ یا $a = b$؛ این‌رابطه‌را **رابطهٔ ترتیبی جزئی** در A می‌نامیم. مثلاً، رابطهٔ جزئیت درگردایه‌ای از مجموعه‌ها رابطهٔ ترتیبی جزئی است، و حال‌آنکه جزئیت سره رابطهٔ ترتیبی جزئی اکید است.

بسیاری ازنویسندگان، کار با رابطه‌های ترتیبی جزئی را برکار با رابطه‌های‌ترتیبی جزئی اکید ترجیح می‌دهند؛ اصل ماکزیموم اغلب با این اصطلاحات بیان می‌شود. به‌هرحال، انتخاب اصطلاحات فقط بستگی به‌سلیقه وسهولت درکار دارد.

تمرینها

۱. به‌ازای دوعدد حقیقی a و b رابطهٔ $>$ را چنین تعریف می‌کنیم: اگر $b-a$ مثبت وگویا باشدآنگاه $a < b$. ثابت کنیدکه $>$ یك رابطهٔ ترتیبی جزئی اکید در R است. زیرمجموعه‌های مرتب سادهٔ ماکزیمال‌آن کدام‌اند؟

۲. بحث مثال ۱ را تکمیل کنید.

۳. (الف) فرض‌کنید $>$ رابطهٔ ترتیبی جزئی اکیدی در مجموعهٔ A باشد. رابطهٔ $\leqslant$ را در A چنین تعریف می‌کنیم: $a \leqslant b$ هرگاه $a < b$ یا $a = b$. ثابت‌کنیدکه این رابطه دارای خواص ذیل موسوم به‌**اصول موضوع ترتیب جزئی** است:

(۱) به‌ازای هرعضو $a \in A$، $a \leqslant a$.

(۲) اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$ آنگاه $a = b$.

(۳) اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$ آنگاه $a \leqslant c$.

(ب) فرض‌کنید P رابطه‌ای در A و واجد خواص (۱)ـ(۳) باشد. رابطهٔ S را در A چنین تعریف می‌کنیم: aSb هرگاه aPb و $a \neq b$. ثابت کنیدکه S یك رابطهٔ ترتیبی جزئی اکید در A است.

۴. فرض‌کنید A مجموعه‌ای با رابطهٔ ترتیبی جزئی اکید $>$ باشد، و $x \in A$. فرض‌کنید می‌خواهیم زیرمجموعهٔ مرتب سادهٔ ماکزیمالی از A مانند C بیابیم به‌طوری که

$x \in C$. یکی از راههایی که برای تعریف مجموعهٔ C قابل‌قبول به‌نظر می‌رسد این است که آن‌را مجموعهٔ همهٔ اعضایی از A بگیریم که با x مقایسه‌پذیرند؛

$$C = \{y \mid y < x \text{ یا } x < y \text{ ویا } y \in A\}.$$

اما این‌راه همیشه مؤثر نیست. در کدامیك از مثالهای ۱ و ۲ این‌راه مؤثر و در کدامیك مؤثر نیست؟

۵. با اثبات اینکه $B \cup \{a_j \mid h(j) = 0\}$ زیرمجموعهٔ مرتب سادهٔ ماکزیمالی از A است، برهان اصل ماکزیموم رادرحالت شمارا بودن $A - B$ تکمیل کنید.

۶*. به‌ازای دونقطهٔ (x_0, y_0) و (x_1, y_1) از R^2، چنین تعریف می‌کنیم:

$$(x_0, y_0) < (x_1, y_1)$$

هرگاه $x_0 < x_1$ و $y_0 \leqslant y_1$. ثابت کنید که منحنیهای $y = x^3$ و $y = 2$ زیرمجموعه‌های مرتب سادهٔ ماکزیمال R^2اند، ولی $y = x^2$ چنین نیست. همهٔ زیرمجموعه‌های مرتب‌سادهٔ ماکزیمال را بیابید.

* تمرینهای تکمیلی:

خوشترتیبی

در تمرینهای ذیل از خواننده می‌خواهیم که بدون استفاده از اصل موضوع انتخاب، وجود یك مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارا را ثابت کند. همچنین، اثبات معادل‌بودن اصل موضوع انتخاب، قضیهٔ خوشترتیبی، واصل ماکزیموم را نیز خواسته‌ایم.

۱. تحقیق کنیدکه در برهان اصل تعریف بازگشتی ترانسفینی، اصل موضوع انتخاب به‌کار نمی‌رود. (تمرین ۱۲ دربخش ۱ــ۱۰ دیده شود.)

۲. بدون استفاده از اصل موضوع انتخاب ثابت کنیدکه:

قضیه. فرض‌کنید J و E مجموعه‌های خوشترتیبی باشند. اگر J دارای نوع ترتیب زیرمجموعه‌ای از E باشدآنگاه J دارای نوع ترتیب E یادارای نوع ترتیب قطعه‌ای یکتا از E است؛ ولی هردوی این‌حالتها پیش نمی‌آید.

برهان. فرض‌کنید e_0 عضو ثابتی از E باشد. تابع $h: J \to E$ را با ضابطهٔ ذیل تعریف می‌کنیم:

$$h(\alpha) = \begin{cases} \text{کوچکترین عضو } (E - h(S_\alpha)) & \text{اگر } h(S_\alpha) \neq E، \\ e_0 & \text{اگر } h(S_\alpha) = E، \end{cases}$$

(الف) بنابرفرض، تابعی حافظ ترتیب مانند $i : J \to E$ وجود دارد. ثابت کنید که به‌ازای هر $\alpha \in J$ ، $h(\alpha) \leqslant i(\alpha)$؛ نتیجه بگیرید که h به‌ازای هر α دردستور ذیل صدق می‌کند:

$$h(\alpha) = \text{کوچکترین عضو } (E - h(S_\alpha)) \qquad (*)$$

(ب) ثابت کنید که به‌ازای هر α ، مجموعهٔ $h(S_\alpha)$ قطعه‌ای از E است؛ نتیجه بگیرید که $h(J)$ مساوی E یا مساوی قطعه‌ای از E است.

(پ) ثابت کنید که h حافظ ترتیب است.

(ت) ثابت کنید که به‌ازای هر تابع حافظ ترتیب $k : J \to E$ ، اگر $k(J)$ مساوی E یامساوی قطعه‌ای از E باشدآنگاه k در(*) صدق می‌کند، و در نتیجه یکتاست.

۳. بدون استفاده ازاصل موضوع انتخاب ثابت کنید که:

قضیه. اگر A و B دومجموعهٔ خوشترتیب باشندآنگاه یایك نوع ترتیب دارند ویایکی دارای نوع ترتیب قطعه‌ای ازدیگری است.

[راهنمایی. مجموعهٔ خوشترتیبی را که درتمرین ۸ (الف) دربخش ۱ــ۱۰ ساخته شد درنظر بگیرید.]

نتیجه. اگر A و B دومجموعهٔ خوشترتیب ناشماراباشند وهمهٔ‌قطعات آنها شماراباشند آنگاه A و B دارای یك نوع ترتیب‌اند.

۴. بدون استفاده ازاصل موضوع انتخاب، به‌طریق ذیل یك‌مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارا بسازید: فرض کنید $\mathcal{A}$ گردایهٔ همهٔ زوجهای $(A, <)$ باشد که در آن A زیرمجموعه‌ای از Z_+ وبا رابطهٔ $<$ خوشترتیب است. (A ممکن است تهی باشد.) رابطهٔ $\sim$ را در $\mathcal{A}$ چنین تعریف می‌کنیم: $(A, <) \sim (A', <')$ هرگاه $(A, <)$ و $(A', <')$ دارای یك‌نوع ترتیب باشند. به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که $\sim$ یك‌رابطهٔ هم‌ارزی است. فرض کنید $[(A, <)]$ ردهٔ هم‌ارزی $(A, <)$ و E گردایهٔ همهٔ این‌رده‌های هم‌ارزی باشد. رابطهٔ $\ll$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$[(A, <)] \ll [(A', <')]$$

هرگاه $(A, <)$ دارای نوع ترتیب قطعه‌ای از $(A', <')$ باشد.

(الف) ثابت کنید که $\ll$ خوشتعریف‌است ویك‌ترتیب ساده در E است. ملاحظه کنید که ردهٔ هم‌ارزی $[(\varnothing, \varnothing)]$ کوچکترین عضو E است.

(ب) ثابت کنید که اگر $\alpha = [(A, <)]$ عضوی از E باشد آنگاه $(A, <)$ دارای همان نوع ترتیب قطعهٔ $S_\alpha(E)$ از E در α است. [راهنمایی: نگاشت

$f: A \to E$ را چنین تعریف کنید: به‌ازای هر x از A،

$[\cdot f(x) = [(S_\alpha(A), <$ تحدید $)]$

(پ) نتیجه بگیرید که E با $\gg$ خوشترتیب است.

(ت) ثابت کنید که E ناشماراست. [راهنمایی: اگر $h: E \to Z_+$ تابعی دوسویی باشد آنگاه h در Z_+ یک خوشترتیبی القا می‌کند.]

استدلالی مشابه، با اختیار کردن مجموعهٔ خوشترتیب دلخواهی مانند X به‌جای Z_+، (بدون استفاده از اصل موضوع انتخاب) وجود مجموعه‌ای خوشترتیب را که دارای عدد اصلی بزرگتر از X است ثابت می‌کند.

۵. فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه و $\mathcal{A}$ گردایهٔ همهٔ زوجهایی مانند $(A, <)$ باشد که در آن A زیرمجموعه‌ای از X و رابطهٔ $<$ خوشترتیب کنندهٔ A است. رابطهٔ $<$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(A, <) < (A', <')$$

درصورتی که $(A, <)$ مساوی قطعه‌ای از $(A', <')$ باشد.

(الف) ثابت کنید که $<$ رابطهٔ ترتیبی جزئی اکیدی در $\mathcal{A}$ است.

(ب) فرض کنید $\mathcal{B}$ زیرگردایه‌ای از $\mathcal{A}$ باشد که تحت $<$ مرتب ساده است. B' و $<'$ را، بترتیب، مساوی اجتماع همهٔ زیرمجموعه‌های B و اجتماع همهٔ رابطه‌های $<$ به‌طوری که $(B, <) \in \mathcal{B}$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که $(B', <')$ مجموعه‌ای خوشترتیب است.

۶. بااستفاده از تمرینهای ۱ و ۵ ثابت کنید که:

قضیه. اصل ماکزیموم وقضیهٔ خوشترتیبی معادل‌اند.

۷. با استفاده از تمرینهای ۱—۳ و ۵ ثابت کنید:

قضیه. اصل موضوع انتخاب وقضیهٔ خوشترتیبی معادل‌اند.

برهان. فرض کنید X یک مجموعه و c تابع انتخاب ثابتی برای زیرمجموعه‌های ناتهی X باشد. اگر T زیرمجموعه‌ای از X و $<$ رابطه‌ای در T باشد، زوج $(T, <)$ را یک برج در X خوانیم در صورتی که $<$ خوشترتیب کنندهٔ T باشد وبه‌ازای هر x از T،

$$x = c(X - S_x(T)),$$

که درآن $S_x(T)$ قطعهٔ T در x است.

(الف) به‌ازای هردوبرج $(T_1, <_1)$ و $(T_2, <_2)$ در X، ثابت کنید که یا این‌دو مجموعهٔ مرتب متساوی‌اند یا یکی‌ازآنها مساوی قطعه‌ای ازدیگری‌است. [راهنمایی:

اگر T_1 و T_2 مجموعه‌هایی خوشترتیب باشند، نگاشت $h: T_1 \to T_2$ حافظ ـ ترتیب باشد، و $h(T_1)$ مساوی T_2 یامساوی قطعه‌ای از T_2 باشدآنگاه به‌ازای هر x، $h(S_x(T_1)) = S_{h(x)}(T_2)$. اگر T_1 و T_2 دوبرج باشند آنگاه به‌ازای هر x، $h(x) = x$.]

(ب) فرض کنید $\{(T_k, <_k) \mid k \in K\}$ گردایهٔ همهٔ برجهای X باشد. قراردهید

$$T = \bigcup_{k \in K} T_k \quad \text{و} \quad < = \bigcup_{k \in K} (<_k).$$

ثابت کنید که $(T, <)$ برجی در X است. نتیجه بگیرید که $T = X$.

۲

فضای توپولوژیك و توابع پیوسته

منشأ پیدایش مفهوم فضای توپولوژیك ، بررسی خط حقیقی و فضای اقلیدسی و بررسی توابع پیوسته دراین فضاها بوده است. دراین فصل ، فضای توپولوژیك را تعریف می کنیم ، و طرقی چند برای ساختن توپولوژی در یك مجموعه به نحوی که آن را به فضای توپولوژیك مبدل سازد ، بررسی می کنیم. همچنین ، بعضی از مفاهیم مقدماتی مربوط به فضاهای توپولوژی را مورد نظر قرار می‌دهیم. مجموعه‌های بازو بسته ، نقاط حدی ، و توابع پیوسته را به صورت تعمیم طبیعی مفاهیم مشابه برای خط حقیقی و فضای اقلیدسی تعریف می کنیم.

۲-۱ فضاهای توپولوژیك

تعریف فضاهای توپولوژیك ، که اکنون تعریفی است استانده ، مدتها طول کشید تا تدوین شد. ریاضیدانان مختلفی مانند فرشه[1] ، هاوسدورف[2] ، و دیگران درطی دهه‌های اولیهٔ این قرن تعریفات گوناگونی پیشنهاد کردند ، ولی توافق آنان برسر مناسبترین تعریف، پس از زمان نسبتاً مدید حاصل شد. البته آنها خواستار چنان تعریفی ، تا حد امکان جامع ، بودند که همهٔ نمونه‌های گونه‌گونی را که در ریاضیات سودمندند به عنوان حالتهای خاص دربرگیرد؛ از جمله می‌توان فضای اقلیدسی، فضاهای اقلیدسی بینهایت بعدی ، و فضاهای تابعی را نام برد ؛ اما ، همچنین خواستار آن بودند که این تعریف به‌حد کافی مانع باشد تا قضایای معمول ومتعارف این فضاهای شناخته شده درحالت کلی در فضاهای توپولوژیك نیز برقرار باشند. تعیین حدود جامعیت تعریف یك مفهوم جدید ریاضی مسئله‌ای است که

---

1. Fréchet 2. Hausdorff

همواره دربیان این گونه تعریفات با آن مواجه هستیم. تعریفی که سرانجام پذیرفته شد ممکن است کمی مجرد به نظر آید، ولی بتدریج که با راههای گوناگون ساختن فضاهای توپولوژیك آشنا می‌شوید، معنای این مفهوم را بهتر درك خواهید کرد.

تعریف. یك **توپولوژی** درمجموعهٔ X گردایه‌ای مانند $\mathscr{T}$ از زیر مجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) $\varnothing$ و X به $\mathscr{T}$ متعلق‌اند.

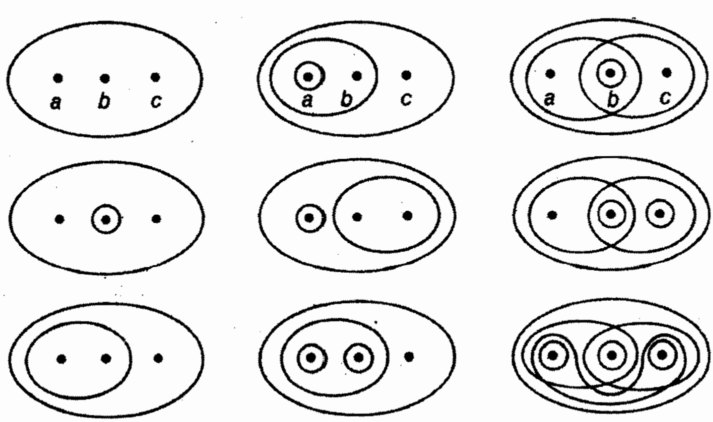
(۲) اجتماع اعضای هرزیرگردایهٔ $\mathscr{T}$ متعلق است به $\mathscr{T}$.

(۳) مقطع اعضای هرزیرگردایهٔ متناهی $\mathscr{T}$ متعلق است به $\mathscr{T}$.

مجموعهٔ X را که برای آن توپولوژی‌ای مانند $\mathscr{T}$ مشخص شده است **فضای توپولوژیك** می‌نامیم.

درستر آن است که بگوییم فضای توپولوژیك عبارت است از زوج مرتب $(X,\mathscr{T})$ که تشکیل شده است از مجموعهٔ X و توپولوژی $\mathscr{T}$ در X، ولی هرجاکه بیم ابهامی نرود از ذکر $\mathscr{T}$ درمی‌گذریم. اگر X فضایی توپولوژیك با توپولوژی $\mathscr{T}$ باشد، زیر مجموعهٔ U از X را یك **مجموعهٔ باز** X خوانیم هرگاه U متعلق به $\mathscr{T}$ باشد. با به‌کار بستن این اصطلاح، می‌توان گفت که فضای توپولوژیك عبارت است از مجموعه‌ای مانند X همراه با گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های آن، موسوم به مجموعه‌های باز، به‌طوری که $\varnothing$ و X هردو بازند و اجتماع دلخواه و مقطع متناهی مجموعه‌های باز نیز باز است.

مثال ۱. فرض کنیم X مجموعهٔ سه عضوی $X=\{a, b, c\}$ باشد. در X توپولوژیهای متعددی می‌توان تعریف کرد، بعضی از آنها در شکل (۱) نموده شده‌اند. نمودار گوشهٔ سمت راست بالایی نمایش دهندهٔ توپولوژی‌ای است که در آن مجموعه‌های باز عبارت‌اند از



شکل ۱

X ، $\varnothing$ ، $\{a, b\}$ ، $\{b\}$ ، و $\{b, c\}$. توپولوژی گوشهٔ سمت چپ بالایی فقط شامل X و $\varnothing$ است، درحالی که توپولوژی گوشهٔ سمت راست پایینی شامل همهٔ زیر مجموعه‌های X است. با جابجاکردن نقش a ، b ، و c می‌توان توپولوژیهای دیگر X را بدست‌آورد. از این مثال دانسته می‌شود که حتی یك مجموعهٔ سه عضوی دارای توپولوژیهای متعدد متفاوت است. اما چنین نیست که هرگردایه از زیرمجموعه‌های X یك توپولوژی در X باشد. مثلاً هیچیك ازگردایه‌هایی که در شکل ۲ نمایش داده شده است توپولوژی نیست.

شکل ۲

مثال ۲. اگر X مجموعهٔ دلخواهی باشد، گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های آن تشکیل توپولوژی‌ای در X می‌دهد که به **توپولوژی گسسته** موسوم است. گردایه‌ای از زیر ـ مجموعه‌های X که فقط شامل X و $\varnothing$ باشد نیزیك توپولوژی در X است؛ ما آن را **توپولوژی ناگسسته** یا **توپولوژی بیمایه** می‌خوانیم.

مثال ۳. مجموعهٔدلخواه X رادرنظرمی‌گیریم؛ و $\mathcal{T}_f$ راگردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایی از X مانند U اختیار می‌کنیم که $X-U$ یا متناهی است یا خود X است. دراین‌صورت $\mathcal{T}_f$ یك توپولوژی در مجموعهٔ X است، که به **توپولوژی متمم متناهی** موسوم است. X و $\varnothing$ هردو در $\mathcal{T}_f$ هستند، زیرا $X-X$ متناهی، و $X-\varnothing$ مساوی X است. فرض کنیم که $\{U\alpha\}$ گردایهٔ اندیسداری از اعضای $\mathcal{T}_f$ باشد؛ برای اثبات اینکه $\bigcup U_\alpha$ در $\mathcal{T}_f$ است ملاحظه می کنیم که

$$X-\bigcup U_\alpha=\bigcap(X-U_\alpha).$$

مجموعهٔ اخیر متناهی است، زیرا هریك از مجموعه‌های $X-U\alpha$ متناهی است. اکنون فرض می کنیم U_1 , . . . , U_n عضو $\mathcal{T}_f$ باشند، برای‌اثبات اینکه $\bigcap U_i$ عضو $\mathcal{T}_f$،است ملاحظه می کنیم که

$$X-\bigcap^n{}_{i=1}U_i=\bigcup^n{}_{i=1}(X-U_i).$$

مجموعهٔ اخیر اجتماع تعدادی متناهی از مجموعه‌های متناهی است و در نتیجه خود نیز متناهی است.

مثال ۴. مجموعهٔ دلخواه X را درنظر می‌گیریم؛ $\mathcal{T}_c$ راگردایهٔ همه زیرمجموعه‌هایی از X مانند U اختیار می‌کنیم که $X-U$ شمارا و یا خود X است. به آسانی معلوم می‌شودکه $\mathcal{T}_c$ یك توپولوژی در X است.

تعریف. فرض کنیم که $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}'$ دو توپولوژی در مجموعهٔ مفروض X باشند؛ اگر $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$، می‌گوییم $\mathcal{T}'$ از $\mathcal{T}$ **ظریفتر** است؛ اگر $\mathcal{T}'$ اکیداً حاوی $\mathcal{T}$ باشد، می‌گوییم $\mathcal{T}'$ **اکیداً ظریفتر** از $\mathcal{T}$ است.

این دو وضع را بترتیب با عبارات $\mathcal{T}$ **درشتتر** از $\mathcal{T}'$ است یا **اکیداً درشتتر** از آن است نیز بیان می‌کنیم.

این اصطلاح با این ملاحظه انتخاب شده است که می‌توان یك فضای توپولوژیك‌را چیزی شبیه کامیونی پر از پاره سنگ تصور کرد که مجموعه‌های باز آن عبارت‌اند از قلوه‌سنگها و همهٔ اجتماعهای گردایه‌های قلوه‌سنگها. حال اگر این قلوه سنگها را به‌تکه‌های کوچکترخرد کنیم، گردایهٔ مجموعه‌های‌باز بزرگتر می‌شود، و گوییم این توپولوژی، همچون پاره سنگها، با این عمل ظریفتر شده است.

البته، لازم نیست که هردو توپولوژی در X قابل مقایسه باشند. مثلاً در شکل ۱، توپولوژی‌گوشهٔ سمت راست بالایی از هریك از توپولوژیهای ستون اول اکیداً ظریفتر، و از هریك از توپولوژیهای دیگر ستون سوم اکیداً درشتتر است. ولی با هیچیك از توپولوژیهای ستون دوم قابل مقایسه نیست.

برای این مفهوم، گاه اصطلاحات دیگری نیز به‌کار می‌رود. وقتی که $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$، بعضی‌ازریاضیدانان می‌گویند $\mathcal{T}'$ **بزرگتر** از $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}$ **کوچکتر** از $\mathcal{T}'$ است. این اصطلاح اگر چه به اندازهٔ «ظریفتر» و «درشتتر» گویا نیست، یقیناً پذیرفتنی است.

بسیاری از ریاضیدانان واژه‌های «ضعیفتر» و «قویتر» را دراین مورد به‌کار می‌برند. متأسفانه، بعضی‌از ایشان (بویژه دست اندرکاران آنالیز) تمایل دارند وقتی بگویند $\mathcal{T}'$ قویتر از $\mathcal{T}$ است که $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$، درحالی که بقیه (بویژه دست‌اندرکاران توپولوژی) تمایل دارند در همان‌وضع بگویند $\mathcal{T}'$ ضعیفتر از $\mathcal{T}$ است! اگر درکتابی به اصطلاح «توپولوژی قوی» یا «توپولوژی ضعیف» برخوردید، باید از سیاق مطلب معنی اصطلاح مورد نظر را دریابید. ما، دراین کتاب این اصطلاحات را به‌کار نخواهیم برد.

۲-۲ پایهٔ یك توپولوژی

درهریك‌ازمثالهای بخش پیش، توانستیم توپولوژی $\mathcal{T}$ را با ارائهٔ همهٔ اعضایش مشخص کنیم. این کار معمولاً بسیار دشوار است. در اغلب موارد گردایهٔ کوچکتری از زیر- مجموعه‌های X را مشخص می‌کنیم و بعد توپولوژی مورد نظر را برحسب اعضای این گردایه تعریف می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای‌باشد، یك **پایهٔ** توپولوژی‌ای در X گردایه‌ای است از زیر مجموعه‌های X (موسوم به **اعضای پایه**) به‌طوری‌که:

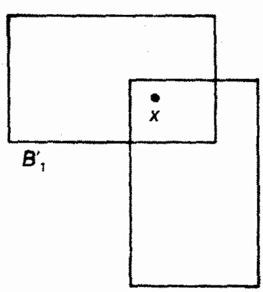
(۱) به‌ازای هر $x \in X$، دست‌کم یك عضو پایه مانند B شامل x موجود است.

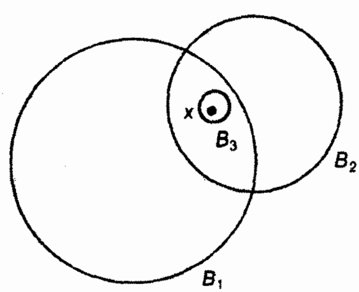
(۲) اگر x متعلق به مقطع دو عضو پایه مانند B_1 و B_2 باشد آنگاه عضوی از پایه مانند B_3 وجود دارد به‌طوری که $x \in B_3$ و $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

تعریف. اگر $\mathscr{B}$ پایهٔ‌توپولوژی‌ای‌در X باشدآنگاه $\mathscr{T}$، **توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ** $\mathscr{B}$، چنین تعریف می‌شود: زیر مجموعهٔ U از X را در X بازگوییم (یعنی عضوی از $\mathscr{T}$ است) اگر به‌ازای هر $x \in U$، عضوی ازپایه مانند $B \in \mathscr{B}$ وجودداشته باشد به‌طوری که $x \in B$ و $B \subset U$.

ملاحظه می‌شود که بنابرتعریف بالا، هرعضو $\mathscr{B}$ در X باز است، بنابراین $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که این گردایه از زیر مجموعه‌های X یك توپولوژی در X است. پیش‌از اینکه این حکم را ثابت کنیم، چند مثال می‌آوریم.

مثال ۱. فرض‌کنید $\mathscr{B}$ گردایه همه نواحی دایره‌ای (داخل دوایر) صفحه باشد. دراین صورت $\mathscr{B}$ در هردو شرط تعریف پایه صدق می‌کند. برقراری شرط دوم را در شکل ۳ نمایش داده‌ایم. در توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathscr{B}$، زیر مجموعه‌ای از صفحه مانند U وقتی باز است که هرعضو x در U متعلق به یك ناحیهٔ دایره‌ای باشدکه زیر مجموعهٔ U است.





شکل ۴

شکل ۳

مثال ۲. فرض‌کنیم $\mathscr{B}'$ گردایه همه نواحی مستطیلی (داخل مستطیلها) صفحه باشد به‌طوری که اضلاع مستطیلها موازی محورهای مختصات باشند. دراین صورت $\mathscr{B}'$ درهردو شرط تعریف پایه صدق می‌کند. برقراری شرط دوم را درشکل ۴ نمایش داده‌ایم؛ دراین حالت، برقراری شرط دوم بدیهی است، زیرا مقطع هردو عضو پایه خود یك عضو پایه است (یا تهی است). همان طور که بعداً خواهیم دید، پایهٔ $\mathscr{B}'$ همان توپولوژی‌ای رادر صفحه تولید می‌کندکه پایهٔ $\mathscr{B}$ که در مثال قبلی تعریف شد.

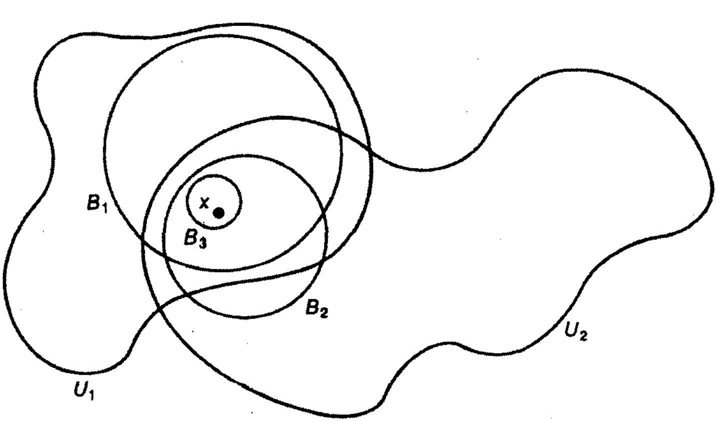
مثال ۴. به‌ازای هرمجموعهٔ دلخواه X ، گردایهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های یك عضوی X پایه‌ای برای توپولوژی گسسته در X است.

حال بررسی می کنیم که گردایهٔ $\mathscr{T}$، تولید شده به‌وسیلهٔ پایهٔ $\mathscr{B}$ ، در واقع یك توپولوژی در X است. اگر مجموعهٔ U تهی باشد آنگاه U به‌انتفای مقدم‌در تعریف باز بودن‌صدق می کند. همچنین ، مجموعـهٔ X در $\mathscr{T}$ است. زیرا به‌ازای هر $x \in X$، عضوی ازپایه‌ای مانند B هست که شامل x است و $B \subset X$. اکنون خانواده‌ای اندیسدار $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ از اعضای $\mathscr{T}$ را درنظر می گیریم و ثابت می کنیم که

$$U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$$

به $\mathscr{T}$ تعلق دارد. فرض‌کنیم x عضو دلخواهی از U باشد ؛ پس اندیسی مانند α وجود داردبه‌طوری که $x \in U_\alpha$. چون U_α باز است ، یك‌عضو پایهٔ B وجود دارد به‌طوری که $x \in B \subset U_\alpha$. پس $x \in B$ و $B \subset U$ و درنتیجه ، بنابر تعریف ، U باز است.

حال دو عضو U_1 و U_2 از $\mathscr{T}$ را درنظرمی گیریم‌و ثابت می کنیم $U_1 \cap U_2$ متعلق به $\mathscr{T}$ است. فرض کنیم $x \in U_1 \cap U_2$ ، عضو پـایهٔ B_1 کـه شامل x است را طوری انتخاب می کنیم که $B_1 \subset U_1$. همچنین ، عضوی مانند B_2 از پایه برمی گزینیم که شامل x بـاشد و $B_2 \subset U_2$. بنابر شرط دوم عضوی مانند B_3 از پـایه هست بـه‌طوری کـه $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ (شکل۵). درنتیجه، $x \in B_3$ و $B_3 \subset U_1 \cap U_2$ ، پس بنابرتعریف، $U_1 \cap U_2$ متعلق است به $\mathscr{T}$.



شکل ۵

سرانجام به استقرا ثابت می کنیم که مقطع هر تعداد متناهی $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ در $\mathscr{T}$

است. به‌ازای $n=1$ حکم بدیهی است، فرض کنیم حکم برای $n-1$ برقرار باشد و آن را برای n ثابت می‌کنیم. چون

$$(U_1 \cap \dots \cap U_n) = (U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}) \cap U_n,$$

و بنابر استقرا، $U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}$ متعلق به $\mathscr{T}$ است، به‌موجب آنچه درمورد دو مجموعه ثابت شد، مقطع $U_1 \cap \dots \cap U_{n-1}$ و U_n نیز به $\mathscr{T}$ تعلق دارد.

بدین ترتیب محقق شد که گردایهٔ مجموعه‌های باز تولید شده به‌وسیلهٔ پایهٔ $\mathscr{B}$ در واقع یک توپولوژی است.

طریقهٔ دیگر توصیف توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ یک پایه در لم زیر ارائه شده است:

۱.۲ لم فرض کنیم X مجموعه‌ای دلخواه و $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathscr{T}$ در X باشد. دراین صورت، $\mathscr{T}$ برابر است با گردایهٔ همهٔ اجتماعهای اعضای $\mathscr{B}$.

برهان. فرض می‌کنیم $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{T}}$ خانوادهٔ اندیسدار دلخواهی از اعضای $\mathscr{B}$ باشد. چون به‌ازای هر α، $B_\alpha \in \mathscr{T}$ و $\mathscr{T}$ یک توپولوژی است، پس $\bigcup_{\alpha \in \mathscr{T}} B_\alpha$ نیز به $\mathscr{J}$ تعلق‌خواهد داشت. بالعکس، فرض کنیم $U \in \mathscr{J}$، بنابر تعریف، به‌ازای هر $x \in U$ عضوی از $\mathscr{B}$ مانند B_x هست که $x \in B_x \subset U$. در این صورت $U = \bigcup_{x \in U} B_x$، و درنتیجه U برابر است با اجتماعی از اعضای $\mathscr{B}$. □

وقتی که توپولوژیها به‌وسیلهٔ پایه داده می‌شوند، مفید است که معیاری برحسب پایه‌ها برای مقایسهٔ ظرافت آنها در دست باشد. چنین ضابطه‌ای در لم زیر آمده است:

۲.۲ لم فرض کنیم $\mathscr{B}$ و $\mathscr{B}'$، بترتیب، پایه‌هایی برای توپولوژیهای $\mathscr{T}$ و $\mathscr{T}'$ در X باشند. دراین صورت، دو حکم زیر باهم معادل‌اند.

(۱) $\mathscr{T}'$ از $\mathscr{T}$ ظریفتر است.

(۲) به‌ازای هر $x \in X$ و هر عضو پایهٔ $B \in \mathscr{B}$ که شامل x باشد، یک عضو پایهٔ $B' \in \mathscr{B}'$ وجود دارد به‌طوری که $x \in B' \subset B$.

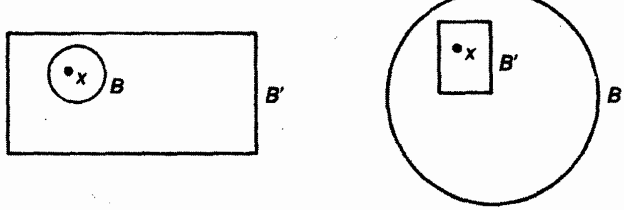
بعضی‌از محصلین به‌خاطر سپردن شرط اخیر را کمی دشوار می‌یابند. آنها می‌پرسند «شمول از کدام طرف برقرار است؟» شاید اگر تمثیل فضای توپولوژیک با کامیون پر از پاره سنگ را به‌یاد بیاورید، به‌خاطرسپردن این شرط آسانتر شود. قلوه سنگها را به‌جای اعضای پایهٔ توپولوژی بگیرید؛ بعداز اینکه قلوه سنگها خرد شدند و به‌سنگ ریزه بدل گشتند، سنگ ریزه‌ها اعضای پایهٔ توپولوژی جدید می‌شوند. توپولوژی جدید ظریفتر

از توپولوژی اولیه است ، و همان طور که شرط بالا بیان می کند ، هریك از سنگ‌ریزه‌ها جزئی از یك قلوه سنگ است.

برهان لم. (۱) $\Longrightarrow$ (۲). می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر U عضو مفروضی از $\mathcal{T}$ باشد آنگاه $U \in \mathcal{T}'$. فرض کنیم $x \in U$. چون $\mathcal{T}$ به وسیلهٔ $\mathcal{B}$ تولید می‌شود ، عضوی از $\mathcal{B}$ مانند B هست که $x \in B \subset U$. اما ، بنابر شرط (۲) ، عضوی از $\mathcal{B}'$ مانند B' هست که $x \in B' \subset B$. درنتیجه ، $x \in B' \subset U$. پس ، بنابر تعریف ، $U \in \mathcal{T}'$.

(۲) $\Longrightarrow$ (۱). فرض کنیم $x \in X$ ، $B \in \mathcal{B}$ ، و $x \in B$. بنابر تعریف ، B به $\mathcal{T}$ تعلق دارد و بنابر شرط (۱) ، $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ ؛ پس $B \in \mathcal{T}'$. اما چون $\mathcal{T}'$ به وسیلهٔ $\mathcal{B}'$ تولید شده است ، عضوی مانند B' از $\mathcal{B}'$ هست به‌طوری که $x \in B' \subset B$. $\square$

مثال ۴. حال می‌توان مشاهده کرد که گردایهٔ $\mathcal{B}$ ، تشکیل شده از همهٔ نواحی دایره‌ای در صفحه ، همان توپولوژی را تولید می‌کند که گردایهٔ $\mathcal{B}'$ از همهٔ نواحی مستطیلی در آن صفحه به وجود می‌آورد. شکل ۶ برهان این مطلب را مجسم می‌کند. بررسی دقیقتر این مسئله را به مبحث فضاهای متری موکول می‌کنیم.



شکل ۶

تا اینجا دو طریقهٔ مختلف برای رسیدن از یك پایه به توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ آن بیان کرده‌ایم. گاه لازم است که در جهت عکس حرکت کنیم ، یعنی از یك توپولوژی به پایه‌ای که آن را تولید کرده است برسیم. لم زیر طریقه‌ای برای به‌دست‌آوردن یك پایه برای توپولوژی مفروضی به‌دست می‌دهد ، و آن را بسیار به‌کار خواهیم برد.

۲.۳ لم فرض کنیم X یك فضای توپولوژیك و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز X باشد به‌طوری که به‌ازای هر x از X و هر مجموعهٔ باز X مانند U که شامل x است[۱]، عضوی از $\mathcal{C}$ مانند C وجود داشته باشد که $x \in C \subset U$. در این صورت ، $\mathcal{C}$ پایه‌ای برای توپولوژی X است.

۱. در متن اصلی مؤلف ذکر اینکه «$x \in U$» را حذف کرده است. ـم.

برهان. نخست باید ثابت کرد که $\mathscr{C}$ یك پایه است. بررسی شرط اول پایه آسان است: چون X مجموعه‌ای است باز، به‌ازای هر $x \in X$، بنابر فرض، عضوی از $\mathscr{C}$ مانند C هست که $x \in C \subset X$. برای تحقیق در شرط دوم فرض کنیم $x \in C_1 \cap C_2$، که در آن C_1 و C_2 ازاعضای $\mathscr{C}$اند. چون C_1 و C_2 هردو بازند، پس $C_1 \cap C_2$ نیز باز است. درنتیجه، بنابر فرض،عضوی از $\mathscr{C}$ مانند C_3 هست که $x \in C_3 \subset C_1 \cap C_2$.

اکنون فرض کنیم $\mathscr{T}'$ توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathscr{C}$ در X باشد و $\mathscr{T}$ توپولوژی‌ای باشد که‌از ابتدا بر X مفروض بوده است. لم قبلی نشان می‌دهد که $\mathscr{T}'$ از $\mathscr{T}$ ظریفتر است. بالعکس، چون هرعضو $\mathscr{C}$ عضوی از $\mathscr{T}$ است، اجتماع هرتعداد از اعضای $\mathscr{C}$ نیز به $\mathscr{T}$ تعلق دارد. پس بنابر لم ۱۰۲، $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. درنتیجه $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. □

دو توپولوژی در خط حقیقی وجود دارد که آنها را می‌توان برحسب پایه‌ها توصیف کرد:

تعریف. اگر $\mathscr{B}$ گردایهٔ همهٔ بازه‌های باز اعداد حقیقی مانند

$$(a, b)=\{x \mid a < x < b\}$$

باشد، آنگاه توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathscr{B}$ را **توپولوژی استانده** در خط حقیقی می‌نامند. اگر $\mathscr{B}'$ گردایهٔ همهٔ بازه‌های نیم باز اعداد حقیقی به‌صورت

$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}$$

باشد که در آن $a < b$، آنگاه توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathscr{B}'$ را **توپولوژی حد پایینی** در R می‌خوانند. وقتی که R از توپولوژی حد پایینی برخوردار باشد، آن را به R_l نمایش می‌دهیم.

بسهولت معلوم می‌شود که $\mathscr{B}$ و $\mathscr{B}'$ پایه‌اند؛ مقطع هر دو عضو پایه تهی یا عضو دیگری از پایه است.

هرگاه R را درنظر می‌گیریم،فرض این است که از توپولوژی استانده برخوردار است، مگر اینکه خلافش تصریح شود. توپولوژی حد پایینی در ساختن مثالهای نقض بسیار مفید است. ارتباط بین این دو توپولوژی به قرار زیر است:

۴۰۲ لم اگر $\mathscr{T}$ و $\mathscr{T}'$، بترتیب، توپولوژی استانده و توپولوژی حد پایینی در R باشند آنگاه $\mathscr{T}'$ اکیداً ظریفتر از $\mathscr{T}$ است.

برهان. فرض کنیم (a, b) عضوی از پایهٔ توپولوژی $\mathscr{T}$ باشد و $x \in (a, b)$. دراین صورت، بازهٔ $[x, b)$ عضوی است از پایهٔ توپولوژی $\mathscr{T}'$ که شامل x و جزء (a, b) است. پس، $\mathscr{T}'$ از $\mathscr{T}$ ظریفتر است. از سوی دیگر، به‌ازای عضو $[x, d)$ از

پایهٔ توپولوژی $\mathcal{T}'$ هیچ بازهٔ بازی وجود ندارد که در شرط

$$x \in (a, b) \subset [x, d)$$

صدق کند. بنابراین، $\mathcal{T}$ از $\mathcal{T}'$ ظریفتر نیست. □

چون توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ پایهٔ $\mathcal{B}$ را می‌توان به‌صورت گردایهٔ اجتماعهای دلخواه اعضای $\mathcal{B}$ توصیف کرد، اکنون ممکن است این سؤال به ذهن خطور کند که اگر کار را با گردایه‌ای از مجموعه‌ها شروع کنیم و مقاطع متناهی و اجتماعهای دلخواه آنها را درنظر بگیریم، چه وضعی رخ خواهد داد؟ این پرسش منجر به مفهوم زیر پایهٔ یك توپولوژی می‌شود.

تعریف. گردایهٔ $\mathcal{S}$ از زیر مجموعه‌های X را یك **زیر پایه** برای یك توپولوژی بر X می‌خوانند اگر اجتماع اعضای آن برابر X باشد. دراین صورت، بنابر تعریف، **توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ زیر پایهٔ** $\mathcal{S}$ عبارت است از گردایهٔ $\mathcal{T}$ متشکل از همهٔ اجتماعهای مقاطع متناهی اعضای $\mathcal{S}$.

البته باید توپولوژی بودن $\mathcal{T}$ را بررسی کنیم. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که $\mathcal{B}$، گردایهٔ همهٔ مقاطع متناهی اعضای $\mathcal{S}$، یك پایه است. زیرا دراین صورت گردایهٔ $\mathcal{T}$ که از همهٔ اجتماعهای اعضای $\mathcal{B}$ تشکیل شده است، بنابر لم ۱.۲، یك توپولوژی در X خواهد بود. به‌ازای عضو مفروضی از X مانند x، بنابر تعریف $\mathcal{S}$، x متعلق به عضوی از $\mathcal{S}$ و درنتیجه متعلق به عضوی از $\mathcal{B}$ است. پس، $\mathcal{B}$ واجد اولین شرط پایه است. برای بررسی شرط دوم، فرض کنیم

$$B_1 = S_1 \cap \cdots \cap S_m \quad \text{و} \quad B_2 = S_1' \cap \cdots \cap S_n'$$

دو عضو دلخواه $\mathcal{B}$ باشند. مقطع آنها عبارت است از

$$B_1 \cap B_2 = (S_1 \cap \cdots \cap S_m) \cap (S_1' \cap \cdots \cap S_n')$$

که آن نیز مقطعی متناهی از اعضای $\mathcal{S}$ است، و درنتیجه به $\mathcal{B}$ تعلق دارد.

چون زیر پایه‌ها در این کتاب در مواردی معدود به کار می‌آیند، آنها را بتفصیل بررسی نخواهیم کرد.

تمرینها

۱. فرض کنید X فضایی توپولوژیك باشد و $A \subset X$. فرض کنیم به‌ازای هر $x \in A$ مجموعهٔ بازی شامل x مانند U وجود داشته باشد به‌طوری که $U \subset A$. ثابت کنید که A در X باز است.

۲. در بخش ۲–۱ مثال ۱ ، در مجموعهٔ $X=\{a, b, c\}$ ، ۹ توپولوژی ساختیم. این توپولوژیها را باهم مقایسه کنید ، یعنی به‌ازای هردو توپولوژی تعیین کنید که آیا مقایسه پذیر هستند یا نه ، و اگر هستند کدامیك ظریفتر است.

۳. ثابت کنید که گردایهٔ $\mathcal{T}_c$ در مثال ۴ از بخش ۲–۱ ، یك توپولوژی در مجموعهٔ X است. آیا گردایهٔ

$$\mathcal{T}_\infty=\{U \mid X-U \text{ یا نامتناهی ، یا خالی ، و یا همهٔ } X \text{ است}\}$$

یك توپولوژی در X است؟

۴. (الف) اگر $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ گردایه‌ای از توپولوژیهای X باشد ، ثابت کنید که $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ نیز یك توپولوژی در X است. آیا $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$ نیز یك توپولوژی در X است؟
(ب) فرض کنید $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ گردایه‌ای از توپولوژیهای X باشد. ثابت کنید که توپولوژی یکتایی در X هست به‌طوری که کوچکترین توپولوژی حاوی همهٔ $\mathcal{T}_\alpha$ هاست و همچنین توپولوژی یکتایی وجود دارد که بزرگترین توپولوژی جزء همهٔ $\mathcal{T}_\alpha$ هاست.
(پ) فرض کنید $X=\{a, b, c\}$ ، و

$$\mathcal{T}_1=\{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\} \quad \text{و} \quad \mathcal{T}_2=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$$

کوچکترین توپولوژی شامل $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ و بزرگترین توپولوژی جزء $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ را بیابید.

۵. ثابت کنید که اگر $\mathcal{A}$ پایه‌ای برای یك توپولوژی در X باشد آنگاه توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathcal{A}$ برابر است با مقطع همهٔ توپولوژیهایی در X که حاوی $\mathcal{A}$ هستند. همین حکم را وقتی که $\mathcal{A}$ یك زیرپایه است ثابت کنید.

۶. گردایه‌های زیر از زیرمجموعه‌های R را درنظر بگیرید :

$\mathcal{B}_1=\{(a, b) \mid a<b\}$ ،

$\mathcal{B}_2=\{[a, b) \mid a<b\}$ ،

$\mathcal{B}_3=\{(a, b] \mid a<b\}$ ، که درآن $(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$ ،

$\mathcal{B}_4=\mathcal{B}_1 \bigcup \{B-K \mid B \in \mathcal{B}_1\}$ ، که درآن $K=\left\{\frac{1}{n} \mid n \in Z_+\right\}$ ،

$\mathcal{B}_5=\{(a, +\infty) \mid a \in R\}$ ، که درآن $(a, +\infty)=\{x \mid x>a\}$ ،

$\mathcal{B}_6=\{(-\infty, a) \mid a \in R\}$ ، که درآن $(-\infty, a)=\{x \mid x<a\}$ ،

$\mathcal{B}_7=\{B \mid R-B \text{ متناهی است}\}$ ،

(الف) ثابت کنید که هر $\mathcal{B}_i$ پایه‌ای است برای یك توپولوژی در R.
(ب) این هفت توپولوژی را با یکدیگر مقایسه کنید.

(پ) ثابت کنید که $\mathscr{B}_5 \cup \mathscr{B}_6$ زیر پایه‌ای است که توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ آن همان توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathscr{B}_1$ است.

۷. (الف) به‌وسیلهٔ لم ۳.۲ ثابت کنید که گردایهٔ شمارای

$$\mathscr{B}_1' = \{(a,\ b) \mid a < b,\ \text{و } a \text{ و } b \text{ گویا هستند}\}$$

پایه‌ای است که توپولوژی معمولی R را تولید می‌کند.

(ب) ثابت کنید که گردایهٔ

$$\mathscr{B}_2' = \{[a,\ b) \mid a < b,\ \text{و } a \text{ و } b \text{ گویا هستند}\}$$

پایه‌ای است که توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ آن با توپولوژی حد پایینی R تفاوت دارد.

۲-۳ توپولوژی ترتیبی

فرض کنیم X مجموعهٔ مرتب ساده‌ای باشد. برای X توپولوژی استانده‌ای وجود دارد که با به‌کار بردن رابطهٔ ترتیبی تعریف می‌شود. این توپولوژی، به **توپولوژی ترتیبی** موسوم است، در این قسمت این توپولوژی را مدنظر قرار می‌دهیم و به‌مطالعهٔ بعضی‌از خواص‌آن می‌پردازیم.

فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد که درآن رابطهٔ ترتیبی سادهٔ $>$ تعریف شده است. به‌ازای هردوعضو X مانند a و b، به‌طوری که $a < b$، چهار زیر مجموعهٔ X موسوم به **بازه‌ها** به‌صورت زیرمشخص می‌شوند:

$$(a,\ b) = \{x \mid a < x < b\},$$

$$(a,\ b] = \{x \mid a < x \leqslant b\},$$

$$[a,\ b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$

$$[a,\ b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

قبلاً با این علامات، درحالتی‌که X خط حقیقی باشد، آشنا شده‌اید. ولی باید توجه داشت که دراینجا این علامات بازه‌هایی در یك مجموعهٔ مرتب دلخواه‌اند. مجموعه‌ای‌از نوع اول را **بازهٔ باز** و مجموعه‌ای از نوع آخر را **بازهٔ بسته** در X می‌خوانند، و مجموعه‌های نوع دوم و سوم را **بازه‌های نیم باز** می‌گویند. استعمال اصطلاح «باز» دراینجا چنین به ذهن می‌رساند که هرگاه توپولوژی‌ای در X تعریف شود، بازه‌های باز باید مجموعه‌هایی باز باشند، وچنین نیز خواهد بود.

تعریف. فرض کنیم X مجموعه‌ای باشد با یك رابطهٔ ترتیبی ساده، و $\mathscr{B}$ گردایهٔ

همهٔ مجموعه‌هایی که به‌صورت یکی از انواع زیر باشند:

(۱) همهٔ بازه‌های باز (a, b) در X.

(۲) همهٔ بازه‌های به صورت $[a_0, b)$ ، که در آن، a_0 کوچکترین عضو مجموعهٔ X است (درصورت وجود).

(۳) همهٔ بازه‌های به صورت $(a, b_0]$ ، که درآن، b_0 بزرگترین عضو مجموعهٔ X است (درصورت وجود).

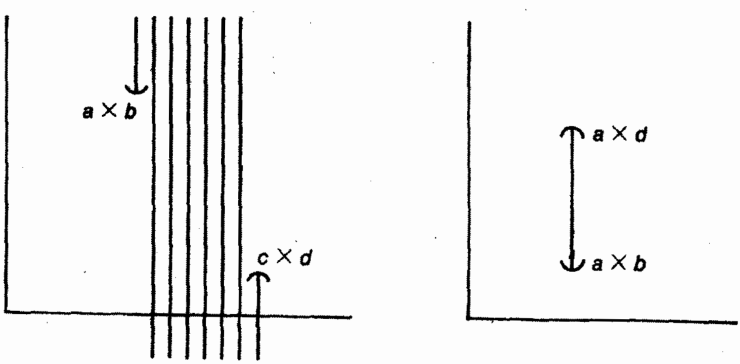
گردایهٔ $\mathcal{B}$ پایه‌ای است برای یك توپولوژی‌در X موسوم به **توپولوژی ترتیبی**.

اگر X دارای کوچکترین عضو نباشد ، مجموعه‌هایی از نوع (۲) وجود نخواهند داشت ؛ و اگر X دارای‌بزرگترین‌عضو نباشد ، مجموعه‌هایی‌از نوع (۳) وجود نخواهند داشت.

بایستی برقراری شرایط پایه را در مورد $\mathcal{B}$ بررسی کرد. نخست ، ملاحظه می‌کنیم که هرعضو X مانند x دست‌کم به یك عضو $\mathcal{B}$ تعلق دارد: کوچکترین عضو (درصورت‌وجود) به همهٔ مجموعه‌های نوع (۲) متعلق است ، بزرگترین عضو(درصورت وجود) به‌همهٔ مجموعه‌های نوع (۳) تعلق دارد ، وهرعضودیگر X درمجموعه‌ای ازنوع (۱) قرار دارد. ثانیاً ، ملاحظه می‌کنیم که مقطع هردو مجموعه از این انواع مجموعه‌ای است متعلق به‌یکی‌از این انواع ، ویا تهی است. دراین مورد باید چندین حالت رابررسی کرد ؛ این‌کار را به خواننده محول می‌کنیم.

مثال ۱. توپولوژی استاندهٔ R ، که قبلاً تعریف شد ، همان توپولوژی ترتیبی است که از ترتیب معمولی R نتیجه شده است.

مثال ۲. مجموعهٔ $R\times R$ را با ترتیب قاموسی درنظر می‌گیریم ، به‌منظور پیشگیری از تشتت در علامت ، عضو دلخواهی از $R\times R$ را بـه $x\times y$ نمایش می‌دهیم. مجموعـهٔ



شکل ۷

$R\times R$ نه بزرگترین عضو دارد و نه کوچکترین عضو، بنابراین توپولوژی ترتیبی آن دارای پایه‌ای است متشکل از گردایهٔ همهٔ بازه‌های باز به صورت $(a\times b,\ c\times d)$، که درآن $a<c$، یاآنکه $a=c$ و $b<d$. در شکل ۷ این دو نوع بازه را نمایش‌داده‌ایم. به‌آسانی می‌توان بررسی‌کرد که زیرگردایه‌ای متشکل از بازه‌های نوع دوم نیز پایه‌ای برای توپولوژی ترتیبی $R\times R$ است.

مثال ۳. Z_+، مجموعهٔ اعدادصحیح مثبت، مجموعه‌ای است مرتب که دارای کوچکترین عضو است. توپولوژی ترتیبی Z_+ توپولوژی‌گسسته است، زیرا هرمجموعهٔ تك عضوی‌در آن باز است، اگر $n>1$، آنگاه مجموعهٔ تك عضوی

$$\{n\}=(n-1,\ n+1)$$

یك عضوپایه است، واگر $n=1$ مجموعهٔ تك عضوی $[1,2)=\{1\}$ یك عضو پایه است.

مثال ۴. مجموعهٔ $X=\{1,2\}\times Z_+$ با ترتیب قاموسی مثال دیگری است ازمجموعهٔ مرتبی که دارای‌کوچکترین عضو است. اگر $1\times n$ را به a_n و $2\times n$ را به b_n نمایش دهیم، X را می‌توان چنین نمایش داد:

$$a_1,\ a_2,\ \dots;\ b_1,\ b_2,\ \dots$$

توپولوژی ترتیبی در X توپولوژی گسسته نیست. بیشتر مجموعه‌های تك عضوی بسازند ولی استثنایی نیز وجود دارد و آن مجموعهٔ تك عضوی $\{b_1\}$ است. زیرا، بنابرتعریف، هرمجموعهٔ بازی‌که شامل b_1 باشد باید شامل عضوی از پایه باشد که شامل b_1 است، و هرعضو پایه‌که شامل b_1 باشد شامل نقاطی از دنبالهٔ a_n است.

تعریف. فرض‌کنیم X مجموعه‌ای مرتب و a عضوی از X باشد. چهار زیر-مجموعهٔ زیر از X را **شعاعهای** مشخص شده به‌وسیلهٔ a می‌خوانند:

$$(a,\ +\infty)=\{x\mid x>a\},$$

$$(-\infty,\ a)=\{x\mid x<a\},$$

$$[a,\ +\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},$$

$$(-\infty\ a]=\{x\mid x\leqslant a\}.$$

مجموعه‌های ازدونوع اول را **شعاعهای باز**، و مجموعه‌های‌از دو نوع آخر را **شعاعهای بسته** می‌خوانیم.

استعمال اصطلاح «باز» چنین به‌ذهن می‌آورد که درتوپولوژی ترتیبی شعاعهای باز مجموعه‌هایی بازهستند، و چنین نیزهست. مثلاً شعاع $(a,+\infty)$ را درنظر بگیرید. اگر Xدارای‌بزرگترین عضو b_0 باشدآنگاه $(a,\ +\infty)$ برابرعضوپایهٔ $(a,\ b_0]$ خواهدبود.

اگر X بزرگترین عضو نداشته باشد آنگاه $(a, +\infty)$ برابر اجتماع جمیع اعضای پایه به‌صورت (a, x) است، که در آن $a<x$. درهرحال، $(a, +\infty)$ باز است. همین حکم درمورد $(-\infty, a)$ با استدلالی مشابه برقرار است.

شعاعهای باز، در واقع، برای توپولوژی ترتیبی X تشکیل یك زیر پایه می‌دهند، که تحقیق درستی این مطلب به خواننده واگذار می‌شود.

۲-۴ توپولوژی حاصل‌ضربی در $X\times Y$

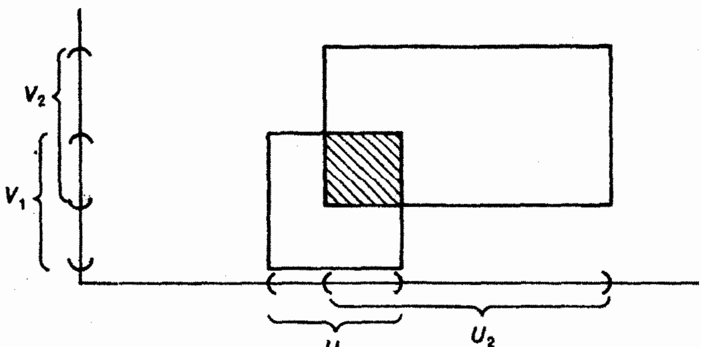
اگر X و Y دو فضای توپولوژیك باشند، برای تعریف یك توپولوژی در حاصل‌ضرب دکارتی $X\times Y$ طریقه‌ای استانده موجود است. در اینجا این توپولوژی را مورد توجه قرار می‌دهیم و در برخی از خواص آن تحقیق می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم X و Y دوفضای توپولوژیك باشند. **توپولوژی حاصل‌ضربی** در $X\times Y$ توپولوژی‌ای است که پایهٔ آن گردایهٔ $\mathscr{B}$ متشکل از همهٔ مجموعه‌هایی به‌صورت $U\times V$ است که درآن U زیر مجموعهٔ بازی از X و V زیرمجموعهٔ بازی از Y است.

باید پایه بودن $\mathscr{B}$ را بررسی کنیم. برقراری شرط اول بدیهی است، چراکه $X\times Y$ خود یك عضو پایه است. اثبات برقراری شرط دوم هم تقریباً به همان آسانی است، زیرا مقطع هردو عضو از پایه مانند $U_1\times V_1$ و $U_2\times V_2$ عضو دیگری است از پایه، چون

$$(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)=(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)$$

و مجموعهٔ طرف دوم یك عضو پایه است. زیرا $U_1\cap U_2$ و $V_1\cap V_2$، بترتیب، در X و Y باز هستند (شکل ۸).



شکل ۸

توجه کنید که گردایهٔ $\mathcal{B}$ خود یك توپولوژی در $X \times Y$ نیست. مثلاً اجتماع دو مستطیلی که در شکل ۸ دیده می‌شوند به صورت حاصل‌ضرب دو مجموعه نیست، درنتیجه نمی‌تواند به $\mathcal{B}$ تعلق داشته باشد؛ ولی در $X \times Y$ باز است.

هر بار که مفهوم تازه‌ای را معرفی می‌کنیم، کوشش می‌کنیم تا آن را با مفاهیمی که پیش از آن معرفی کرده‌ایم مرتبط کنیم. درحال‌حاضر سؤال این است: اگر توپولوژیهای X و Y به‌وسیلهٔ پایه مشخص شده باشند، در مورد توپولوژی $X \times Y$ چه می‌توان گفت؟ جواب ازاین قرار است:

۱۰.۴ قضیه اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی X و $\mathcal{C}$ پایه‌ای برای توپولوژی Y باشد، آنگاه گردایهٔ

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{C} \text{ و } C \in \mathcal{B}\}$$

پایه‌ای برای توپولوژی $X \times Y$ است.

برهان. لم ۳.۲ را به‌کار می‌بریم. مجموعهٔ باز W از $X \times Y$ و نقطهٔ دلخواه $x \times y$ را از آن اختیار می‌کنیم. بنابر تعریف توپولوژی حاصل‌ضربی، عضوی از پایه مانند $U \times V$ هست که $x \times y \in U \times V \subset W$. چون $\mathcal{B}$ و $\mathcal{C}$، بترتیب، پایه‌هایی برای X و Y هستند، می‌توان عضوی مانند B از $\mathcal{B}$ و عضوی مانند C از $\mathcal{C}$ اختیار کرد به‌طوری که $x \in B \subset U$، و $y \in C \subset V$. دراین‌صورت، $x \times y \in B \times C \subset W$. پس گردایهٔ $\mathcal{D}$ درشرط لم ۳.۲ صدق می‌کند، ودرنتیجه پایه‌ای برای $X \times Y$ است. □

مثال ۱. در R یك توپولوژی استانده داریم که همان توپولوژی ترتیبی است. حاصل‌ضرب این توپولوژی درخودش **توپولوژی استاندهٔ** $R \times R = R^2$ نام دارد. گردایهٔ همهٔ حاصل‌ضربهای زیر مجموعه‌های باز R پایه‌ای برای این توپولوژی است. ولی قضیه‌ای که هم اکنون ثابت کردیم بیان می‌کندکه همچنین می‌توان گردایهٔ بسیار کوچکتری از همهٔ حاصل‌ضربهای $(a, b) \times (c, d)$ از بازه‌های باز R را به عنوان پایه‌ای برای توپولوژی استاندهٔ R^2 به‌کارگرفت. همچنین می‌توان هرکدام از این مجموعه‌ها را به صورت درون مستطیلی در R^2 مجسم کرد. بنابراین، توپولوژی استاندهٔ R^2 درست همان توپولوژی‌ای است که در مثال ۲ بخش ۲ـ۲ درنظر گرفتیم.

گاهی اوقات بیان توپولوژی‌حاصل‌ضربی برحسب یك زیر پایه مفید واقع‌می‌شود. برای این منظور نخست توابع خاصی راکه تصویرخوانده می‌شوند تعریف می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم $\pi_1 : X \times Y \to X$ با ضابطهٔ

$$\pi_1(x, y) = x,$$

و $\pi_2 : X \times Y \to Y$ باضابطهٔ

$$\pi_2(x, y) = y,$$

تعریف شده باشند. نگاشتهای π_1 و π_2 ، بترتیب ، **نگاشتهای تصویری** $X \times Y$ بروی عوامل اول و دوم‌آن خوانده می‌شوند.

واژهٔ «بروی» را به این دلیل به‌کار می‌بریم که π_1 و π_2 پوشا هستند (مگـر در حالتی که یکی از فضاهای X یا Y تهی باشد ، که دراین صورت $X \times Y$ وهمچنین‌همهٔ بحث ما تهی خواهد بود!).

اگر U زیرمجموعهٔ بازی از X باشدآنگاه $\pi_1^{-1}(U)$ دقیقاً مجموعهٔ $U \times Y$ است‌که در $X \times Y$ بازاست. همچنین ، اگر V در Y باز باشد آنگاه

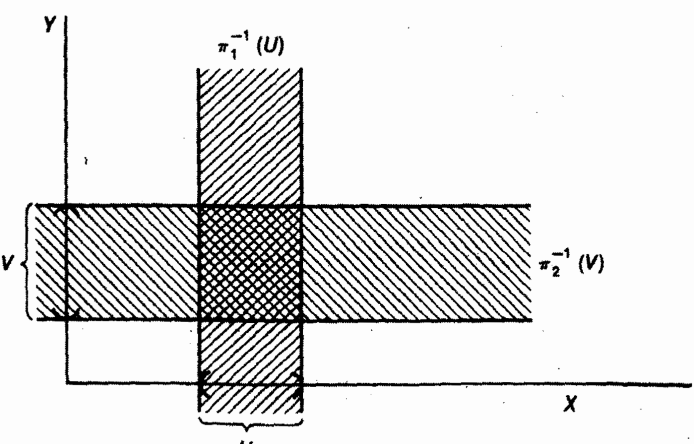
$$\pi_2^{-1}(V) = X \times V$$

که این نیز در $X \times Y$ بازاست. مقطع این دو مجموعه ، مجموعهٔ $U \times V$ است کـه در شکل ۹ نموده شده است. این مطلب منجر به قضیهٔ زیر می‌شود :

۲.۴. قضیه گردایهٔ

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) \mid \text{بازاست } X \text{ در } U\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) \mid \text{بازاست } Y \text{ در } V\}$$

زیرپایهٔ توپولوژی حاصل‌ضربی در $X \times Y$ است.



شکل ۹

برهان. فرض کنیم $\mathcal{T}$ توپولوژی حـاصل‌ضربی در $X \times Y$ و $\mathcal{T}'$ توپولوژی

تولید شده به‌وسیلهٔ $\mathcal{S}$ بـاشد. چون هرعضو $\mathcal{S}$ به $\mathcal{T}$ تعلق دارد، هراجتماع دلخواه از مقاطع متناهی اعضای $\mathcal{S}$ نیز چنین است. بنابراین، $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. ازطرف دیگر، هرعضو پـایه مانند $U \times V$ برای توپولوژی $\mathcal{T}$ عبارت است از مقطع تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{S}$. زیرا

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V).$$

پس $U \times V$ به $\mathcal{T}$ تعلق دارد، و درنتیجه $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. □

۲-۵ توپولوژی زیر فضایی

تعریف. فرض‌کنیم X یك فضای توپولوژیك باتوپولوژی $\mathcal{T}$ باشد. اگر Y زیر-مجموعه‌ای از X باشد، گردایهٔ

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$$

یك توپولوژی در Y است و به **توپولوژی زیر فضایی** موسوم است. با این توپولوژی، Y را یك **زیر فضای** X می‌خوانند؛ مجموعه‌های بـاز این توپولوژی عبارت‌اند از همهٔ مقاطع مجموعه‌های باز X با Y.

اثبات توپولوژی بودن $\mathcal{T}_Y$ آسان است. مجموعه‌های $\varnothing$ و Y هردو متعلق به $\mathcal{T}_Y$ هستند؛ زیرا

$$\varnothing = Y \cap \varnothing \quad \text{و} \quad Y = Y \cap X،$$

که $\varnothing$ و X ازاعضای $\mathcal{T}$ هستند. این‌امر که $\mathcal{T}_Y$ تحت مقاطع متناهی و اجتماعهای‌دلخواه بسته است، نتیجه‌ای است از تساویهای زیر

$$(U_1 \cap Y) \cap \cdots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cap Y,$$

$$\bigcup_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha\right) \cap Y.$$

۱-۵. لم اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی X باشد آنگاه گردایهٔ

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

پایه‌ای برای توپولوژی زیر فضایی در Y است.

برهان. فرض‌کنیم U مجموعهٔ باز دلخواهی از X باشد و $y \in U \cap Y$. می‌توان عضوی مانند B از $\mathcal{B}$ چنان‌اختیار کردکه $y \in B \subset U$. درنتیجه، $y \in B \cap Y \subset U \cap Y$. پس بنابر لم ۳.۲، $\mathcal{B}_Y$ پایه‌ای برای توپولوژی زیر فضایی در Y است. □

هر گاه درمورد فضای X و زیر فضای Y بحث می کنیم ، باید در استعمال اصطلاح «مجموعهٔ باز» دقت کنیم. چه دراین حال این سؤال پیش می‌آیدکه مراد عضوی از توپولوژی Y است یا عضوی از توپولوژی X؟ بدین‌جهت ، تعریف زیر را می‌آوریم: اگر Y زیر فضای X باشد ، مجموعهٔ U را **در Y باز** (یا نسبت‌به Y باز) خوانیم درصورتی که به توپولوژی Y تعلق داشته باشد؛ بویژه ، این امر مستلزم آن است که U زیر مجموعه‌ای از Y باشد. گوییم U **در X باز** است هر گاه U به‌توپولوژی X تعلق داشته باشد.

حالت خاصی هست که در آن هرمجموعهٔ باز در Y ، در X نیزبازاست:

۲۰۵. لم فرض کنیم Y یك زیر فضای X باشد. اگر U در Y و Y در X باز باشد آنگاه U در X باز است.

برهان. فرض‌کنیم U در Y بازباشد. پس ، مجموعهٔ بازی در X مانند V هست که $U=Y\cap V$. چون Y و V در X بازند ، مجموعهٔ $Y\cap V$ نیزدر X بازاست.□

مثال ۱. زیر مجموعهٔ $Y=[0, 1]$ از R رابا توپولوژی زیر فضایی درنظر می‌گیریم. یك پایهٔ این توپولوژی عبارت است از همهٔ مجموعه‌هایی به‌صورت $(a, b)\cap Y$ که درآن (a, b) بازهٔ بازی در R است. چنین مجموعه‌ای به صورت یکی از انواع زیر است:

$$(a, b)\cap Y=\begin{cases}(a, b) & \text{اگر } a \text{ و } b \text{ در } Y \text{ باشند،}\\ [0, b) & \text{اگر تنها } b \text{ در } Y \text{ باشد،}\\ (a, 1] & \text{اگر تنها } a \text{ در } Y \text{ باشد،}\\ \varnothing \text{ یا } Y & \text{اگر هیچیك از } a \text{ و } b \text{ در } Y \text{ نباشد،}\end{cases}$$

بنا بر تعریف ، هریك ازاین مجموعه‌ها در Y بازند. اما ، مجموعه‌های نوع دوم و سوم در فضای بزرگتر R باز نیستند.

توجه‌کنید که مجموعه‌های سه نوع اول اعضای پایه برای توپولوژی ترتیبی Y هستند. بنابراین می‌بینیم که در مورد مجموعهٔ $Y=[0, 1]$ توپولوژی زیرفضایی‌آن (به‌عنوان یك زیر فضای R) و توپولوژی ترتیبی‌آن یکی هستند.

برای آنکه فکر نکنید که این تذکر کاملاً پیش پا افتاده است ، درزیر مثالی از یك زیرمجموعهٔ R می‌آوریم که درآن این دو توپولوژی یکی نیستند:

مثال ۲. فرض‌کنیم Y زیر مجموعهٔ $[0, 1]\cup\{2\}$ از R باشد. درتوپولوژی‌زیرفضایی Y مجموعهٔ تك عضوی $\{2\}$ باز است ، زیرا مقطع مجموعهٔ باز $(3/2, 5/2)$ با Y است. ولی در توپولوژی ترتیبی Y ، مجموعهٔ $\{2\}$ باز نیست ، زیرا هر عضو پایهٔ

توپولوژی ترتیبی Y که شامل ۲ باشد، به‌ازای عضوی از Y مانند a، به‌صورت

$$\{x \mid a < x \leqslant ۲ \quad و \quad x \in Y\}$$

است ؛ چنین مجموعه‌ای ضرورتاً شامل نقاطی از Y است که از ۲ کوچکترند.

اگر Y بازه‌ای یا شعاعی در مجموعهٔ مرتب X باشد، حالت ناهنجاری که در مثال ۲ توضیح داده شد رخ نمی‌دهد. دراین مورد قضیهٔ زیر برقرار است، که اثبات آن را به‌عنوان تمرین می گذاریم:

۳.۵ قضیه اگر X مجموعه‌ای مرتب با توپولوژی ترتیبی و Y بازه‌ای یا شعاعی در X باشد آنگاه توپولوژی زیرفضایی و توپولوژی ترتیبی در Y یکی هستند.

برای احتراز از هرگونه ابهام، توافق می کنیم که هرگاه زیرمجموعه‌ای از یك مجموعهٔ مرتب را درنظرمی‌گیریم، آن‌را با توپولوژی زیرفضایی فرض می کنیم، مگرآنکه خلافش تصریح شود.
خوشبختانه وقتی‌که توپولوژی حاصل‌ضربی موضوع بحث است، زیرفضاها منشأ هیچ ابهامی نیستند.

۴.۵ قضیه اگر A زیرفضایی‌از X و B زیرفضایی‌از Y باشد آنگاه‌توپولوژی حاصل‌ضربی در $A \times B$ همان توپولوژی‌ای است که در $A \times B$ به‌عنوان یك زیرفضای $X \times Y$ القا می‌شود.

برهان. مجموعهٔ $U \times V$ عضو نوعی پایهٔ $X \times Y$ است که درآن U در X باز است و V در Y. بنابراین، مجموعهٔ $(U \times V) \cap (A \times B)$ عضو نوعی پایهٔ توپولوژی زیرفضایی در $A \times B$ است. حال ملاحظه می کنیم که

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B).$$

چون $U \cap A$ و $V \cap B$، بترتیب، مجموعه‌های باز توپولوژیهای زیرفضایی در A و B هستند، مجموعهٔ $(U \cap A) \times (V \cap B)$ عضو پایهٔ توپولوژی حاصل‌ضربی در $A \times B$ است.
نتیجه اینکه پایه‌های توپولوژیهای زیرفضایی وحاصل‌ضربی‌در $A \times B$ یکی‌هستند. پس این توپولوژیها نیز یکی هستند. □

تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر Y زیرفضایی از X و A زیرمجموعه‌ای از Y باشد آنگاه

توپولوژی زیر فضایی در A ، بـه‌عنوان زیر فضایی از Y ، همان توپولوژی زیر - فضایی در A به‌عنوان زیر فضایی از X است.

۲. اگر $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}'$ توپولوژیهایی در X باشند، و $\mathcal{T}'$ اکیداً ظریفتر از $\mathcal{T}$ باشد ، درمورد توپولوژیهای زیر فضایی نظیر هـر یك ازاین توپولوژیها در زیر مجموعهٔ Y از X چه حکمی می‌توان کرد؟

۳. مجموعهٔ $Y=[-۱,۱]$ را به‌عنوان زیر فضایی از R درنظر بگیرید. کدامیك از مجموعه‌های زیر در Y وکدامیك در R بازاست؟

$$A=\left\{x \,\middle|\, \tfrac{۱}{۲}<|x|<۱\right\},$$

$$B=\left\{x \,\middle|\, \tfrac{۱}{۲}<|x|\leqslant ۱\right\},$$

$$C=\left\{x \,\middle|\, \tfrac{۱}{۲}\leqslant|x|<۱\right\},$$

$$D=\left\{x \,\middle|\, \tfrac{۱}{۲}\leqslant|x|\leqslant ۱\right\},$$

$$E=\left\{x \,\middle|\, ۰<|x|<۱,\ \tfrac{1}{x}\notin Z_+\right\}.$$

۴. نگاشت $f:X\to Y$ را **نگاشت باز** خوانیم درصورتی که به‌ازای هرزیر مجموعهٔ باز X مانند U ، مجموعهٔ $f(U)$ در Y باز باشد. ثابت‌کنیدکه $\pi_۱:X\times Y\to X$ و $\pi_۲:X\times Y\to Y$ نگاشتهای بازهستند.

۵. فرض‌کنید X و X' نمایش‌یك مجموعه باتوپولوژیهای $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}'$ باشند. همچنین‌فرض کنید Y و Y' نمایش یك مجموعه باشند ، بترتیب ، با توپولوژیهای $\mathcal{U}$ و $\mathcal{U}'$.

(الف) ثابت‌کنیدکه اگر $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}'$ و $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}'$ آنگاه توپولوژی حاصل‌ضربی در $X'\times Y'$ ظریفتر از توپولوژی حاصل‌ضربی در $X\times Y$ است.

(ب) آیا عکس (الف) برقرار است؟ برای جواب خود دلیلی بیاورید.

(پ) دربارهٔ حالتی که $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}'$ و $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}'$ و $\mathcal{U}\neq\mathcal{U}'$ چه حکمی می‌توان کرد؟

۶. (الف) ثابت‌کنیدکـه گـردایهٔ شعاعهای باز در یك مجموعهٔ مرتب A یك زیر پایهٔ توپولوژی ترتیبی A است.

(ب) فرض‌کنید X مجموعه‌ای مرتب با توپولوژی ترتیبی ، Y یك شعاع یا بازه در X ، و $(-\infty,a)$ و $(a,+\infty)$ شعاعهای بازی در X باشند. ثابت‌کنید

که اگر $a \in Y$ آنگاه هریك‌از مجموعه‌های $(-\infty, a) \cap Y$ و $(a, +\infty) \cap Y$ شعاع بازی در مجموعهٔ مرتب Y است، و اگر $a \notin Y$ ، هریك ازاین مجموعه‌ها یا خالی است یا همهٔ Y.

(پ) نتیجه بگیرید که اگر Y بازه‌ای یا شعاعی‌در X باشد آنگاه توپولوژی‌ترتیبی و توپولوژی زیرفضایی در Y یکی هستند.

۷. ثابت کنید که گردایهٔ شمارای

$$\{(a, b)\times(c, d) \mid a<b \text{ و } c<d \text{ و } a\text{، }b\text{، }c\text{، و }d \text{ گویا هستند}\}$$

یك پایهٔ R^2 است.

۸. ثابت کنید که توپولوژی ترتیب قاموسی در مجموعهٔ $R \times R$ همان توپولوژی حاصل‌ضربی $R_d \times R$ است که درآن R_d نمایش مجموعهٔ R با توپولوژی گسسته است. این توپولوژی را با توپولوژی استاندهٔ R^2 مقایسه کنید.

۹. فرض کنید R نمایش اعداد حقیقی با توپولوژی استانده و R_l نمایش اعدادحقیقی با توپولوژی حد پایینی باشد. اگر L خط مستقیمی در صفحه باشد، هریك از توپولوژیهایی راکه در L به‌عنوان زیر فضایی از $R_l \times R$ و به‌عنوان زیر فضایی‌از $R_l \times R_l$ القا می‌شود توصیف کنید. درهرحالت، یك‌توپولوژی شناخته شده به‌دست می‌آید.

۱۰. فرض کنید I نمایش زیر فضای $[0, 1]$ از R باشد. توپولوژی حاصل‌ضربی در $I \times I$ ، توپولوژی ترتیب قاموسی در $I \times I$ ، و توپولوژی $I_d \times I$ را، که‌درآن I_d نمایش I با توپوژی گسسته است، مقایسه کنید.

۲ـ۶ مجموعه‌های بسته و نقاط حدی

اکنون که مثالهایی چند در دست است، می‌توان برخی‌از مفاهیم اساسی مربوط به‌فضاهای توپولوژیك را تعریف کرد. دراین قسمت مفاهیم مجموعهٔ بسته، بستار یك مجموعه و نقطهٔ حدی را بررسی خواهیم‌کرد. این بررسی به‌طورطبیعی منجربه‌بررسی اصلی‌برای فضاهای توپولوژیك می گردد که به اصل هاوسدورف موسوم‌است.

مجموعه‌های بسته

زیر مجموعهٔ A از فضای توپولوژیك X را بسته خوانیم درصورتی که مجموعهٔ $X - A$ باز باشد.

مثال ۱. زیر مجموعهٔ $[a, b]$ از R بسته است ؛ زیرا متمم آن

$$R-[a, b]=(-\infty, a)\cup(b, +\infty)$$

بازاست. همچنین ، مجموعهٔ $[a, +\infty)$ بسته است ، زیرا متمم آن $(-\infty, a)$ بازاست. این مطالب استعمال اصطلاحات «بازهٔ بسته» و «شعاع بسته» را موجه می‌کنند. زیر مجموعهٔ $[a, b)$ از R نه باز است و نه بسته.

مثال ۲. درصفحهٔ R^2 ، مجموعهٔ

$$\{x\times y \mid y\geqslant 0 \quad \text{و} \quad x\geqslant 0\}$$

بسته است . زیرا متمم آن اجتماع دو مجموعهٔ

$$R\times(-\infty, 0) \quad \text{و} \quad (-\infty, 0)\times R$$

است که هریك ازآنها حاصل‌ضرب مجموعه‌های بازی از R هستند ودرنتیجه در R^2 بازند.

مثال ۳. در توپولوژی گسستهٔ مجموعهٔ X،هرمجموعه باز است ؛ در نتیجه هرمجموعه بسته نیزهست.

مثال ۴. زیرمجموعهٔ

$$Y=[0, 1]\cup(2, 3)$$

ازخط حقیقی را با توپولوژی زیرفضایی درنظرمی‌گیریم. دراین‌فضا ، مجموعهٔ $[0, 1]$ باز است ، زیرامساوی است با مقطع مجموعهٔ باز $(-1/2, 3/2)$ از R با Y. به‌همین قیاس $(2, 3)$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از Y باز است ،وحتی به‌عنوان زیر مجموعه‌ای از R نیز باز است. چون $[0,1]$ و $(2, 3)$ در Y متمم یکدیگرند ، نتیجه می‌گیریم کــه هر دو به‌عنوان زیر مجموعه‌های Y بسته هستند.

ازاین مثالها چنین برمی‌آیدکه جواب این چیستان ریاضی که «فرق مجموعه با در چیست؟» باید این باشدکــه «در باید یا بسته باشد یا باز و نمی‌تواند هردو حالت را باهم دارا باشد ، اما مجموعه می‌تواند باز باشد ، یا بسته باشد ، یا هردوحالت را داشته باشد، ویا هیچیك را!»

گردایهٔ زیر مجموعه‌های بستهٔ فضای X دارای خواصی مشابه بــا خواص گردایهٔ زیرمجموعه‌های باز X است.

۶.۱. قضیه اگر X یك فضای توپولوژیك باشد آنگاه احکام زیر برقرارند:

(۱) $\varnothing$ و X بسته‌اند.

(۲) مقاطع دلخواه مجموعه‌های بسته، بسته‌اند.

(۳) اجتماعهای متناهی مجموعه‌های بسته ، بسته‌اند.

برهان. (۱) $\varnothing$ و X بسته‌اند،زیرا بترتیب متمم مجموعه‌های باز X و $\varnothing$ هستند.

(۲) به‌ازای گردایهٔ مفروض $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ از مجموعه‌های بسته، بنابرقانون دمورگن

$$X-\bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in J}(X-A_\alpha).$$

چون مجموعه‌های $X-A_\alpha$ ، بنابر تعریف ، باز هستند ، طرف دوم تساوی فوق اجتماع دلخواهی از مجموعه‌های باز است ، ودرنتیجه مجموعه‌ای است باز. بنابراین ، $\bigcap A_\alpha$ بسته است.

(۳) به‌طریق مشابه ، اگربه‌ازای $i=1,\ldots,n$ ، مجموعهٔ A_i بسته باشد،تساوی زیر را درنظر می گیریم

$$X-\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcap_{i=1}^{n}(X-A_i).$$

مجموعهٔ طرف راست این تساوی مقطعی است متناهی از مجموعه‌های باز ، و بنابراین باز است. درنتیجه $\bigcup A_i$ بسته است.□

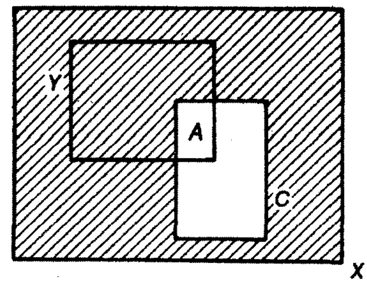
برای مشخص کردن یك توپولوژی دریك فضا، به‌جای استفاده از مجموعه‌های باز می‌توان از گردایهٔ دیگری از مجموعه‌ها موسوم به «مجموعه‌های بسته» استفاده‌کرد که دارای سه خاصیت مذکور در قضیه فوق باشند. درآن‌صورت ، می‌توان مجموعه‌های باز را به‌عنوان متمم مجموعه‌های بسته تعریف کرد ، و مطلب را درست به‌طریق گذشته ادامه داد. این طریقه مزیتی برطریقه‌ای که ما اختیارکرده‌ایم ندارد ، و بیشتر ریاضیدانان برای تعریف توپولوژیها استفاده از مجموعه‌های باز را ترجیح می‌دهند.

ازاین پس ، هنگام بحث درمورد زیر فضاها باید دراستفاده ازاصطلاح «مجموعهٔ بسته» دقیق بود. اگر Y زیر فضای X باشد ، مجموعهٔ A را درصورتی در Y بسته می گوییم که A زیرمجموعه‌ای از Y ودر توپولوژی زیر فضایی Y بسته باشد (یعنی ، $Y-A$ در Y باز باشد). دراین باب قضیهٔ زیر را داریم.

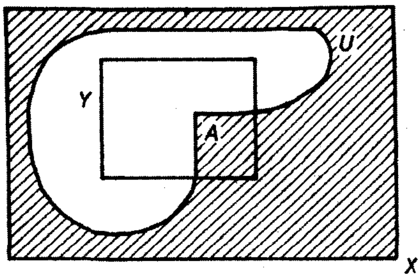
۶.۲ قضیه فرض کنیم Y زیرفضای X باشد. در این صورت ، مجموعهٔ A در Y بسته است اگر و فقط اگر A مساوی مقطع مجموعهٔ بسته‌ای از X با Y باشد.

برهان. فرض کنیم $A=C\cap Y$ ، که درآن مجموعهٔ C در X بسته است (شکل ۱۰). دراین‌صورت $X-C$ در X بازاست، درنتیجه، بنابر تعریف توپولوژی زیرفضایی، $(X-C)\cap Y$ در Y بازاست‌ولی می‌دانیم که $(X-C)\cap Y=Y-A$. پس $Y-A$ در Y باز ، ودرنتیجه A در Y بسته است. بالعکس ، فرض کنیم A در Y بسته باشد (شکل ۱۱). دراین صورت $Y-A$ در Y باز است ، درنتیجه بنابر تعریف ، $Y-A$ برابراست‌بامقطع مجموعهٔ‌بازی از X مانند U با Y. مجموعهٔ $X-U$ در X بسته‌است، و $A=Y\cap(X-U)$. بنابراین ، A برابراست‌با مقطع مجموعهٔ بسته‌ای از X با Y.□

مجموعه‌ای مانند A که درزیر فضای Y بسته است ، ممکن است در فضای‌بزرگتر X بسته نباشد. نظیر مجموعه‌های باز ، برای اینکه A در X بسته باشد ضابطه‌ای وجود دارد ؛ اثبات‌آن را برعهدهٔ خواننده می گذاریم :



شکل ۱۰



شکل ۱۱

۳.۶. قضیه فرض کنیم Y زیرفضای X باشد. اگر A در Y و Y در X بسته باشد آنگاه A در X بسته است.

بستار و درون یك مجموعه

فرض‌کنیم A زیر مجموعه‌ای‌از فضای‌توپولوژیك X باشد. بنابر تعریف، **درون مجموعهٔ** A عبارت است از اجتماع همهٔ مجموعه‌های باز جزء A ؛ و **بستار مجموعهٔ** A عبارت است از مقطع همهٔ مجموعه‌های بستهٔ حاوی A.

درون مجموعهٔ A را به $\operatorname{Int} A$ ، یا $\mathring{A}$ ، وبستار A را به $\operatorname{Cl} A$ ، یا $\bar{A}$ ، نمایش می‌دهیم. واضح است که $\mathring{A}$ مجموعه‌ای است باز و $\bar{A}$ مجموعه‌ای است بسته. بعلاوه،

$$\mathring{A}\subset A\subset \bar{A}$$

اگر A باز باشد $A=\mathring{A}$ ، واگر A بسته باشد $A=\bar{A}$.

از مفهوم درون مجموعه استفادهٔ چندانی نمی‌کنیم ، اما بستار یك مجموعه اهمیت بسیاری دارد.

هنگام بحث در مورد فضای توپولوژیك X و زیرفضایی ازآن مانند Y ، باید در به‌دست‌آوردن بستار مجموعه‌ها دقت خاصی کرد. اگر A زیر مجموعه‌ای از Y باشد، درحالت‌کلی بستار A در Y و بستار A در X متفاوت‌اند. در چنین وضعی، علامت $\bar{A}$ را همواره برای بستار A در X محفوظ خواهیم‌داشت. بستار A در Y را می‌توان برحسب $\bar{A}$ بیان‌کرد، چنانکه در قضیهٔ زیر دیده می‌شود:

۴.۶. قضیه فرض کنیم Y زیرفضایی از X و A زیرمجموعه‌ای از Y باشد. اگر $\bar{A}$ بستار A در X باشد آنگاه بستار A در Y برابر است با $\bar{A}\cap Y$.

برهان. فرض کنیم B بستار A در Y باشد. مجموعهٔ $\bar{A}$ در X بسته است، پس

بنابر قضیهٔ ۲.۶، $\bar{A}\cap Y$ در Y بسته‌است. چون $\bar{A}\cap Y$ شامل A است، و بنابرتعریف، B برابر مقطع همهٔ زیر مجموعه‌های بستهٔ Y است که حاوی A هستند، خواهیم داشت $B\subset(\bar{A}\cap Y)$.

از طرف دیگر، می‌دانیم که B در Y بسته است. پس، بنابر قضیهٔ ۲.۶ مجموعهٔ بسته‌ای از X مانند C وجود دارد که $B=C\cap Y$. دراین صورت، C مجموعهٔ بسته‌ای از X است که حاوی B است. چون $\bar{A}$ برابراست با مقطع همهٔ مجموعه‌های بستهٔ ازاین نوع، پس $\bar{A}\subset C$، وازآنجا $(\bar{A}\cap Y)\subset(C\cap Y)=B$. □

تعریف بستار یك مجموعه‌طریقهٔ عملی ساده‌ای برای یافتن بستار مجموعه‌های مشخص به‌دست نمی‌دهد، زیرا گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های بستهٔ X، مانند گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های باز، معمولاً بسیار بزرگتر ازآن است که بتوان باآن کار کرد. در قضیهٔ زیر، طریقهٔدیگری برای توصیف بستار یك مجموعه آمده است، که چون فقط مفهوم پایهٔ توپولوژی X را دربر دارد، مفید است.

نخست برای سهولت اصطلاحی را تعریف می کنیم. گوییم مجموعهٔ A مجموعهٔ B را **قطع می‌کند** اگر $A\cap B$ تهی نباشد.

۵.۶ قضیه فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیك X باشد.

(الف) $x\in\bar{A}$ اگر و فقط اگر هرمجموعهٔ باز شامل x، مجموعهٔ A را قطع کند.

(ب) اگرتوپولوژی X با یك پایه مشخص‌شده باشد آنگاه $x\in\bar{A}$ اگر و فقطاگر هرعضو پایه مانند B که شامل x است مجموعهٔ A را قطع کند.

برهان. گزارهٔقسمت(الف)رادرنظر می گیریم. این گزاره به‌صورت $P \Longleftrightarrow Q$ است. با تبدیل هریك ازاین دو استلزام به‌عکس نقیض‌آن، گزاره‌ای به‌صورت

$$(\text{چنین نیست که } P) \Longleftrightarrow (\text{چنین نیست که } Q)$$

به‌دست می‌آید که منطقاً معادل گزارهٔ اولی است. گزارهٔ اخیرچنین نوشته می‌شود:

$x\notin\bar{A}$ اگرو فقط اگر مجموعهٔ بازی شامل x مانند U وجود داشته باشد که A راقطع نکند. بدین‌صورت،اثبات قضیه‌آسان است. اگرx در$\bar{A}$ نباشدآنگاه $U=X-\bar{A}$ مجموعهٔ بازی است شامل x که A را قطع نمی‌کند، و این همان است که می‌خواستیم. بالعکس، اگر مجموعهٔ بازی مانند U شامل x وجود داشته باشدکه A را قطع نکند آنگاه $X-U$ مجموعه‌ای بسته و حاوی A است. بنابر تعریف $\bar{A}$، مجموعهٔ $X-U$ باید شامل $\bar{A}$ باشد، بنابراین x نمی‌تواند در $\bar{A}$ باشد.

اثبات گزارهٔ (ب)آسان‌است. اگرهرمجموعهٔ باز شامل x مجموعهٔ A را قطع کند، هرعضو پایه مانند B که شامل x باشد نیز A را قطع می کند، زیرا B مجموعه‌ای است باز. بالعکس، اگر هرعضو پایه که شامل x باشد مجموعهٔ A را قطع کند، هرمجموعهٔ

بازمانند U که شامل x باشد نیز A راقطع می‌کند ، زیرا U حاوی عضوی‌ازپایه است که شامل x است. □

دراینجا ریاضیدانان‌اغلب اصطلاح‌خاصی به‌کارمی‌برند. آنها جملهٔ «U مجموعه‌ای باز شامل x است» را به‌صورت

«U یك همسایگی x است»

خلاصه می کنند. با استفاده از این اصطلاح نیمهٔ اول قضیهٔ بالا را به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد:

اگر A زیرمجموعه‌ای ازفضای توپولوژیك X باشد آنگاه $x \in \bar{A}$ اگر وفقط اگرهر همسایگی x مجموعهٔ A را قطع کند.

مثال ۵. فرض‌کنیم X خط حقیقی R باشد. اگر $A=(0, 1]$ آنگاه $\bar{A}=[0, 1]$. زیرا هرهمسایگی ۰ مجموعهٔ A را قطع می‌کند ، درحالی‌که هر نقطهٔ خارج از $[0, 1]$ یك همسایگی جدا از A دارد. استدلالهایی مشابه درمورد زیر مجموعه‌های دیگر X ، که ذیلاً می‌آید، برقرار است :

اگر $B=\{1/n \mid n \in Z_+\}$ آنگاه $\bar{B}=\{0\} \cup B$. اگر $C=\{0\} \cup (1, 2)$ آنگاه $\bar{C}=\{0\} \cup [1, 2]$. اگر Q مجموعهٔ اعداد گویا باشد ، آنگاه $\bar{Q}=R$. اگر Z_+ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشدآنگاه $\bar{Z}_+=Z_+$. اگر R_+ مجموعهٔ اعدادحقیقی مثبت باشد آنگاه بستار مجموعهٔ R_+ عبارت است از مجموعهٔ $R_+ \cup \{0\}$. (به همین دلیل در بخش ۱ــ۲ علامت $\bar{R}_+$ را برای $R_+ \cup \{0\}$ اختیارکردیم.)

مثال ۶. زیر فضای $Y=(0, 1]$ از خط حقیقی R را درنظر می‌گیریم. مجموعهٔ $A=(0, 1/2)$ زیر مجموعه‌ای از Y است ؛ بستارآن در R مجموعهٔ $[0, 1/2]$ و در Y مجموعهٔ $[0, 1/2] \cap Y=(0, 1/2]$ است.

بعضی ازریاضیدانان اصطلاح «همسایگی» را به‌گونه‌ای دیگر به‌کار می‌برند. آنها A را وقتی همسایگی x می‌گویند که فقط حاوی مجموعهٔ باز شامل x باشد. ما این معنی را به‌کارنمی‌بریم.

نقاط حدی

طریقه‌ای دیگر برای توصیف بستار یك مجموعه وجود دارد که درآن مفهوم مهم نقطهٔ حدی وارد می‌شود ، و ما اکنون‌آن‌را بررسی می کنیم.

اگر A زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیك X و x نقطه‌ای از A باشد آنگاه x را یك **نقطهٔ حدی** (یا «نقطهٔ انباشتگی») مجموعهٔ A خوانیم در صورتی که هرهمسایگی x مجموعهٔ A رادرنقطه‌ای غیراز خود x قطع کند. به بیان دیگر ، x یك نقطهٔ

حدی A است، هر گاه به بستار مجموعهٔ $A-\{x\}$ تعلق داشته باشد. نقطهٔ x ممکن است در A باشد یا نباشد، اما این امردر تعریف مذکور تأثیری ندارد.

مثال ۷. خط حقیقی R را درنظر می‌گیریم. اگر $A=(۰,۱]$ آنگاه نقطهٔ ۰ یك نقطهٔ حدی A است و همچنین ۱/۲ نیز نقطهٔ حدی دیگرآن است. در واقع، هرنقطهٔ بازهٔ $[۰,۱]$ یك نقطهٔ حدی A است، ولی هیچ عضو دیگر R نقطهٔ حدی A نیست.
اگر $B=\{(1/n) \mid n \in Z_+\}$ آنگاه ۰ تنها نقطهٔ‌حدی B است. هر نقطهٔ دیگرR مانند x همسایگی‌ای دارد که B را قطع نمی‌کند ویا آن را تنها در خود x قطع می‌کند. اگر $C=\{۰\} \cup (۱,۲)$ آنگاه نقاط حدی C نقاط بازهٔ $[۱,۲]$ هستند. اگر Q مجموعهٔ نقاط گویا باشد آنگاه هر نقطهٔ R یك نقطهٔ حدی Q است. اگر Z_+ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشدآنگاه هیچ عضو R نقطهٔ حدی Z_+ نیست. اگر R_+ مجموعهٔ اعداد حقیقی‌مثبت باشدآنگاه هرعضو مجموعهٔ $\{۰\} \cup R_+$ یك نقطهٔ حدی R_+ است.

از مقایسهٔ مثالهای ۵ و ۷ به نتیجهٔ جالبی حاکی ازوجود ارتباطی بین بستار یك مجموعه و مجموعهٔ نقاط حدی‌آن می‌رسیم. این رابطه در قضیهٔ زیرآمده است:

۶.۶. قضیه فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیك X و A' مجموعهٔ نقاط حدی A باشد. دراین صورت،

$$\bar{\mathrm{A}}=\mathrm{A}\cup\mathrm{A}'.$$

برهان. اگر x در A' باشد، هرهمسایگی x مجموعهٔ A را درنقطه‌ای جز x قطع می‌کند. درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۵.۶، x به $\bar{A}$ تعلق دارد، و ازآنجا $A' \subset \bar{A}$. چون بنابر تعریف، $A \subset \bar{A}$، نتیجه می‌شود $A \cup A' \subset \bar{A}$.
برای اثبات جزئیت ازطرف دیگر، فرض می‌کنیم x نقطهٔ دلخواهی از $\bar{A}$ باشد و ثابت می‌کنیم $x \in A \cup A'$. اگر $x \in A$، دراین صورت واضح است که $x \in A \cup A'$؛ حال فرض می‌کنیم x درA نباشد. چون $x \in \bar{A}$، بنابر تعریف، هرهمسایگی x مجموعهٔ A را قطع می‌کند؛ وچون $x \notin A$، پس هرهمسایگی x مجموعهٔ A رادرنقطه‌ای غیراز x قطع می‌کند. درنتیجه $x \in A'$. وازآنجاهمان‌طور که می‌خواستیم، $x \in A \cup A'$. □

۷.۶. نتیجه زیر مجموعه‌ای از یك فضای توپولوژیك بسته است اگر و فقط اگر شامل همهٔ نقاط حدی خود باشد.

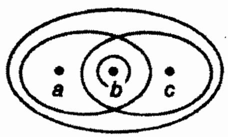
برهان. مجموعهٔ A بسته است اگر وفقط اگر $A=\bar{A}$، و این حکم برقرار است اگر وفقط اگر $A' \subset A$. □

فضاهای هاوسدورف

تجربهٔ ما در مورد مجموعه‌های باز و بسته و نقاط حدی درخط حقیقی و صفحه ممکن است که در بررسی فضاهای توپولوژیك کلی موجب گمراهی گردد. مثلاً، در توپولوژی ترتیبی R، نقطهٔ b همیشه یك نقطهٔ حدی بازهٔ (a, b) است، وحال آنکه درحالت کلی درمورد توپولوژیهای ترتیبی چنین نیست.

به‌عنوان مثالی دیگر، ملاحظه‌کنید کـه در R یا R^2 هرمجموعهٔ تك عضوی مانند $\{x_0\}$ بسته است؛ اثبات این حکم آسان است، زیرا هر نقطهٔ غیراز x_0 یك همسایگی‌دارد که مجموعهٔ $\{x_0\}$ را قطع نمی‌کند، پس بستار مجموعهٔ $\{x_0\}$ با خودش برابراست.

امـا این حکم در مورد فضاهای توپولوژیك دلخواه برقرار نیست. یکی از اولین مثالهایی راکـه از فضاهای توپولوژیك داشتیم درنظر بگیرید: توپولوژی‌ای در مجموعهٔ سه‌عضوی $\{a, b, c\}$ که در شکل ۱۲ نشان داده شده است. دراین فضا، مجموعهٔ تك‌ـ عضوی $\{b\}$ بسته نیست، زیرا متممآن باز نیست.



شکل ۱۲

این قبیل توپولوژیها، ازآن‌جهت که بندرت درشاخه‌های‌دیگر ریاضی پیش‌می‌آیند، درحقیقت، بـرای ریاضیدانان چندان جالب نیستند. بعلاوه، اگـر بخواهیم این گـونه توپولوژیها را نیز ملحوظ بداریم،تعداد قضایایی که می‌تواندر مورد فضاهای توپولوژیك ثابت کـرد بسیار محدود خواهد شد. از این‌رو، اغلب با وارد کـردن شرطی اضافی، مواردی نظیر مثال فوق راکنار می‌گـذاریم، و بدین ترتیب، دستهٔ فضاهای توپولوژیك مورد بررسی را بیش‌ازپیش به‌شهود هندسی خود نزدیك می‌کنیم. این‌شرط توسط فلیکس هاوسدورف[1] پیشنهاد شدو ریاضیدانان‌آن را به‌نام او می‌خوانند.

تعریف. فضای‌توپولوژیك X را **فضای هاوسدورف** خوانیم درصورتی که به‌ازای هردونقطهٔ متمایز x_1 و x_2 از X، همسایگیهایی مانند U_1 و U_2، بترتیب، از x_1 و x_2 یافت شوندکه ازهم جدا باشند.

۶ـ۸. قضیه در فضای هاوسدورف X هر مجموعهٔ متناهی بسته است.

برهان. کافی است ثابت‌کنیم که هرمجموعهٔ تك عضوی $\{x_0\}$ بسته است. اگـر

1. Felix Hausdorff

x نقطهٔ دلخواهی از X و متمایز از x_0 باشد آنگاه x و x_0، بترتیب، همسایگیهایی جدا ازهم مانند U و V دارند. چون U مجموعهٔ $\{x_0\}$ را قطع نمی‌کند، نقطهٔ x نمی‌تواند در بستار مجموعهٔ $\{x_0\}$ باشد. درنتیجه، بستارمجموعهٔ $\{x_0\}$ خود این مجموعه است، پس، $\{x_0\}$ بسته است.□

۹.۶. قضیه فرض کنیم X یك فضای هاوسدورف و A زیر مجموعه‌ای از X باشد. در این صورت، نقطهٔ x نقطهٔ حدی A است اگر و فقط اگر هرهمسایگی x شامل بینهایت نقطه از A باشد.

برهان. اگر هرهمسایگی x مجموعهٔ A را در بینهایت نقطه قطع کند، مسلماً A را در نقطه‌ای غیراز x قطع می‌کند، پس، x یك نقطهٔ حدی A است.

بعکس، فرض کنیم x یك نقطهٔ حدی A باشد، و U یك همسایگی x که A را فقط در تعدادی متناهی از نقاط قطع می‌کند. دراین صورت، U مجموعهٔ $A-\{x\}$ را نیز در تعدادی متناهی از نقاط قطع خواهدکرد. فرض کنیم

$$U\cap(A-\{x\})=\{x_1,\dots,x_m\}.$$

چون مجموعهٔ متناهی $\{x_1,\dots,x_m\}$ بسته است، مجموعهٔ $X-\{x_1,\dots,x_m\}$ یك مجموعهٔ باز فضای X است، و درنتیجه

$$U\cap(X-\{x_1,\dots,x_m\})$$

یك همسایگی x است که $A-\{x\}$ را قطع نمی‌کند، واین با فرض اینکه x یك نقطهٔ حدی A است متناقض است.□

شرط هاوسدورف قویتر ازآن چیزی است که برای اثبات قضایای ۸.۶ و ۹.۶ ضروری است. برهان‌آن قضایا با شرط ضعیفتری نیز معتبر است، این شرط را معمولاً **اصل T_1** می‌نامند:

به‌ازای هردو نقطهٔ متمایز مفروض a و b از X، هرکدام یك همسایگی دارد که شامل دیگری نیست.

درآتیه معدودی تمرین خواهیم داشت که این اصل درآنها به‌کار می‌آید، گذشته از این تمرینات ما اصل T_1 را دراین کتاب به‌کار نخواهیم برد.

درهرحال، شرط هاوسدورف دراثبات بسیاری از قضایای جالب توپولوژی مورد نیاز است. بعلاوه بیشتر فضاهایی که در نزد ریاضیدانان اهمیت دارند، فضاهای هاوسدورف‌اند. قضیهٔ زیر، که‌اثباتش را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم، تأییدی است برنکتهٔ اخیر.

۱۰.۶. قضیه هرمجموعهٔ مرتب ساده با توپولوژی ترتیبی، یك فضای هاوسدورف

است حاصل‌ضرب دوفضای هاوسدورف فضایی است هاوسدورف. هرزیرفضای فضایی هاوسدورف فضای هاوسدورف است.

بدین جهت، شرط هاوسدورف را عموماً شرط اضافی بسیار ملایمی برای تحمیل برفضاهای توپولوژیك می‌شمارند. در واقع، بعضی‌از ریاضیدانان تاآنجا پیش می‌روند که در اولین درس توپولوژی از فضاهای غیر هاوسدورف اجتناب می‌کنند واز همان‌ابتدا شرط هاوسدورف را برفضاهای توپولوژیك تحمیل می‌کنند. ما تا این حد پیش نخواهیم رفت، ولی هرجاکه شرط هاوسدورف برای برهانی لازم باشد، بی‌آنکه تشویشی از محدود شدن جدی دامنهٔ کاربردهای نتایج حاصل به‌خود راه دهیم، شرط هاوسدورف را مفروض می‌گیریم.

شرط هاوسدورف فقط یکی از شرایط اضافی است که می‌توان بریك فضای توپولوژیك تحمیل کرد. هربارکه شرطی اضافی برفضاهای توپولوژیك تحمیل می‌شود، می‌توان قضایای تواناتری ثابت‌کرد، ولی ردهٔ فضاهایی که این قضایا درآنها صادق‌اند محدودتر می‌گردد. ازآغازپیدایش توپولوژی، بیشتر پژوهشهایی‌که دراین علم صورت گرفته متمرکز درحول این مسئله بوده است‌که چه شرایطی برفضاهای توپولوژیك تحمیل کنیم تا درضمن اینکه توانایی‌کافی برای اثبات قضایای جالب درمورد فضاهایی که‌دراین شرط صدق می‌کند داشته باشند، باوجود این چنان قوی نباشندکه دامنهٔکاربردهای نتایج حاصل را شدیداً محدود کنند.

در دوفصل آتی تعدادی‌ازاین شرایط را بررسی می‌کنیم. شرط هاوسدورف واصل موضوع T_1 فقط دو شرط از ردهٔ شرایط مشابهی هستندکه جمعاً اصول موضوع جدا-سازی خوانده می‌شوند. از جمله شرایط دیگرمی‌توان از اصول موضوع شمارایی وانواع شرایط فشردگی و همبندی نام برد چنانکه خواهید دید، بعضی از این شرایط بسیار مقید کننده‌اند.

تمرینها

۱. فرض‌کنید $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X باشد. فرض‌کنید $\varnothing$ و X در $\mathcal{C}$، واجتماعهای متناهی و مقاطع دلخواه اعضای $\mathcal{C}$ نیز در $\mathcal{C}$ باشند. ثابت کنیدکه گردایه

$$\mathcal{T}=\{X-C \mid C\in\mathcal{C}\}$$

یك توپولوژی در X است.

۲. ثابت‌کنیدکه اگر A در Y و Y در X بسته باشدآنگاه A در X بسته است.

۳. ثابت‌کنیدکه اگر A در X و B در Y بسته باشد آنگاه $A\times B$ در $X\times Y$ بسته است.

۴. ثابت کنید که اگر U در X باز و A در X بسته باشد آنگاه $U-A$ در X باز و $A-U$ در X بسته است.

۵. فرض کنید X مجموعه‌ای مرتب با توپولوژی ترتیبی باشد. ثابت کنید که $\overline{(a, b)} \subset [a, b]$. درچه شرایطی تساوی برقرار است؟

۶. فرض کنید A ، B ، و A_α زیر مجموعه‌هایی از فضای X باشند. روابط زیررا ثابت کنید:

(الف) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(ب) $\bigcup \bar{A}_\alpha \subset \overline{\bigcup A_\alpha}$ ؛ مثالی بیاوریدکه درآن تساوی برقرار نیست.

۷. چه ایرادی به «استدلال» زیر برای اثبات $\overline{\bigcup A_\alpha} \subset \bigcup \bar{A}_\alpha$ وارد است؟ اگر $\{A_\alpha\}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد و اگر $x \in \overline{\bigcup A_\alpha}$ آنگاه هرهمسایگی x مانند U ، مجموعهٔ $\bigcup A_\alpha$ را قطع می‌کند. پس، U باید یکی از A_αها را قطع کند، و درنتیجه x باید به‌بستار یکی از A_αها متعلق باشد. بنابراین، $x \in \bigcup \bar{A}_\alpha$.

۸. فرض کنید A ، B ، و A_α زیر مجموعه‌هایی از فضای X باشند، و A' مجموعهٔ نقاط حدی A باشد. دربرقراری‌هریك‌از تساویهای‌زیر تحقیق کنید. در موردآنهایی که برقرار نیستند، تعیین کنید که کدامیك از روابط $\subset$ یا $\supset$ برقراراست.

(الف) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

(ب) $\overline{\bigcap A_\alpha} = \bigcap \bar{A}_\alpha$.

(پ) $\overline{A - B} = \bar{A} - \bar{B}$.

(ت) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

(ث) $(A \cap B)' = A' \cap B'$.

۹. فرض کنید $A \subset X$ و $B \subset Y$. ثابت کنید که در فضای $X \times Y$ ،

$$\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$$

۱۰. ثابت کنید که هر توپولوژی ترتیبی، هاوسدورف است.

۱۱. ثابت کنید که حاصل‌ضرب دوفضای هاوسدورف، هاوسدورف است.

۱۲. ثابت کنید که هرزیرفضای فضایی هاوسدورف، هاوسدورف است.

۱۳. ثابت کنید که X هاوسدورف است اگر وفقط اگر قطر $\Delta = \{x \times x \mid x \in X\}$ در $X \times X$ بسته باشد.

۱۴. (الف) ثابت کنید که اصل موضوع T_1 معادل با این شرط است که مجموعه‌های متناهی بسته‌اند.

(ب) اگر X مجموعه‌ای مفروض باشد. ثابت کنید که توپولوژی متمم متناهی $\mathcal{T}_f$،

که در مثال ۳ از بخش ۲ــ۱ تعریف شد، دراصل موضوع T_1 صدق می‌کند وجزء هرتوپولوژی T_1 در X است. آیا $\mathcal{T}_f$ دراصل موضوع هاوسدورف صدق می‌کند؟

۱۵. هفت توپولوژی در R راکه در تمرین ۱۶ از بخش ۲ــ۲ آوردیم درنظر بگیرید.
(الف) بستار مجموعهٔ $K=\{1/n \mid n\in Z_+\}$ را تحت هریك‌از این توپولوژیها به‌دست آورید.
(ب) کدامیك از این توپولوژیها در اصل موضوع هاوسدورف صدق می‌کند و کدامیك دراصل موضوع T_1؟

۱۶. دو توپولوژی در R راکه در تمرین ۷ ازبخش ۲ــ۲ آورده شدند درنظر بگیرید. بستار مجموعه‌های

$$B=(\sqrt{2},\ 3) \quad \text{و} \quad A=(0,\ \sqrt{2})$$

را تحت هریك ازاین توپولوژیها تعیین کنید.

۱۷. مجموعهٔ $X=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$ را با توپولوژی ترتیب قاموسی درنظر بگیرید. مطلوب است تعیین بستار هریك از زیرمجموعه‌های زیر از X:

$$A=\left\{\frac{1}{n}\times 0 \mid n\in Z_+\right\},$$

$$B=\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\frac{1}{2} \mid n\in Z_+\right\},$$

$$C=\{x\times 0 \mid 0<x<1\},$$

$$D=\left\{x\times\frac{1}{2} \mid 0<x<1\right\},$$

$$E=\left\{\frac{1}{2}\times y \mid 0<y<1\right\}.$$

۱۸. اگر $A\subset X$، کرانهٔ A را به $\operatorname{Bd} A$ نمایش می‌دهیم وآن‌را چنین تعریف می‌کنیم،

$$\operatorname{Bd} A=\bar{A}\cap(\overline{X-A}).$$

(الف) ثابت کنیدکه $\operatorname{Int} A$ و $\operatorname{Bd} A$ جدا ازهم‌اند و $\bar{A}=\operatorname{Int} A\cup \operatorname{Bd} A$.
(ب) ثابت‌کنیدکه A هم باز است وهم بسته اگر و فقط اگر $\operatorname{Bd} A=\varnothing$.
(پ) ثابت‌کنیدکه U باز است اگروفقط اگر $\operatorname{Bd} U=\bar{U}-U$.
(ت) اگر U باز باشد، آیا درست است کـه $U=\operatorname{Int}(\bar{U})$؟ برای جواب خود دلیل بیاورید.

۱۹. کرانه و درون هریك از زیر مجموعه‌های زیر از $R^{۲}$ را بیابید:

(الف) $A=\{x\times y \mid y=۰\}$،

(ب) $B=\{x\times y \mid y\neq ۰ \text{ و } x>۰\}$،

(پ) $C=A\cup B$،

(ت) $D=\{x\times y \mid x \text{ گویاست}\}$،

(ث) $E=\{x\times y \mid ۰<x^{۲}+y^{۲}\leqslant ۱\}$،

(ج) $F=\left\{x\times y \mid y\leqslant \frac{۱}{x} \text{ و } x\neq ۰\right\}$.

***۲۰.** (کوراتوفسکی[1]) گردایهٔ‌همهٔ‌زیر مجموعه‌های A از فضای توپولوژیك X را درنظر بگیرید. عملهای بستارگیری $A\rightarrow \bar{A}$ و متمم‌گیری $A\rightarrow X-A$ توابعی‌ازاین گردایه درخودش هستند.

(الف) ثابت کنید که اگراز مجموعهٔ مفروضی مانند A شروع کنیم و این عملها را متوالیاً انجام دهیم، حداکثر۱۴ مجموعهٔ متمایز می‌توان به‌دست‌آورد.

(ب) زیرمجموعه‌ای‌مانند A از R (با توپولوژی معمولی) بیابید که برای آن تعداد مجموعه‌های متمایز به‌دست‌آمده درقسمت (الف) همان عدد ماکزیموم ۱۴ باشد.

۲-۷ توابع پیوسته

مفهوم تابع پیوسته، از مفاهیم اساسی بخش اعظم ریاضیات است، توابع پیوسته برخط حقیقی درصفحات اولیهٔ هرکتاب حسابان(حساب دیفرانسیل وانتگرال) به‌چشم می‌خورند، وکمی پس‌ازآن توابع پیوسته برصفحه و فضا نیز بـه‌دنبال‌آن می‌آیند. انواع‌کلیتر این توابع در مراحل پیشرفته‌تر ریاضیات مطرح می‌شوند. دراین بخش، تعریفی از پیوستگی تدوین می‌کنیم که همهٔ این مواردخاص‌را شامل می‌شود؛ وسپس درخواص گوناگون‌توابع پیوسته تحقیق می‌کنیم. بسیاری ازاین خواص تعمیم مستقیم همان چیزهایی است کـه در حسابان وآنالیز پیرامون توابع پیوسته‌آموخته‌اید.

پیوستگی یك تابع

فرض‌کنیم X و Y دوفضای توپولوژیك بـاشند. تابع $f: X\rightarrow Y$ را وقتی **پیوسته** خوانیم اگر به‌ازای هرزیرمجموعهٔ باز Y مانند V مجموعهٔ $f^{-۱}(V)$ یك زیر مجموعهٔ باز X باشد.

به‌یادآوریدکه $f^{-۱}(V)$ عبارت‌است‌از مجموعهٔ همهٔ xهایی‌از X که $f(x)\in V$. این مجموعه درصورتی که V مجموعهٔ تصویر $f(X)$ را قطع نکند تهی است.

1. Kuratowski

پیوستگی یك تابع نه‌تنها به‌خود تابع f بستگی‌دارد ، بلکه توپولوژیهای مشخص شده برحوزهٔ تعریف و حوزهٔ مقادیر f نیز دراین امردخالت دارند. اگر بخواهیم براین مطلب تأکید کنیم، می گوییم f نسبت به توپولوژیهای مشخص شده در X و Y پیوسته‌است.

ملاحظه می کنیم که اگر توپولوژی فضای حوزهٔ مقادیر ، یعنی Y ، برحسب پایه‌ای مانند $\mathcal{B}$ ازآن مشخص شده باشدآنگاه برای اثبات پیوستگی تابع f کافی است ثابت کنیم که تصویر معکوس هر عضو پایه در X بازاست: زیرا هرمجموعهٔ باز دلخواه از Y مانند V را می‌توان به‌صورت اجتماعی ازاعضای پایه مانند

$$V=\bigcup_{\alpha\in J}B_\alpha$$

نوشت ، درنتیجه

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{\alpha\in J}f^{-1}(B_\alpha).$$

بنابراین ، اگرهر $f^{-1}(B_\alpha)$ باز باشد ، $f^{-1}(V)$ نیز باز است.

اگر توپولوژی Y به‌وسیلهٔ زیر پایه‌ای‌ازآن مانند $\mathcal{S}$ داده شده باشد ، برای‌اثبات پیوستگی f حتی کافی خواهد بودکه ثابت کنیم تصویر معکوس هرعضو زیر پایه در X باز است : زیرا هرعضو دلخواه پایهٔ Y مانند B را می‌توان به صورت مقطعی متناهی از اعضای زیرپایه ، مانند $S_1\cap\dots\cap S_n$ ، نوشت؛ از تساوی

$$f^{-1}(B)=f^{-1}(S_1)\cap\dots\cap f^{-1}(S_n)$$

نتیجه می‌شود که تصویر معکوس هرعضو پایه بازاست.

مثال ۱. مثالی از یك «تابع حقیقی از یك متغیر حقیقی» راکه معمولاً در آنالیز مطالعه می‌شود درنظر می‌گیریم. درآنالیز پیوستگی تابعی مانند

$$f:R\to R$$

را ازطریق «ε ـ δ» تعریف می کنند، طریقه‌ای‌که سالها عامل‌وحشت هرمحصل ریاضی بوده است. همان‌طورکه انتظار می‌رود ، تعریف به طریقهٔ ε ـ δ و تعریف ما معادل‌اند. مثلاً، برای اثبات اینکه تعریف ما مستلزم تعریف به‌طریقهٔ ε ـ δ است چنین استدلال می‌کنیم :

فرض‌کنیم x_0 عضو مفروضی از R و $\varepsilon>0$ مفروض باشد ، بازهٔ

$$V=(f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon)$$

یك مجموعهٔ باز فضای حوزهٔ مقادیر،یعنی R،است . بنابراین ، $f^{-1}(V)$ مجموعهٔ بازی در R ، فضای حوزهٔ تعریف ، است . چون $f^{-1}(V)$ شامل x_0 است ، شامل عضوی از پایه مانند (a, b) است که x_0 را دربردارد. δ را کوچکترین دوعدد x_0-a و $b-x_0$ اختیار می‌کنیم . دراین صورت ، اگر $|x-x_0|<\delta$ آنگاه نقطهٔ x در (a, b) است ، درنتیجه $f(x)\in V$ ، یعنی $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ ، واین همان است که می‌خواستیم.

اثبات اینکه تعریف به طریقهٔ ε ـ δ نیز مستلزم تعریف ما است مشکل نیست و آن را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. هنگام مطالعهٔ فضاهای متری به‌این مثال باز می‌گردیم.

مثال ۲. در حسابان پیوستگی انواع گوناگونی از توابع را درنظر می‌گیرند. مثلاً توابعی از انواع زیر را بررسی می‌کنند.

$f: R \longrightarrow R^2$ (منحنیهای صفحه)

$f: R \longrightarrow R^3$ (منحنیهای فضا)

$f: R^2 \longrightarrow R$ (توابع $f(x, y)$ از دو متغیر حقیقی)

$f: R^3 \longrightarrow R$ (توابع $f(x, y, z)$ از سه متغیرحقیقی)

$f: R^2 \longrightarrow R^2$ (میدانهای برداری $\mathbf{v}(x, y)$ درصفحه)

در آنجا، مفهوم پیوستگی برای هر یك از این توابع جداگانه تعریف می‌شود. تعریف کلی ما برای پیوستگی، همهٔ اینها را به عنوان موارد خاص دربر می‌گیرد؛ این مطلب نتیجهٔ قضایای کلی‌ای است که در مورد توابع پیوسته‌در فضاهای حاصل‌ضربی وفضاهای‌متری ثابت می‌کنیم.

مثال ۳. فرض‌کنیم R مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی درآن و R_l نمایش همان مجموعه با توپولوژی حد پایینی باشد. فرض‌کنیم

$$f: R \longrightarrow R_l$$

تابع همانی باشد، یعنی، به‌ازای هرعدد حقیقی x، $f(x)=x$. دراین صورت f پیوسته نیست. زیرا تصویرعکس مجموعهٔ باز $[a, b)$ از R_l با خودش مساوی است. ولی در R باز نیست. از طرف دیگر، تابع همانی

$$g: R_l \longrightarrow R$$

پیوسته است، زیرا تصویر عکس (a, b)، خود این مجموعه است، که در R_l باز است.

در آنالیز چندین راه متفاوت، ولی معادل، برای تدوین تعریف پیوستگی بررسی می‌شود. بعضی‌ازآنها به فضاهای دلخواه نیز تعمیم می‌یابند، و ماآنها را در قضایای آتی بررسی می‌کنیم. روشهای شناخته شدهٔ «تعریف به‌وسیلهٔ ε - δ» و «تعریف به‌وسیلهٔ دنباله‌های همگرا» قابل تعمیم در فضاهای کلی نیستند؛ بررسی‌آنها را به مبحث فضاهای متری که دربخش ۲ـ۱۰ خواهدآمد موکول می‌کنیم.

۷.۱ قضیه فرض‌کنیم X و Y دوفضای توپولوژیك باشند، $f: X \to Y$. دراین صورت، گزاره‌های ذیل معادل‌اند:

(۱) f پیوسته است.

(۲) به‌ازای هرزیرمجموعهٔ X مانند A، $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

(۳) به‌ازای هرمجموعهٔ بستهٔ Y مانند B، مجموعه $f^{-1}(B)$ در X بسته است.

برهان. (۲) $\Longleftarrow$ (۱). فرض کنیم f پیوسته و A زیر مجموعه‌ای از X باشد. ثابت می‌کنیم که اگر $x \in \overline{A}$ آنگاه $f(x) \in \overline{f(A)}$. فرض کنیم V یك همسایگی $f(x)$ باشد. دراین صورت $f^{-1}(V)$ یك مجموعهٔ باز X وشامل x است، و باید A را در نقطه‌ای مانند y قطع کند. دراین صورت، V مجموعهٔ $f(A)$ را درنقطهٔ $f(y)$ قطع می‌کند. بنابراین $f(x) \in \overline{f(A)}$.

(۳) $\Longleftarrow$ (۲). فرض کنیم B در Y بسته باشد و $A = f^{-1}(B)$. می‌خواهیم ثابت کنیم که A در X بسته است. برای این منظور، ثابت می‌کنیم که $\overline{A} \subset A$. بنابر قواعد نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها داریم $f(A) \subset B$. بنابراین، اگر x نقطه‌ای از $\overline{A}$ باشد، آنگاه

$$f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B,$$

وازآنجا، $x \in f^{-1}(B) = A$. پس $\overline{A} \subset A$.

(۱) $\Longleftarrow$ (۳). فرض کنیم V مجموعهٔ باز دلخواهی در Y باشد، و $B = Y - V$. دراین صورت B در Y بسته است. بنابر(۳)، $f^{-1}(B)$ در X بسته است. و ازآنجا، بنابر قواعد نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها،

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = X - f^{-1}(B)$$

پس $f^{-1}(V)$ بازاست. $\square$

هومئومورفیسم

فرض کنیم X و Y دوفضای توپولوژیك باشند، و تابع $f: X \to Y$ تناظری دوسویی باشد. اگر f و تابع معکوس‌آن

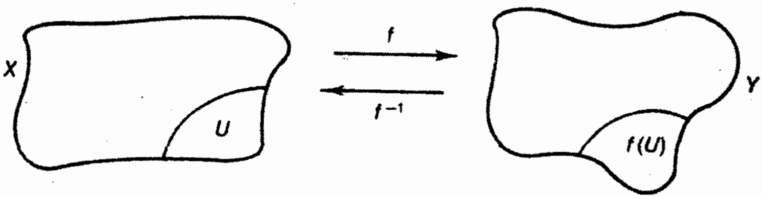
$$f^{-1}: Y \longrightarrow X$$

هردو پیوسته باشند آنگاه f را **هومئومورفیسم** می‌خوانیم.

شرط پیوستگی f^{-1} گویای این است که به‌ازای زیر مجموعهٔ باز X مانند U، تصویرعکس U تحت تابع $f^{-1}: Y \to X$ در Y بازاست. اما تصویر عکس U تحت تابع f^{-1} همان تصویر U تحت تابع f است(شکل ۱۳). بنابراین، طریقهٔ دیگر تعریف هومئومورفیسم این است که بگوییم: هومئومورفیسم عبارت است از تناظری دوسویی مانند $f: X \to Y$ به‌طوری‌که به‌ازای هر U، مجموعهٔ $f(U)$ بازاست اگروفقط اگر U باز باشد.

نکتهٔ اخیر نشان می‌دهدکه یك هومئومورفیسم $f: X \to Y$ نه‌تنها بین X و Y، بلکه بین گردایهٔ مجموعه‌های باز X و Y نیز تناظری دوسویی برقرار می‌کند. درنتیجه، هرخاصیت X که تماماً برحسب توپولوژی X (یعنی، برحسب مجموعه‌های باز X)

بیان شود ، به‌توسط تناظر f، خاصیت متناظری برای Y به‌دست می‌دهد. چنین خاصیتی‌از X را یك **خاصیت توپولوژیك** X می‌خوانیم.



شکل ۱۳

ممکن است که درجبرنوین مفهوم ایزومورفیسم بین ساختمانهای جبری مانند گروهها و حلقه‌ها را مطالعه کرده باشید. ایزومورفیسم عبارت است از تناظری دوسویی که ساختمانهای جبری مربوطه را حفظ می کند. مفهوم مشابه آن در توپولوژی هومئومورفیسم است ؛ یعنی تناظری دوسویی که ساختمانهای توپولوژیك مربوطه را حفظ می کند.

اکنون فرض کنیم $f: X \to Y$ یك نگاشت پیوستهٔ یك‌به‌یك باشد که درآن X و Y دوفضای توپولوژیك‌اند. فرض کنیم Z مجموعهٔ تصویر $f(X)$ باشد وآن را به‌عنوان یك زیرفضای Y درنظر می گیریم. در این صورت ، تابع $f': X \to Z$ که از تحدید حوزهٔ مقادیر f به‌دست می‌آید دوسویی است. اگر f' هومئومورفیسمی بین X و Z باشد ، می گوییم نگاشت $f: X \to Z$ یك **نشانندهٔ توپولوژیك** ، یا مختصراً یك **نشانندهٔ** X در Y ، است.

مثال ۴. تابع $f: R \to R$ باضابطهٔ $f(x)=۳x+۱$ هومئومورفیسم است(شکل ۱۴). اگر تابع $g: R \to R$ را با ضابطهٔ

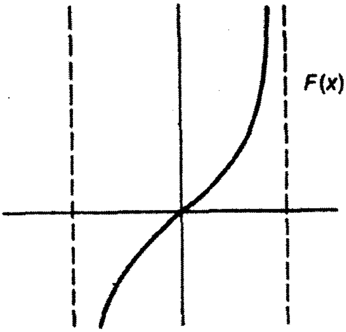
$$g(y)=\frac{۱}{۳}(y-۱)$$

تعریف کنیم ، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که به‌ازای هردوعدد حقیقی x و y ، $f(g(y))=y$ ، $g(f(x))=x$. ازاینجا نتیجه می‌شود که f دوسویی است و $g=f^{-۱}$ ؛ پیوستگی f و g نتیجهٔ شناخته شده‌ای از قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

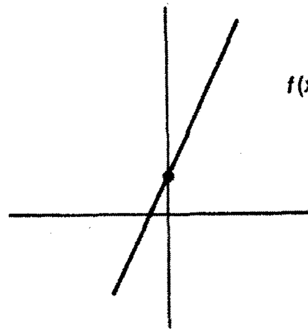
مثال ۵. تابع $F: (-۱, ۱) \to R$ باضابطهٔ

$$F(x)=\frac{x}{۱-x^۲}$$

هومئومورفیسم است (شکل ۱۵). قبلاً در بخش ۱ـ۳ مثال ۹ تذکر دادیم که F تناظری



شکل ۱۵



شکل ۱۴

دوسویی و حافظ ترتیب است ؛ معکوس‌آن تابع G است باضابطهٔ

$$G(y)=\frac{۲y}{۱+(۱+۴y^{۲})^{۱/۲}}$$

به دوطریق می‌توان هومئومورفیسم بودن F را ثابت‌کرد. یك طریق این است‌که چون F حافظ ترتیب و دوسویی است ، هرعضو پایهٔ توپولوژی ترتیبی در $(-۱ ,۱)$ را بریك عضو پایهٔ توپولوژی‌ترتیبی در R می‌نگارد ، و بعکس. درنتیجه، F خودبخود هومئومورفیسمی بین $(-۱ ,۱)$ و R است (هردوفضا با توپولوژی ترتیبی درنظرگرفته شده‌اند). چون توپولوژی ترتیبی در $(-۱ ,۱)$ با توپولوژی معمولی (زیر فضایی) آن مساوی است ، F هومئومورفیسمی بین $(-۱ ,۱)$ و R است.

طریقهٔ دوم اثبات هومئومورفیسم بودن F این است‌که با استفاده از پیوستگی توابع جبری و پیوستگی تابع ریشهٔ دوم ، ثابت‌کنیم که F و G هردو پیوسته‌اند ؛ و این هردو از احکام شناخته شدهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند.

مثال ۶. تابع‌دوسویی $f: X \to Y$ می‌تواند پیوسته باشد بی‌آنکه‌هومئومورفیسم‌باشد. یك نمونه از این‌گونه چنین است : فرض‌کنیم $S^۱$ **دایرهٔ واحد** ،

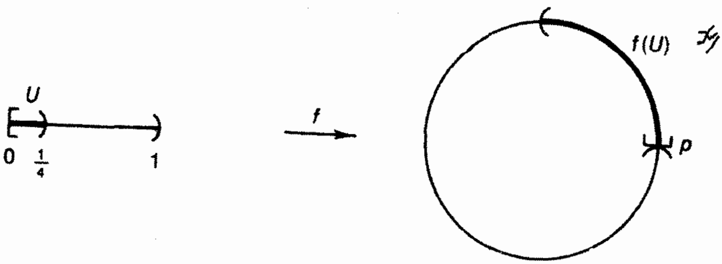
$$S^۱=\{x\times y \mid x^۲+y^۲=۱\}$$

باشدکه به‌عنوان یك زیر فضای $R^۲$ ملحوظ می‌شود ، و فرض‌کنیم

$$f:[۰,\ ۱) \longrightarrow S^۱$$

نگاشتی با ضابطهٔ $f(t)=(\cos ۲\pi t,\ \sin ۲\pi t)$ باشد. پیوستگی و دوسویی بودن f از خواص شناخته شدهٔ توابع مثلثاتی نتیجه می‌شود. ولی تابع $f^{-۱}$ پیوسته نیست. مثلاً ،

تصویر مجموعهٔ باز $U=[0, 1/4)$ از حوزهٔ تعریف تحت f در S^1 باز نیست ، زیرا هیچ مجموعهٔ باز R^2 مانند V وجود ندارد که شامل $p=f(0)$ باشد و $V \cap S^1 \subset f(U)$ (شکل ۱۶).



شکل ۱۶

مثال ۷. تابع

$$g:[0, 1) \longrightarrow R^2$$

راکه ازگسترش حوزهٔ مقادیر تابع f در مثال قبل به‌دست آمده است در نظر بگیرید. نگاشت g مثالی است از نگاشت پیوستهٔ یك‌به‌یکی که نشاننده نیست.

ساختن توابع پیوسته

برای ساختن توابع پیوسته از یك فضای توپولوژیك به یك فضای دیگرچگونه باید عمل کرد؟ درآنالیز ، روشهایی برای این منظور معمول است که بعضی ازآنها قابل تعمیم به فضاهای توپولوژیك دلخواه هستند ، و بقیه چنین نیستند. نخست چند روش راکه در فضاهای توپولوژیك دلخواه نیز برقرارند بررسی می‌کنیم ، و تحقیق در سایرین را به‌آتیه موکول می‌کنیم.

۲.۷. قضیه (قواعدی برای ساختن توابع پیوسته) فرض کنیم X ، Y ، و Z فضاها توپولوژیك دلخواهی باشند.

(الف) (تابع ثابت) اگر تابع $f: X \to Y$ همهٔ X را فقط بریك نقطهٔ y_0 از Y بنگارد آنگاه f پیوسته است.

(ب) (تابع احتوا) اگر A زیرفضایی از X باشد آنگاه تابع احتوا $j: A \to X$ پیوسته است.

(پ) (تابع مرکب) اگر $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ پیوسته باشند آنگاه نگاشت $g \circ f: X \to Z$ نیز پیوسته است.

(ت) (تحدید حوزهٔ تعریف) اگرتابع $f: X \to Y$ پیوسته و A زیرفضایی از X باشد

آنگاه تابع $f \mid A : A \rightarrow Y$ نیز پیوسته است.

(ث) (تحدید یا گسترش حوزهٔ مقادیر) فرض کنیم $f : X \rightarrow Y$ پیوسته باشد. اگر Z زیر فضایی از Y و حاوی $f(X)$ باشد آنگاه تابع $g : X \rightarrow Z$ نیز که از تحدید حوزهٔ مقادیر f به‌دست آمده پیوسته است. اگر Z یك فضا و Y زیر فضایی از آن باشد آنگاه تابع $h : X \rightarrow Z$ که از گسترش حوزهٔ مقادیر f به‌دست آمده پیوسته است.

(ج) (بیان موضعی پیوستگی) نگاشت $f : X \rightarrow Y$ پیوسته است اگر X را بتوان به‌صورت اجتماع مجموعه‌های باز U_α نوشت به‌طوری‌که به‌ازای هر α تابع $f \mid U_\alpha$ پیوسته باشد.

(چ) (پیوستگی در هرنقطه) نگاشت $f : X \rightarrow Y$ پیوسته است اگر به‌ازای هر $x \in X$ و هرهمسایگی $f(x)$ مانند V، یك همسایگی x مانند U یافت شود به‌طوری‌که $f(U) \subset V$.

اگر شرط (چ) در مورد نقطهٔ خاص x از X برقرار باشد، گوییم f **درنقطهٔ** x **پیوسته** است.

برهان. (الف) فرض کنیم به‌ازای هر x از X داشته باشیم $f(x) = y_\circ$ و مجموعهٔ V در فضای Y باز باشد. دراین صورت برحسب آنکه V شامل $y_\circ$ باشد یا نباشد، مجموعهٔ $f^{-1}(V)$ برابر X یا $\varnothing$ است. درهرحال، $f^{-1}(V)$ بازاست.

(ب) اگر U در X باز باشد آنگاه $j^{-1}(U) = U \cap A$ که، بنابر تعریف توپولوژی زیرفضایی، در A بازاست.

(پ) اگر U در Z باز باشد آنگاه $g^{-1}(U)$ در Y و $f^{-1}(g^{-1}(U))$ در X بازاست. اما، بنابر قواعد نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها، داریم

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U).$$

(ت) تابع $f \mid A$ برابر است با تابع مرکب نگاشت احتوای $j : A \rightarrow X$ و نگاشت $f : X \rightarrow Y$ که هردو پیوسته‌اند.

(ث) فرض کنیم $f : X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، و $f(X) \subset Z \subset Y$. ثابت می‌کنیم که تابع $g : X \rightarrow Z$ نیز که از f به‌دست می‌آید پیوسته است. فرض کنیم B در Z باز باشد. دراین صورت مجموعهٔ بازی از Y مانند U هست به‌طوری که $B = Z \cap U$. چون Z شامل $f(X)$ است، بنابر قواعد نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها،

$$f^{-1}(U) = g^{-1}(B)$$

پس ازآنجاکه $f^{-1}(U)$ باز است، $g^{-1}(B)$ نیز چنین‌است.

حال فرض کنیم Y زیر فضایی از Z باشد. برای اثبات پیوستگی تابع $h : X \rightarrow Z$ ملاحظه می‌کنیم که h تابع مرکب‌نگاشت $f : X \rightarrow Y$ و نگاشت احتوای $j : Y \rightarrow Z$ است.

(ج) بنابر فرض، X را می‌توان بـه‌صورت اجتماعی از مجموعه‌های باز U_α نوشت که به‌ازای هر α تابع $f|U_\alpha$ پیوسته‌است. فرض‌کنیم V مجموعهٔ بازدلخواهی در Y باشد. دراین صورت،

$$f^{-1}(V)\cap U_\alpha=(f|U_\alpha)^{-1}(V),$$

زیـرا، هردوطرف تساوی نمایش مجموعهٔ همهٔ xهـایی هستندکـه به U_α تعلق دارند و $f(x)\in V$. چون $f|U_\alpha$ پیوسته است، این مجموعه در U_α، و درنتیجه در X بـاز است. اما

$$f^{-1}(V)=\bigcup_\alpha(f^{-1}(V)\cap U_\alpha).$$

(چ) فرض‌کنیم V مجموعهٔ بازی در Y و x نقطهٔ دلخواهی از $f^{-1}(V)$ باشد. دراین صورت، $f(x)\in V$، پس، بنابر فرض، یك همسایگی x مـانند U_x هست کـه $f(U_x)\subset V$. پس $U_x\subset f^{-1}(V)$. بنابراین، $f^{-1}(V)$ را می‌توان به‌صورت اجتماع مجموعه‌های باز U_x نوشت. درنتیجه، $f^{-1}(V)$ بازاست.□

۳.۷. قضیه (لم چسب) فـرض کنیم $X=A\cup B$، و A و B در X بسته بـاشند. بعلاوه، فرض کنیم $f:A\to Y$ و $g:B\to Y$ پیوسته باشند. دراین صورت، اگربه‌ازای هر $x\in A\cap B$ داشته باشیم $f(x)=g(x)$ آنگاه می‌توان f و g را باهم در آمیخت تا تابع پیوستهٔ $h:X\to Y$ را به‌دست‌آورد که به‌ازای $x\in A$ به‌صورت $h(x)=f(x)$ و به‌ازای $x\in B$ به‌صورت $h(x)=g(x)$ تعریف می‌شود.

برهان. فرض‌کنیم C زیر مجموعهٔ‌بسته‌ای‌از Y باشد. بنابر قواعد نظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها

$$h^{-1}(C)=f^{-1}(C)\cup g^{-1}(C).$$

چـون f پیوسته است، $f^{-1}(C)$ در A ودرنتیجه در X بسته است. بـه‌همین قیاس، $g^{-1}(C)$ در B ودرنتیجه در X بسته است. بنابراین، اجتماع آنها، یعنی $h^{-1}(C)$ نیز در X بسته است.□

این قضیه وقتی‌کـه A و B در X باز باشند نیز برقراراست؛ در واقع این مطلب حالت خاصی از «بیان موضعی پیوستگی» است [قضیهٔ ۲.۷ (ج)].

مثال ۸. تابع $h:R\to R$ را باضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$h(x)=\begin{cases} x & \text{به‌ازای } x\leqslant 0، \\ \dfrac{x}{2} & \text{به‌ازای } x\geqslant 0، \end{cases}$$

هریك از دو «تکهٔ» این تعریف، تابعی است پیوسته و مقادیر این دوتابع در نقاط مشترك

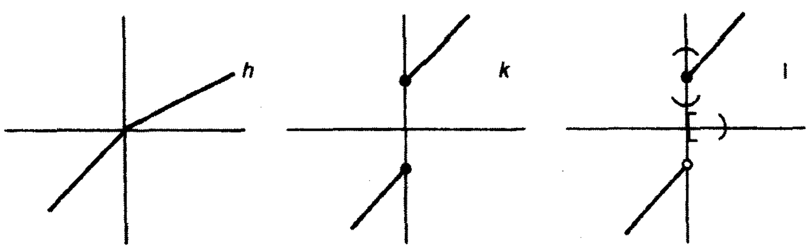
حوزهٔ تعریفشان ، که مجموعهٔ تک‌عضوی $\{0\}$ است ، مساوی هستند. چون حوزه‌های تعریف آنها در R بسته است ، تابع h پیوسته است (شکل ۱۷). باید توجه داشت برای اینکه اصلاً تابعی داشته باشیم مساوی بودن مقادیر «دوتکهٔ» تابع h در نقاط مشترک حوزهٔ تعریف آنها ضروری است. مثلاً ، معادلات

$$k(x)=\begin{cases} x-2 & \text{به‌ازای } x\leqslant 0 \\ x+2 & \text{به‌ازای } x\geqslant 0 \end{cases}$$

تابعی را تعریف نمی‌کنند. از طرف دیگر ، برای تضمین پیوستگی ، لازم است که محدودیتهایی برمجموعه‌های A و B اعمال شود. مثلاً ، معادلات

$$l(x)=\begin{cases} x-2 & \text{به‌ازای } x< 0 \\ x+2 & \text{به‌ازای } x\geqslant 0 \end{cases}$$

تابعی مانند l راتعریف می‌کنند که R رادر R می‌نگارد ، و هر «دوتکهٔ» آن پیوسته‌اند. اما l پیوسته نیست، زیرا تصویرعکس بازهٔ $(1,3)$ بازهٔ $[0,1)$ است که باز نیست.



شکل ۱۷

۴.۷. قضیه (نگاشتهایی بتوی فضای حاصلضربی) فرض کنیم تابع $f:A\to X\times Y$ باضابطهٔ

$$f(a)=(f_1(a)\ ,\ f_2(a))$$

داده شده باشد. دراین صورت ، f پیوسته است اگر و فقط اگر

$$f_1:A\longrightarrow X \quad \text{و} \quad f_2:A\longrightarrow Y$$

پیوسته باشند.

نگاشتهای f_1 و f_2 را **توابع مختصی** f می‌خوانند.

برهان. فرض کنیم $\pi_1:X\times Y\to X$ و $\pi_2:X\times Y\to Y$ بترتیب نگاشتهای

تصویری بروی عوامل اول و دوم باشند. این نگاشتها پیوسته‌اند، زیرا

$$\pi_2^{-1}(V)=X\times V \quad و \quad \pi_1^{-1}(U)=U\times Y$$

و اگر U و V باز باشند، این مجموعه‌ها نیز بازخواهند بود. ملاحظه کنید که به‌ازای $a\in A$،

$$f_2(a)=\pi_2(f(a)) \quad و \quad f_1(a)=\pi_1(f(a)).$$

اگر تابع f پیوسته باشدآنگاه f_1 و f_2 توابع مرکبی از توابع پیوسته هستند و درنتیجه پیوسته‌اند. بعکس،فرض‌کنیم f_1 و f_2 پیوسته باشند. ثابت می کنیم که به‌ازای هرعضو پایهٔ توپولوژی $X\times Y$ مانند $U\times V$، تصویر عکس این عضو، یعنی $f^{-1}(U\times V)$،باز است. نقطه‌ای مانند a متعلق است به $f^{-1}(U\times V)$ اگر و فقط اگر $f(a)\in U\times V$، یعنی $f_1(a)\in U$ و $f_2(a)\in V$. بنابراین،

$$f^{-1}(U\times V)=f_1^{-1}(U)\cap f_2^{-1}(V).$$

چون مجموعه‌های $f_1^{-1}(U)$ و $f_2^{-1}(V)$ بازند، مقطع‌آنها نیز بازاست. □

برای تشخیص پیوستگی نگاشتی مانند $f: A\times B\to X$، که حوزهٔ تعریف آن فضای حاصل‌ضربی است، ضابطهٔ مفیدی‌در دست نیست. ممکن است‌گمان رود که اگر f «نسبت به هریك از متغیرها به‌طورجداگانه» پیوسته باشد خود نیز پیوسته است، ولی این گمان نادرست است (تمرین ۱۳).

مثال ۹. در حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال)، یك منحنی پارامتری شدهٔ صفحه به‌صورت نگاشتی‌پیوسته مانند $f, [a, b]\to R^2$ تعریف می‌شود. این‌نگاشت اغلب به‌صورت $f(t)=(x(t)\ ,\ y(t))$ بیان می‌شود، و کراراً ازاین امراستفاده می‌شودکه اگر x و y توابعی پیوسته از t باشند، f نیز تابعی پیوسته از t است. همچنین یك میدان برداری درصفحه مانند

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(x, y)&=P(x, y)\mathbf{i}+Q(x, y)\mathbf{j}\\&=(P(x, y), Q(x, y))\end{aligned}$$

پیوسته خوانده می‌شود اگرتوابع P و Q هردو پیوسته باشند، یا به‌بیان معادل، هرگاه $\mathbf{v}$ به‌عنوان نگاشتی ازR^2 در R^2، پیوسته باشد. این دوگزاره، هردوحالتهای خاصی ازقضیهٔ بالا هستند.

روشی‌که درآنالیز برای ساختن توابع پیوسته بسیار معمول است، تشکیل دادن حاصل‌جمع، تفاضل، حاصل‌ضرب، یا خارج قسمت توابع پیوستهٔ حقیقی است. دراین مورد قضیهٔ استانده زیر برقرار است‌که اگر $f\ ,\ g: X\to R$ پیوسته باشندآنگاه $f+g$، $f-g$، و $f\cdot g$ پیوسته‌اند، و f/g پیوسته است اگر به‌ازای هر x،

$g(x) \neq 0$. در بخش ۲ـ۱۰ این قضیه را درنظرخواهیم گرفت.

برای ساختن توابع پیوسته روش شناخته شدهٔ دیگری در آنالیز هست، وآن حدگیری از دنبالهای نامتناهی از توابع است. در این مورد قضیهای هست بدین مضمون که اگردنبالهای نامتناهی‌از توابع حقیقی پیوسته ازیك متغیرحقیقی بهطوریکنواخت به‌تابع حدی f همگرا باشد، آنگاه این تابع حدی ضرورتاً پیوسته است. این قضیه به قضیهٔ حد یکنواخت موسوم است. مثلاً، برای اثبات پیوستگی‌توابع مثلثاتی، هنگامی که سینوس وکسینوس بهطور دقیق بهصورت سریهای نامتناهی تعریف می‌شوند، از این قضیه استفاده می‌کنیم. این قضیه درمورد نگاشتهایی از فضای توپولوژیك دلخواه X بتوی فضای متری Y تعمیم می‌یابد. دربخش ۲ـ۱۰ آن را ثابت خواهیم کرد.

تمرینها

۱. ثابت‌کنید که برای توابعی مانند $f: R \to R$، تعریف پیوستگی به وسیلهٔ ε - δ مستلزم تعریف‌آن برحسب مجموعه‌های باز است.

۲. فرض‌کنید $f: X \to Y$ پیوسته باشد. اگر x یك نقطهٔ حدی زیرمجموعهٔ A از X باشد، آیا الزاماً $f(x)$ هم یك نقطهٔ حدی $f(A)$ است؟

۳. فرض‌کنید X و X' نمایش مجموعه‌ای با دو توپولوژی مختلف، بترتیب، $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}'$ باشند، و $i: X' \to X$ تابع همانی باشد.

(الف) ثابت‌کنیدکه i پیوسته است اگروفقط اگر $\mathcal{T}'$ ظریفتراز $\mathcal{T}$ باشد.

(ب) ثابت‌کنیدکه i هومئومورفیسم است اگروفقط اگر $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

(پ) به‌ازای $n \in Z_+$، توپولوژی $\mathcal{T}_n$ را در R با افزودن مجموعهٔ تك عضوی $\{n\}$ به پایهٔ معمولی مجموعه‌های باز تعریف می‌کنیم. ثابت‌کنیدکه $(R, \mathcal{T}_1)$ و $(R_2, \mathcal{T}_2)$ هومئومورف‌اند، ولی $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

۴. به‌ازای $x_0 \in X$ و $y_0 \in Y$، ثابت‌کنیدکه نگاشتهای $f: X \to X \times Y$ و $g: Y \to X \times Y$ که باضابطه‌های

$$g(y) = x_0 \times y \quad \text{و} \quad f(x) = x \times y_0$$

تعریف شده‌اند نشاننده هستند.

۵. (الف) فرض‌کنید X و Y دومجموعهٔ مرتب باتوپولوژی ترتیبی باشند. ثابت‌کنید که اگر نگاشت $f: X \to Y$ دوسویی وحافظ ترتیب باشد، هومئومورفیسم است.

(ب) فرض‌کنید $n \in Z_+$، وبدانیم که به‌ازای هرعدد حقیقی $x \geqslant 0$، عدد حقیقی یکتای $b \geqslant 0$ وجود داردکه $b^n = x$. عدد b را به $\sqrt[n]{x}$ نمایش می‌دهیم. ثابت‌کنیدکه تابع $g: R_+ \to R_+$ باضابطهٔ $g(x) = \sqrt[n]{x}$ پیوسته است.

(پ) فرض کنید X زیرفضای $(-\infty, -۱) \cup [۰, \infty)$ از R باشد. تابع $f : X \to R$ را باضابطهٔ زیرتعریف می کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & \text{،} \ x<-۱ \ \text{به‌ازای} \\ x & \text{،} \ x\geqslant ۰ \ \text{به‌ازای} \end{cases}$$

ثابت‌کنید کــه f دوسویی، حافظ‌ترتیب، و پیوسته است. آیا f هومئومورفیسم است؟

۶. ثابت کنید که زیرفضای (a, b) از R با $(۰, ۱)$ هومئومورف است، و زیرفضای $[a, b]$ از R با $[۰, ۱]$.

۷. تابعی مانند $f : R \to R$ بیابید که فقط دریك نقطه پیوسته باشد.

۸. (الف) فرض‌کنید $f : R \to R$ «از راست پیوسته باشد»، یعنی به‌ازای‌هر $a \in R$،

$$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a).$$

ثابت کنید که f به‌عنوان تابعی از R_l به R پیوسته است.
(ب) کدام‌دسته‌ازتوابع $f : R \to R$ به‌عنوان نگاشتی از R به R_l پیوسته‌اند؟ وکدام دسته به‌عنوان توابعی از R_l به R_l؟

۹. فرض‌کنید Y مجموعه‌ای مرتب با توپولوژی ترتیبی باشد، و توابع f و g از X به Y پیوسته باشند.
(الف) ثابت کنید که مجموعهٔ $\{x \mid f(x) \leqslant g(x)\}$ در X بسته است.
(ب) فرض‌کنید $h : X \to Y$ باضابطهٔ

$$h(x)=\min\{f(x),\ g(x)\}$$

تعریف شده باشد. ثابت‌کنید کـــه h پیوسته است. [راهنمایی: از لم چسب استفاده کنید.]

۱۰. فــرض کنید $\{A_\alpha\}$ گـــردایه‌ای از زیرمجموعه‌هــای X بــاشد، $X=\bigcup_\alpha A_\alpha$، $f : X \to Y$، وبه‌ازای هر α، $f \mid A_\alpha$ پیوسته باشد.
(الف) ثابت‌کنید که اگرگردایهٔ $\{A_\alpha\}$ متناهی وهرمجموعهٔ A_α بسته باشدآنگاه f پیوسته است.
(ب) مثالی بیابیدکــه درآن گـــردایهٔ $\{A_\alpha\}$ شمارا وهر A_α بسته باشد، امــا f پیوسته نباشد.
(پ) خانوادهٔ اندیسدار $\{A_\alpha\}$ را **موضعاً متناهی** گـــویند اگـــر هرنقطهٔ x از X همسایگی‌ای داشته باشدکــه A_αها را تنها به‌ازای تعدادی متناهی از مقادیر α قطع

کند. ثابت کند که اگر خانوادهٔ $\{A_\alpha\}$ موضعاً متناهی‌وهر A_α بسته باشد، f پیوسته است.

۱۱. فرض کنید $f: A \to B$ و $g: C \to D$ توابعی پیوسته باشند. تابع $f \times g: A \times C \to B \times D$ را باضابطهٔ

$$(f \times g)(a \times c) = f(a) \times g(c)$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که $f \times g$ پیوسته است.

۱۲. فرض کنید $F: X \times Y \to Z$. تابع F را نسبت به‌هریك از متغیرها پیوسته خوانیم درصورتی که به‌ازای هر $y_\circ$ در Y، نگاشت $h: X \to Z$ باضابطهٔ $h(x) = F(x \times y_\circ)$ پیوسته باشد، وبه‌ازای هر $x_\circ$ در X، نگاشت $k: Y \to Z$ باضابطهٔ $k(y) = F(x_\circ \times y)$ نیز پیوسته باشد. ثابت کنید که اگر F پیوسته باشد آنگاه نسبت به هریك از متغیرها پیوسته است.

۱۳. فرض کنید $F: R \times R \to R$ باضابطهٔ

$$F(x \times y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^{2}+y^{2}} & \text{به‌ازای } x \times y \neq \circ \times \circ ، \\ \circ & \text{به‌ازای } x \times y = \circ \times \circ ، \end{cases}$$

تعریف شده باشد.

(الف) ثابت کنید که F نسبت به‌هریك ازمتغیرها پیوسته است.

(ب) تابع $g: R \to R$ را که باضابطهٔ $g(x) = F(x \times x)$ تعریف شده است محاسبه کنید.

(پ) ثابت کنید که F پیوسته نیست.

۱۴. فرض کنید $A \subset X$ و تابع $f: A \to Y$ پیوسته و Y هاوسدورف باشد. ثابت کنید که اگر f را بتوان به تابعی پیوسته مانند $g: \bar{A} \to Y$ گسترش داد آنگاه g به‌طوریکتا به‌وسیلهٔ f مشخص می‌شود.

۱۵. یادآوری می کنیم که نگاشتی مانند $f: X \to Y$ را درصورتی نگاشت باز خوانیم که به‌ازای هرمجموعهٔ باز U که در X باز است، مجموعهٔ $f(U)$ در Y باز باشد. کدامیك ازاحکام(الف)–(ج) قضیهٔ ۲.۷ درصورتی که درهمه‌جا کلمهٔ «باز» را به‌جای «پیوسته» قراردهیم برقرارمی‌ماند؟

۲-۸ توپولوژی حاصل‌ضربی

دربقیهٔ این فصل به‌روشهای گوناگون ساختن توپولوژی در مجموعه‌ها باز می گردیم.

پیش‌ازاین ، توپولوژی‌ای درحاصل‌ضرب دو فضای توپولوژیك $X \times Y$ تعریف کردیم. دراین بخش ، می‌خواهیم این تعریف را به‌حاصل‌ضربهای دکارتی دلخواه تعمیم دهیم. برای این منظور دو طریق موجود است ؛ آن را که بعداً نقش مهمتری خواهد داشت توپولوژی حاصل‌ضربی می‌نامیم.

یك طریقهٔ ساختن یك توپولوژی دریك فضای حاصل‌ضربی روش زیر است ؛ این طریقهٔ تعمیم مستقیم همان‌طریقه‌ای‌است که‌برای‌تعریف یك‌پایه برای‌توپولوژی حاصل‌ضربی در $X \times Y$ به‌کاربردیم.

تعریف. فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ خانوادهٔ اندیسداری‌از فضاهای توپولوژیك باشد. گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های به‌صورت

$$\Pi_{\alpha \in J} U_\alpha$$

راکه به‌ازای هر α ، مجموعهٔ U_α در X_α بازاست به‌عنوان یك پایه برای توپولوژی‌ای درفضای حاصل‌ضربی

$$\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$$

اختیار می‌کنیم. توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ این پایه را **توپولوژی جعبه‌ای** می‌نامیم.

این گردایه درشرط اول پایه صدق می‌کند ، زیرا ΠX_α خود یك عضوپایه است. درشرط دوم پایه‌هم صدق می‌کند ، زیرا مقطع هردوعضوپایه عضوی دیگرازپایه است :

$$(\Pi_{\alpha \in J} U_\alpha) \cap (\Pi_{\alpha \in J} V_\alpha) = \Pi_{\alpha \in J} (U_\alpha \cap V_\alpha).$$

چنانکه خواهیم دید ، این توپولوژی برای فضای ΠX_α سودمندترین توپولوژی نیست.

طریقه‌ای دیگربرای تعمیم تعریف‌سابق ، تعمیم تعریف برحسب زیرپایه است. فرض کنیم

$$\pi_\beta : \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$$

تابعی باشد که به‌هرعضوفضای حاصل‌ضربی ، مختص βاُم آن را نظیر می‌کند ،

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta;$$

این تابع را **نگاشت تصویری** نظیر اندیس β می‌خوانند.

تعریف. فرض کنیم $\mathcal{S}_\beta$ نمایش گردایهٔ

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \mid \text{بازاست } X_\beta \text{ در } U_\beta\}$$

و $\mathcal{S}$ نمایش اجتماع این گردایه‌ها باشد ،

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta$$

در این صورت، توپولوژی تولید شده به‌وسیلهٔ زیر پایهٔ $\mathcal{S}$ را **توپولوژی حاصل‌ضربی** می‌خوانیم. دراین توپولوژی، $\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ را **فضای حاصل‌ضربی** می‌نامیم.

چه تفاوتی بین توپولوژی حاصل‌ضربی و توپولوژی جعبه‌ای موجود است؟ برای جواب گفتن به‌این سؤال آسانتر آن‌است که به پایهٔ $\mathcal{B}$ که $\mathcal{S}$ تولید می‌کند نظر افکنیم. گردایهٔ $\mathcal{B}$ عبارت است ازهمهٔ مقاطع متناهی اعضای $\mathcal{S}$. ملاحظه می‌کنیم که با مقطع گیری از اعضای تنها یك مجموعهٔ $\mathcal{S}_\beta$ چیزجدیدی عاید نمی‌شود، زیرا

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap \pi_\beta^{-1}(V_\beta) = \pi_\beta^{-1}(U_\beta \cap V_\beta);$$

مقطع دوعضو $\mathcal{S}_\beta$، یا مقطع تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{S}_\beta$، عضوی است از $\mathcal{S}_\beta$. مجموعه‌های تازه وقتی به‌دست می‌آیند که اعضای مجموعه‌های مختلف $\mathcal{S}_\beta$ را باهم‌تقاطع دهیم. بدین گونه، عضو نوعی پایهٔ $\mathcal{B}$ را می‌توان چنین توصیف کرد: فرض کنیم $\beta_1, \ldots, \beta_n$ تعدادی متناهی از اندیسهای متمایز مجموعهٔ اندیس J، و به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$، U_{β_i} مجموعهٔ بازی در X_{β_i} باشد. دراین صورت

$$B = \pi_{\beta_1}^{-1}(U_{\beta_1}) \cap \pi_{\beta_2}^{-1}(U_{\beta_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}(U_{\beta_n}),$$

یك عضو $\mathcal{B}$ است.

برای توصیف این عضوپایه روش دیگری موجود است که بالاخص مفید است. باید توجه داشت که نقطهٔ $\mathbf{x} = (x_\alpha)$ به B تعلق دارد اگروفقط اگرمختص β_1م آن در U_{β_1} باشد ومختص β_2م آن در U_{β_2} و به‌همین ترتیب. اگر α یکی ازاندیسهای $\beta_1, \ldots, \beta_n$ نباشد، برای مختص αم $\mathbf{x}$ هیچ محدودیتی نیست. درنتیجه، می‌توان B را به صورت حاصل‌ضرب

$$B = \Pi_{\alpha \in J} U_\alpha,$$

نوشت که درآن به‌ازای هر α که متمایزاز $\beta_1, \ldots, \beta_n$ باشد، U_α تمام فضای X_α است.

آنچه راکه گذشت می‌توان درقضیهٔ ذیل خلاصه کرد:

۱۰۸. قضیه (مقایسهٔ توپولوژیهای جعبه‌ای و حاصل‌ضربی) یك پایهٔ توپولوژی جعبه‌ای در $\Pi \mathrm{X}_\alpha$ همهٔ مجموعه‌های به‌شکل $\Pi \mathrm{U}_\alpha$ است که درآن به‌ازای هر α، مجموعهٔ U_α در X_α باز است. توپولوژی حاصل‌ضربی در $\Pi \mathrm{X}_\alpha$ همهٔ مجموعه‌های به‌شکل $\Pi \mathrm{U}_\alpha$ است، که درآن به‌ازای هر α، مجموعهٔ U_α در X_α باز است و به استثنای عده‌ای‌متناهی از α ها، U_α مساوی X_α است.

دراینجا دو مطلب بی‌هیچ‌واسطه‌ای روشن است. اولاً برای حاصل‌ضربهای‌متناهی مانند $\Pi^n_{\alpha=1} X_\alpha$ این دو توپولوژی دقیقاً یکی هستند. ثانیاً، درحالت کلی، توپولوژی

جعبه‌ای ظریفتراز توپولوژی حاصل‌ضربی است.

آنچه که به‌این اندازه روشن نیست، این است که چرا ما توپولوژی حاصل‌ضربی را بر توپولوژی جعبه‌ای ترجیح می‌دهیم. جواب این‌سؤال درطی تحقیقمان درتوپولوژی آشکارخواهد شد. خواهیم دیدکه اگرتوپولوژی حاصل‌ضربی را به‌کارببریم، تعدادی‌از قضایای مهم حاصل‌ضربهای متناهی درمورد حاصل‌ضرب دلخواه نیز برقرار می‌مانند، اما اگر توپولوژی جعبه‌ای‌را به‌کار ببریم‌چنین‌نخواهد بود. نتیجه آنکه‌توپولوژی‌حاصل‌ضربی در ریاضیات بسیار مهم است. حال آنکه، توپولوژی جعبه‌ای اهمیت چندانی ندارد؛ و اصولاً ماآن‌را برای ساختن مثالهای نقض به‌کارخواهیم برد. بنابراین:

> در مورد هرحاصل‌ضرب ΠX_α، فرض این‌است‌که‌ازتوپولوژی حاصل‌ضربی برخوردار است مگراینکه خلاف آن تصریح شود.

بعضی قضایایی کـه درمورد $X\times Y$ ثابت شد، برای حاصل‌ضرب دلخواه ΠX_α نیز، بدون اینکه انتخاب توپولوژی تأثیری درآن داشته باشد، برقرار می‌مانند:

۲۰۸. **قضیه** فرض کنیم درهرفضای X_α توپولوژی‌ای به‌وسیلهٔ پایه‌ای مانند $\mathcal{B}_\alpha$ داده شده باشد. گردایه همهٔ مجموعه‌هایی به‌صورت

$$\Pi_{\alpha\in J}\, B_\alpha$$

که درآن به‌ازای هرα، $B_\alpha\in\mathcal{B}_\alpha$ تشکیل‌پایه‌ای برای‌توپولوژی جعبه‌ای‌در $\Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$ می‌دهد.

گردایهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که به صورت فوق باشند و درآنها به‌ازای تعدادی متناهی ازاندیسهای α، $B_\alpha\in\mathcal{B}_\alpha$ و بـه‌ازای بقیهٔ اندیسها $B_\alpha=X_\alpha$، تشکیل پایه‌ای بـرای توپولوژی حاصل‌ضربی در $\Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$ می‌دهد.

۳۰۸. **قضیه** فرض کنیم بـه‌ازای هر $\alpha\in J$، A_α زیرفضایی از X_α بـاشد. در این صورت اگر حاصل‌ضربهای ΠA_α هردو دارای توپولوژی جعبه‌ای و یا هردو دارای توپولوژی حاصل‌ضربی باشند آنگاه ΠA_α زیر فضایی از ΠX_α است.

۴۰۸. **قضیه** اگـر هرفضای X_α فضایی هاوسدورف باشد آنگـاه ΠX_α، چه بـا توپولوژی جعبه‌ای و چه با توپولوژی حاصل‌ضربی، فضایی هاوسدورف است.

اثبات این قضایا نظیر برهانهایی است‌که قبلاً درمورد فضای $X\times Y$ ارائه شد، بنابراین بیان جزئیات‌آنها را برعهدهٔ خواننده می گذاریم.

تا اینجا هنوز هیچ‌دلیلی برای ترجیح توپولوژی‌حاصل‌ضربی برتوپولوژی‌جعبه‌ای اقامه نشده است. اولین تفاوت زمانی پدید می‌آیدکـه می‌خواهیم قضایای قبلی درمورد پیوستگی توابع درفضاهای حاصل‌ضربی را تعمیم دهیم. اینك قضیه‌ای می‌آوریم‌که اگر ΠX_α توپولوژی جعبه‌ای داشته باشد برقرار نیست.

۵۰۸ قضیه فرض کنیم $f: A \to \Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$ تابعی باشد باضابطهٔ

$$f(a)=(f_\alpha(a))_{\alpha\in J},$$

که درآن به‌ازای هر α، $f_\alpha: A \to X_\alpha$، و ΠX_α دارای توپولوژی حاصل‌ضربی باشد. دراین صورت تابع f پیوسته است اگروفقط‌اگر هر f_α پیوسته باشد.

برهان. فرض کنیم π_β تصویر این حاصل‌ضرب بروی عامل βام آن باشد. تابع π_β پیوسته است، زیرا اگر U_β در X_β باز باشد، مجموعهٔ $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ یك عضوزیر-پـایهٔ توپولوژی حاصل‌ضربی در ΠX_α است. حال فرض‌کنیم تابع $f: A \to \Pi X_\alpha$ پیوسته بـاشد. تابع f_β برابراست با تابع مرکب $\pi_\beta \circ f$، که چون ترکیب دوتابع پیوسته می‌باشد، پس پیوسته است.

بعکس، فرض‌کنیم‌هرتابع مختصی f_α پیوسته باشد. برای‌اثبات اینکه f پیوسته است، کافی است ثابت‌کنیم کـه تصویر عکس هرعضو زیر پایه تحت f در A بازاست؛ هنگامی که توابع پیوسته را تعریف می کردیم، این موضوع را خاطرنشان ساختیم. یك عضو نوعی زیرپایهٔ توپولوژی حاصل‌ضربی در ΠX_α مجموعه‌ای به‌صورت $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ است، که‌درآن β یکی ازاندیسها و U_β در X_β بازاست. حال چون $f_\beta=\pi_\beta \circ f$، درنتیجه

$$f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta))=f_\beta^{-1}(U_\beta).$$

و بنابر پیوستگی f_β، این مجموعه در A بازاست، واین همان است که می‌خواستیم. □

درصورت به‌کاربردن توپولوژی‌جعبه‌ای چرا این قضیه برقرارنمی‌ماند؟ شاید قانع کننده‌ترین کاری که می‌توان انجام داد بررسی یك مثال است. مثال ۲ زیرین را ملاحظه کنید.

مثال ۱. فضای n بعدی اقلیدسی R^n را درنظربگیرید. همهٔ بازه‌های باز R تشکیل پـایه‌ای برای R می‌دهند. بنابراین، یك پـایهٔ توپولوژی R^n از همهٔ حـاصل‌ضربهایی به‌صورت

$$(a_1, b_1)\times(a_2, b_2)\times\cdots\times(a_n, b_n).$$

تشکیل می‌شود. چون R^n حاصل‌ضربی متناهی است، توپولوژیهای حاصل‌ضربی وجعبه‌ای آن برهم منطبق‌اند. هرگاه R^n مدنظر باشد، فرض براین است که بااین توپولوژی داده شده است، مگراینکه خلافش تصریح شود.

مثال ۲. اینك فضای R^ω راکه عبارت است از حاصل‌ضرب نامتناهی شمارای R در خودش،درنظر می گیریم.به‌خاطر داریم که:

$$R^\omega=\Pi_{n\in Z_+} X_n,$$

که درآن به‌ازای هر n ، $X_n = R$. اکنون تابع $f : R \to R^\omega$ را باضابطهٔ

$$f(t) = (t, t, t, \dots)$$

تعریف می‌کنیم که تابع مختصی nم آن تابع $f_n(t) = t$ است. هر یك از توابع مختصی $f_n : R \to R$ پیوسته است ؛ بنابراین ، درصورتی‌که R^ω از توپولوژی حاصل‌ضربی برخوردار باشد ، تابع f پیوسته است. ولی‌اگر R^ω از توپولوژی‌جعبه‌ای برخوردارباشد، f پیوسته نیست. مثلاً ، عضو پایهٔ

$$B = (-۱, ۱) \times \left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right) \times \left(-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}\right) \times \cdots$$

از توپولوژی جعبه‌ای را درنظر می‌گیریم. مدعی هستیم که $f^{-۱}(B)$ در R باز نیست. زیرا اگر چنین باشد ، $f^{-۱}(B)$ باید حاوی بازه‌ای به مرکز ۰ مانند $(-\delta, \delta)$ باشد. به‌عبارت دیگر ، باید داشته باشیم $f((-\delta, \delta)) \subset B$. حال اگر π_n را بردوطرف رابطهٔ اخیر اعمال‌کنیم نتیجه می‌شودکه به‌ازای هر n ،

$$f_n((-\delta, \delta)) = (-\delta, \delta) \subset \left(-\frac{۱}{n}, \frac{۱}{n}\right)$$

که این تناقض است.

تمرینها

۱. قضیهٔ ۲.۸ را ثابت‌کنید.

۲. قضیهٔ ۳.۸ را ثابت‌کنید.

۳. قضیهٔ ۴.۸ را ثابت‌کنید.

۴. ثابت‌کنیدکه $X_۱ \times \dots \times X_n$ با $(X_۱ \times \dots \times X_{n-۱}) \times X_n$ هومئومورف‌است.

۵. فرض‌کنیم $\{X_\alpha\}$ خانواده‌ای از فضاها باشد ، و به‌ازای هر α ، $A_\alpha \subset X_\alpha$.
(الف) ثابت‌کنیدکه‌اگر A_α در X_α بسته باشدآنگاه ΠA_α در ΠX_α بسته است.
(ب) ثابت‌کنیدکه

$$\overline{\Pi A_\alpha} = \Pi \bar{A}^\alpha$$

(پ) اگر توپولوژی جعبه‌ای جایگزین توپولوژی حاصل‌ضربی شود ، کدامیك ازگزاره‌های (الف) و (ب) برقرار می‌ماند؟

۶. دنبالهٔ (x_n) ازنقاط X را **همگرا** به‌نقطهٔ x از X خوانیم درصورتی‌که به‌ازای هرهمسایگی x مانند U ، Nی وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $n \geqslant N$ ،

$x_n \in U$. فرض کنیم $(\mathbf{x}_n)$ دنباله‌ای از نقاط فضای حاصلضربی $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ باشد. ثابت کنید که دنبالهٔ $(\mathbf{x}_n)$ همگرا به $\mathbf{x}$ است اگروفقط اگر به‌ازای هر α ، دنبالهٔ $\pi_\alpha(\mathbf{x}_n)$ همگرا به $\pi_\alpha(\mathbf{x})$ باشد. اگر توپولوژی جعبه‌ای جایگزین توپولوژی حاصلضربی شود آیا این حکم برقرار می‌ماند؟

۷. فرض کنیم R^∞ زیرمجموعه‌ای از R^ω باشد که متشکل است از همهٔ دنباله‌هایی که «سرانجام صفرند». یعنی، همهٔ نقاط $(x_1, x_2, \ldots)$ که درآن تنها به‌ازای تعدادی متناهی از مقادیر i ، $x_i \neq 0$. بستار R^∞ در R^ω نسبت به‌هریك از توپولوژیهای جعبه‌ای وحاصلضربی چیست؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۸. ثابت کنید که توپولوژی‌حاصلضربی درشترین (کوچکترین) توپولوژی‌ای است که نسبت به‌آن هرنگاشت تصویری π_β پیوسته است.

۹. فرض کنیم A مجموعه‌ای دلخواه باشد، و $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ خانواده‌ای اندیسدار از فضاها، و $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ خانواده‌ای اندیسدار از توابع $f_\alpha : A \to X_\alpha$ باشد.

(الف) ثابت کنید که درشترین توپولوژی یکتایی مانند $\mathcal{T}$ در A هست که نسبت به‌آن هریك از توابع f_α پیوسته است.

(ب) فرض کنیم

$$\mathcal{S}_\beta = \{f_\beta^{-1}(U_\beta) \mid \text{باز است } X_\beta \text{ در } U_\beta\}$$

و $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_\beta$. ثابت کنید که $\mathcal{S}$ یك زیر پایهٔ $\mathcal{T}$ است.

(پ) ثابت کنید که نگاشتی مانند $g : Y \to A$ پیوسته‌است اگروفقط اگرهرنگاشت $f_\alpha \circ g$ پیوسته باشد.

(ت) فرض کنید $f : A \to \prod X_\alpha$ باضابطهٔ

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J}$$

تعریف شده باشد، Z نمایش زیر فضای $f(A)$ از فضای‌حاصلضربی $\prod X_\alpha$ باشد. ثابت کنید که تصویر هریك ازاعضای $\mathcal{T}$ تحت f مجموعه‌ای باز در Z است.

۲-۹ توپولوژی متری

یکی از مهمترین و معمولترین طریقه‌های ساختن یك توپولوژی در یك مجموعه این است که توپولوژی را برحسب متریکی درآن مجموعه تعریف کنیم. مثلاً توپولوژیهایی که بدین‌طریق‌ارائه می‌شوند در قلب آنالیزنوین جای دارند. دراین بخش، توپولوژی‌متری را تعریف می‌کنیم و مثالهای متعددی می‌آوریم. در بخش بعد، پاره‌ای از خواص توپولوژیهای متری را بررسی می‌کنیم.

تعریف. یك متریك در مجموعهٔ X ، تابعی است مانند

$$d: X \times X \longrightarrow R$$

که دارای خواص زیراست:

(۱) به‌ازای هر x و y از X ، $d(x, y) \geqslant 0$ ؛ و تساوی برقراراست اگر و فقط اگر $x=y$.

(۲) به‌ازای هر x و y از X ، $d(x, y)=d(y, x)$.

(۳) (نامساوی مثلثی) به‌ازای هر x ، y ، و z از X ،

$$d(x, y)+d(y, z) \geqslant d(x, z).$$

فرض کنیم d متریکی در X باشد. عدد $d(x, y)$ را معمولاً **فاصلهٔ** بین x و y در متریك d می گویند. به‌ازای $\varepsilon > 0$ مفروض ، مجموعهٔ

$$B_d(x, \varepsilon)=\{y \mid d(x, y)<\varepsilon\}$$

را درنظر می گیریم ، یعنی همهٔ نقاطی مانند y که فاصلهٔ آنها از x کمتراز ε است. این مجموعه را ε **-گوی به‌مرکز** x می‌نامیم. گاهی ، اگر بیم ابهامی نرود ، متریك d را از علامت بالا حذف می کنیم و گوی فوق را مختصراً به $B(x, \varepsilon)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف. اگر d متریکی در مجموعهٔ X باشد آنگاه گردایهٔ همهٔ ε -گویهای $B_d(x, \varepsilon)$ ، به‌ازای $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ ، پایه‌ای برای یك توپولوژی در X است که با **توپولوژی متری** القا شده به‌وسیلهٔ d موسوم است.

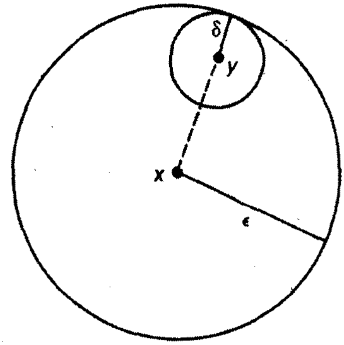
اولین‌شرط پایه بوضوح برقراراست،زیرا به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، $x \in B(x,\varepsilon)$. قبل‌از بررسی شرط دوم پایه ، ثابت می کنیم که اگر y نقطه‌ای ازعضو پایهٔ $B(x, \varepsilon)$ باشد آنگاه عضو پایه‌ای مانند $B(y, \delta)$ به‌مرکز y هست که زیر مجموعهٔ $B(x, \varepsilon)$ است. برای این منظور δ را مساوی عدد مثبت $\varepsilon-d(x, y)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$ ، زیرا اگر $z \in B(y, \delta)$ آنگاه $d(y, z)<\varepsilon-d(x, y)$، ودرنتیجه

$$d(x, z) \leqslant d(x, y)+d(y, z)<\varepsilon.$$

(شکل ۱۸.)

اکنون برای آزمودن شرط دوم پایه ، فرض کنیم B_1 و B_2 دوعضو پایه باشند و $y \in B_1 \cap B_2$. بنابرآنچه گذشت ، می‌توان اعداد مثبت δ_1 و δ_2 را چنان برگزید که $B(y, \delta_1) \subset B_1$ و $B(y, \delta_2) \subset B_2$. حال اگر δ را مقدار کوچکتر δ_1 و δ_2 قرار دهیم ، نتیجه می‌شود $B(y, \delta) \subset B_1 \cap B_2$.

با استفاده ازآنچه که ثابت شد ، تعریف توپولوژی متری را می‌توان به‌صورت‌زیر بازگو کرد:



شکل ۱۸

مجموعهٔ U درتوپولوژی متری القا شده به‌وسیلهٔ d بازاست اگر وفقط اگر به‌ازای هر $y \in U$ ، عدد مثبتی مانند δ یافت شود که $B_d(y, \delta) \subset U$.

بدیهی است که این شرط مستلزم آن است که U باز باشد. بعکس، اگر U باز باشد، حاوی عضو پایهٔ $B = B_d(x, \varepsilon)$ است که شامل y است، و B نیز به‌نوبهٔ خود حاوی عضو پایهٔ دیگری مانند $B_d(y, \delta)$ به‌مرکز y است.

مثال ۱. به‌ازای مجموعهٔ مفروض X ، چنین تعریف می‌کنیم:

به‌ازای $x \neq y$ ، $d(x, y) = 1$ ،

به‌ازای $x = y$ ، $d(x, y) = 0$.

به‌آسانی معلوم می‌شود که d یك متریك است. توپولوژی‌ای که d در X القا می‌کند، توپولوژی گسسته است، مثلاً، عضو پایهٔ $B(x, 1)$ منحصراً شامل x است.

مثال ۲. متریك استاندە دراعداد حقیقی به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$d(x, y) = |x - y|.$$

بررسی متریك بودن d آسان است. توپولوژی‌ای که این متریك در R القا می‌کند همان توپولوژی ترتیبی است: هرعضو پایهٔ توپولوژی ترتیبی مانند (a, b) یك عضو پایهٔ توپولوژی متری است، زیرا،

$$(a, b) = B(x, \varepsilon).$$

که درآن $x = (a+b)/2$ و $\varepsilon = (b-a)/2$. بعکس، ε-گوی $B(x, \varepsilon)$ مساوی بازهٔ باز $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ است.

تعریف. اگر X یك فضای توپولوژیك باشد، X رادرصورتی **متری‌پذیر** گوییم

که متریکی مانند d در X وجود داشته باشد که توپولوژی X را القا کند. یك **فضای متری** عبارت است از فضایی متری پذیر مانند X همراه بامتریك مشخص d که توپولوژی X را تولید می‌کند.

بسیاری از فضاهایی که در ریاضیات اهمیت دارند، متری پذیرند، ولی بعضی از آنها چنین نیستند. خاصیت متریك‌پذیری خاصیت بسیارمطلوبی است، زیرا وجودمتریك در یك فضا وسیله‌ای پرارزش برای اثبات قضایایی دربارهٔ آن فضا است.

بدین جهت، یافتن شرایطی در یك فضای توپولوژیك که متری پذیر بودن آن‌را تضمین کند، مسئله‌ای است که اهمیت بنیادی دارد. یکی از هدفهای ما در فصل ۴ یافتن چنین شرایطی است؛ درآنجا، این شرایط در قضیهٔ مشهوری موسوم به قضیهٔ متریسازی اوریسون[1] بیان شده‌اند.

درفصل ۶ قضایای متریسازی دیگری خواهدآمد. در بخش حاضر تنها به اثبات متری پذیری فضاهای R^n و R^ω اکتفا می‌کنیم.

اگرچه مسئلهٔ متری پذیری مسئلهٔ مهمی‌درتوپولوژی است، ولی تحقیق درفضاهای متری، به‌نوبهٔ خود بیشتر به‌آنالیز تعلق دارد تا به توپولوژی. متری پذیری یك فضا تنها به توپولوژی مورد بحث آن بستگی دارد، ولی خواصی که متریك معینی در X دارد، درحالت کلی چنین نیستند. بنابراین، این گونه خواص، خواص توپولوژیك نیستند. مثلاً، درفضاهای متری می‌توان تعریف زیر را ارائه کرد:

تعریف. فرض کنیم X فضایی متری با متریك d باشد. زیر مجموعهٔ A از X را درصورتی **کراندار** خوانیم که عددی مانند M وجود داشته باشد، به‌طوری که به‌ازای هرزوج a_1 و a_2 ازنقاط A،

$$d(a_1, a_2) \leqslant M.$$

اگر A کراندار باشد آنگاه **قطر** A عبارت است از عدد

$$\operatorname{diam} A = \operatorname{lub}\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

کراندار بودن یك مجموعه خاصیتی توپولوژیك نیست، زیرا به‌متریك معینی که برای X به‌کار رفته است بستگی دارد. مثلاً، اگر X فضایی متری با متریك d باشد آنگاه متریکی مانند $\bar{d}$ وجود داردکه همان توپولوژی‌رادر X القا می‌کند و نسبت‌به‌آن هر زیر مجموعهٔ X کراندار است. این متریك به‌طریق زیرتعریف می‌شود:

۹.۱۰ قضیه فرض‌کنیم X فضایی متری‌بامتریك d باشد. تابع $\bar{d}: X \times X \to R$ را باضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

---
1. Urysohn

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), ۱\}$$

دراین صورت، $\bar{d}$ متریکی است که همان توپولوژی را در X القا می‌کند.

متریك $\bar{d}$ را **متریك کراندار استاندهٔ** وابسته به d می‌خوانند.

برهان. بررسی دوشرط اول متریك ساده است. برقراری نامساوی مثلثی‌را بررسی می‌کنیم:

$$\bar{d}(x, z) \leqslant \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z).$$

نخست ملاحظه می‌کنیم که اگر $d(x, y) \geqslant ۱$ یا $d(y, z) \geqslant ۱$ آنگاه طرف راست نامساوی بالا حداقل ۱ است، چون سمت چپ این نامساوی (بنابر تعریف) حداکثر ۱ است، پس نامساوی برقراراست. فقط بررسی‌حالت $d(x, y) < ۱$ و $d(y, z) < ۱$ باقی می‌ماند. دراین حالت داریم

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) = \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z).$$

چون، بنابر تعریف، $\bar{d}(x, z) \leqslant d(x, z)$، نامساوی مثلثی برای $\bar{d}$ برقرار است.
این‌امر که d و $\bar{d}$ یك توپولوژی را القا می‌کنند؛ از روابط زیر نتیجه می‌شود

$$B_d(x, \varepsilon) \subset B_{\bar{d}}(x, \varepsilon),$$

$$B_{\bar{d}}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon),$$

که درآن $\delta = \min\{\varepsilon, ۱\}$. فقط باقی می‌ماندکه لم زیررا به‌کارببریم. □

۲.۹ لم فرض کنیم d و d' دو متریك در مجموعهٔ X، و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}'$، بترتیب، توپولوژیهای القایی آنهاباشند. دراین صورت، $\mathcal{T}'$ ظریفتر از $\mathcal{T}$ است اگروفقط اگر به‌ازای هر x از X و هر $\varepsilon > ۰$، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشدکه

$$B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon).$$

برهان. فرض کنیم $\mathcal{T}'$ از $\mathcal{T}$ ظریفتر باشد. بنابرلم ۲.۲ به‌ازای عضوپایهٔ دلخواهی مانند $B_d(x, \varepsilon)$ برای توپولوژی $\mathcal{T}$، عضوپایه‌ای مانند B' برای توپولوژی $\mathcal{T}'$ هست که $x \in B' \subset B_d(x, \varepsilon)$. اینك می‌توان گویی مانند $B_{d'}(x, \delta)$ به‌مرکز x چنان‌یافت که زیرمجموعهٔ B' باشد.

بعکس، فرض‌کنیم شرط ε-δی مذکور برقرار باشد. به‌ازای عضو پایهٔ دلخواهی مانند B برای توپولوژی $\mathcal{T}$ که‌شامل x باشد، می‌توان گویی به‌مرکز x مانند $B_d(x, \varepsilon)$ در داخل B یافت. بنابر شرط مذکور، δیی هست که $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$. حال بااستفاده ازلم ۲.۲ نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{T}'$ از $\mathcal{T}$ ظریفتراست. □

اکنون ثابت می‌کنیم که R^n و R^ω متریك‌پذیرند.

تعریف. فرض‌کنیم $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ یك‌نقطهٔ R^n باشد. **نرم** $\mathbf{x}$ را باتساوی زیرتعریف می‌کنیم:

$$\|\mathbf{x}\|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$$

و **متریك اقلیدسی** d را در R^n باضابطهٔ

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=[(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{1/2},$$

و **متریك مربعی** ρ را باضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\max\{|x_1-y_1|, \ldots, |x_n-y_n|\}.$$

اثبات متریـك بودن d کمی مفصل است، شاید قبلاً آن را دیده بـاشید. درغیر این صورت، می‌توانید بااستفاده از طرح برهان‌آن، که در تمرینها آمده است، اثبات را تمام‌کنید. به‌هرحال متریك اقلیدسی در R^n را بندرت به‌کارخواهیم برد.

اثبات متریك بودن ρ آسانتراست. فقط نامساوی مثلثی است‌که بدیهی نیست. از نامساوی مثلثی درمورد R، نتیجه می‌شودکه به‌ازای هرعدد صحیح مثبت i،

$$|x_i-z_i| \leqslant |x_i-y_i|+|y_i-z_i|.$$

حال، بنابرتعریف ρ،

$$|x_i-z_i| \leqslant \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})+\rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

وازآنجا

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z})=\max\{|x_i-z_i|\} \leqslant \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})+\rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

واین همان است‌که می‌خواستیم.

درخط حقیقی $R=R^1$، متریکهای d و ρ با متریك متعارف درR یکی می‌شوند. درصفحهٔ R^2 اعضای پایهٔ تحت d را می‌توان بـه‌صورت نواحی دایره‌ای تصورکـرد و اعضای پایهٔ تحت ρ را به‌صورت نواحی مربعی.

هرکدام ازاین متریکها توپولوژی معمولی R^n را القا می‌کنند:

۳.۹. قضیه توپولوژیهای R^n که توسط متریك اقلیدسی d و متریك مربعی ρ القا می‌شوند، با توپولوژی حاصل‌ضربی در R^n یکی هستند.

برهان. فرض‌کنیم $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ و $\mathbf{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ دونقطه از R^n باشند، بسهولت، ازجبرمقدماتی، معلوم می‌شود که:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \sqrt{n}\,\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

نامساوی اول ثابت می‌کند که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ از R^n وهر ε،

$$B_d(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset B_\rho(\mathbf{x}, \varepsilon).$$

زیرا اگر $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$، آنگاه $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon$. همچنین، نامساوی‌دوم ثابت می‌کند که به‌ازای هر $\mathbf{x}$ وهر ε،

$$B_\rho(\mathbf{x}, \varepsilon/\sqrt{n}) \subset B_d(\mathbf{x}, \varepsilon).$$

ازاینجا، بنابرلم قبل، نتیجه می‌گیریم که دو توپولوژی متری مورد نظر یکی هستند.

حال ثابت می‌کنیم کـه توپولوژی حاصل‌ضربی و توپولوژی القاشده به‌وسیلهٔ ρ یکی هستند. نخست فرض‌کنیم

$$B = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

یك عضوپایهٔ توپولوژی‌حاصل‌ضربی و $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ عضوی از B باشد. به‌ازای هر i، ε_iیی هست که

$$(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i) \subset (a_i, b_i);$$

اکنون‌قرار می‌دهیم $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. بسهولت می‌توان‌دید که $B_\rho(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset B$. درنتیجه ρ- توپولوژی از توپولوژی حاصل‌ضربی ظریفتراست.

بعکس، فرض‌کنیم $B_\rho(\mathbf{x}, \varepsilon)$ عضوپایهٔ ρ- توپولوژی‌باشد. می‌خواهیم بـه‌ازای هرعضو $\mathbf{y}$ مانند $B_\rho(\mathbf{x}, \varepsilon)$ عضوپایه‌ای مـانند B برای توپولوژی حـاصل‌ضربی پیدا کنیم به‌طوری که

$$\mathbf{y} \in B \subset B_\rho(\mathbf{x}, \varepsilon).$$

اما این امربدیهی است، زیرا

$$B_\rho(\mathbf{x}, \varepsilon) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$$

خود یك عضوپایهٔ توپولوژی حاصل‌ضربی است. □

قضیهٔ پیش قضیه‌ای‌برای متری کردن R^n است. اینك می‌خواهیم آن‌را درمورد R^ω تعمیم دهیم.

به‌عنوان اولین قدم برای یافتن متریکی در R^ω، طبیعی است‌که سعی کنیم متریك اقلیدسی یا متریك مربعی را با تعاریف زیرتعمیم دهیم:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2]^{1/2}$$

و

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{lub}\{|x_i - y_i|\}.$$

اما این دستورها در R^ω معنی ندارند، زیرا ضرورتی نداردکه این سری همگرا باشد، و مجموعهٔ فوق ممکن است کراندارنباشد.

ولی، درمورد متریك ρ می‌توانیم بدین طریق ازاین مشکل اجتناب کنیم که ابتدا متریك $|x-y|$ در R را با $\bar{d}$ ، متریك کراندار وابسته به‌آن ، تعویض کنیم. این اندیشه راه را برای برداشتن دومین قدم برای تعریف متریکی در R^ω باز می کند.

متریك کراندار استانده R یعنی $\bar{d}(a,b)=\min\{|a-b|, 1\}$ را اختیار می کنیم، و به‌ازای دو نقطهٔ مفروض $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots)$ و $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots)$ از R^ω چنین تعریف می کنیم :

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\operatorname{lub}\{\bar{d}(x_i, y_i)\}.$$

بررسی متریك بودن $\bar{\rho}$ در R^ω آسان است. اما متأسفانه ، چنانکه خواهیم دید ، این متریك توپولوژی حاصل‌ضربی را القا نمی‌کند. بنابراین ، برای اثبات متریك پذیری R^ω فایده‌ای ندارد. باوجود این، این متریك به‌نوبهٔ‌خود حائزاهمیت بسیاراست وبارها دراین کتاب (و بخشهای دیگرریاضیات) به‌کار می‌آید.

تاجایی‌که به‌این متری مربوط می‌شود ، R^ω خاصیت ویژه‌ای ندارد ، می‌توان به‌ازای مجموعهٔ دلخواه J ، آن‌را به‌طریق زیردر R^J تعریف کرد :

تعریف. فرض‌کنیم J یك مجموعهٔ اندیس باشد و نقاط $\mathbf{x}=(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ و $\mathbf{y}=(y_\alpha)_{\alpha\in J}$ متعلق به R^J باشند. متریك $\bar{\rho}$ را در R^J باضابطهٔ زیر تعریف می کنیم :

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\operatorname{lub}\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha\in J\},$$

که درآن $\bar{d}$ متریك‌کراندار استاندهٔ R است. متریك $\bar{\rho}$ را **متریك یکنواخت** در R^J و توپولوژی القایی‌آن را **توپولوژی یکنواخت** می‌نامیم.

رابطهٔ بین این توپولوژی و توپولوژی حاصل‌ضربی چنین است :

۴۰۹. قضیه توپولوژی یکنواخت R^J ظریفتر از توپولوژی حاصل‌ضربی است، این‌دو توپولوژی وقتی متمایزند که J نامتناهی باشد.

برهان. فرض‌کنیم $\mathbf{x}=(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ نقطه‌ای مفروض ، و $\prod U_\alpha$ یك عضو پایهٔ توپولوژی حاصل‌ضربی باشدکه شامل $\mathbf{x}$ است. فرض‌کنیم α_1 ، . . . ، α_n اندیسهایی باشند که به‌ازای‌آنها $U_\alpha\neq R$. دراین صورت به‌ازای هر α_i ، $\varepsilon_i>0$ را چنان انتخاب می‌کنیم که ؛ $B_d(x_{\alpha_i}, \varepsilon_i)\subset U_{\alpha_i}$. این کار را از این رو می‌توانیم انجام دهیم که U_{α_i} در R باز است. فرض‌کنید $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ ؛ آنگاه

$$B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)\subset\prod U_\alpha$$

زیرا اگر $\mathbf{z}$ نقطه‌ای از R^J باشد به‌طوری که $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z})<\varepsilon$ آنگاه به ازای هر α ، $\bar{d}(x_\alpha, z_\alpha)<\varepsilon$ و بنابراین $\mathbf{z}\in\prod U_\alpha$.

اثبات متمایز بودن این دو توپولوژی وقتی که J نامتناهی است آسان است. آن‌را برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم. □

هنوز چیزی را که درجستجویش بودیم، یعنی متریکی که توپولوژی حاصلضربی را در R^ω القا کند نیافته‌ایم. اما تقریباً به‌آن رسیده‌ایم. چنانکه معلوم خواهد شد، فقط با تغییری جزئی درمتریك یکنواخت می‌توان متریك مطلوب را به‌دست آورد:

۵۰۹. قضیه فرض کنیم $\bar{d}(a, b)=\min\{|a-b|, 1\}$ متریك کراندار استاندهٔ R باشد. به‌ازای هردو نقطهٔ R^ω مانند $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$، تعریف می‌کنیم

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\operatorname{lub}\left\{\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i}\right\}.$$

دراین صورت، D متریکی در R^ω است که توپولوژی حاصلضربی را درآن القا می‌کند.

برهان. برقراری همهٔ خواص متریك بدیهی است مگر نامساوی مثلثی که آن نیز با توجه به‌این نکته ثابت می‌شود که به‌ازای هر i،

$$\frac{\bar{d}(x_i, z_i)}{i} \leqslant \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i}+\frac{\bar{d}(y_i, z_i)}{i} \leqslant D(\mathbf{x}, \mathbf{y})+D(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

بنابراین

$$\operatorname{lub}\left\{\frac{\bar{d}(x_i, z_i)}{i}\right\} \leqslant D(\mathbf{x}, \mathbf{y})+D(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

اثبات اینکه متریك D توپولوژی حاصلضربی را القا می‌کند کمی مفصلتراست. نخست، فرض می‌کنیم U مجموعهٔ بازی از توپولوژی متری باشد و $\mathbf{x} \in U$؛ مجموعهٔ بازی مانند V از توپولوژی حاصلضربی می‌یابیم به‌طوری که $\mathbf{x} \in V \subset U$. برای این منظور، ε-گوی $B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$ را در U اختیار می‌کنیم. عدد طبیعی N را به‌اندازهٔ کافی بزرگ اختیار می‌کنیم به‌طوری که $1/N<\varepsilon$. حال، عضو پایهٔ V برای توپولوژی حاصلضربی را که به‌صورت زیراست درنظر می‌گیریم:

$$V=(x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon) \times \cdots \times (x_N-\varepsilon, x_N+\varepsilon) \times R \times R \times \cdots$$

مدعی هستیم که $V \subset B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$: زیرا اگر $\mathbf{y}$ نقطهٔ دلخواهی از R^ω باشدآنگاه

به‌ازای $i \geqslant N$، $\bar{d}\,\frac{(x_i, y_i)}{i} \leqslant \frac{1}{N}$.

بنابراین،

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \max\left\{\frac{\bar{d}(x_1, y_1)}{1}, \ldots, \frac{\bar{d}(x_N, y_N)}{N}, \frac{1}{N}\right\}.$$

اگر $\mathbf{y}$ در V باشد، عبارت سمت‌راست‌از ε کمتراست[1] ؛ ودرنتیجه $V \subset B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$، واین همان است که می‌خواستیم.

بعکس، فرض کنیم

$$U = \Pi_{i \in Z_+} U_i$$

یك عضو پایهٔ توپولوژی حاصل‌ضربی باشد که درآن بنابر تعریف اگر $i = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ آنگاه U_i در R باز است، و بـه‌ازای iهای دیگر $U_i = R$. بـه‌ازای نقطهٔ مفروض $\mathbf{x} \in U$، مجموعهٔ‌بازی مانند V از توپولوژی متری می‌یابیم که $\mathbf{x} \in V \subset U$. برای‌این منظور، به‌ازای $i = \alpha_1, \dots, \alpha_n$، بازهٔ $(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i)$ به مرکـز x_i را چنان انتخاب می کنیم که در U_i واقع باشد و $\varepsilon_i \leqslant 1$. دراین صورت چنین تعریف می کنیم :

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon_i}{i} \,\middle|\, i = \alpha_1, \dots, \alpha_n \right\}.$$

مدعی هستیم که

$$\mathbf{x} \in B_D(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset U.$$

فرض کنیم $\mathbf{y}$ نقطه‌ای از $B_D(\mathbf{x}, \varepsilon)$ باشد. دراین صورت به‌ازای هر i،

$$\frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} \leqslant D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon.$$

حال اگر $i = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ آنگـاه $\varepsilon \leqslant \varepsilon_i / i$، پس $\bar{d}(x_i, y_i) < \varepsilon_i \leqslant 1$ ؛ نتیجه می‌شود که $|x_i - y_i| < \varepsilon_i$. بنابراین، $\mathbf{y} \in \Pi U_i$، واین‌همان است که می‌خواستیم. □

دراینجا طبعاً این سؤال پیش می‌آید کـه آیا می‌توان این قضیه را بیشترازاین تعمیم داد؟ آیا می‌توان به‌ازای‌هر J دلخواه ثابت‌کرد که R^J متری پذیراست؟ چنانکه‌دربخش بعد خواهیم دید، جـواب منفی است. اگـر توپولوژی جعبه‌ای را بـه‌جای توپولوژی حـاصل‌ضربی به‌کاربیریم وضع بهترازاین نخواهد بود؛ درحقیقت چنانکه خواهیم دید، تحت توپولوژی جعبه‌ای حتی R^ω هم متریك پذیرنیست.

تمرینها

۱. (الف) متریك d' را در R^n چنین تعریف می کنیم :

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|.$$

---

[1] دراینجا اشتباه کوچکی‌دراثبات‌قضیه‌وجود دارد،زیرا ممکن‌است $\varepsilon_1 < \bar{d}(x_1, y_1) < 2\varepsilon$ ودرنتیجه عبارت سمت راست از ε کمترنباشد. برای‌رفع این اشکال، کافی است که درتعریف عضو پایهٔ V، اولین عامل را بازهٔ باز $(x_1 - \varepsilon/2 , x_1 + \varepsilon/2)$ اختیارکنیم. ـ م.

ثابت کنید که d' متریکی است که توپولوژی استاندهٔ R^n را القا می‌کند. درحالت $n=۲$ ، اعضای پایهٔ وابسته به d' را رسم کنید.

(ب) به‌طور کلی ، به‌ازای $p \geqslant ۱$ ، d' را در R^n چنین تعریف می‌کنیم :

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{y})=[\sum_{i=۱}^{n} |x_i-y_i|^p]^{۱/p}$$

فرض کنید که d' یك متریك است. ثابت کنید که d' توپولوژی استاندهٔ R^n را القا می‌کند.

۲. فرض کنید X مجموعه‌ای باشد و d متریکی در آن. ثابت کنید توپولوژی‌ای که d در X القا می‌کند، درشت‌ترین توپولوژی‌ای است که نسبت به آن تابع $d: X\times X \to R$ پیوسته است.

۳. ثابت کنید که $R\times R$،با توپولوژی ترتیب قاموسی ، متریك‌پذیر است.

۴. (الف) توپولوژیهای جعبه‌ای ، حاصلضربی ، ویکنواخت R^ω را با یکدیگر مقایسه کنید.

(ب) نسبت به کدامیك از این توپولوژیها توابع زیر از R به R^ω پیوسته‌اند؟

$$f(t)=(t,\ ۲t,\ ۳t, \ldots),$$
$$g(t)=(t,\ t,\ t, \ldots),$$
$$h(t)=\left(t,\ \frac{۱}{۲}\,t,\ \frac{۱}{۳}t, \ldots\right).$$

(پ) نسبت به کدامیك از این توپولوژیها دنباله‌های زیر همگرایند؟

$$\mathbf{w}_۱=(۱,\ ۱,\ ۱,\ ۱,\ \ldots), \qquad \mathbf{x}_۱=(۱,\ ۱,\ ۱,\ ۱, \ldots),$$
$$\mathbf{w}_۲=(۰,\ ۲,\ ۲,\ ۲,\ \ldots), \qquad \mathbf{x}_۲=\left(۰,\ \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}, \ldots\right),$$
$$\mathbf{w}_۳=(۰,\ ۰,\ ۳,\ ۳,\ \ldots), \qquad \mathbf{x}_۳=\left(۰,\ ۰,\ \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}, \ldots\right),$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$\mathbf{y}_۱=(۱,\ ۰,\ ۰,\ ۰,\ \ldots), \qquad \mathbf{z}_۱=(۱,\ ۱,\ ۰,\ ۰,\ \ldots),$$
$$\mathbf{y}_۲=\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲},\ ۰,\ ۰,\ \ldots\right), \qquad \mathbf{z}_۲=\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲},\ ۰,\ ۰, \ldots\right),$$
$$\mathbf{y}_۳=\left(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳},\ ۰,\ \ldots\right), \qquad \mathbf{z}_۳=\left(\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳},\ ۰,\ ۰,\ \ldots\right),$$
$$\ldots \qquad \ldots$$

۵. فرض کنید R^{∞} زیر مجموعه‌ای از R^{ω} باشد که‌ازهمهٔ‌دنباله‌هایی که سرانجام صفرند تشکیل شده است. بستار R^{∞} در R^{ω} با توپولوژی یکنواخت چیست؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۶. فرض کنید $\bar{\rho}$ متریك یکنواخت R^{ω} باشد. به‌ازای نقطهٔ‌مفروض $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots)\in R^{\omega}$ وعدد مفروض $0<\varepsilon<1$ ، فرض کنید

$$U(\mathbf{x}, \varepsilon)=(x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)\times\cdots\times(x_n-\varepsilon, x_n+\varepsilon)\times\cdots.$$

(الف) ثابت کنید که $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$ مساوی ε-گوی $B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ نیست.
(ب) ثابت کنید که $U(\mathbf{x}, \varepsilon)$ در توپولوژی یکنواخت حتی بازهم نیست.
(پ) ثابت کنید که

$$B_{\bar{\rho}}(\mathbf{x}, \varepsilon)=\bigcup_{\delta<\varepsilon} U(\mathbf{x}, \delta).$$

۷. فرض کنید X زیر مجموعه‌ای از R^{ω} بااین خاصیت‌باشد که به‌ازای هرزوج $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ ازنقاط X سری

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2$$

همگراست. در X سه توپولوژی داریم که به‌عنوان زیرفضایی از R^{ω} با درنظر-گرفتن هریك از توپولوژیهای جعبه‌ای، یکنواخت، و حاصل‌ضربی R^{ω} در X القا می‌شود. بعلاوه، توپولوژی حاصل از متریك زیر نیز در دست است:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\left[\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}.$$

(متریك بودن d از تمرین ۹ نتیجه می‌شود.)
(الف) در حالت کلی، در مورد مقایسهٔ این چهار توپولوژی در مجموعهٔ X چه می‌توان گفت؟
(ب) اگر X زیر مجموعهٔ

$$\tilde{R}^n=\{(x_1, x_2, \ldots)\mid x_i=0 \text{ ، } i>n \text{ به‌ازای }\}$$

باشد، چه می‌توان گفت؟
(پ) اگر X زیرمجموعهٔ

$$R^{\infty}=\bigcup \tilde{R}^n$$

باشد، چه می‌توان گفت؟
(ت) اگر X ، مکعب هیلبرت[1]

$$H=\prod_{n\in Z_+}[0, 1/n]$$

---
1 Hilbert

باشد، چه می‌توان گفت؟

۸. به‌طریق زیر، ثابت کنید که متریك اقلیدسی d در R^n یك متریك است. به‌ازای دو عضو $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از R^n و $c \in R$، چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n),$$
$$c\mathbf{x}=(cx_1, \ldots, cx_n),$$
$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

(الف) ثابت کنید که $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})+(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z})$.
(ب) ثابت کنید که $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leqslant \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$. [راهنمایی: اگر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq 0$، قرار دهید $a=1/\|\mathbf{x}\|$، $b=1/\|\mathbf{y}\|$، وازاین مطلب که $\|a\mathbf{x} \pm b\mathbf{y}\| \geqslant 0$ استفاده کنید.]
(پ) ثابت کنید که $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$. [راهنمایی: عبارت $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ را محاسبه کنید و (ب) را به‌کار ببرید.]
(ت) متریك بودن d را ثابت کنید.

۹. فرض کنید l^2 زیرمجموعه‌ای از R^ω باشد که از همهٔ دنباله‌هایی مانند $(x_1, x_2, \ldots)$ که $\sum x_i^2$ همگرا است تشکیل شده است. (می‌توانید احکام استانده درمورد سریهای نامتناهی را دانسته فرض کنید. اگر با آنها آشنا نیستند، در تمرین ۱۱ بخش بعدی آنها را آورده‌ایم.)
(الف) ثابت کنید که اگر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^2$ آنگاه $\sum |x_iy_i|$ همگرا است. [راهنمایی: قسمت (ب) تمرین ۸ را برای اثبات اینکه مجموعهای جزئی این سری کراندار است به‌کار ببرید.]
(پ) فرض کنید $c \in R$. ثابت کنید که اگر $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l^2$ آنگاه $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ و $c\mathbf{x}$ به l^2 تعلق دارند.
(ت) ثابت کنید که

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})=[\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2]^{1/2}$$

متریکی خوشتعریف در l^2 است. آن را l^2ـ متریك می‌گویند.

۱۰. ثابت کنید که اگر d متریکی در X باشد آنگاه $d'(x, y)=d(x, y)/(1+d(x, y))$ متریکی کراندار در X است.

۲ـ۱۰ توپولوژی متری (ادامه)

موضوع بحث این بخش بررسی بستگی توپولوژی متری با مفاهیمی است که پیش‌از این معرفی کردیم.

رفتار زیرفضاهای فضاهای متری همان‌گونه است که انتظار می‌رود ؛ اگر A زیرفضایی از فضای توپولوژیك X و d متریکی برای X باشدآنگاه تحدید d به $A\times A$ متریکی برای توپولوژی A است. بررسی آن‌را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

درمورد توپولوژیهای ترتیبی مطلب قابل ذکری وجود ندارد ؛ بعضی متریك‌پذیرند (مانند Z_+ و R) وبعضی چنین نیستند. مثال ۳ را نگاه‌کنید.

اصل هاوسدورف درهرتوپولوژی متری برقراراست. اگر x و y نقاطی متمایز از فضای متری (X, d) باشند، به ازای $\varepsilon = d(x, y)/۲$ از نامساوی مثلثی می‌توان نتیجه‌گرفت که $B_d(x, \varepsilon)$ و $B_d(y, \varepsilon)$ جدا ازهم هستند.

توپولوژی حاصل‌ضربی را پیش‌از این در چند حالت خاص بررسی کردیم ؛ ثابت کردیم که حاصل‌ضربهای R^n و R^ω متریك‌پذیرند. درحالت‌کلی، حاصل‌ضرب شمارای فضاهای متریك‌پذیر، متریك‌پذیراست ؛ اثبات این‌حکم مشابه اثبات‌آن درمورد R^ω است وآن‌را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.

درمورد توابع پیوسته مطالب زیادی برای گفتن وجود دارد. بقیهٔ این بخش را به‌بحث دراین باب اختصاص می‌دهیم.

دراین کتاب هیچگاه به‌اندازهٔ وقتی که توابع پیوسته برفضاهای متری را بررسی می‌کنیم به‌آنالیز وحسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) نزدیك نمی‌شویم. دراین مرحله می‌خواهیم دوکارانجام دهیم.

نخست، می‌خواهیم ثابت‌کنیم که در مورد پیوستگی، «تعریف ε-δ»ی معروف ونیز «تعریف پیوستگی به‌وسیلهٔ دنباله‌های همگرا» را می‌توان به‌فضاهای متری‌کلی تعمیم داد.

ثانیاً می‌خواهیم علاوه‌برروشهایی که در بخش ۲ـ۷ مورد بحث واقع شدند، دو روش دیگررا برای ساختن توابع‌پیوسته درنظربگیریم. یکی ازآنها جمع، تفریق، ضرب، وتقسیم توابع حقیقی پیوسته‌است، و دیگری حدگیری ازدنباله‌های همگرای یکنواخت‌از توابع پیوسته.

۰۱۰ قضیه فرض کنیم $f: X \to Y$ و X و Y دوفضای متریك پذیر، بترتیب با متریکهای d_X و d_Y باشند. دراین صورت، پیوستگی f معادل است بااین شرط‌که به‌ازای هر $x \in X$ و هر $\varepsilon > ۰$ مفروض، δی مثبتی هست به‌قسمی که

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

برهان. فرض‌کنیم f پیوسته باشد. به‌ازای x و ε مفروض، مجموعهٔ

$$f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$$

راکه در X باز وشامل نقطهٔ x است درنظر می‌گیریم. این مجموعه‌حاوی δ-گویی مانند $B(x, \delta)$ به‌مرکز x است. اگر y دراین δ-گوی باشدآنگاه $f(y)$ در ε-گوی به‌مرکز $f(x)$ خواهد بود، واین همان است‌که می‌خواهیم.

بعکس، فرض کنیم شرط ε-δ برقرار باشد. فرض کنیم V در Y باز باشد. ثابت می‌کنیم که $f^{-1}(V)$ در X باز است. فرض کنیم x نقطه‌ای از مجموعهٔ $f^{-1}(V)$ باشد. چون $f(x)\in V$، ε- گویی مانند $B(f(x), \varepsilon)$ به‌مرکز $f(x)$ وجود داردکه‌زیرمجموعهٔ V است. اما بنابرشرط ε-δ، δ- گویی مانند $B(x, \delta)$ به مرکز x وجود دارد به طوری که $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. پس $B(x, \delta)$ یك‌همسایگی x است که زیرمجموعهٔ $f^{-1}(V)$ است. درنتیجه، $f^{-1}(V)$ بازاست، واین همان است که می‌خواستیم. □

اینك به‌تعریف پیوستگی برحسب دنباله‌های همگرا می‌پردازیم.

یادآوری می‌کنیم کـه یك دنباله از نقاط مجموعه‌ای مانند X، چیزی نیست جز تابعی از Z_+ به X؛ یعنی عضوی از فضای X^ω. معمولاً، یك دنباله را با علامتهای زیر نمایش می‌دهیم

$$(x_1, x_2, \ldots) \quad \text{یا} \quad (x_n).$$

تعریف. دنباله‌ای مـانند $(x_1, x_2, \ldots)$ ازنقاط X را **همگرا** به نقطهٔ x گوییم درصورتی که به‌ازای هرهمسایگی x مانند U، عدد صحیح مثبتی مانند N وجود داشته باشدکه به‌ازای هر $i \geqslant N$، x_i در U باشد.

اگردنبالهٔ (x_n) همگرا به x باشد، می‌نویسیم

$$x_n \longrightarrow x.$$

البته به‌هیچ‌وجه ضرورتی نداردکه دنباله‌ای دلخواه همگرا باشد، اما اگر همگرا بـاشد فقط به‌یك نقطه همگراست، به شرط اینکه X هاوسدورف باشد. زیرا اگر (x_n) همگرا به x باشد و $x \neq y$، کافی‌است‌که همسایگیهای‌جدا ازهم U و V، بترتیب از x و y، را انتخاب و ملاحظه کنیم که چون U به‌ازای همهٔ مقادیر i، مگر احیاناً تعدادی متناهی‌از آنها، شامل x_i است، V نمی‌تواند چنین خاصیتی را داشته باشد.

بنابر آنچه ازآنالیز می‌دانیم، شهوداً چنین به‌نظر می‌رسدکه اگر x متعلق به‌بستار زیرمجموعهٔ A از فضای X باشد، بـاید دنباله‌ای از نقاط A همگرا به x وجود داشته باشد. این حکم درحالت‌کلی برقرار نیست، ولی برای فضاهای متریك‌پذیر برقراراست.

۲۰۱۰. لم (لم دنباله) فرض کنیم X یك فضای توپولوژیك باشد و $A \subset X$. اگر دنباله‌ای از نقاط A همگرابه x وجود داشته باشد آنگاه $x \in \bar{A}$، عکس این حکم‌فقط دقتی برقراراست‌که X متری پذیر باشد.

برهان. فرض کنیم $x_n \longrightarrow x$، که‌درآن $x_n \in A$. بنابراین، هرهمسایگی x مانند U شامل نقطه‌ای از A است. پس، بنابر قضیهٔ ۵.۶، $x \in \bar{A}$. بعکس، فـرض کنیم X متریك‌پذیر باشد، و $x \in \bar{A}$. فرض کنیم d متریکی برای توپولوژی X بـاشد. به‌ازای هـرعدد صحیح مثبت n، یك همسایگی $B_d(x, 1/n)$ از x بـه‌شعاع $1/n$ را درنظر

می‌گیریم، نقطهٔ x_n را درمقطع این همسایگی با A انتخاب می‌کنیم. مدعی هستیم‌که دنبالهٔ (x_n) به x همگراست: هرمجموعهٔ باز U که شامل x باشد، حاوی ε-گویی‌مانند $B_d(x, \varepsilon)$ به مرکز x نیزهست؛ اگر N را چنان اختیارکنیم‌که $1/N < \varepsilon$ آنگاه به‌ازای هر $i \geqslant N$ خواهیم داشت $x_i \in U$. □

۳۰۱۰. **قضیه** فرض‌کنیم $f: X \to Y$ و X متریك‌پذیر باشد. تابع f پیوسته است اگروفقط اگر به‌ازای هردنبالهٔ همگرا از نقاط X مانند $x_n \to x$، دنبالهٔ $f(x_n)$ همگرا به $f(x)$ باشد.

برهان. فرض‌کنیم f پیوسته باشد. به‌ازای دنبالهٔ مفروض $x_n \to x$، می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که $f(x_n) \to f(x)$. فرض‌کنیم V یك همسایگی $f(x)$ باشد. دراین صورت $f^{-1}(V)$ یك‌همسایگی x است، ودرنتیجه Nی هست که به‌ازای هر $n \geqslant N$، $x_n \in f^{-1}(V)$. پس به‌ازای هر $n \geqslant N$، $f(x_n) \in V$.

برای اثبات عکس قضیه، فرض‌کنیم شرط دنبالهٔ همگرا برقرار باشد و A زیر-مجموعهٔ دلخواهی‌از X باشد. ثابت می‌کنیم‌که $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. اگر $x \in \bar{A}$، دنباله‌ای ازنقاط A مانند (x_n) وجود داردکه همگرا به x است (بنابر لم پیش). بنابر فرض، دنبالهٔ $f(x_n)$ همگرا به $f(x)$ است. ازآنجاکه $f(x_n) \in f(A)$، بنابر لم سابق، $f(x) \in \overline{f(A)}$. (توجه کنیدکه لازم‌نیست Y متریك‌پذیر باشد.) بنابراین، $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$، واین همان است که می‌خواستیم. □

ضمناً، در اثبات لم ۲.۱۰ وقضیهٔ ۳.۱۰ ازهمهٔ توانایی فرض متریك‌پذیری X استفاده نکردیم. آنچه‌که واقعاً احتیاج داشتیم‌گردایهٔ شمارایی ازگویهای $B_d(x, 1/n)$ به مرکز x بود. این نکته ما را به‌تعریف جدیدی رهنمون می‌کند.

فضای X را دارای **پایهٔ شمارا درنقطهٔ x** گوییم هرگاه خانوادهٔ شمارایی مانند $\{U_n\}_{n \in Z_+}$ ازهمسایگیهای x موجودباشد به‌طوری‌که‌هرهمسایگی x مانند U حاوی حداقل یکی‌از U_nها باشد. هرگاه فضای X درهرنقطه‌اش پایه‌ای شمارا داشته باشد، گوییم X در **اولین اصل موضوع شمارایی** صدق می‌کند.

اگر X درنقطهٔ x پایهٔ شمارا مانند $\{U_n\}$ داشته باشدآنگاه برهان لم ۲.۱۰ برقرار می‌ماند؛ کافی است که درسراسربرهان مجموعهٔ

$$B_n = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$$

را جایگزین‌گوی $B_d(x, 1/n)$ کنیم. برهان قضیهٔ ۳.۱۰ نیزبدون تغییربرقرارمی‌ماند.

هرفضای متریك‌پذیردراولین اصل موضوع شمارایی صدق می‌کند، ولی چنانکه خواهیم دید عکس‌آن برقرار نیست. مانند اصل هاوسدورف، اولین اصل شمارایی شرطی است‌که بعضی مواقع برفضای توپولوژیك می‌نهیم تا بتوانیم قضایایی درموردآن ثابت‌کنیم. درفصل ۴ این موضوع را مفصلتربررسی می‌کنیم.

اینک روشهای دیگری را برای ساختن توابع پیوسته مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای این منظور به لم زیر نیاز داریم:

۴.۱۰ لم عملهای جمع، تفریق، وضرب توابعی پیوسته از $R \times R$ به R هستند؛ عمل تقسیم تابعی است پیوسته از $R \times (R - \{0\})$ به R.

احتمالاً اثبات این لم را قبلاً دیده‌اید، که به‌روش استاندهٔ «استدلال ε-δ» صورت می‌گیرد. درصورتی که با این اثبات آشنا نیستید، طرح کلی برهانی برای این لم در تمرین ۱۲ همین بخش آمده است؛ خواننده بدون هیچ مشکلی می‌تواند جزئیات اثبات را کامل کند.

۵.۱۰ قضیه اگر X فضایی توپولوژیک باشد، و توابع $f, g: X \to R$ پیوسته باشند آنگاه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، و $f \cdot g$ نیز پیوسته‌اند. بعلاوه، اگر به‌ازای هر x، $g(x) \neq 0$، آنگاه f/g نیز پیوسته است.

برهان. نگاشت $h: X \to R \times R$ که با ضابطهٔ

$$h(x) = f(x) \times g(x)$$

تعریف می‌شود، بنابر قضیهٔ ۴.۷ پیوسته است. تابع $f+g$ برابراست با ترکیب تابع h وعمل جمع

$$+: R \times R \longrightarrow R;$$

بنابراین، $f+g$ پیوسته است. برهان مشابهی برای هریك از توابع $f-g$ ، $f \cdot g$ ، و f/g به‌کارمی‌رود. □

درپایان، به‌مفهوم همگرایی یکنواخت برای دنباله‌ای ازتوابع می‌رسیم.

تعریف. فرض کنیم $f_n: X \to Y$ دنباله‌ای از توابع از مجموعهٔ X به‌فضای متری Y و d متریکی برای Y باشد. دنبالهٔ (f_n) را **به‌طور یکنواخت همگرا** به‌تابع $f: X \to Y$ گوییم درصورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، عدد صحیحی مانند N وجود داشته باشدکه به‌ازای هر $n \geqslant N$ وهر x در X،

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

یکنواخت بودن‌همگرایی نه‌تنها به‌توپولوژی Y بلکه به‌متریك‌آن نیز بستگی دارد. قضیهٔ زیررا درمورد دنباله‌های به‌طوریکنواخت همگرا داریم:

۶.۱۰ (قضیهٔ حدیکنواخت) فرض کنیم $f_n: X \to Y$ دنباله‌ای از توابع

پیوسته از فضای توپولوژیك X به‌فضای متری Y باشد. اگر (f_n) به‌طور یکنواخت همگرا به f باشدآنگاه f پیوسته است.

برهان. فرض‌کنیم V در Y باز، و x_0 نقطهٔ دلخواهی از $f^{-1}(V)$. می‌خواهیم یك همسایگی U از x_0 بیابیم به‌طوری‌که $f(U) \subset V$.

فرض‌کنیم $y_0 = f(x_0)$. نخست، ε را چنان انتخاب می‌کنیم که ε-گوی $B(y_0, \varepsilon)$ زیر مجموعهٔ V باشد. حال بااستفاده از شرط همگرایی یکنواخت، عدد N را چنان انتخاب می‌کنیم‌که، به‌ازای هر $n \geqslant N$ وهر $x \in X$،

$$d(f_n(x),\ f(x)) < \frac{\varepsilon}{۴}.$$

سرانجام، بنابر پیوستگی f_N، همسایگی U از x_0 را چنان اختیار می‌کنیم‌که f_N آن را درگوی به‌مرکز $f_N(x_0)$ وشعاع $\varepsilon/۲$ در Y بنگارد.

مدعی هستیم‌که f مجموعهٔ U را در $B(y_0, \varepsilon)$ و درنتیجه، همان طور که می‌خواهیم، در V می‌نگارد. زیرا اگر $x \in U$ آنگاه

$$d(f(x), f_N(x)) < \frac{\varepsilon}{۴} \qquad (\text{بنابرانتخاب } N)$$

$$d(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (\text{بنابرانتخاب } U)$$

$$d(f_N(x_0),\ f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{۴} \qquad (\text{بنابرانتخاب } N)$$

با جمع‌کردن طرفین این نامساویها و باستفاده از نامساوی مثلثی، نتیجه می‌شود که $d(f(x),\ f(x_0)) < \varepsilon$، واین همان است‌که می‌خواستیم. □

توجه داشته باشید‌که مفهوم همگرایی یکنواخت با تعریف متریك یکنواخت، که دربخش گذشته ارائه شد، مربوط است. مثلاً، R^X، فضای همهٔ توابع $f: X \to R$ با متریك یکنواخت $\bar{\rho}$ را درنظربگیرید. بسهولت می‌توان‌دید‌که دنباله‌ای ازتوابع‌مانند $f_n: X \to R$ به‌طور یکنواخت به f همگراست اگروفقط اگردنبالهٔ (f_n) به‌عنوان دنباله‌ای‌ازاعضای‌فضای متری $(R^X, \bar{\rho})$ به f همگرا باشد. اثبات این حکم را به‌عنوان تمرین واگذار می‌کنیم.

این بخش را با چند مثال از فضاهایی‌که متری‌پذیر نیستند به‌پایان می‌رسانیم.

مثال ۱. R^ω باتوپولوژی جعبه‌ای متری‌پذیر نیست.

ثابت می‌کنیم‌که لم دنباله درمورد R^ω برقرارنیست. فرض‌کنیم A زیرمجموعه‌ای از R^ω متشکل ازنقاطی باشد‌که همهٔ مختصهایشان مثبت‌اند:

$$A=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots) \mid x_i>0\ \text{،}\ i\in Z_+ \ \text{به‌ازای هر}\}$$

فرض کنیم 0 «مبدأ» R_ω باشد، یعنی نقطهٔ $(0,\ 0,\ \ldots)$ که همهٔ مختصهایش صفر است. درتوپولوژی جعبه‌ای، 0 به $\bar{A}$ تعلق دارد؛ زیرا اگر

$$B=(a_1,\ b_1)\times(a_2,\ b_2)\times\cdots$$

یك عضوپایهٔ دلخواه شامل 0 باشدآنگاه B مجموعهٔ A را قطع می‌کند. مثلاً، نقطهٔ

$$\left(\frac{1}{2}b_1,\ \frac{1}{2}b_2\ ,\ \cdots\right)$$

به $B\cap A$ تعلق دارد.

ولی هیچ دنباله‌ای ازنقاط A وجود نداردکه همگرا به 0 باشد. زیرا فرض کنیم (a_n) دنباله‌ای ازنقاط A باشد، که درآن

$$a_n=(x_{1n},\ x_{2n}\ ,\ \cdots\ ,\ x_{in}\ ,\ \cdots).$$

هریك از x_{in}ها مثبت‌اند، پس می‌توان عضوپایه‌ای مانند B' برای توپولوژی جعبه‌ای به‌صورت زیرساخت

$$B'=(-x_{11},\ x_{11})\times(-x_{22},\ x_{22})\times\cdots$$

دراین صورت B' شامل مبدأ 0 است، ولی شامل هیچ عضو دنبالهٔ (a_n) نیست. نقطهٔ a_n نمی‌تواند به B' تعلق داشته باشد، زیرا مختص nمآن یعنی x_{nn} به بازهٔ $(-x_{nn},\ x_{nn})$ تعلق ندارد. بنابراین، درتوپولوژی جعبه‌ای دنبالهٔ (a_n) به 0 همگرا نیست.

مثال ۲. هیچ حاصلضرب ناشمارای R درخود متری پذیر نیست.

فرض کنیم J یك مجموعهٔ اندیس ناشمارا باشد، ثابت می‌کنیم که R^J (با توپولوژی حاصلضرب) درلم دنباله صدق نمی‌کند.

فرض کنیم زیرمجموعهٔ A از R^J متشکل ازهمهٔ نقاطی مانند (x_α) باشدکه به‌ازای تعدادی متناهی‌از αها، $x_\alpha=0$ وبه‌ازای‌سایرمقادیر α، $x_\alpha=1$. فرض کنیم 0 «مبدأ» R^J باشد، یعنی نقطه‌ای‌که هریك ازمختصهایش صفراست.

مدعی هستیم‌که 0 به‌بستار A تعلق دارد. زیرا، فرض کنیم $\prod U_\alpha$ یك عضوپایهٔ شامل 0 باشد. دراین‌صورت، فقط‌به‌ازای‌تعدادی متناهی‌ازαها، مثلاً به‌ازای $\alpha=\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$، داریم $U_\alpha\neq R$. نقطهٔ (x_α) از A را باقراردادن $x_\alpha=0$ به‌ازای $\alpha=\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$، و $x_\alpha=1$ به‌ازای بقیهٔ مقادیر α، تعریف می‌کنیم. دراین صورت، $(x_\alpha)\in A\cap\prod U_\alpha$. واین همان است‌که می‌خواستیم.

ولی‌هیچ‌دنباله‌ای ازنقاط A نیست‌که همگرا به 0 باشد. زیرا،فرض کنیم a_n دنباله‌ای ازنقاط A باشد. هر a_n نقطه‌ای ازفضای حاصلضرب است‌که منحصراً تعدادی متناهی از مختصهایش 0 است. به‌ازای n مفروض، فرض کنیم زیرمجموعهٔ J_n از J متشکل ازαهایی

باشد که به‌ازای آنها مختص αم $\mathbf{a}_n$ صفراست. اجتماع همهٔ مجموعه‌های J_n ، اجتماع شمارایی از مجموعه‌هـای متناهی است، وبنابراین شماراست. چون J ناشماراست ، اندیسی مانند β در J وجود دارد که به هیچیك از J_nها تعلق ندارد. یعنی به‌ازای هر $\mathbf{a}_n$ ، مختص βم آن ۱ است.

حال فرض کنیم U_β بازهٔ باز $(-۱ , ۱)$ در R و U مجموعهٔ باز $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ در R^J باشد. مجموعهٔ U یك همسایگی $\mathbf{0}$ است کـه شامل هیچیك از $\mathbf{a}_n$هـا نیست ؛ بنابراین ، دنبالهٔ $\mathbf{a}_n$ نمی‌تواند همگرا به $\mathbf{0}$ باشد.

مثال ۳. **مجموعهٔ خوشترتیب $\bar{S}_\Omega$ با توپولوژی ترتیبی متری پذیر نیست.**

یادآوری می‌کنیم که S_Ω مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارای مینیمالی است که دربخش ۱ــ۱۰ ساخته شد، و $\bar{S}_\Omega$ نمایش مجموعهٔ $S_\Omega \cup \{\Omega\}$ است. نخست ملاحظه می‌کنیم که در توپولوژی ترتیبی ، Ω یك نقطهٔ حدی S_Ω است. (به‌همین‌دلیل دربخش ۱ ــ ۱۰ علامت $\bar{S}_\Omega$ رابرای نمایش $S_\Omega \cup \{\Omega\}$ به‌کاربردیم.) زیرا اگـر $(a, \Omega]$ یك عضوپایهٔ دلخواه شامل Ω بـاشد آنگاه باید S_Ω را قطع کند ، درغیراین خواهیم داشت

$$S_\Omega = S_a \cup \{a\}$$

وحال‌آنکه S_Ω ناشماراست و S_a شمارا.

مدعی هستیم که هیچ دنباله‌ای از نقاط S_Ω وجود نداردکه همگرا به Ω باشد. زیرا ، اگر (x_n) دنبالهٔ دلخواهی ازنقاط S_Ω باشدآنگاه مجموعهٔ $\{x_n \mid n \in Z_+\}$ زیرمجموعه‌ای از S_Ω است ، وبنابراین دارای کران بالایی مانند b است کـه در S_Ω واقع است (نتیجه ۱۰ــ۳درفصل۱). بنابراین ، $(b, \Omega]$ یك عضوپایه است که شامل Ω است و هیچ‌نقطه‌ای ازدنبالهٔ (x_n) را دربرندارد.

تمرینها

۱. فرض کنید $A \subset X$. اگـر d متریکی برای توپولوژی X باشد ، ثابت کنید کـه $d \mid A \times A$ متریکی برای توپولوژی زیرفضایی در A است.

۲. فرض کنید X و Y دوفضای متری ، بترتیب ، بـا متریهای d_X و d_Y بـاشند ، و $f : X \rightarrow Y$ دارای این خاصیت‌باشدکه به‌ازای‌هرزوج‌ازنقاط X مانند x_1 و x_2،

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$$

ثـابت کنیدکـه f یك نشاندن است. آن را یـك **نشاندن ایزومتریك** X در Y می‌خوانند.

۳. ثابت کنید که‌هر حاصل‌ضرب‌شمارا ازفضاهای متری‌پذیر ، مانند $\prod X_n$ ، متری پذیر

است. [راهنمایی: فرض کنید d_n متریکی برای X_n وکراندار به ۱ باشد. تعریف کنید $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{lub}\{d_n(x_n, y_n)/n\}$.]

۴. ثابت کنید که فضاهای S_Ω و R_l درلم دنباله صدق می‌کنند. (البته، این امر مستلزم آن نیست که آنها متری پذیر باشند.)

۵. قضیه. فرض کنید درفضای R داشته باشیم $x_n \to x$ و $y_n \to y$، دراین صورت،

$$x_n + y_n \longrightarrow x + y,$$

$$x_n - y_n \longrightarrow x - y,$$

$$x_n \cdot y_n \longrightarrow x \cdot y,$$

ودرصورتی‌که هر y_n غیرصفر باشد و $y \neq 0$،

$$\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow \frac{x}{y}.$$

[راهنمایی: قضیهٔ ۳.۱۰ ولم ۴.۱۰ را به‌کار ببرید؛ به‌یاد بیاورید که اگر $x_n \to x$ و $y_n \to y$ آنگاه $x_n \times y_n \to x \times y$.]

۶. تابع $f_n : [0, 1] \to R$ را باضابطهٔ $f_n(x) = x^n$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که به‌ازای‌هر $x \in [0, 1]$ دنبالهٔ $(f_n(x))$ همگراست، امادنبالهٔ (f_n) همگرای یکنواخت نیست.

۷. فرض کنید X مجموعه‌ای باشد، و $f_n : X \to R$ دنباله‌ای از توابع و $\bar{\rho}$ متریك یکنواخت درفضای R^X. ثابت کنید که دنبالهٔ (f_n) همگرای یکنواخت به تابع $f : X \to R$ است اگر وفقط اگردنبالهٔ (f_n) به‌عنوان دنباله‌ای ازاعضای فضای متری $(R^X, \bar{\rho})$ به f همگرا باشد.

۸. فرض کنید X فضایی توپولوژیك و Y فضایی متری باشد، و $f_n : X \to Y$ دنباله‌ای ازتوابع پیوسته، و x_n دنباله‌ای ازنقاط X باشدکه همگرا به x است. ثابت کنیدکه اگردنبالهٔ (f_n) همگرای یکنواخت به f باشدآنگاه $(f_n(x_n))$ به $f(x)$ همگراست.

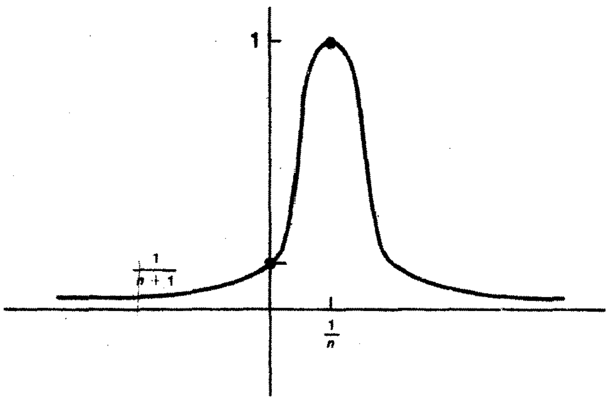
۹. فرض کنید $f_n : R \to R$ باضابطهٔ

$$f_n(x) = \frac{1}{n^3[x - (1/n)]^2 + 1}$$

تعریف شده باشد، (شکل ۱۹) و $f : R \to R$ تابع صفرباشد.

(الف) ثابت کنیدکه به‌ازای هر $x \in R$، $f_n(x) \to f(x)$.

(ب) ثابت کنید که f_n همگرای یکنواخت به f نیست. (این ثابت می کند که عکس قضیهٔ ۶.۱۵ برقرار نیست ؛ تابع‌حدی f ممکن است پیوسته باشد ، گرچه همگرایی یکنواخت نیست.)



شکل ۱۹

۱۰. بااستفاده ازتعریف پیوستگی برحسب مجموعه‌های بسته (قضیهٔ ۱.۷) ، ثابت کنید که مجموعه‌های زیرین مجموعه‌های بسته‌ای از $R^۲$ هستند :

$$A=\{x\times y \mid xy=۱\},$$

$$S^۱=\{x\times y \mid x^۲+y^۲=۱\},$$

$$B^۲=\{x\times y \mid x^۲+y^۲\leqslant ۱\}.$$

مجموعهٔ $B^۲$ را **گوی واحد** (بسته) در $R^۲$ می گویند.

۱۱. احکام استاندهٔ زیررا درباب سریهای نامتناهی ثابت کنید :
(الف) ثابت کنید که اگر (s_n) دنباله‌ای کراندارازاعداد حقیقی باشد وبه‌ازای هر n ، $s_n\leqslant s_{n+۱}$ ، آنگاه (s_n) همگراست.
(ب) فرض کنید (a_n) دنباله‌ای ازاعداد حقیقی باشد ، s_n را چنین تعریف می کنیم

$$s_n=\sum_{i=۱}^{n} a_i.$$

اگر $s_n \to s$ ، می‌گوییم سری نامتناهی

$$\sum_{i=۱}^{\infty} a_i$$

نیز به s همگراست. ثابت کنید که اگر $\sum a_i$ به s و $\sum b_i$ به t همگرا باشند آنگاه $\sum(ca_i+b_i)$ به $cs+t$ همگراست.

(پ) آزمون مقایسه‌ای برای سریهای نامتناهی را ثابت کنید: اگر، به‌ازای هر i، $|a_i|\leqslant b_i$ و اگر سری $\sum b_i$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum a_i$ همگراست. [راهنمایی: ثابت کنید که سریهای $\sum|a_i|$ و $\sum c_i$، که $c_i=|a_i|+a_i$، همگرایند.]

(ت) دنبالهٔ $f_n : X \to R$ مفروض است، قرار دهیم

$$s_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x).$$

آزمون M وایرشتراس را برای همگرایی یکنواخت ثابت کنید:

اگر به‌ازای هر $x\in X$ و هر i داشته باشیم $|f_i(x)|\leqslant b_i$ و اگر سری $\sum b_i$ همگرا باشد آنگاه دنبالهٔ (s_n) همگرای یکنواخت به‌تابعی مانند s است. [راهنمایی: فرض کنید $r_n=\sum_{i=n+1}^{\infty} b_i$. ثابت کنید که اگر $k>n$ آنگاه $|s_k(x)-s_n(x)|\leqslant r_n$؛ از آن نتیجه بگیرید که $|s(x)-s_n(x)|\leqslant r_n$.]

۱۲. پیوستگی عملهای جبری در R را ثابت کنید، در R متریك $d(a, b)=|a-b|$ ودر R^2 متریك

$$\rho((x, y), (x_0, y_0))=\max\{|x-x_0|, |y-y_0|\}$$

را به‌کار ببرید.

(الف) ثابت کنید که عمل جمع پیوسته است. [راهنمایی: به‌ازای ε مفروض، فرض کنید $\delta=\varepsilon/2$ و ملاحظه کنید که

$$d(x+y, x_0+y_0)\leqslant |x-x_0|+|y-y_0|.]$$

(ب) ثابت کنید که عمل ضرب پیوسته است. [راهنمایی: به‌ازای نقطهٔ مفروض (x_0, y_0) و $\varepsilon>0$، فرض کنید

$$3\delta=\min\{\varepsilon/(|x_0|+|y_0|+1), \sqrt{\varepsilon}\}$$

و ملاحظه کنید که

$$d(xy, x_0y_0)\leqslant |x_0|\,|y-y_0|+|y_0|\,|x-x_0|+|x-x_0|\,|y-y_0|.]$$

(پ) ثابت کنید که عمل محاسبهٔ عکس یك عدد نگاشتی پیوسته از $R-\{0\}$ به R است. [راهنمایی: به‌ازای $x_0\neq 0$ و $\varepsilon>0$، فرض کنید

$$\delta=\min\{|x_0|/2, x_0^2\varepsilon/2\}$$

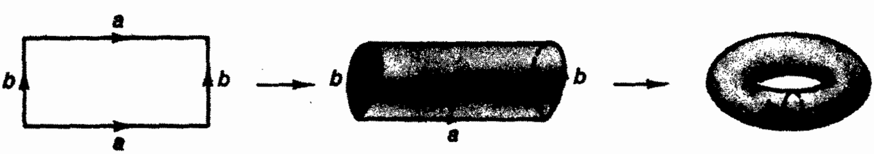
ملاحظه کنید که $d(1/x, 1/x_0)=|x-x_0|/|xx_0|$. اگر $|x-x_0|<\delta$،

آنگاه $|xx_0 - x_0^2| < |x_0|^2/2$ ، بنابراین $xx_0 - x_0^2 > x_0^2/2$ و $xx_0 > x_0^2/2 > 0$.]

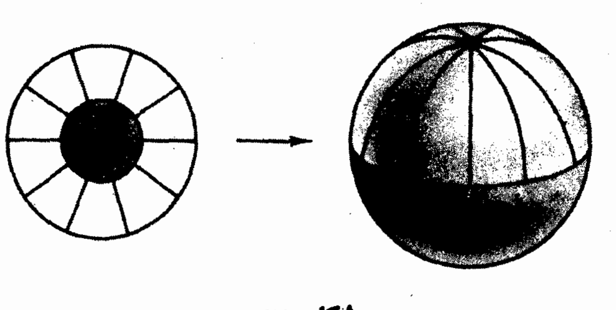
(ت) ثابت کنید که عملهای تفریق و تقسیم نیز پیوسته‌اند.

*۲-۱۱ توپولوژی خارج قسمتی[1]

برخلاف توپولوژیهایی که تاکنون در این فصل ملاحظه کردیم ، توپولوژی خارج قسمتی تعمیم طبیعی هیچیك ازچیزهایی که قبلاً درآنالیز آموخته‌اید نیست. باوجود این ، تاحدی به‌آسانی می‌توان علت وجودی‌آن را توجیه کرد. یکی ازتوجیه‌های‌آن از هندسه ناشی می‌شود که درآن اغلب فن «پاره‌کردن و چسباندن» برای ساختن اشیای هندسی ، مانند سطوح ، به‌کار می‌رود. مثلاً ، چنبره (سطح لاستیك تویی اتومبیل) را می‌توان ، مانند شکل ۲۰ ، با «چسباندن» لبه‌های یك مستطیل ، به‌طریقی مناسب ، ساخت. و کره (سطح توپ) را می‌توان با جمع کردن همهٔ کرانهٔ یك قرص به‌یك نقطه به‌دست‌آورد (شکل ۲۱). بیان ریاضی این ساختمانها متضمن مفهوم توپولوژی خارج قسمتی است.



شکل ۲۰



شکل ۲۱

تعریف. فرض‌کنیم X و Y دوفضای توپولوژیك باشند و $p: X \to Y$ نگاشتی پوشا باشد. نگاشت p رایك **نگاشت خارج قسمتی** خوانیم‌درصورتی که هرزیرمجموعهٔ Y مانند U در Y بازباشد اگروفقط‌اگر $p^{-1}(U)$ در X بازباشد.

---

۱. این بخش درفصل ۸ برای اثبات قضیهٔ منحنی ژوردان به‌کارمی‌رود.

این شرط از پیوستگی قویتر است ؛ بعضی از ریاضیدانــان آن‌را «پیوستگی قوی» می‌خوانند. یك‌شرط معادل با آن چنین‌است که هرزیرمجموعهٔ Y مانند A در Y بسته‌باشد اگر وفقط اگر $p^{-1}(A)$ در X بسته‌باشد. معادل بودن این‌دو شرط ازتساوی زیر به‌دست می‌آید :

$$f^{-1}(Y-B)=X-f^{-1}(B).$$

طریقهٔ دیگر توصیف نگاشت خــارج قسمتی به‌قرار زیر است: زیرمجموعهٔ C از X را (نسبت‌به‌نگاشت پوشای $p:X\to Y$) **اشباع‌شده** خوانیم درصورتی‌که C حاوی هرمجموعهٔ $p^{-1}(\{y\})$ که C را قطع می‌کند بــاشد. بنابراین، C اشباع‌شده است در صورتی‌که مساوی $p^{-1}(p(C))$ باشد. بدین‌ترتیب ، p نگاشت خارج‌قسمتی است اگر وفقط اگر پیوسته باشد ومجموعه‌های بــاز اشباع‌شدهٔ X را برمجموعه‌های باز Y (یــا مجموعه‌های بستهٔ اشباع شدهٔ X را برمجموعه‌های بستهٔ Y) بنگارد.

دو حالت خاص نگاشتهای خــارج قسمتی ، نگاشتهای باز و نگاشتهای بسته‌اند. یادآوری می‌کنیم که نگاشتی مــانند $f:X\to Y$ را **نگاشت‌باز** خوانیم در صورتی‌که به‌ازای هرمجموعهٔ باز U از X ، مجموعهٔ $f(U)$ در Y باز باشد. وآن‌را **نگاشت بسته** خوانیم ، در صورتی‌که به‌ازای هرمجموعهٔ بستهٔ X مــانند A ، مجموعهٔ $f(A)$ در Y بسته‌باشد. ازتعریف، مستقیماً نتیجه می‌شود که اگر $p:X\to Y$ نگاشت پیوستهٔ‌پوشایی باشد،که یا باز باشد ویابسته،آنگاه p نگاشت خارج‌قسمتی است. نگاشتهایی‌خارج‌قسمتی وجود دارند که نه بازهستند ونه‌بسته (تمرین ۲).

تعریف . اگر X فضایی و A مجموعه‌ای باشد و $p:X\to A$ نگاشتی پوشاباشد آنگاه تنها یك‌توپولوژی $\mathcal{T}$ در A وجود داردکه p نسبت به‌آن نگاشت خــارج قسمتی است. این‌توپولوژی به **توپولوژی خارج‌قسمتی** القا شده به‌وسیلهٔ p موسوم است.

البته، توپولوژی $\mathcal{T}$ چنین تعریف می‌شودکه آن‌را متشکل اززیرمجموعه‌هایی مانند U از A می‌گیریم که $p^{-1}(U)$ در X باز باشد. بسهولت می‌توان ثــابت کردکه $\mathcal{T}$ یك توپولوژی است. مجموعه‌های $\varnothing$ و A بازند، زیرا $p^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ و $p^{-1}(A)=X$. دو شرط دیگر نتیجهٔ تساویهای زیرند :

$$p^{-1}(\bigcup_{\alpha\in J}U_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in J}p^{-1}(U_\alpha),$$

$$p^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n}U_i)=\bigcap_{i=1}^{n}p^{-1}(U_i).$$

مثال ۱. فرض‌کنیم $\pi_1:X\times Y\to X$ نگاشت تصویری بــاشد ، π_1 پیوسته و پوشا است. اگر $U\times V$ یك‌عضو پایهٔ $X\times Y$ باشد، آنگاه تصویر آن $\pi_1(U\times V)=U$ در X باز است. بنابراین، π_1 نگاشت بــاز است. در حالت کلی π_1 نگاشت بسته نیست، مثلاً

نگاشت تصویری $\pi_1 : R\times R \to R$ ، مجموعهٔ بستهٔ $\{x\times y \mid xy=1\}$ را بروی مجموعهٔ نابستهٔ $R-\{0\}$ می‌نگارد.

مثال ۲. فرض‌کنیم X زیرفضای $[0, 1]\cup[2, 3]$ از R ، و Y زیرفضای $[0, 2]$ از R باشد. آشکارا دیده می‌شود که نگاشت $p : X \to Y$ ، باضابطهٔ

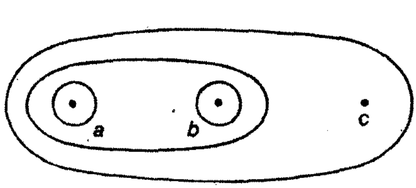
$$p(x)=\begin{cases} x & \text{، } x\in[0, 1] \text{ به‌ازای} \\ x-1 & \text{، } x\in[2, 3] \text{ به‌ازای} \end{cases}$$

پوشا، پیوسته، و بسته است. اما نگاشت باز نیست، زیرا تصویر مجموعهٔ $[0, 1]$ که در X باز است در Y باز نیست.

مثال ۳. فرض‌کنیم p نگاشت خط حقیقی R برروی مجموعهٔ سه‌عضوی $A=\{a, b, c\}$ باشد که با ضابطهٔ زیر تعریف شده است،

$$p(x)=\begin{cases} a & \text{، } x>0 \text{ به‌ازای} \\ b & \text{، } x<0 \text{ به‌ازای} \\ c & \text{، } x=0 \text{ به‌ازای} \end{cases}$$

می‌توان تحقیق کرد که توپولوژی خارج قسمتی در A که به‌وسیلهٔ p القا می‌شود ، همسان است که درشکل ۲۲ نشان داده شده است.



شکل ۲۲

حالت خاصی وجود دارد که در آن توپولوژی خارج قسمتی، بخصوص فراوان پیش می‌آید وآن عبارت است از:

تعریف . فرض کنیم X یك فضای توپولوژیك باشد و X^* افرازی از X به‌زیرمجموعه‌های جدا ازهمی که اجتماعشان مساوی X است. فرض کنیم $p : X \to X^*$ نگاشت پوشایی باشد که هرنقطهٔ X را به‌عضوی از X^* می‌نگارد که شامل آن نقطه است. فضای X^* را با توپولوژی خارج‌قسمتی که به‌وسیلهٔ p القا می‌شود **فضای خارج‌قسمتی** X می‌نامیم.

بعضی از ریاضیدانان X^* را یك فضای تجزیه یافضای همانسازی X می‌خوانند، چرا که X^* را به‌عنوان فضایی تصور می کنند که از «یکی گرفتن همهٔ اعضای هر ردهٔ هم‌ارزی به‌یك‌نقطه» به‌دست آمده‌است.

توپولوژی X^* را می‌توان به‌طریق دیگری نیز توصیف کرد. هرزیرمجموعهٔ X^* مانند U گردایه‌ای ازرده‌های هم‌ارزی‌است، ومجموعهٔ $p^{-1}(U)$ مساوی‌است بااجتماع همهٔ رده‌های هم‌ارزی متعلق به U. بنابراین، یك‌مجموعهٔ باز نوعی X^* عبارت است از گردایه‌ای از رده‌های هم‌ارزی که اجتماع آنها مجموعه‌ای باز در X است.

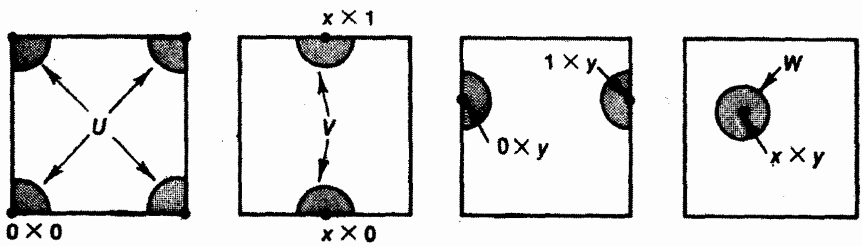
مثال ۴. فرض‌کنیم X مستطیل $[0, 1]\times[0, 1]$ باشد. افراز X^* از X را چنین تعریف می‌کنیم: این افراز متشکل است ازهمهٔ مجموعه‌های تك‌عضوی $\{x\times y\}$ که درآن $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$ وبعلاوهٔ مجموعه‌های دوعضوی ازنوع

$$\{x\times 0,\ x\times 1\} \quad \text{که} \quad 0 < x < 1,$$
$$\{0\times y,\ 1\times y\} \quad \text{که} \quad 0 < y < 1,$$

و مجموعهٔ چهارعضوی

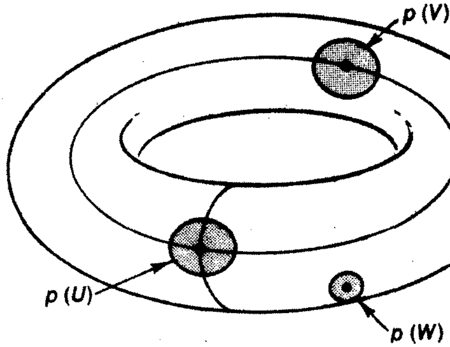
$$\{0\times 0,\ 0\times 1,\ 1\times 0,\ 1\times 1\}.$$

مجموعه‌های باز نوعی X که به‌صورت $p^{-1}(U)$ هستند در شکل ۲۳ با نواحی سایه‌دار نشان‌داده شده‌اند، هریك ازاینها مجموعه‌ای باز در X است که مساوی اجتماعی‌از رده‌های هم‌ارزی است.



شکل ۲۳

همان‌طورکه در شکل ۲۴ نشان داده شده است، تصویر هریك از این مجموعه‌ها به‌وسیلهٔ p مجموعهٔ بازی از X^* است. روش فوق برای توصیف X^*، چیزی نیست جز روش ریاضی بیان آنچه که‌ما به‌هنگام‌درست کردن یك‌چنبره به‌وسیلهٔ چسباندن لبه‌های‌یك مستطیل به‌کمك تصاویر بیان کردیم.



شکل ۲۴

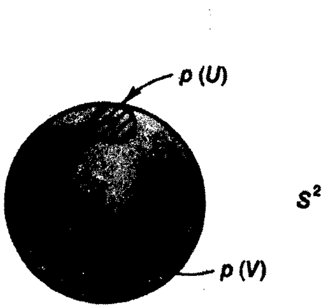
مثال ۵. فرض‌کنیم X گوی بستهٔ واحد

$$\{x\times y \mid x^{2}+y^{2}\leqslant 1\}$$

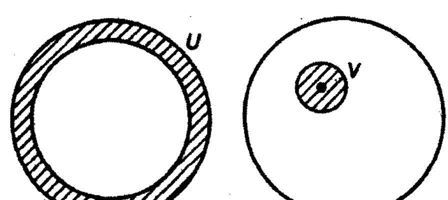
در R^{2} باشد، و فرض کنیم X^{*} افرازی از X باشد که متشکل است از مجموعهٔ $S^{1}=\{x\times y \mid x^{2}+y^{2}=1\}$ وهمهٔ مجموعه‌های تك‌عضوی $\{x\times y\}$ بطوری که $x^{2}+y^{2}<1$. مجموعه‌های باز نوعی X که به‌شکل $p^{-1}(U)$ هستند به وسیلهٔ نواحی سایه‌زدهٔ شکل ۲۵ نشان داده شده‌اند. می‌توان ثابت کرد که X^{*} با زیرفضایی از R^{3} موسوم به **کرهٔ واحد ۲ بعدی**، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، هومئومورف است:

$$S^{2}=\{(x,\ y,\ z\} \mid x^{2}+y^{2}+z^{2}=1\}.$$

تصویر آن درشکل ۲۶ دیده می‌شود.



شکل ۲۶



شکل ۲۵

اینک به‌کشف روابط موجود بین این مفهوم جدید، یعنی توپولوژی خارج‌قسمتی، ومفاهیمی‌که پیش از این بحث‌شدند می‌پردازیم. جالب‌توجه اینکه بسیاری از این مفاهیم آن‌طورکه از آنها انتظار می‌رود رفتار نمی‌کنند.

مثلاً، به‌آسانی می‌توان دید که زیرفضاهـــا خوشرفتار نیستند: اگر $p: X \to Y$ نگاشتی خارج‌قسمتی و A زیرفضایی از X باشدآنگاه نگاشت $p': A \to p(A)$، که از تحدید حوزهٔ تعریف و حوزهٔ مقــادیر p به‌دست آمده است، لازم نیست نگاشتی خارج‌قسمتی باشد (مثال ۶ دیده‌شود). بااین وجود، اگر A در X باز، و p نگاشتی باز باشدآنگاه p' نگاشتی‌خارج‌قسمتی‌است؛ همچنین است هرگاه A، و p هردوبسته‌باشند. اثبات این‌مطلب را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

مثال ۶. زیرفضـــای $A=[0, 1] \cup (2, 3]$ از R را در نظر می‌گیریم؛ فضای A زیرفضایی ازفضای X درمثال۲ نیز هست. فرض‌کنیم نگاشت pی مثال ۲ را به A تحدید کرده‌باشیم. دراین‌صورت، نگاشت $q=p|A: A \to [0, 2]$ پیوسته وپوشاست امانگاشت خارج‌قسمتی نیست. مثلاً مجموعهٔ

$$q^{-1}((1, 2])=(2, 3]$$

در حوزهٔ تعریف، یعنی فضـــای A، بسته است، ولی $(1, 2]$ درحوزهٔ مقادیر یعنی فضای $y=[0, 2]$ بسته نیست.

ترکیب نگاشتها بسیار خوشرفتار است؛ تحقیق در اینکه ترکیب دو نگاشت خارج قسمتی نگاشتی است خارج‌قسمتی بدیهی است.

اما، حاصل‌ضرب دونگاشت خارج‌قسمتی لازم‌نیست نگاشتی خارج‌قسمتی باشد: اگر $p: A \to B$ و $q: C \to D$ نگاشتهایی خارج قسمتی بـــاشند آنگاه نتیجه نمی‌شودکه نگاشت

$$p \times q: A \times C \longrightarrow B \times D$$

که با ضابطهٔ $(p \times q)(a \times c)=p(a) \times q(c)$ تعریف می‌شود، خـــارج قسمتی است (مثال ۸ را نگاه‌کنید). برای اینکه این حکم برقرار باشد، شرایط دیگری برای نگاشتها یا فضاها لازم است. یکی ازاین شرطها (درمورد فضاها) به‌فشردگی موضعی موسوم است، که آن‌را درآتیه بررسی می‌کنیم. (تمرینهای بخش ۳ـ۸ را نگاه‌کنید.) شرط دیگر (در مورد نگاشتها) آن است‌که p و q هردوباز باشند. در این حالت می‌توان به‌آسانی تحقیق کردکه $p \times q$ نیز نگاشتی باز ودرنتیجه نگاشتی خارج‌قسمتی است.

مطلبی هم درمورد توابع پیوسته برفضاهای خارج‌قسمتی بایدگفت وقتی که فضاهای حـــاصل‌ضربی را بررسی می‌کردیم، ضابطه‌ای برای تعیین پیوستگی نگاشتی مـــانند $f: Z \to \prod X_\alpha$ بتوی فضایی حاصل‌ضربی در دست داشتیم. مورد نظیر آن در نظریهٔ فضاهای خارج‌قسمتی، ضابطه‌ای‌است برای تعیین پیوستگی نگاشتی مانند $f: X^* \to Z$

بر فضایی خارج‌قسمتی. در این مورد قضیهٔ زیر برقرار است:

۱۱.۱. قضیه فرض کنیم $p: X \to Y$ نگاشتی خارج قسمتی، و Z یک‌فضا، و $g: X \to Z$ نگاشتی پیوسته باشد که به‌ازای هر $y \in Y$، درمجموعهٔ $p^{-1}(\{y\})$ ثابت است. در این صورت، g نگاشتی پیوسته مانند $f: Y \to Z$ القا می‌کند به‌طوری که $f \circ p = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, dashed, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

برهان. به‌ازای هر $y \in Y$، مجموعهٔ $g(p^{-1}(\{y\}))$ در Z مجموعه‌ای تک‌عضوی است (زیرا g روی $p^{-1}(\{y\})$ ثابت‌است). اگر یگانه‌نقطهٔ‌این مجموعه‌را به $f(y)$ نمایش دهیم آنگاه نگاشتی مانند $f: Y \to Z$ تعریف می‌شود، که در آن به ازای هر $x \in X$، $f(p(x)) = g(x)$. برای‌اثبات پیوستگی f، فرض کنیم V مجموعهٔ‌باز دلخواهی در Z باشد. از پیوستگی g نتیجه می‌شود که مجموعهٔ

$$g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$$

در X باز است. چون p یک‌نگاشت خارج قسمتی است، $f^{-1}(V)$ نیز باید در Y باز باشد. □

اصل هاوسدورف خوش‌رفتار نیست؛ حتی اگر بافضای هاوسدورفی مانند X شروع کنیم، دلیلی وجود ندارد که فضای خارج قسمتی آن هاوسدورف باشد. شرط ساده‌ای برای بسته بودن مجموعه‌هـای تک عضوی در یک فضای خارج قسمتی وجود دارد: اگر $p: X \to Y$ نگاشتی خارج قسمتی باشد آنگاه مجموعه‌های تک عضوی در Y بسته‌اند اگر و فقط اگر هرمجموعهٔ $p^{-1}(\{y\})$ در X بسته‌باشد. بنابراین، اگر X^* افرازی‌از X به‌مجموعه‌های بسته‌باشدآنگاه درفضای خارج‌قسمتی X^* همهٔ مجموعه‌های تک‌عضوی بسته‌اند. یافتن شرایطی که هـاوسدورف‌بودن X^* را تضمین کند دشوارتر است. شرط نسبتاً پیچیده‌ای موسوم به نیم‌پیوستگی ازبالا وجود داردکه می‌توان برای تضمین‌هاوسدورف بودن افراز X^* برآن اعمال کرد. با این شرط دراینجاکاری نداریم. اما حالتی هست که درآن بسادگی می‌توان دیدکه X^* فضایی هاوسدورف است.

۱۱.۲. قضیه فرض‌کنیم $g: X \to Z$ نگاشتی پیوسته و پوشا باشد و X^* گردایهٔ زیرین اززیرمجموعه‌های X باشد:

$$X^* = \{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\}$$

X^* را با توپولوژی خارج قسمتی در نظر می‌گیریم.

(الف) اگر Z هاوسدورف باشد، X^* نیز چنین است.

(ب) نگاشت g نگاشت پیوسته دوسویی $f: X^* \to Z$ را القا می‌کند، و این نگاشت هومئومورفیسم است اگر وفقط اگر g نگاشتی خارج‌قسمتی باشد.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X^* \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

برهان. بنابرقضیهٔ پیش، g نگاشتی پیوسته مانند $f: X^* \to Z$ القا می‌کند؛ واضح است که f دوسویی است. اگر Z هاوسدورف باشد آنگاه تصاویر نقاط متمایز X^* تحت f متمایزند، پس همسایگیهای جدا ازهمی‌مانند U و V دارند. درنتیجه، $f^{-1}(U)$ و $f^{-1}(V)$ همسایگیهای ازهم‌جدای دونقطهٔ مفروض X^* اند.

فرض کنیم f هومئومورفیسم باشد. در این‌صورت، از آنجا که هم f و هم تابع تصویری $p: X \to X^*$ نگاشت خارج قسمتی‌اند، نگاشت $g = f \circ p$ نیز نگاشت خارج‌قسمتی است. بعکس، فرض‌کنیم g نگاشتی خارج‌قسمتی باشد. به‌ازای مجموعهٔ باز مفروضی از X^* مانند V، ملاحظه می‌کنیم که مجموعهٔ

$$g^{-1}(f(V)) = p^{-1}(V)$$

در X باز است (چون p پیوسته است). بنابراین، چون g نگاشتی خارج قسمتی است، $f(V)$ در Z باز است. در نتیجه f مجموعه‌های باز را به‌مجموعه‌های باز می‌نگارد، یعنی هومئومورفیسم است. □

هنگام تحقیق در فضاهای خارج‌قسمتی باید توجه داشت که نباید برای تجسم این فضاها در اتکا به‌شهود افراط کرد. مثال زیر را ملاحظه کنید:

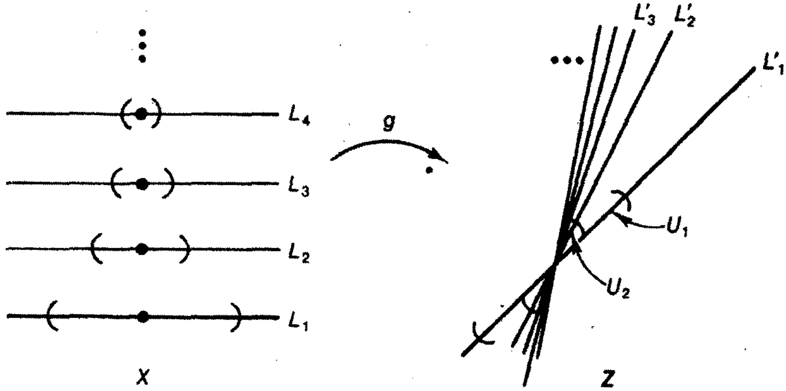
مثال ۷. فرض کنیم X اجتماع همهٔ خطوط مستقیمی در صفحه باشد که به‌صورت $L_n = R \times \{n\}$، به‌ازای $n \in Z_+$، هستند وفرض‌کنیم Z اجتماع همهٔ خطوط مستقیمی‌باشد که از مبدأ می‌گذرند وشیب آنها عدد صحیح مثبتی است. یعنی $Z = \bigcup L'_n$، که درآن،

$$L'_n = \{x \times (nx) \mid x \in R\}.$$

X و Z هردو زیرفضای R^2 هستند فرض‌کنیم $g: X \to Z$، g نگاشتی با ضابطهٔ

$$g(x \times n) = x \times (nx)$$

باشد. این نگاشت هر L_n را، به‌طور خطی، بر L'_n می‌نگارد (شکل ۲۷). مدعی هستیم که g نگاشت خارج قسمتی نیست.



شکل ۲۷

به‌بیان دیگر، می‌خواهیم ثابت کنیم که توپولوژی خارج‌قسمتی در Z که به‌وسیلهٔ نگاشت g القا می‌شود با توپولوژی زیرفضایی Z مساوی نیست.

برای اثبات این حکم، به‌ازای هر n، بازه‌بازی مانند U_n به‌طول $1/n$ و به‌مرکز مبدأ برخط L'_n اختیار می‌کنیم، و فرض می‌کنیم $U=\bigcup U_n$. دراین‌صورت، چون مجموعهٔ $g^{-1}(U)$ در X بازاست، U در Z نسبت به‌توپولوژی خارج‌قسمتی که به‌وسیلهٔ g القا می‌شود باز است. اما U در توپولوژی زیرفضایی Z باز نیست؛ در این توپولوژی، مبدأ یك نقطهٔ حدی $Z-U$، یعنی متمم U، است.

همین‌مطلب‌را به‌طریقی دیگر نیز می‌توان‌بیان‌کرد. فرض‌کنیم از X فضای خارج‌قسمتی X^* را باتبدیل مجموعهٔ $0\times Z_+$ به‌یك‌نقطه به‌دست‌آورده باشیم. ظاهراً، این‌طور به‌نظر می‌آیدکه X^* اساساً همان زیرفضای Z ازصفحه است. اماچنین نیست. نگاشت g نگاشت پیوستهٔ دوسویی $h:X^*\longrightarrow Z$ را القا می‌کند. اما، چون g نگاشت خارج قسمتی نیست، h هومئومورفیسم نمی‌باشد.

مثال ۸. حاصل‌ضرب دونگاشت خارج‌قسمتی لازم‌نیست نگاشتی خارج‌قسمتی‌باشد. فضاهای X و Z را ازمثال پیش‌اختیارمی‌کنیم. امادراینجا فرض می‌کنیم Z ازتوپولوژی خارج‌قسمتی القا شده به‌وسیلهٔ g برخوردار باشد.

فضای R^ω را (باتوپولوژی حاصل‌ضربی) درنظر می‌گیریم. فرض‌می‌کنیم $i:R^\omega\longrightarrow R^\omega$ نگاشت همانی باشد، چون i هومئومورفیسم است، پس نگاشتی خارج قسمتی است. ثابت خواهیم‌کردکه نگاشت

$$f=g\times i: X\times R^\omega\longrightarrow Z\times R^\omega$$

نگاشتی خارج قسمتی نیست. یادآوری می‌کنیم‌که $X=R\times Z_+$.

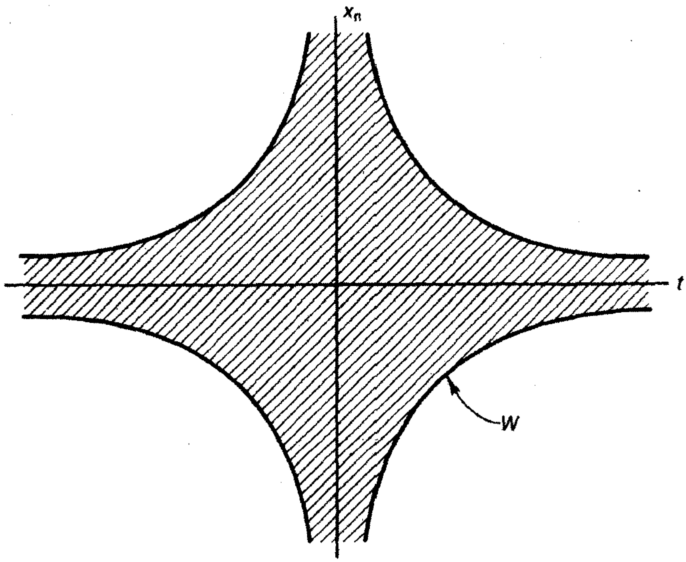
به‌ازای هر $n\in Z_+$، زیر مجموعهٔ U_n از $(R\times Z_+)\times R^\omega$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$U_n = \{(t \times n) \times (x_1, x_2, \ldots); |tx_n| < 1\}.$$

مجموعهٔ U_n در $X \times R^\omega$ باز است، زیرا برابر است باحاصل‌ضرب دکارتی مجموعهٔ باز

$$W = \{t \times x_n : |tx_n| < 1\}$$

درصفحهٔ tx_n، مجموعهٔ باز $\{n\}$ در Z_+، ومجموعه‌های باز R دربقیهٔ مختصها(شکل ۲۸).۱



شکل ۲۸

فرض‌کنیم U مجموعهٔ باز

$$U = \bigcup_{n \in Z_+} U_n$$

از $X \times R^\omega$ باشد. دراین‌صورت احکام زیر برقرارند:

(الف) $f^{-1}(f(U)) = U$.

(ب) $f(U)$ در $Z \times R^\omega$ باز نیست.

بنابراین، چون $f^{-1}(f(U))$ در $X \times R^\omega$ باز است و $f(U)$ در $Z \times R^\omega$ باز نیست، پس نگاشت f خارج‌قسمتی نیست. حال اثبات دوحکم فوق،

(الف) اگر $f^{-1}(f(U))$ متمایز از U باشدآنگاه دونقطهٔ $\mathbf{x} \in U$ و $\mathbf{y} \notin U$ بـاید وجود داشته باشند بطوری که $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$. امـا، باتوجه بمطالب گفته شده، فقط وقتی

---

۱. دراینجا از هومئومورف بودن $R \times Z_+ \times R^\omega$ و $R \times R \times Z_+ \times R^\omega$ استفاده شده است.

به‌ازای $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$ داریم $f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y})$ که به‌ازای نقطه‌ای مانند $(x_1, x_2, \ldots)$ از R^ω داشته‌باشیم

$$\mathbf{x}=(0\times m)\times(x_1, x_2, \ldots),$$

$$\mathbf{y}=(0\times n)\times(x_1, x_2, \ldots).$$

ولی در این‌صورت، این‌دونقطه هردو به U تعلق خواهند داشت، زیرا $|0.x_m|<1$ و $|0.x_n|<1$.

(ب) فرض کنیم $f(U)$ در $Z\times R^\omega$ بازباشد. مجموعهٔ $f(U)$ شامل نقطهٔ 0×0 است، پس حاوی عضو پایه‌ای است مانند $V\times\prod W_i$ که شامل 0×0 است. در اینجا V در Z و W_i در R باز است، و به‌ازای همهٔ مقادیر i، جز تعدادی متناهی ازآنها، $W_i=R$. حال عدد N را چنان انتخاب‌می‌کنیم که $W_N=R$. چون $f(U)$ حاوی $V\times\prod W_i$ است، مجموعهٔ $U=f^{-1}(f(U))$ حاوی $f^{-1}(V\times\prod W_i)=g^{-1}(V)\times\prod W_i$ است. اما $g^{-1}(V)$ مجموعهٔ‌بازی در X است که حاوی مجموعهٔ $Z_+\times 0$ است. بالأخص، $g^{-1}(V)$ شامل‌نقطه‌ای مانند $t_0\times N$ است به‌طوری که $t_0\neq 0$. حال a_N را باشرط $a_N>1/|t_0|$ انتخاب می‌کنیم، و نقطهٔ

$$(t_0\times N)\times(0, \ldots, 0, a_N, 0, \ldots)$$

از $X\times R^\omega$ را درنظر می‌گیریم. چون $W_N=R$، این نقطه در $g^{-1}(V)\times\prod W_i$ قرار دارد. وچون $|t_0\, a_N|$ ازیك کمتر نیست، لذادر U قرارندارد. اما U حاوی $g^{-1}(V)\times\prod W_i$ است، واین تناقض است.

تمرینها

۱. جزئیات مثال ۳ را بررسی کنید.

۲. فرض کنید $\pi_1 : R\times R \to R$ نگاشت تصویری برمختص اول باشد.
(الف) فرض کنید X زیرفضای $(0\times R)\cup(R\times 0)$ از $R\times R$ باشد، و $g=\pi_1|X$. ثابت کنیدکه g نگاشتی است بسته، اما باز نیست.
(ب) Y را زیرفضای $(\bar{R}_+\times R)\cup(R\times 0)$ از $R\times R$ درنظربگیرید وفرض کنید $h=\pi_1|Y$. ثابت کنیدکه h نه بسته است ونه باز، اما نگاشتی خارج‌قسمتی است.
[راهنمایی: $h^{-1}(U)\cap(R\times 0)=U\times 0$.]

۳. فرض کنید $p : X \to Y$ پوشا وپیوسته و A زیرفضایی از X باشد. ثابت کنیدکه اگر A در X باز باشد و p نگاشتی باز باشدآنگاه $p|A$ نگاشتی باز است؛ از اینجا نتیجه بگیریدکه $p' : A \to p(A)$ نگاشت باز است. ثابت کنید که اگر A و p بسته باشندآنگاه $p|A$ و p' بسته‌اند.

۴. فرض کنید X فضایی دلخواه، A یک‌مجموعه، و $p: X \to A$ نگاشتی پوشا باشد. ثابت کنید که توپولوژی‌خارج‌قسمتی القایی در A به‌وسیلهٔ p ظریفترین (بزرگترین) توپولوژی‌ای است که نسبت به‌آن تابع p پیوسته است.

۵. (الف) درصفحهٔ X رابطه‌ای هم‌ارزی به‌قرار زیر تعریف می‌کنیم:

$x_0 \times y_0 \sim x_1 \times y_1$ اگر $x_0 + y_0^2 = x_1 + y_1^2$.

فرض کنید X^* گردایهٔ رده‌های هم‌ارزی برخوردار از توپولوژی خارج‌قسمتی باشد. X^* بایک فضای شناخته‌شده هومئومورف است؛ آن‌فضا کدام است؟

(ب) قسمت (الف) را درمورد رابطهٔ هم‌ارزی

$x_0 \times y_0 \sim x_1 \times y_1$ اگر $x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2$،

تکرار کنید.

۶. (الف) $g: R^2 \to R$ را باضابطهٔ $g(x \times y) = x + y^2$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که g نگاشتی خارج قسمتی است.

(ب) $g: R^2 \to R_+$ را باضابطهٔ $g(x \times y) = x^2 + y^2$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که g نگاشتی خارج‌قسمتی است.

(پ) قسمتهای (الف) و (ب) را با تمرین ۵ مقایسه کنید.

۷. فرض کنید Z زیرفضای $(R \times 0) \cup (0 \times R)$ از R^2 باشد. $g: R^2 \to Z$ را با ضابطه‌ای

$$g(x \times y) = x \times 0 \quad \text{به‌ازای } x \neq 0،$$
$$g(0 \times y) = 0 \times y,$$

تعریف می‌کنیم

(الف) آیا g نگاشتی خارج قسمتی است؟ آیا g پیوسته است؟

(ب) ثابت کنید که در توپولوژی خارج قسمتی القایی به‌وسیلهٔ g، فضای Z هاوسدورف نیست.

۸. فرض کنید C_n زیرفضایی از R^2 باشدکه با

$$C_n = \left\{ x \times y \,\middle|\, \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \right\}$$

تعریف شده است. فرض کنید Y زیرفضای

$$Y = \bigcup_{n \in Z_+} C_n$$

از R^2 باشد، و X را زیرفضای $C_1 \times Z_+$ از $R^2 \times R$ فرض کنید. $g: X \to Y$ را باضابطهٔ

$$g((x\times y)\times n)\left(\frac{x}{n}\times\frac{y}{n}\right)$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که g پیوسته و پوشاست، اما خارج‌قسمتی نیست.

۹. فرض کنید $\{X_\alpha\}$ خانواده‌ای از فضاها، و $\{p_\alpha\}$ خانواده‌ای از نگاشتهای $p_\alpha:X_\alpha \to A$ باشد که درآن A مجموعهٔ دلخواهی است.
(الف) ثابت کنید که ظریفترین توپولوژی یکتایی مانند $\mathscr{T}$ در A وجود دارد که نسبت به‌آن هرنگاشت p_α پیوسته است.
(ب) ثابت کنید که نگاشت $f:A \to Y$ نسبت به $\mathscr{T}$ پیوسته است اگر وفقط اگر هریك ازنگاشتهای $f\circ p_\alpha$ پیوسته‌باشد.

* تمرینهای تکمیلی:

گروههای توپولوژیك

در این تمرینها ، گروههای توپولوژیك و بعضی از خواص آنها موردبحث قرار می گیرند. نام توپولوژی خارج‌قسمتی ناشی ازحالت خاصی است که خارج‌قسمت یك گروه توپولوژیك را بریك زیر گروه‌آن تشکیل می‌دهند.

یك **گروه توپولوژیك** G گروهی است که فضای توپولوژیك نیز هست، با این شرط که نگاشت از $G\times G$ به G که $x\times y$ را به $x.y$ می‌نگارد، و نگاشت از G به G که x را به x^{-1} می‌نگارد پیوسته‌باشند.

۱. ثابت کنید که G گروه توپولوژیك است اگر وفقط اگر نگاشت از $G\times G$ به G که $x\times y$ را به $x^{-1}.y$ می‌نگارد پیوسته باشد.

۲. ثابت کنید که گروههای زیر گروه توپولوژیك‌اند:
(الف) $(Z, +)$
(ب) $(R, +)$
(پ) $(R_+, \cdot)$
(ت) $(S^1, .)$، که درآن S^1 فضای همهٔ اعداد مختلط z است که $|z|=1$.
(ث) گروه خطی عمومی $GL(n)$ با عمل ضرب ماتریسها. ($GL(n)$ مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای وارون‌پذیر n در n است، که به‌عنوان یك زیرمجموعهٔ $R^{(n^2)}$ یك فضای توپولوژیك است، چگونگی این‌شمول بدیهی است.)
(ج) $(R^J, +)$ با توپولوژیهای حاصل‌ضربی، یکنواخت، وجعبه‌ای.

۳. فرض کنید $(G, .)$ یك گروه توپولوژیك، و α عضوی از G باشد. ثابت کنید که نگاشتهای $f_\alpha, g_\alpha: G \to G$ که با ضابطه‌های

$$g_\alpha(x) = x \cdot \alpha \quad و \quad f_\alpha(x) = \alpha \cdot x$$

تعریف می‌شوند، هومئومورفیسمهایی از G هستند. نتیجه بگیرید که G یک فضای همگن است. (یعنی هر زوج از نقاط G همسایگیهایی دارند که هومئومورف‌اند.)

۴. فرض کنید H زیرگروهی از G باشد. اگر $x \in G$، تعریف می‌کنیم $xH = \{x \cdot h \mid h \in H\}$؛ این مجموعه را یک **همردهٔ چپ** H در G می‌گوییم. فرض کنید G/H نمایش گردایهٔ همرده‌های چپ H در G باشد. این گردایه یک افراز G است. اگر G یک گروه توپولوژیک باشد، G/H را با توپولوژی خارج‌قسمتی در نظر می‌گیریم.

(الف) ثابت کنید که اگر $\alpha \in G$، آنگاه نگاشت f_α، که در تمرین پیش‌آمد، هومئومورفیسمی به G/H القا می‌کند که xH را به $(\alpha \cdot x)H$ می‌نگارد. نتیجه بگیرید که G/H یک فضای همگن است.

(ب) ثابت کنید که نگاشت خارج‌قسمتی $p: G \to G/H$ باز است.

(پ) ثابت کنید که اگر H مجموعه‌ای بسته در توپولوژی G باشد آنگاه مجموعه‌های تک‌عضوی در G/H بسته‌اند.

(ت) ثابت کنید که اگر H یک زیرگروه نرمال G باشد آنگاه G/H یک گروه توپولوژیک است.

۵. $(Z, +)$ یک زیرگروه نرمال $(R, +)$ است. گروه خارج قسمتی R/Z یک گروه توپولوژیک شناخته شده است. آن گروه کدام است.

۶. فرض کنید G یک گروه توپولوژیک با عضو بی‌اثر e باشد. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از G باشند، $A \cdot B$ را مجموعهٔ همهٔ اعضای $a \cdot b$ قرار می‌دهیم که $a \in A$ و $b \in B$. فرض کنید A^{-1} نمایش مجموعهٔ نقاط a^{-1} باشد که $a \in A$.

(الف) اگر U یک همسایگی e باشد، ثابت کنید که یک همسایگی V از e هست که $V \cdot V^{-1} \subset U$.

(ب) اگر A مجموعهٔ بسته‌ای باشد که شامل e نباشد، ثابت کنید که یک همسایگی V از e وجود دارد به‌طوری که مجموعه‌های باز V و

$$A \cdot V = \bigcup_{\alpha \in A} f_\alpha(V)$$

ازهم جدا هستند. (f_α نگاشتی است که درتمرین ۳ تعریف شد.)

(پ) فرض کنید مجموعه‌های تک عضوی در G بسته باشند. ثابت کنید که G هاوسدورف است. در واقع، ثابت کنید که G در اصل موضوع جداسازی قویتر زیر، که به اصل موضوع منتظم‌بودن موسوم است، صدق می‌کند: مجموعهٔ بستهٔ

C ونقطهٔ x که در C نیست مفروض‌اند، مجموعه‌های باز ازهم‌جدایی وجوددارند که یکی x ودیگری C را در بر دارد.

۷. فرض‌کنید H یك‌زیرگروه G باشد که در توپولوژی G بسته است؛ فرض‌کنید $p: G \to G/H$ نگاشت خارج‌قسمتی باشد. ثابت‌کنیدکه G/H دراصل موضوع منتظم‌بودن صدق می‌کند. [راهنمایی: نخست حالتی را در نظر بگیرید که درآن A مجموعهٔ بسته‌ای در G/H است‌که شامل $p(e)$ نیست. فرض‌کنید $B = p^{-1}(A)$. یك‌همسایگی e مانند U بیابیدکه جدا از B باشد، وقرار دهید $V^{-1} \cdot V \subset U$. سپس مجموعه‌های $V \cdot H$ و $V \cdot B$ را درنظر بگیرید.]

۸. ثابت‌کنیدکه اگر H یك‌زیرگروه G باشد، بستار H نیز یك‌زیرگروه است.

۳

همبندی وفشردگی

در آموزش حسابـان سه‌قضیهٔ اساسی در مورد توابع پیوسته وجود دارد ، و آنچه‌که از حسابان می‌ماند متکی برهمین سه‌قضیه است. این‌قضایا عبارت‌اند از:

قضیهٔ مقدارمیانی. اگر $f:[a, b] \to R$ پیوسته و r عددی حقیقی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشدآنگاه عضوی مانند c از $[a, b]$ وجود داردکه $f(c)=r$.

قضیهٔ مقدارماکزیمم. اگر $f:[a, b] \to R$ پیوسته باشدآنگاه عضو $c \in [a, b]$ وجود داردکه به‌ازای هر $x \in [a, b]$، $f(x) \leqslant f(c)$.

قضیهٔ پیوستگی یکنواخت. اگر $f:[a, b] \to R$ پیوسته باشد آنگـاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ هست به‌طوری‌که به‌ازای هر x_1 و x_2 از $[a, b]$ ، اگر $|x_1 - x_2| < \delta$ آنگاه $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

این قضایا در موارد مختلفی به کار برده می‌شوند . مثلاً، قضیهٔ مقدار میانی برای ساختن‌توابع معکوس ، مانند $\sqrt[3]{x}$ و $\arcsin x$ ، به‌کار می‌رود؛ قضیهٔ مقدار ماکزیمم برای اثبات قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات، که خود مبنایی‌است برای اثبات دو قضیهٔ اساسی حسابان، به‌کارمی‌رود. قضیهٔ پیوستگی یکنواخت را می‌توان برای اثبات این‌حکم که هرتابع پیوسته انتگرال‌پذیر است به کار برد.

از سه قضیهٔ مذکور به‌عنوان‌قضایایی درمورد توابع پیوسته یادکردیم. ولی‌می‌توان آنها را به‌عنوان قضایایی در مورد بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ ازاعداد حقیقی نیز در نظرگرفت. این قضایا نه‌تنها به‌خاصیت پیوستگی f بستگی دارند بلکه به‌خواص توپولوژیکی فضای $[a, b]$ نیز وابسته‌اند.

خاصیتی از فضای $[a, b]$ که قضیهٔ مقدار میانی به‌آن بستگی دارد، خاصیتی‌است

موسوم به همبندی، وخاصیتی که دوقضیهٔ دیگر به‌آن وابسته‌اند فشردگی نام دارد. دراین فصل این‌خواص را برای فضاهای توپولوژیك دلخواه تعریف می کنیم، و صورتهای کلی مناسبی را برای هریك ازاین قضایا ثابت می کنیم.

به‌همان اندازه که سه‌قضیهٔ نامبرده برای‌نظریهٔ حسابان بنیادی هستند، مفاهیم همبندی و فشردگی نیز برای آنالیز عالی، هندسه، و توپولوژی بنیادی هستند ــ در واقع، این مفاهیم تقریباً در هر موضوعی که به‌مفهوم فضای توپولوژیك مربوط باشد، بنیادی‌اند.

۳ــ۱ فضاهای همبند

تعریف همبندی برای یك فضای توپولوژیك تعریفی کاملاً طبیعی‌است. فضایی‌را «جداشده» گوییم در صورتی‌که بتوان آن‌را به‌دو تکه ــ یعنی دومجموعهٔ باز ازهم‌جدا ــ تقسیم کرد. درغیراین‌صورت، آن‌فضارا همبند خوانند. ازهمین‌مفهوم‌ساده نتایج‌فراوانی به‌دست‌می‌آید.

تعریف. فرض‌کنیم X فضایی توپولوژیك باشد. **جداسازی‌ای** از X عبارت است از زوج U و V از زیرمجموعه‌های باز ناتهی جدا ازهم X که اجتماعشان مساوی X است. فضای X را در صورتی **همبند** (مرتبط) خوانند که برای‌آن هیچ‌جداسازی‌ای وجود نداشته باشد.

آشکار است که همبندی خاصیتی توپولوژیکی است، چه تماماً برحسب گردایهٔ مجموعه‌های باز X بیان شده است. به‌عبارت دیگر، اگر X همبند باشد آنگاه هرفضای هومئومورف باآن نیز همبند است.

طریقهٔ دیگر بیان همبندی به‌قرار ذیل است:

فضای X همبند است اگر و فقط اگر تنها زیرمجموعه‌های X که در X هم‌باز وهم بسته‌اند مجموعهٔ تهی وخود X باشند.

زیرا اگر A یك زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی X باشد که در X هم باز و هم بسته است، آنگاه مجموعه‌های $U=A$ و $V=X-A$ برای X تشکیل یك جداسازی را می‌دهند. زیرا آنها باز، ناتهی، و از هم جدا هستند و اجتماع آنها X است. بعکس، اگر U و V برای X تشکیل یك جداسازی بدهند آنگاه U ناتهی ومتمایز از X است، وبعلاوه در X هم‌باز وهم‌بسته است.

برای زیرفضایی مانند Y ازفضای توپولوژیك X، طریقهٔ سودمند دیگری برای بیان تعریف همبندی وجود دارد:

۱۰۱ء لم اگر Y یك زیرفضای X باشد آنگاه هرجداسازی Y زوجی است از مجموعه‌های ناتهی وجدا ازهم، مانند A و B، که اجتماع‌آنها Y است، وهیچیك ازآنها شامل یك‌نقطهٔ حدی دیگری نیست. فضای Y در صورتی همبند است که هیچ جداسازی برای‌آن موجود نباشد.

برهان. نخست، فرض کنیم A و B تشکیل جداسازی‌ای برای Y بدهند. در این صورت، A در Y هم باز است و هم بسته. بستار A در Y مجموعهٔ $\bar{A}\cap Y$ است (که در آن $\bar{A}$ مطابق معمول نمایش بستار A در X است). چون A در Y بسته است، $A=\bar{A}\cap Y$؛ ویا به‌عبارت معادل، $\bar{A}\cap B=\varnothing$. اما چون $\bar{A}$ مساوی است با اجتماع A با نقاط حدی آن، B شامل هیچ نقطهٔ حدی A نیست. به‌همین قیاس ثابت می‌شود که A شامل هیچ نقطهٔ حدی B نیست.

بعکس، فرض کنیم A و B دومجموعهٔ ناتهی و جدا ازهم باشند که اجتماع آنها Y است و هیچیک شامل نقطهٔ حدی دیگری نیست. در این صورت، $\bar{A}\cap B=\varnothing$ و $A\cap\bar{B}=\varnothing$؛ و از آنجا $\bar{A}\cap Y=A$ و $\bar{B}\cap Y=B$ بنابراین، A و B هردو در Y بسته‌اند، و چون $A=Y-B$ و $B=Y-A$، پس هردو در Y باز نیز هستند. □

مثال ۱. فرض کنیم X یك فضای دو نقطه‌ای با توپولوژی ناگسسته باشد. واضح است که هیچ جداسازی‌ای برای X ممکن نیست، پس X همبند است.

مثال ۲. فرض کنیم Y زیرفضای $[-1,0)\cup(0,1]$ ازخط حقیقی R باشد. هریك از مجموعه‌های $[-1,0)$ و $(0,1]$ در Y ناتهی و بازاست (اگرچه در R چنین نیست)؛ بنابراین، این‌دو مجموعه تشکیل جداسازی‌ای برای Y می‌دهند. همچنین، می‌توان گفت که هیچیك ازاین دو مجموعه شامل نقطهٔ حدی دیگری نیست. (البته ۰ یك نقطهٔ حدی مشترك آنهاست، ولی این موضوع تأثیری درنتیجهٔ ما ندارد.)

مثال ۳. زیرفضای $X=[-1,1]$ از خط حقیقی را در نظر می‌گیریم. مجموعه‌های $[-1,0]$ و $(0,1]$ ناتهی واز هم جداهستند، ولی تشکیل جداسازی‌ای برای X نمی‌دهند. زیرا مجموعهٔ اول در X باز نیست. به‌طریق دیگر، می‌توان ملاحظه کرد که ۰ یك نقطهٔ حدی دومی است و به‌مجموعهٔ اول تعلق دارد. در واقع، هیچ جداسازی‌ای برای فضای $[-1,1]$ وجود ندارد. این‌مطلب را بزودی ثابت می‌کنیم.

مثال۴. مجموعهٔ Q، مجموعهٔ اعدادگویا، همبند نیست. درواقع، تنها زیرفضاهای همبند Q مجموعه‌های تك‌عضوی‌هستند، اگر Y زیرفضایی از Q باشد که شامل دونقطهٔ p و q است، می‌توان عددی گنگ‌مانند a بین p و q اختیار کرد و Y را به‌صورت اجتماع دومجموعهٔ باز

$$Y\cap(a,+\infty) \quad \text{و} \quad Y\cap(-\infty,a)$$

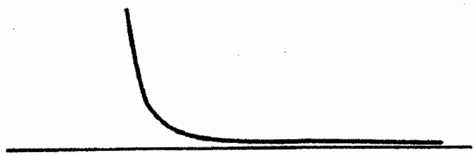
نوشت.

مثال ۵. زیرمجموعهٔ ذیل ازصفحهٔ R^2 را درنظر می‌گیریم:

$$X=\{x\times y \mid y=0\}\cup\{x\times y \mid y=\frac{1}{x} \text{ و } x>0\}.$$

در این‌صورت، X همبند نیست؛ در واقع، همین دو مجموعه تشکیل جداسازی‌ای برای X

می‌دهند، زیرا هیچیك ازآنها شامل نقطهٔ حدی دیگری نیست. شکل ۱ دیده شود.



شکل ۱

چند مثال ازفضاهایی که همبند نیستند ارائه دادیم. چگونه می‌توان فضاهایی ساخت که همبندباشند؟ اینك، قضایایی ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهند چگونه می‌توان ازفضاهای همبند مفروض فضاهای همبند جدیدی تشکیل داد. سپس، دربخش بعدی این قضایا را در ساختن فضاهای همبند خاصی، مانند بازه‌ها در R و گویها ومکعبها در R^n، به‌کار خواهیم برد. نخست، لم ذیل را می‌آوریم:

۲۰۱ لم اگر مجموعه‌های C و D تشکیل جداسازی‌ای برای X بدهند و Y زیرمجموعهٔ همبندی از X باشد آنگاه Y تماماً یا در D ویا در C واقع است.

برهان. چون C و D هردو در X بازند، مجموعه‌های $C\cap Y$ و $D\cap Y$ در Y بازند. این‌دو مجموعه جدا ازهم‌اند واجتماع آنها Y است. حال اگر هردو ناتهی‌باشند، تشکیل جداسازی‌ای برای Y می‌دهند. پس، یکی ازآنها تهی است. بنابراین، Y باید تماماً در C یا در D قرار گیرد.□

۳۰۱ قضیه اجتماع گردایه‌ای از مجموعه‌های همبند که یك نقطهٔ مشترك دارند، همبند است.

برهان. فرض‌کنیم $\{A_\alpha\}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های همبند فضای X باشد و p نقطه‌ای از $\bigcap A_\alpha$. ثابت می‌کنیم که مجموعهٔ $Y=\bigcup A_\alpha$ همبند است. فرض کنیم $Y=C\cup D$ جداسازی‌ای برای Y باشد. نقطهٔ p دریکی ازدو مجموعهٔ C یا D قرار دارد؛ فرض‌کنیم $p\in C$. چون مجموعهٔ A_α همبنداست، باید تماماً در C یا در D قرار گیرد. اما A_α نمی‌تواند در D واقع شود، چون شامل نقطهٔ p از C است. پس به‌ازای هر α، $A_\alpha\subset C$؛ و در نتیجه $\bigcup A_\alpha\subset C$، واین با ناتهی‌بودن D متناقض است.□

۴۰۱ قضیه فرض‌کنیم A زیر مجموعه‌ای همبند از X باشد. اگر $A\subset B\subset \bar{A}$ آنگاه B نیز همبند است.

به‌بیان دیگر: اگر B با افزودن بعضی یا همهٔ نقاط حدی مجموعهٔ همبند A به‌آن به‌دست آید آنگاه B نیز همبند است.

برهان. فرض کنیم A همبند باشد و $A\subset B\subset \bar{A}$. فرض کنیم $B=C\cup D$ جداسازی‌ای برای B باشد. بنابرلم ۱.۰.۲، A باید تماماً در C یا در D قرار گیرد؛ فرض کنیم $A\subset C$. در این صورت، $\bar{A}\subset \bar{C}$، از آنجاکه $\bar{C}$ و D از هم جدا هستند، B نمی‌تواند با D نقطهٔ مشترکی داشته باشد، و این امر با این فرض که D یک زیرمجموعهٔ ناتهی B است متناقض است. □

۱.۰.۵ قضیه تصویر هرفضای همبند، تحت یک نگاشت پیوسته، همبند است.

برهان. فرض کنیم $f: X \to Y$ نگاشتی پیوسته و X همبند باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که مجموعهٔ $Z=f(X)$ همبند است. چون نگاشتی که از f با تحدید حوزهٔ مقادیر آن به‌فضای Z به‌دست می‌آید پیوسته است، برای اثبات حکم کافی است که حکم را در مورد نگاشتی پیوسته و پوشا مانند

$$g: X \to Z$$

ثابت کنیم.

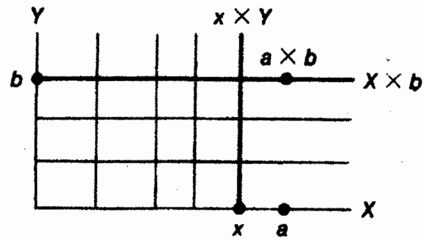
فرض کنیم $Z=A\cup B$ جداسازی‌ای برای Z باشد، که در آن A و B دو مجموعهٔ ناتهی جدا از هم و در Z بازند. در این‌صورت، $g^{-1}(A)$ و $g^{-1}(B)$ مجموعه‌های جدا ازهم هستند که اجتماع آنها X است. این مجموعه‌ها در X بازند، زیرا g پیوسته‌است؛ و ناتهی‌اند، زیرا g پوشاست. بنابراین، این‌دومجموعه تشکیل جداسازی‌ای برای X می‌دهند، و این با فرض همبند بودن X متناقض است. □

۱.۰.۶ قضیه حاصلضرب دکارتی فضاهای همبند، فضایی همبند است.

برهان. نخست، قضیه را برای دو فضای X و Y ثابت می‌کنیم. تجسم این اثبات آسان است. یک «نقطهٔ پایه» مانند $a\times b$ درحاصلضرب $X\times Y$ اختیار می‌کنیم. توجه کنید که چون «قاچ افقی» $X\times b$ با X هومئومورف است، پس همبند می‌باشد؛ همچنین، هرقاچ قائم مانند $x\times Y$ همبند است، زیرا با Y هومئومورف است. درنتیجه، هرفضای «T شکل» به‌صورت

$$T_x=(X\times b)\cup(x\times Y)$$

همبند است، زیرا برابر است با اجتماع دومجموعهٔ همبند که نقطهٔ $x\times b$ بین آنها مشترک است. شکل۲ دیده‌شود. اینک، اجتماع $\bigcup_{x\in X} T_x$ متشکل از همهٔ این‌فضاهای «T شکل» را تشکیل می‌دهیم. این اجتماع همبند است، زیرا اجتماع گردایه‌ای ازمجموعه‌های همبند است که دارای نقطهٔ مشترک $a\times b$ هستند. چون این اجتماع مساوی است با $X\times Y$، پس فضای $X\times Y$ همبند است.



شکل ۲

اثبات قضیه برای هر تعداد نامتناهی از فضای همبند به‌استقراست ، که در آن از هومئومورف بودن $X_1 \times \cdots \times X_n$ با $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$، که اثباتش آسان است، استفاده می‌شود.

اینك، به‌اثبات قضیه درحالتی‌که تعداد فضاها دلخواه است می‌پردازیم. فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ خانوادهٔ اندیسدار دلخواهی از فضاهای همبند باشد، وفرض کنیم

$$X = \Pi_{\alpha\in J} X_\alpha$$

«نقطهٔ پایهٔ» دلخواهی مانند $\mathbf{b} = (b_\alpha)_{\alpha\in J}$ برای X انتخاب می‌کنیم.

به‌ازای هرزیرمجموعهٔ متناهی از J مانند $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ، زیرفضای $X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ از X را چنین تعریف می‌کنیم؛ $X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ عبارت است از فضای همهٔ نقاط $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ به‌طوری‌که به‌ازای $\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n$، $x_\alpha = b_\alpha$. مدعی هستیم‌که $X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ باحاصل‌ضرب متناهی

$$X_{\alpha_1} \times \cdots \times X_{\alpha_n}$$

هومئومورف است، وبنابراین همبند است؛ زیرا نگاشت دوسویی بدیهی

$$(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}) \longrightarrow (y_\alpha)_{\alpha\in J}$$

بین این‌دوفضا برقرار است‌که به‌ازای هر α، اگر $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ آنگاه $y_\alpha = x_\alpha$، وبه‌ازای سایر مقادیر α، $y_\alpha = b_\alpha$. نگاشت‌فوق هرعضو پایهٔ‌فضای $X_{\alpha_1} \times \cdots \times X_{\alpha_n}$ را به‌عضو پایه‌ای از $X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ می‌نگارد.

ازاینجا نتیجه می‌شودکه زیرفضای Y از X ، که اجتماع این‌زیرفضاهاست، همبند است؛ این زیرفضا عبارت است از

$$Y = \bigcup X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

که در آن اجتماع روی همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ از J موردنظر است. همبندی Y ناشی ازاین است که زیرفضاهای $X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ همبندند وهمگی نقطهٔ پایهٔ $\mathbf{b}=(b_\alpha)_{\alpha \in J}$ را دربردارند.

ممکن است چنین به‌نظر رسدکه برهان تمام شده است. اما چنین نیست، زیرا Y همهٔ X نیست. فضای Y عبارت است از همهٔ نقاط $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ از X بااین خاصیت‌که به‌ازای همهٔ مقادیر α، جز عده‌ای متناهی از مقادیر آن، رابطهٔ $x_\alpha = b_\alpha$ برقرار است. بنابراین، به‌تعبیری Y فقط جزء بسیارکوچکی از X است. اما، اینك این‌امرکه توپولوژی موردنظر در X همان توپولوژی حاصل‌ضربی است به‌کار گرفته می‌شود. مدعی هستیم که تحت توپولوژی حاصل‌ضربی X، بستار Y مساوی X است. اگر این‌حکم را ثابت کنیم، همبندی X از قضیهٔ ۴.۱ نتیجه می‌شود.

فرض‌کنیم (x_α) نقطهٔ‌دلخواهی از X باشد. و $U = \prod U_\alpha$ را عضو پایهٔ دلخواهی شامل (x_α) می‌گیریم، وثابت می‌کنیم‌که U فضای Y راقطع می‌کند. برای این منظور ملاحظه می‌کنیم‌که هر U_α در X_α باز است و رابطهٔ $U_\alpha = X_\alpha$ به‌ازای همهٔ مقادیر α، جز تعدادی متناهی ازآنها، مثلاً، $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$، برقراراست. حال نقطهٔ (y_α) رادر X چنین تعریف می‌کنیم:

$$y_\alpha = \begin{cases} x_\alpha & \text{به‌ازای } \alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{،} \\ b_\alpha & \text{به‌ازای سایر مقادیر } \alpha \text{،} \end{cases}$$

در این صورت، (y_α) نقطه‌ای است از Y، زیرا به‌فضای $X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ تعلق‌دارد. همچنین، (y_α) نقطه‌ای از U است، زیرا به‌ازای $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$، $y_\alpha = x_\alpha \in U_\alpha$ و به‌ازای سایر مقادیر α، $y_\alpha = b_\alpha \in X_\alpha$. بنابراین، U زیرفضای Y را قطع می‌کند، و این همان است که می‌خواستیم. □

این قضیه در صورتی که توپولوژی جعبه‌ای را در X به‌کاربریم برقرار نیست. تمرین ۱۱ را ملاحظه کنید.

تمرینها

۱. فرض‌کنید $\mathscr{T}$ و $\mathscr{T}'$ دوتوپولوژی در X باشند. اگر $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$ آنگاه همبندی X در یکی از این دو توپولوژی مستلزم چه‌حکمی در مورد همبندی X در دیگری‌است؟

۲. ثابت‌کنیدکه اگر $\prod X_\alpha$ همبند و ناتهی باشدآنگاه هریك از X_α ها همبند است.

۳. فرض‌کنید $\{A_n\}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های همبند X باشد، به‌طوری که به‌ازای

همهٔمقادیر n، $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$. ثابت کنید که $\bigcup A_n$ همبند است.

۴. فرض کنید $\{A_\alpha\}$ گردایه‌ای اززیرمجموعه‌های همبند X باشد، و A یك‌زیرمجموعهٔ همبندباشد. ثابت کنید که اگر به‌ازای همهٔ αها، $A \cap A_\alpha \neq \varnothing$ آنگاه $A \bigcup (\bigcup A_\alpha)$ همبند است.

۵. ثابت کنید که اگر X مجموعه‌ای نامتناهی باشد آنگاه X با توپولوژی متمم متناهی، یعنی

$$\mathscr{C}_f = \{A \mid \text{یا متناهی است یا مساوی } X \text{ است } X - A\}$$

همبند است.

۶. فضای X را درصورتی کلاً ناهمبند خوانیم که تنها زیرمجموعه‌های همبند آن مجموعه‌های تك‌عضوی باشند. ثابت کنید که هر فضای متناهی هاوسدورف کلاً ناهمبند است.

۷. اگر X دارای توپولوژی گسسته باشد، آیا می‌توان گفت که X کلاً ناهمبند است؟ آیا عکس این‌حکم برقرار است؟

۸. اگر X همبند باشد، آیا می‌توان نتیجه‌گرفت که به‌ازای زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی‌ای از X مانند A، $\mathrm{Bd}\, A \neq \varnothing$؟آیا عکس این حکم برقراراست؟ (به‌خاطر بیاورید که $\mathrm{Bd}\, A = \bar{A} \cap (\overline{X - A})$.)

۹. فرض کنید $A \subset X$. ثابت کنید که اگر C یك‌زیرمجموعهٔ همبند X باشدکه هم A وهم $X - A$ را قطع کندآنگاه C مجموعهٔ $\mathrm{Bd}\, A$ را هم‌قطع می‌کند.

۱۰. آیا فضای R_l همبند است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۱. ثابت کنید که R^ω با توپولوژی جعبه‌ای همبند نیست. برای این منظور، ثابت کنید که اگر A مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کراندار باشدآنگاه A هم باز و هم بسته است. اگر R^ω دارای توپولوژی یکنواخت باشدآنگاه در مورد همبندی آن چه می‌توان گفت؟

۱۲. فرض کنید $Y \subset X$؛ فرض کنید X و Y همبند باشند. ثابت کنید که اگر A و B تشکیل جداسازی‌ای برای $X - Y$ بدهندآنگاه $Y \cup A$ و $Y \cup B$ همبند هستند.

۳-۲ مجموعه‌های همبند درخط حقیقی

قضایای بخش پیش نشان می‌دهند که چگونه می‌توان از فضاهای همبند مفروض فضاهای

همبند جدیدی ساخت. اما برای شروع، ازچه منابعی می‌توان فضاهای همبندی در اختیار داشت؟ بهترین نقطهٔ شروع خط حقیقی است. در این بخش، ثابت می‌کنیم که هر شعاع وهر بازه در R همبند است.

یك‌کاربرد این مطالب در قضیهٔ مقدار میانی حسابان است که به‌طرز مناسبی تعمیم یافته است. به‌عنوان‌کاربردی دیگر، ثابت می‌کنیم که فضاهای مأنوسی مانندگویها و کره‌های فضای اقلیدسی همبند هستند. اثبات این مطلب منجر به‌مفهوم تازه‌ای موسوم به همبندی راهی می‌شودکه این مفهوم را نیز بحث می‌کنیم.

با این مطلب که بازه‌ها وشعاعهای R همبند هستند ممکن است در آنالیزآشنا شده باشید. ما این‌مطلب را دوباره در اینجا به‌صورتی تعمیم یافته ثابت می‌کنیم. ملاحظه خواهیدکردکه این حکم به‌خواص جبری R بستگی‌ندارد، بلکه تنها به‌خواص ترتیبی‌آن بستگی دارد. برای روشن کردن این مطلب، قضیه را برای مجموعهٔ مرتب دلخواهی که از خواص ترتیبی R برخوردار است ثابت می‌کنیم. چنین مجموعه‌ای را پیوستار خطی می‌خوانیم.

تعریف . مجموعهٔ مرتب سادهٔ L راکه بیش از یك‌عضودارد وقتی **پیوستار خطی** خوانیم که در شرایط ذیل صدق کند:

(۱) L دارای خاصیت کوچکترین کران بالا باشد.

(۲) اگر $x < y$ آنگاه z ی موجود باشد که $x < z < y$.

۱ ۰۲. قضیه. اگر L پیوستاری خطی باتوپولوژی ترتیبی باشدآنگاه L و هر بازه و هرشعاع آن همبند است.

برهان. فرض‌کنیم Y یك‌زیرمجموعهٔ L باشدکه یا مساوی L است ویا شعاع یا بازه‌ای از L. مجموعهٔ Y «محدب» است، بدین معنی‌که اگر a و b دوعضو دلخواه Y باشند و $a < b$ آنگاه بازهٔ $[a, b]$ از نقاط L تماماً درمجموعهٔ Y قرار دارد.

فرض‌کنیم A و B دومجموعهٔ ناتهی جدا ازهم باشند که در Y بازند. می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که $Y \neq A \cup B$، و به‌این‌وسیله ثابت می‌شودکه هیچ جداسازی‌ای برای Y یافت نمی‌شود.

نقطه‌ای مانند a از A و b از B اختیار می‌کنیم؛ فرض می‌کنیم علامتها چنان گزیده شوندکه $a < b$. (مرتکب این فرض خطا نشویدکه هر نقطهٔ A کمتر از هرنقطهٔ B است؛ چنین چیزی ضرورت ندارد که برقرار باشد.) چون Y «محدب» است، داریم $[a, b] \subset Y$. می‌خواهیم نقطه‌ای از $[a, b]$ بیابیم که نه در A باشد ونه در B. مجموعه‌های

$$A_\circ = A \cap [a, b] \quad \text{و} \quad B_\circ = B \cap [a, b]$$

را در نظر می‌گیریم. این مجموعه‌ها در $[a, b]$ با توپولوژی زیرفضایی (که همان توپولوژی ترتیبی است) باز هستند. قرار می‌دهیم

$$c = \operatorname{lub} A_\circ.$$

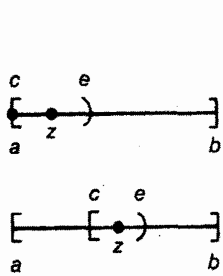
ثابت می‌کنیم که c نه به $A_\circ$ تعلق دارد ونه به $B_\circ$.

حالت اول. فرض کنیم $c \in B_\circ$. دراین‌صورت، $c \neq a$. پس یا $c = b$ یا $a < c < b$. درهرحالت، ازبازبودن $B_\circ$ در $[a, b]$ نتیجه‌می‌شود که بازه‌ای به‌صورت $(d, c]$ در $B_\circ$ وجود دارد (شکل ۳). اگر $c = b$ آنگاه d یك‌کران بالای $A_\circ$ و کوچکتر از c است، که این تناقض است. اگر $c < b$، ملاحظه می‌شودکه $(c, b]$ مجموعهٔ $A_\circ$ را قطع نمی‌کند (زیرا c یك‌کران بالای $A_\circ$ است). در این صورت، مجموعهٔ

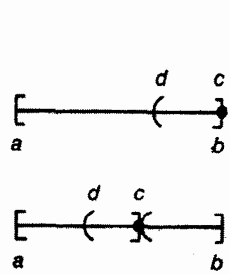
$$(d, b] = (d, c] \cup (c, b]$$

$A_\circ$ را قطع نمی‌کند. باز به‌این نتیجه می‌رسیم که d یك‌کران بالای $A_\circ$ وکوچکتر از c است، که با تعریف c متناقض است.

حالت دوم. فرض کنیم $c \in A_\circ$. در این صورت، $c \neq b$. بنابراین، $c = a$ یا $a < c < b$. چون $A_\circ$ در $[a, b]$ باز است، باید بازه‌ای به‌صورت $[c, e)$ در $A_\circ$ وجود داشته‌باشد (شکل ۴). بنابرخاصیت ترتیبی(۲) برای پیوستار خطی L، نقطه‌ای مانند z از L می‌توان چنان اختیار کردکه $c < z < e$. در این‌صورت، $z \in A_\circ$ واین بااین فرض‌که c یك‌کران بالای $A_\circ$ است تناقض دارد. □



شکل ۴



شکل ۳

۲۰۷. نتیجه خط حقیقی $\mathbb{R}$ وهمچنین هربازه وهر شعاع آن همبند است.

به‌عنوان کاربردی از نتیجهٔ فوق ، قضیهٔ مقدار میانی حسابان را ، که به‌نحو مناسبی تعمیم یافته است ، ثابت می کنیم.

۲. ۳. قضیه (قضیهٔ مقدار میانی) فرض کنیم $f : X \to Y$ نگاشتی پیوسته از فضای همبند X به‌مجموعهٔ مرتب Y باتوپولوژی ترتیبی باشد. اگر a و b دونقطه از X و r نقطه‌ای از Y باشدکه بین $f(a)$ و $f(b)$ واقع است آنگاه نقطه‌ای از X مانند c وجود دارد به‌طوری‌که $f(c)=r$.

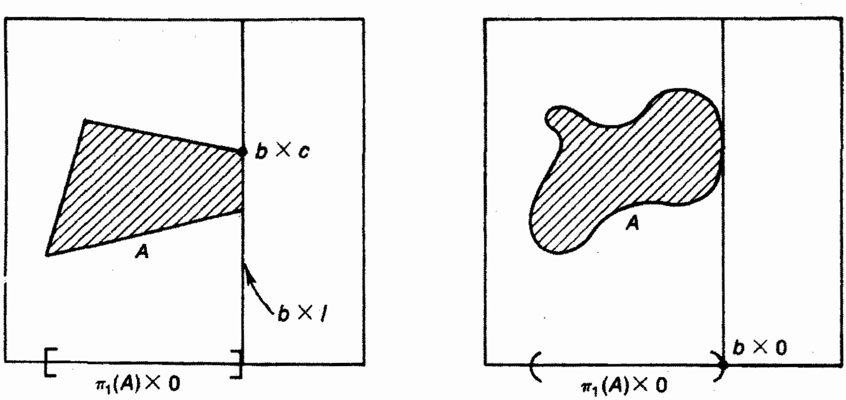
قضیهٔ مقدار میانی حسابان حالت خاص این قضیه است،که درآن به‌جای X یك بازهٔ بستهٔ R و به‌جای Y خط حقیقی R منظور می‌شود.

برهان. با توجه به‌مفروضات قضیه، مجموعه‌های

$$B=f(X)\cap(r,+\infty) \text{ و } A=f(X)\cap(-\infty, r)$$

جدا از هم و ناتهی هستند. زیرا یکی شامل $f(a)$ و دیگری شامل $f(b)$ است. چون هریك از این مجموعه‌ها مقطع یك‌شعاع باز Y با $f(X)$ است ؛ پس هردو در $f(X)$ بازند. اگر نقطه‌ای مانند c از X وجود نداشته‌باشدکه $f(c)=r$ آنگاه $f(X)$ مساوی اجتماع مجموعه‌های A و B می‌شود. درنتیجه، A و B تشکیل جداسازی‌ای برای $f(X)$ می‌دهند ، که خود با این حقیقت که تصویر هرفضای همبند تحت نگاشتی پیوسته همبند است، متناقض می‌باشد. □

مثال ۱. مثالی ازپیوستاری خطی، غیر از R ، فضای $I\times I$ است با توپولوژی ترتیب قاموسی،که درآن $I=[0, 1]$. برای تحقیق در درستی این‌حکم کافی است برقراری‌خاصیت



شکل ۵

کوچکترین کران بالا را بررسی کنیم. (چه برقراری خاصیت دوم بدیهی است.) فرض کنیم A یك زیرمجموعهٔ $I\times I$، و $I \times I \to I$ ، π_1 تابع تصویر برمختص اول باشد، و $b = \text{lub}\, \pi_1(A)$. اگر $b \in \pi_1(A)$ آنگاه A زیرمجموعهٔ $b\times I$ از $I\times I$ را قطع می‌کند. چون $b\times I$ نوع ترتیب I را دارد، مجموعهٔ $A \cap (b\times I)$ دارای کوچکترین کران بالای $b\times c$ است، که کوچکترین کران بالای A نیزهست. شکل ۵ رانگاه کنید. اگر $b \notin \pi_1(A)$ آنگاه $b\times 0$ کوچکترین کران بالای A است؛ هیچ عضوی به‌صورت $b'\times c$، که درآن $b' < b$، نمی‌تواند یك کران بالای A باشد؛ چه در آن صورت، b' یك کران بالای $\pi_1(A)$ خواهد بود.

مثال ۲. اگر X مجموعه‌ای خوشترتیب باشد آنگاه $X\times[0, 1)$، با ترتیب قاموسی، یك پیوستار خطی است؛ بررسی این مطلب با خواننده است. می‌توان چنین فکر کرد که این مجموعه با «جادادن» مجموعه‌ای ازنوع ترتیب $(0, 1)$ بین هرعضو X و تالی بلافصل آن‌ساخته شده است. البته، این به‌شرطی برقرار است که X دارای بزرگترین عضو نباشد.

همبندی بازه‌ها در R، منشأ ضابطه‌ای بالأخص مفید برای اثبات همبندی فضای X است؛ و آن این شرط است که هرزوج از نقاط X را بتوان به‌وسیلهٔ راهی در X به‌هم پیوست:

تعریف. فرض کنیم x و y دونقطه از فضای X باشند. منظور ازیك **راه** در X از x به y نگاشتی است پیوسته مانند $f: [a, b] \to X$، ازبازه‌ای بسته درخط حقیقی بتوی X، به‌طوری که $f(a) = x$ و $f(b) = y$. فضای X را وقتی **همبند راهی** خوانیم که هرزوج ازنقاط X را بتوان به‌وسیلهٔ راهی درآن به‌هم پیوند داد.

به‌آسانی می‌توان دید که هرفضای همبند راهی X الزاماً همبند است. فرض کنیم $X = A \cup B$ جداسازی‌ای برای X و $f: [a, b] \to X$ راه دلخواهی در X باشد. چون $f([a, b])$ تصویر پیوستهٔ یك مجموعهٔ همبند است، خود همبند می‌باشد، بنابراین تماماً در A یا در B قرار دارد. درنتیجه، راهی در X وجود نخواهد داشت که نقطه‌ای از A را به‌نقطه‌ای از B بپیوندد، واین خلاف فرض همبند راهی‌بودن X است.

عکس این حکم برقرار نیست؛ لازم نیست که هرفضای همبند در عین‌حال همبند راهی باشد. مثال ۶ و ۷ ذیل‌را نگاه کنید.

مثال ۳. گوی واحد B^n را در R^n چنین تعریف می‌کنیم:

$$B^n = \{\mathbf{x};\ \|\mathbf{x}\| \leqslant 1\},$$

که درآن،

$$\|\mathbf{x}\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

گوی واحد همبند راهی‌است؛ برای اثبات ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هردو نقطهٔ $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ از B^n، راه $f: [0, 1] \to R^n$ که با ضابطهٔ

$$f(t)=(1-t)\,\mathbf{x}+t\mathbf{y}$$

تعریف می‌شود خط مستقیمی است که در B^n قراردارد. زیرا، اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در B^n باشند و t در $[0, 1]$ آنگاه

$$\|f(t)\| \leqslant (1-t)\|\mathbf{x}\| + t\,\|\mathbf{y}\| \leqslant 1.$$

با برهان مشابهی، ثابت می‌شود که هرگوی باز $B_d(\mathbf{x}, \varepsilon)$ وهرگوی بستهٔ $\bar{B}_d(\mathbf{x}, \varepsilon)$ در R^n همبند است.

مثال ۴. فضای $R^n-\{0\}$ را **فضای اقلیدسی سفته** تعریف می‌کنیم ، که در آن 0 همان مبدأ R^n است. اگر $n>1$ ، این‌فضا همبند راهی‌است، زیرا اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دونقطهٔ غیراز صفر باشند، می‌توان‌آنها را به‌وسیلهٔ خط مستقیم بین‌آن‌دو به‌هم پیوست، مگرآنکه این‌خط از مبدأ بگذرد ، که در این صورت می‌توانیم نقطه‌ای مانند $\mathbf{z}$ که روی خط واصل بین دونقطهٔ $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ نباشد اختیارکنیم وبعد خط شکسته‌ای‌را از $\mathbf{x}$ به $\mathbf{z}$ و از $\mathbf{z}$ به $\mathbf{y}$ در نظر بگیریم.

مثال ۵. کرهٔ واحد S^{n-1} در R^n را با ضابطهٔ

$$S^{n-1}=\{\mathbf{x} : \|x\|=1\}$$

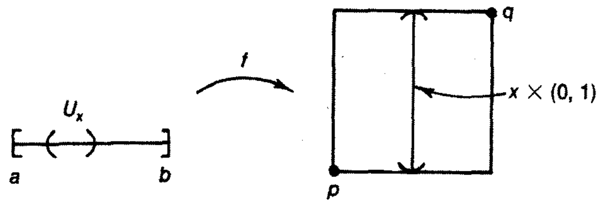
تعریف می‌کنیم . اگر $n>1$، کرهٔ واحد همبند راهی است. زیرا نگاشت $g: R^n-\{0\} \to S^{n-1}$ باضابطهٔ $g(\mathbf{x})=\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ پیوسته وپوشاست ؛ بعلاوه ، بسهولت ثابت می‌شودکه تصویر پیوستهٔ یك‌فضای همبند راهی، همبند راهی است.

مثال ۶. فضای $I\times I$ ، با توپولوژی ترتیب قاموسی، همبند است ولی همبند راهی نیست.

ازآنجاکه $I\times I$ یك‌پیوستار خطی است، پس همبند است . حال فرض‌کنیم $p=0\times 0$ و $q=1\times 1$ ، ثابت می‌کنیم که فرض وجود راهی مانند $f: [a, b] \to I\times I$، که دو نقطهٔ p و q را به‌هم می‌پیوندد، به‌تناقض می‌رسد. مجموعهٔ تصویر $f([a, b])$، بنابرقضیهٔ مقدار میانی، شامل هرنقطهٔ $x\times y$ از $I\times I$ است. بنابراین، به‌ازای هر $x \in I$ ، مجموعهٔ

$$U_x=f^{-1}(x\times(0,\ 1))$$

یك زیرمجموعهٔ ناتهی $[a, b]$ است، بنا برپیوستگی f، این مجموعه در $[a, b]$ باز است. شکل ۶ را نگاه‌کنید. به‌ازای هر $x \in I$ ، عددگویایی مانند q_x از U_x انتخاب می‌کنیم. چون مجموعه‌های U_x ازهم جدا هستند، نگاشت $x \to q_x$ از I به Q یك به‌یك است ، که با این حقیقت که I ناشماراست متناقض است (اثبات ناشمارایی I بعداً خواهدآمد).



شکل ۶

مثال ۷. اینک مثال دیگری از یک فضای همبند ، که همبند راهی نیست، می‌آوریم ، این مثال زیر فضایی از صفحه است. فرض‌کنیم K نمایش مجموعهٔ $\{1/n | n \in Z_+\}$ باشد، مجموعهٔ C را چنین تعریف می‌کنیم:

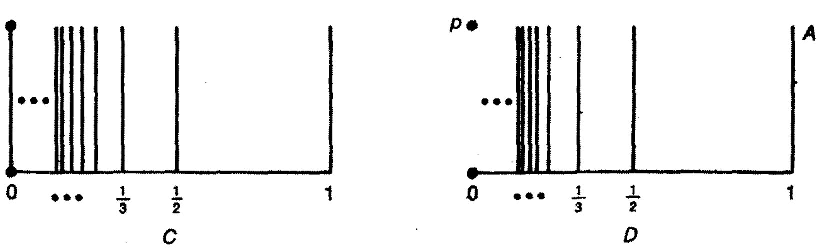
$$C = ([0, 1] \times 0) \cup (K \times [0, 1]) \cup (0 \times [0, 1]).$$

فضای C به **فضای شانه‌ای** موسوم است. به‌شکل ۷ نگاه کنید. فضای D را که باحذف نقاط بازهٔ قائم $0 \times (0, 1)$ از C به‌دست می‌آید، **فضای شانه‌ای سفته** می‌خوانند.

روشن است که فضای شانه‌ای C همبند راهی است، وهمچنین، ملاحظه می‌کنیم که فضای شانه‌ای سفتهٔ D همبند است. زیرا برابر است با اجتماع مجموعهٔ همبند راهی

$$A = ([0, 1] \times 0) \cup (K \times [0, 1])$$

و نقطهٔ حدی $p = 0 \times 1$ از A. ثابت می‌کنیم که D همبند راهی نیست.

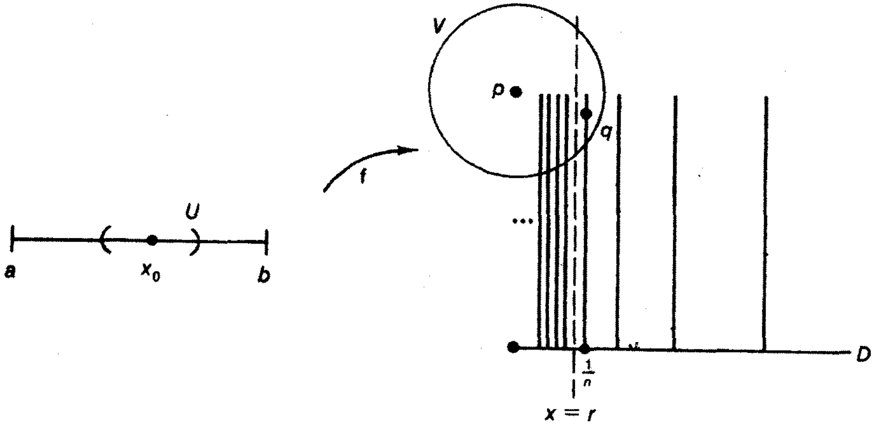


شکل ۷

فرض‌کنیم $f: [a, b] \to D$ راهی در D با نقطهٔ آغاز p باشد. مدعی هستیم که مجموعهٔ $f^{-1}(\{p\})$ در $[a, b]$ هم باز وهم بسته است؛ و ازاینجا، بنابرخاصیت همبندی،

داریم $f^{-1}(\{p\})=[a, b]$. نتیجه می‌گیریم که در D راهی که نقطهٔ p را به‌نقطه‌ای از A بپیوندند وجود ندارد.

اثبات بسته بودن $f^{-1}(\{p\})$ واضح است. زیرامجموعهٔ $\{p\}$ بسته و f پیوسته است. برای اثبات اینکه $f^{-1}(\{p\})$ باز است، یك همسایگی V از p را در R^2 چنان اختیار می‌کنیم که محور xها را قطع نکند، چنانکه در شکل ۸ نشان داده شده است. حال به‌ازای نقطهٔ دلخواهی مانند x_0 از $f^{-1}(\{p\})$، یك‌عضو پایه مانند U شامل x_0 را چنان انتخاب می‌کنیم که $f(U) \subset V$. مدعی هستیم که U زیرمجموعهٔ $f^{-1}(\{p\})$ است، ودر نتیجه، $f^{-1}(\{p\})$ باز است.



شکل ۸

یادآوری می‌کنیم که U، به‌این دلیل که یك عضو پایهٔ توپولوژی ترتیبی $[a, b]$ است، همبند است. بنابراین، $f(U)$ نیز همبند است. در نتیجه، $f(U)$ نمی‌تواند شامل هیچ نقطه‌ای غیر از p باشد، چه به‌ازای نقطهٔ مفروض $q=(1/n)\times t_0$ از D، متمایز از p و متعلق به V، عدد r را چنان اختیار می‌کنیم که $1/(n+1) < r < 1/n$، حال دو مجموعهٔ باز جدا ازهم ذیل از R^2 را درنظر می‌گیریم،

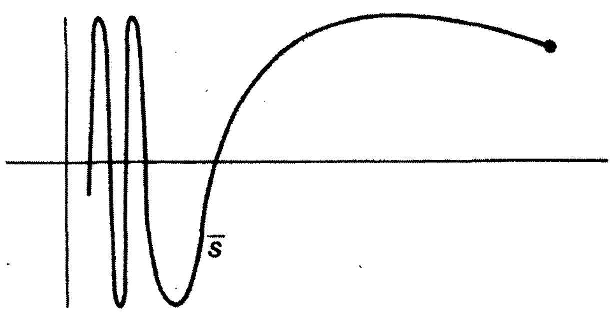
$$(r, +\infty)\times R \quad \text{و} \quad (-\infty , r)\times R.$$

چون $f(U)$ در D واقع است ومحور xها را قطع نمی‌کند، خط $x=r$ را نیز قطع نمی‌کند، در نتیجه، دراجتماع این‌دومجموعه قراردارد. ازطرف‌دیگر، چون $f(U)$ همبنداست و شامل نقطهٔ p از مجموعهٔ اول است، نمی‌تواند شامل نقطهٔ q ازمجموعهٔ دوم باشد. بنابراین، $f(U)=\{p\}$، واین همان است که می‌خواستیم.

مثال ۸. فرض‌کنیم S زیرمجموعهٔ ذیل ازصفحه باشد،

$$S=\{x\times \sin(1/x) \mid 0 < x \leqslant 1\}.$$

چون S تصویر مجموعهٔ همبند $(0, 1]$ تحت تابعی پیوسته است، خود همبند می‌باشد. بنابراین، بستار آن،$\bar{S}$،در R^2 همبند است. مجموعهٔ $\bar{S}$ مثالی قدیمی در توپولوژی است که به **منحنی سینوسی توپولوژی‌دانان** موسوم است . درشکل ۹ آن را نشان داده‌ایم. منحنی سینوسی توپولوژی‌دانان همبند است ، اما همبند راهی نیست ، اثبات به‌همان روشی است که در مورد فضای شانه‌ای سفته‌آورده شد.



شکل ۹

تمرینها

۱. (الف) ثابت‌کنید که‌ازفضاهای $(0, 1)$، $(0, 1]$ و $[0 و 1]$ هیچ‌دوتایی‌هومئومورف نیستند.

(ب) فرض‌کنید $f: X \to Y$ و $g: Y \to X$ دونشاندن باشند. با یك مثال ثابت‌کنید‌که X و Y الزاماً هومئومورف نیستند.

۲. فرض کنید n عدد صحیح مثبتی باشد. با فرض آنکه $f: R \to R$ با ضابطهٔ $f(x)=x^n$ پیوسته‌باشد،ثابت‌کنید که به‌ازای هر $a \geqslant 0$، فقط یك $b \geqslant 0$ وجود دارد به‌طوری که $b^n = a$.

۳. فرض‌کنید $f: X \to X$ پیوسته باشد. ثابت‌کنید که اگر $X=[0, 1]$ آنگاه نقطه‌ای مانند x یافت می‌شود به‌طوری که $f(x)=x$. نقطهٔ x را یك**نقطهٔ ثابت** f می گویند. اگر X مساوی $(0, 1]$ یا $(0, 1)$ باشد، باز حکم فوق برقرار است؟

۴. فرض کنید X یك‌مجموعهٔ مرتب با توپولوژی ترتیبی باشد. ثابت‌کنید که اگر X همبند باشد آنگاه X یك‌پیوستار خطی است.

۵. مجموعه‌های ذیل را با ترتیب قاموسی درنظر بگیرید. کدامیك از آنها پیوستار خطی است؟

(الف) $Z_+ \times [0, 1)$؛

(ب) $[0, 1) \times Z_+$؛

(پ) $[0, 1) \times [0, 1]$؛

(ت) $[0, 1] \times [0, 1)$.

۶. ثابت‌کنید که اگر X مجموعه‌ای خوشترتیب باشد آنگاه $X \times [0, 1)$، با ترتیب قاموسی، یك پیوستار خطی است.

۷. (الف) حاصل‌ضربی از فضاهای همبند راهی الزاماً همبند راهی است.

(ب) اگر $A \subset X$ و A همبند راهی باشد، آیا ضرورت دارد که $\bar{A}$ همبند راهی باشد؟

(پ) اگر $f: X \to Y$ پیوسته باشد و X همبند راهی باشد، آیا $f(X)$ نیز الزاماً همبند راهی است؟

(ت) اگر $\{A_\alpha\}$ گردایه‌ای‌اززیرمجموعه‌های‌همبند راهی X باشد و $\bigcap A_\alpha \neq \varnothing$، آیا ضرورت دارد که $\bigcup A_\alpha$ همبند راهی باشد؟

۸. ثابت‌کنید که اگر $n > 1$ آنگاه R^n و R هومئومورف نیستند.

۹. فرض‌کنید R ناشمارا باشد. ثابت‌کنید که اگر A زیرمجموعهٔ شمارایی از R^2 باشد آنگاه $R^2 - A$ همبند راهی است [راهنمایی: چند خط وجود دارد که از یك نقطهٔ مفروض R^2 می گذرد؟]

۱۰. ثابت‌کنید که اگر U یك‌زیرمجموعهٔ همبند باز R^2 باشد آنگاه U همبند راهی است. [راهنمایی: ثابت‌کنید که اگر $x_0 \in U$، مجموعهٔ نقاطی که می‌توان آنها را با یك‌راه در U به x_0 وصل کرد، در U هم باز است و هم بسته.]

۱۱. اگر A یك‌زیرمجموعهٔ همبند X باشد، آیا $\operatorname{Int} A$ و $\operatorname{Bd} A$ الزاماً همبندند؟ آیا عکس این‌حکم برقرار است؟ برای پاسخهای خود دلیل بیاورید.

۱۲. ثابت‌کنید که منحنی سینوسی توپولوژی‌دانان همبند است، اما همبند راهی نیست.

۱۳. فرض‌کنید L مجموعهٔ مرتب $S_\Omega \times [0, 1)$ با ترتیب قاموسی باشد که کوچکترین عضو آن حذف شده است. مجموعهٔ L مثال کلاسیکی در توپولوژی است که به **خط‌طویل** موسوم است.

قضیه. خط طویل همبند راهی‌است و با R موضعاً هومئومورف است. اما نمی‌توان آن را در R نشاند.

برهان.

(الف) فرض کنید X مجموعه‌ای مرتب بـا کوچکترین عضو $a_\circ$ بـاشد، و فرض کنید که

$$A=\{a_\circ\}\cup\{x \mid \text{است } [\circ,\ 1) \text{ دارای نوع ترتیب } [a_\circ,\ x)\}.$$

ثابت کنید که اگر به‌ازای هر $x\in X$، y ی بزرگتر از x یافت شود بـه‌طوری که $[x,\ y)$ دارای نوع ترتیب $[\circ\ ,\ 1)$ باشد آنگاه A در X باز است. ثابت کنید که اگر X در «لم دنبـاله» صدق کند آنگاه A در X بسته است. [راهنمایی: اگر a یك نقطهٔ حدی A باشد که در A نباشد، دنباله‌ای صعودی از نقاط A یافت می‌شود که همگرا به a است.]

(ب) ثابت کنید که L با R موضعاً هومئومورف‌است؛ یعنی هر نقطهٔ L یك همسایگی هومئومورف با یك زیرمجموعهٔ باز R دارد.

(پ) ثابت کنید که L همبند راهی است.

(ت) ثابت کنید که L را نمی‌توان در R، یـا در واقع به‌ازای هر n در R^n، نشاند. [راهنمایی: هرزیرفضای Y از R^n یك پایه‌ای شمـارا برای توپولوژی خود دارد؛ بنابراین، هر گردایه ازمجموعه‌های باز جدا ازهم در Y شماراست.]

*۳-۴ مؤلفه‌ها و مؤلفه‌های راهی[1]

برای هرفضای مفروض X، طریقه‌ای طبیعی وجود دارد که بـا استفاده از آن می‌توان این فضا را به تکه‌های همبند (یـا همبند راهی) تقسیم کرد. موضوع این بخش بررسی این طریقه است.

تعریف . در فضـای مفروض X، رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم: $x\sim y$ هر گـاه زیرمجموعهٔ همبندی وجود داشته باشد که شامل هردوی x و y بـاشد. رده‌های هم‌ارزی حاصل ازآن‌را **مؤلفه‌ها** (یا «مؤلفه‌های همبند») X می‌خوانند.

تقارن وانعکاس این رابطه بدیهی است . در مورد تعدی کافی است ملاحظه کنیم که اگر A مجموعه‌ای همبند وشامل x و y باشد واگر B مجموعه‌ای همبند وشامل y و z باشد، آنگاه $A\cup B$ مجموعه‌ای‌است شامل x و z که همبند است. زیرا A و B دارای نقطهٔ مشترك y هستند .

مؤلفه‌های X را می‌توان به‌طریق ذیل نیز توصیف کرد:

---

۱. این بخش در فصل ۸ دانسته فرض می‌شود.

۱.۳. قضیه مؤلفه‌های X زیرمجموعه‌های جدا ازهم وهمبند X هستند که اجتماع آنها مساوی X است، وهرزیرمجموعهٔ همبند X فقط یکی از آنهـا را قطع می‌کند.

برهان. چون مؤلفه‌های X رده‌های هم‌ارزی هستند، از هم جدا هستند و اجتماع آنها X است. هرمجموعهٔ همبند A در X فقط یکی ازآنها را قطع می‌کند. زیرا اگر A مؤلفه‌های C_1 و C_2 را، مثلاً، بترتیب در x_1 و x_2 قطع کندآنگاه، بنابرتعریف، خواهیم داشت $x_1 \sim x_2$؛ اما این‌ممکن نیست مگرآنکه $C_1 = C_2$.

برای اثبات اینکه مؤلفه‌ای مانند C همبند است، نقطه‌ای مـانند $x_\circ$ از C اختیار می‌کنیم. به‌ازای هر x از C داریم $x \sim x_\circ$، بنابراین، مجموعه‌ای همبندی مـانند A_x وجود دارد که شامل x و $x_\circ$ است. از آنچه که در فوق آمد نتیجه می گیریم کـه $A_x \subset C$. پس

$$C = \bigcup_{x \in C} A_x.$$

چون A_x ها جملگی همبند ودرنقطهٔ $x_\circ$ مشترك هستند، اجتماع آنها نیز همبند است. □

تعریف . رابطهٔ هم‌ارزی دیگری برفضـای X چنین تعریف می‌کنیم: $x \sim y$ هرگاه‌راهی در X از x به y وجود داشته‌باشد. رده‌های هم‌ارزی این‌رابطه‌را **مؤلفه‌های راهی** X می‌خوانیم.

اینك، در هم‌ارزی این‌رابطه تحقیق می‌کنیم. نخست، ملاحظه می‌کنیم که اگرراهی مانند $f : [a, b] \to X$ از x به y وجود داشته‌باشد که حوزهٔ تعریف‌آن بازهٔ $[a, b]$ باشدآنگاه (چون هردو بـازهٔ بستهٔ $[a, b]$ و $[c, d]$ در R هومئومورف هستند) راهی مانند g از x به y وجود دارد که حوزهٔ تعریف آن بـازهٔ $[c, d]$ است. حال ملاحظه می‌کنیم که برقراری رابطهٔ $x \sim x$ نـاشی از این است که به‌ازای هر x از X می‌توان راه ثابت $f : [a, b] \to X$ را، به‌ازای هر t، باضابطهٔ $f(t) = x$ تعریف‌کرد. تقارن این رابطه نتیجهٔ این حکم است که اگر $f : [\circ, 1] \to X$ راهی از x به y باشد آنگاه «راه بازگشت»آن $g : [\circ, 1] \to X$، که با ضابطهٔ $g(t) = f(1-t)$ تعریف می‌شود، راهی است از y به x. سرانجام، اثبات تعدی به قرار ذیل‌است: فرض کنیم $f : [\circ, 1] \to X$ راهی از x به y و $g : [1, 2] \to X$ راهی از y به z باشد. می‌توان با «چسباندن f و g به‌یکدیگر» راه دیگری مانند $h : [\circ, 2] \to X$ از x به z به‌دست آورد؛ راه h، بنا بر «لم چسب»، قضیهٔ ۳.۷ در فصل ۲، پیوسته است.

درمورد مؤلفهٔ راهی قضیهٔ ذیل را داریم که اثبات‌آن بدیهی است:

۲.۳. قضیه مؤلفه‌های راهی X زیرمجموعه‌های جدا ازهم وهمبند راهی X هستند که اجتماع آنهـا مساوی X است و هر زیرمجموعهٔ همبند راهی X فقط یکی از آنها را قطع می‌کند.

مثال ۱ . مؤلفه‌های زیرفضای

$$Y=[-1, 0) \cup (0, 1]$$

از خط حقیقی R عبارت‌اند از دو مجموعهٔ $(0 ,1-]$ و $[1 ,0)$، اینها مؤلفه‌های راهی Y نیز هستند.

مثال ۲. فضای شانه‌ای سفتهٔ D، که دربخش پیش مطالعه شد، فضایی است با یك مؤلفه (چون همبند است) و دو مؤلفهٔ راهی. اگر فضای Y را چنین تشکیل دهیم که نقاط گنگ بازهٔ $0 \times [0, 1]$ را بهفضای شانه‌ای سفتهٔ D بیفزاییم آنگاه فضایی بهدست خواهیم آورد که فقط یك مؤلفه دارد، ولی تعداد مؤلفه‌های راهی‌آن ناشماراست.

*۳-۴ همبندی موضعی[1]

خاصیت همبندی، برای فضاهایی که واجدآن باشند، خاصیتی است بسیار مفید، لیکن برای بعضی مقاصد مهمتر آن‌است که فضای موردنظر شرط همبندی‌را به‌طور موضعی دارا باشد. به‌بیان غیر دقیق، همبندی موضعی به‌این معنی است که هرنقطه دارای همسایگیهای «به‌دلخواه کوچکی» باشد که همبند باشند. تعریف دقیقتر این‌مفهوم ازاین قرار است:

تعریف . فضای X را **درنقطهٔ x موضعاً همبند** خوانیم در صورتی که به‌ازای هر همسایگی U از x، یك‌همسایگی همبند x مانند V وجود داشته باشد به‌طوری که $V \subset U$. اگر X در هرنقطه‌اش موضعاً همبند باشد آنگاه آن را فقط **موضعاً همبند** می‌خوانیم.

به‌بیان دیگر، X را موضعاً همبند خوانیم درصورتی‌که X دارای پایه‌ای متشکل از مجموعه‌های همبند باشد. همبندی وهمبندی موضعی یك فضا به‌یکدیگر وابسته نیستند؛ یعنی، ممکن است‌که یك فضا واجد یکی ویا هردو خاصیت ویا فاقد هردوی‌آنها باشد.

تعریف . فضای X را **در X موضعاً همبند راهی** خوانیم هرگاه به‌ازای هر همسایگی x مانند U، یك‌همسایگی همبند راهی از x مانند V وجود داشته باشد به‌طوری‌که $V \subset U$. اگر X در هرنقطهٔ آن موضعاً همبند راهی باشد آنگاه X را **موضعاً همبند راهی** می‌گوییم.

مثال ۱. هربازه وهرشعاع درخط حقیقی هم همبند است و هم موضعاً همبند. زیرفضای $[-1, 0) \cup (0, 1]$ از R همبند نیست، ولی موضعاً همبند است. فضای شانه‌ای سفته (مثال ۷ از بخش ۲.۳) همبند است، ولی موضعاً همبند نیست. Q، مجموعهٔ اعدادگویا، نه همبند است ونه موضعاً همبند.

---

۱. این‌بخش درفصل ۸ دانسته فرض می‌شود.

مثال ۲. R^n موضعاً همبند راهی است. زیرا هر عضو پایهٔ آن مانند $(a_1, b_1)\times\ldots\times(a_n, b_n)$ همبند راهی است. همچنین، R^ω موضعاً همبند راهی است؛ زیرا هرعضو پایهٔ استاندهٔ آن همبند راهی است.

مثال ۳. اگر فضای Y را چنین تشکیل دهیم که به فضای شانه‌ای سفتهٔ D همهٔ نقاطی به‌صورت $0\times(1/n)$، به‌ازای $n\in Z_+$، را اضافه کنیم، در این صورت، فضایی به‌دست می‌آید که در مبدأ موضعاً همبند است ولی درآن نقطه موضعاً همبند راهی نیست.

مهمترین اطلاعات در بارهٔ فضاهای موضعاً همبند در قضایای ذیل ارائه شده‌اند:

۱.۴ قضیه فضای X موضعاً همبند است اگر وفقط اگر به‌ازای هر مجموعهٔ باز U از X، هریك از مؤلفه‌های U در X باز باشد.

برهان. فرض‌کنیم X موضعاً همبند باشد، U مجموعهٔ بازی در X، و C مؤلفه‌ای از U. اگر x نقطه‌ای از C باشدآنگاه می‌توان یك‌همسایگی‌همبند از x مانند V چنان اختیارکردکه $V\subset U$، از آنجاکه V همبند است، باید تماماً در مؤلفهٔ C از U قرار گیرد. بنابراین، C در X باز است.

بعکس، فرض‌کنیم مؤلفه‌های مجموعه‌های باز در X باز باشند. فرض‌کنیم x نقطه‌ای از X و U یك‌همسایگی x باشد، و C مؤلفه‌ای از U که شامل x است. بنابراین، C همبند است. ازآنجاکه، بنابرفرض، C در X باز است، در نتیجه، X در x موضعاً همبند است. □

قضیهٔ ذیل را می‌توان بابرهانی مشابه ثابت‌کرد:

۲.۴ قضیه فضای X موضعاً همبند راهی است اگر وفقط اگر به‌ازای هرمجموعهٔباز U از X، هریك ازمؤلفه‌های راهی U در X باز باشد.

رابطهٔ مؤلفه‌ها و مؤلفه‌های راهی در قضیهٔ ذیل ارائه شده است:

۳.۴ قضیه اگر X فضایی توپولوژیك باشد، هر مؤلفهٔ راهی X در یك مؤلفهٔ X قرار دارد. اگرXموضعاً همبند راهی باشدآنگاه مؤلفه‌ها و مؤلفه‌های راهی X یکی هستند.

برهان. فرض‌کنیم C مؤلفه‌ای از X باشد؛ x را نقطه‌ای از C می‌گیریم؛ و فرض می‌کنیم P یك‌مؤلفه راهی X وشامل x باشد. چون P همبند است، پس $P\subset C$. می‌خواهیم ثابت‌کنیم که اگر X موضعاً همبند راهی باشد آنگاه $P=C$. فرض‌کنیم $P\neq C$ و Q مساوی اجتماع همهٔ مؤلفه‌های راهی X باشدکه متمایز از P هستند و C

را قطع می‌کنند؛ ضرورتاً هریك ازاین مؤلفه‌ها در C قرار خواهند داشت. بنابراین،

$$C=P\cup Q.$$

اما ، چون X موضعاً همبند راهی است، هرمؤلفهٔ راهی X در X باز است. بنابراین، P (که یك مؤلفهٔ راهی است) و Q (که اجتماعی از مؤلفه‌های راهی است) در X باز هستند ، در نتیجه P و Q تشکیل جداسازی‌ای برای C می‌دهند، واین امر با همبندی C تناقض دارد. $\square$

تمرینها

۱. مؤلفه‌ها ومؤلفه‌های راهی R_l کدام‌اند؟

۲. (الف) مؤلفه‌ها ومؤلفه‌های راهی R^ω (باتوپولوژی حاصل‌ضربی) کدام‌اند؟

(ب) R^ω را باتوپولوژی یکنواخت درنظربگیرید. ثابت‌کنیدکه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ در یك مؤلفهٔ R^ω قرار دارند اگر وفقط اگر دنبالهٔ

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}=(x_1-y_1,\ x_2-y_2,\ \cdots)$$

کراندار باشد .

(پ) R^ω را با توپولوژی جعبه‌ای درنظر بگیرید. ثابت‌کنیدکه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دریك مؤلفه قراردارند اگر و فقط اگر دنبالهٔ $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ «سرانجام صفر» شود.

*(ت) عکس (پ) را ثابت‌کنید.

۳. در فضای X ، رابطهٔ $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم : $y\sim x$ درصورتی‌که هیچ جداسازی‌ای برای X مانند $X=A\cup B$ وجود نداشته باشد، که درآن A و B مجموعه‌های باز جدا از همی هستند و $x\in A$ و $y\in B$. ثابت‌کنیدکه این رابطه یك‌رابطهٔ هم‌ارزی‌است. رده‌های هم‌ارزی این‌رابطه را **شبه‌مؤلفه‌های** X می‌نامیم. ثابت‌کنید هرمؤلفهٔ X در یك‌شبه مؤلفهٔ X قرار دارد.

۴. مطلوب‌است تعیین شبه‌مؤلفه‌ها، مؤلفه‌ها، ومؤلفه‌های راهی زیر فضاهای ذیل از R^2. [در اینجا K نمایش مجموعهٔ $\{1/n\mid n\in Z_+\}$ و $-K$ نمایش مجموعهٔ $\{-1/n\mid n\in Z_+\}$ است.]

$$A=(K\times[0,1])\cup(0\times[0,1]),$$

$$B=A-\left\{0\times\frac{1}{2}\right\},$$

$$C=B\cup([0,1]\times 0),$$

$$D=(K\times[0,1])\cup(-K\times[-1,0])\cup([0,1]\times -K)\cup([-1,0]\times K).$$

۵. ثابت کنید که اگر X موضعاً همبند باشد آنگاه شبه مؤلفه‌های X همان مؤلفه‌های X هستند.

۶. اگر $f: X \to Y$ پیوسته باشد و X موضعاً همبند، آیا لازم است $f(X)$ موضعاً همبند باشد؟ اگر f هم پیوسته وهم باز باشد، چه روی می‌دهد؟

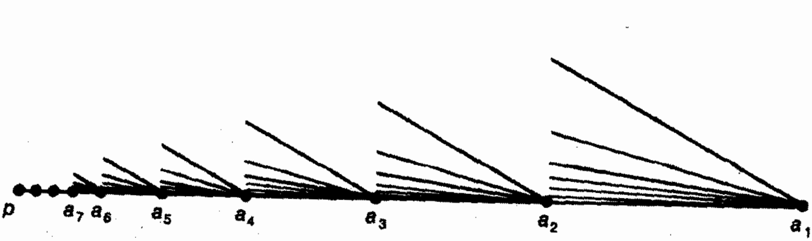
۷. ثابت کنید که $I\times I$، با توپولوژی ترتیب قاموسی، موضعاً همبند است، ولی موضعاً همبند راهی نیست. مؤلفه‌های راهی این فضا کدام‌اند؟

۸. فرض کنید X موضعاً همبند راهی باشد. ثابت کنید که هرمجموعهٔ باز همبند در X همبند راهی است.

۹. فرض کنید X مجموعهٔ نقاط گویای بازهٔ $[0,1]\times 0$ از R^2 باشد، و T اجتماع همهٔ پاره‌خطهایی باشد که نقطهٔ $p=0\times 1$ را به‌نقاط X می‌پیوندند.
(الف) ثابت کنید که T همبند راهی است، اما فقط در نقطهٔ p موضعاً همبند است.
(ب) زیرمجموعه‌ای از R^2 بیابید که همبند راهی باشد، ولی در هیچیک از نقاط آن موضعاً همبند نباشد.

۱۰. مجموعهٔ X را درنقطهٔ x **همبند خردجا** گویند هرگاه به‌ازای هرهمسایگی U از x، زیرمجموعهٔ همبندی مانند A از U یافت شود که شامل یک‌همسایگی x باشد. ثابت کنید که اگر x درهریک ازنقاط‌آن همبند خردجا باشد آنگاه X موضعاً همبنداست.
[راهنمایی: ثابت کنید که مؤلفه‌های مجموعه‌های باز مجموعه‌ای بازند.]

۱۱. «جاروب نامتناهی» X را، که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. ثابت کنید که X در p موضعاً همبند نیست، ولی X در p همبند خردجاست.
[راهنمایی: هرهمسایگی همبند p باید شامل همهٔ نقاط a_i باشد.]



شکل ۱۰

۳-۵ فضاهای فشرده

مفهوم فشردگی به هیچ‌وجه به‌اندازهٔ مفهوم همبندی طبیعی نیست. از همان آغاز پیدایش توپولوژی، این حقیقت آشکار بود که بازهٔ بسته $[a, b]$ از خط حقیقی از خاصیت معینی برخوردار است که برای اثبات قضایای مهمی چون قضیهٔ مقدار میانی و قضیهٔ پیوستگی یکنواخت بسیار حیاتی است. اما برای زمانی بس‌دراز روشن نبود که چگونه می‌توان این خاصیت را برای فضاهای توپولوژیك دلخواه فرمولبندی کرد. زمانی می‌پنداشتند که خاصیت تعیین‌کنندهٔ مذکور برای $[a, b]$ عبارت از این است که هرزیرمجموعهٔ نامتناهی $[a, b]$ دارای یك نقطهٔ حدی است، و این‌خاصیت را مفتخر به‌نام فشردگی کردند. اما، چندی بعد، برای ریاضیدانان معلوم شد که این‌فرمولبندی‌آنچه را که دربطن موضوع جای دارد آشکار نمی‌کند. بلکه فرمولبندی‌ای قویتر برحسب پوششهای باز فضا لازم است تا هستهٔ اصلی این خاصیت را بیان کند. فرمولبندی بعدی این مفهوم همسان است که امروزه آن‌را فشردگی می‌نامیم. البته، این تعریف به‌اندازهٔ تعریف قبلی طبیعی وسازگار باشهود نیست و وقوف برفایدهٔ‌آن مستلزم‌آشنایی با‌آن‌است.

تعریف. گوییم گردایهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های فضای X یك **پوشش** X است، یا X را **می‌پوشاند**، در صورتی‌که اجتماع اعضای $\mathcal{A}$ مساوی X باشد. اگراعضای $\mathcal{A}$ زیرمجموعه‌های باز X باشند، آن‌را یك **پوشش‌باز** X می‌خوانند.

تعریف. فضای X را وقتی **فشرده** گوییم که هرپوشش بازآن، مانند $\mathcal{A}$، حاوی یك‌زیر گردایهٔ متناهی باشد که‌آن نیز X را بپوشاند.

مثال ۱. خط حقیقی R فشرده نیست. زیرا پوشش باز R ازبازه‌های باز

$$\mathcal{A}=\{(n, n+۲) \mid n \in Z\}$$

حاوی هیچ زیرگردایهٔ متناهی نیست‌که R را بپوشاند.

مثال ۲. زیرفضای

$$X=\{۰\} \cup \{۱/n \mid n \in Z_+\}$$

از R فشرده است. برای اثبات فرض‌کنید $\mathcal{A}$ پوشش باز دلخواهی برای X باشد. دراین صورت، عضوی در$\mathcal{A}$، مانند U، وجود داردکه شامل ۰ است. مجموعهٔ U شامل همهٔ نقاط $۱/n$ بجز تعدادی‌متناهی ازآنهاست؛ به‌ازای هرنقطهٔ Xکه در U نیست، عضوی از $\mathcal{A}$ چنان برمی‌گزینیم که شامل این‌نقطه باشد. گردایه‌ای‌که ازاین اعضای $\mathcal{A}$ و مجموعهٔ U تشکیل می‌شود، یك‌زیرگردایهٔ متناهی $\mathcal{A}$ است‌که X را می‌پوشاند.

مثال ۳. هرفضای X که فقط شامل تعدادی متناهی عضو باشد، ضرورتاً فشرده است.

زیرا دراین‌حالت هرپوشش X متناهی است.

مثال ۴. بازهٔ $(0, 1]$ فشرده نیست. زیرا پوشش‌باز

$$\mathcal{A}=\{(1/n, 1] \mid n\in Z_+\}$$

برای $(0, 1]$ حاوی هیچ زیرگردایهٔ متناهی نیست که آن‌را بپوشاند. بازهٔ $(0, 1)$ نیز فشرده نیست، برهان شبیه همین برهان است. اما بازهٔ $[0, 1]$ فشرده است؛ شاید با این حکم قبلاً درآنالیزآشنا شده‌باشید. به‌هرحال، ما بزودی آن‌را ثابت می‌کنیم.

درحالت کلی، اثبات فشرده‌بودن یا فشرده نبودن فضای مفروض X مستلزم مقداری کوشش است. نخست، به‌اثبات قضایای کلی‌ای می‌پردازیم که ثابت می‌کنند چگونه از فضاهای فشردهٔ مفروض می‌توان فضاهای فشردهٔ جدیدی ساخت. سپس، در بخش آتیه ثابت می‌کنیم که فضاهای خاص معینی فشرده‌اند. از جملهٔ این فضاها همهٔ بازه‌های بستهٔ خط حقیقی وهمهٔ زیرمجموعه‌های بسته وکراندار R^n هستند.

ابتدا، چند حکم را دربارهٔ زیرفضاها ثابت می‌کنیم. اگر Y زیرفضای X باشد آنگاه گردایهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X را در صورتی **پوشش** Y خوانیم که اجتماع اعضایش حاوی Y باشد.

۱۰۵. لم فرض کنیم Y زیرفضایی از X باشد. در این صورت، Y فشرده[1] است اگر و فقط اگر هرپوشش Y، از مجموعه‌های باز X، حاوی یك زیرگردایهٔ متناهی باشدکه Y را می‌پوشاند.

برهان. فرض کنیم Y فشرده و $\mathcal{A}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ پوششی برای Y باشدکه از مجموعه‌های باز X تشکیل شده است. دراین صورت، گردایهٔ

$$\{A_\alpha\cap Y \mid \alpha\in J\}$$

پوششی برای Y است که ازمجموعه‌های باز Y تشکیل شده است؛ بنابراین، زیرگردایه‌ای متناهی ازاین پوشش مانند

$$\{A_{\alpha_1}\cap Y, \cdots, A_{\alpha_n}\cap Y\}$$

وجود داردکه Y را می‌پوشاند. در این صورت، $\{A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ زیرگردایه‌ای متناهی از $\mathcal{A}$ است که Y را می‌پوشاند.

بعکس، فرض کنیم شرط مذکور برقرار باشد؛ می‌خواهیم ثابت کنیم که Y فشرده است. فرض کنیم $\mathcal{A}'=\{A'_\alpha\}$ پوششی برای Y از مجموعه‌های باز Y باشد. به‌ازای هر α، مجموعهٔ باز A_α در X را چنان انتخاب می‌کنیم که

---

۱. منظور این است که Y باتوپولوژی زیرفضایی فشرده است. ـم.

$$A'_\alpha = A_\alpha \cap Y \cdot$$

گردایهٔ $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ پوششی برای Y از مجموعه‌های باز X است. بنابرفرض، یك زیرگردایهٔ متناهی از $\mathcal{A}$، مانند $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$، مجموعهٔ Y را می‌پوشاند. دراین صورت، $\{A'_{\alpha_1}, \dots, A'_{\alpha_n}\}$ یك‌زیرگردایهٔ متناهی $\mathcal{A}'$ است که Y را می‌پوشاند. □

۲۰۵. قضیه هر زیرمجموعهٔ بسته ازیك فضای فشرده فضایی است فشرده.

برهان. فرض کنیم Y زیرمجموعهٔ بسته‌ای از فضای فشرده X باشد. به‌ازای پوشش $\mathcal{A}$ برای Y از مجموعه‌های باز X، با افزودن مجموعهٔ باز $X-Y$ به $\mathcal{A}$ پوششی باز مانند $\mathcal{B}$ برای X تشکیل می‌دهیم،

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X-Y\}.$$

زیرگردایه‌ای متناهی از $\mathcal{B}$ هست که X را می‌پوشاند. اگر این زیرگردایه شامل $X-Y$ باشد آنگاه $X-Y$ را حذف می‌کنیم؛ در غیر این صورت، زیرگردایه را به‌همان‌حال باقی می‌گذاریم. گردایه‌ای که از این عمل نتیجه می‌شود یك‌زیرگردایهٔ متناهی $\mathcal{A}$ است‌که Y را می‌پوشاند. □

۳۰۵. قضیه هر زیرمجموعهٔ فشرده از فضایی هاوسدورف، مجموعه‌ای‌است بسته.

برهان. فرض کنیم Y زیرمجموعهٔ فشرده‌ای ازفضای هاوسدورف X باشد. ثابت می‌کنیم‌که $X-Y$ بازاست، درنتیجه Y بسته‌است.

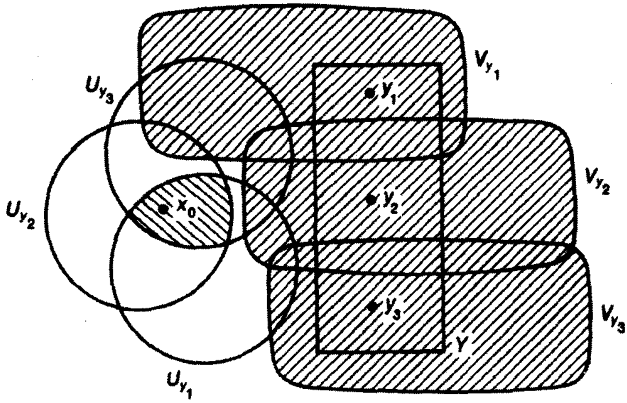
فرض‌کنیم x_0 نقطه‌ای از $X-Y$ باشد. به‌ازای هرنقطهٔ y از Y، همسایگیهای از هم‌جدای U_y و V_y، بترتیب، از x_0 و y موجودند (شرط هاوسدورف را به‌کار می‌بریم). گردایهٔ $\{V_y \mid y \in V\}$ پوششی است برای Y که اعضای‌آن در X بازند؛ بنابراین، تعدادی متناهی از این مجموعه‌ها مانند V_{y_1}، ...، V_{y_n} وجود دارندکه Y را می‌پوشانند. مجموعهٔ باز

$$V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$$

حاوی Y است؛ واین مجموعه جدا ازمجموعهٔ باز

$$U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$$

است‌که از مقطع همسایگیهایی از x_0، هریك متناظر است بایکی از V_iها، تشکیل‌شده است. شکل ۱۱ را نگاه‌کنید. برای اثبات رابطهٔ $U \cap V = \varnothing$، کافی است ملاحظه کنیم‌که اگر $z \in V$ آنگاه iیی هست‌که $z \in V_{y_i}$. بنابراین، $z \notin U_{y_i}$، و ازآنجا $z \notin U$. پس U یك همسایگی x_0 است‌که از Y جداست. در نتیجه، $X-Y$ باز است، واین همان است‌که می‌خواستیم. □



شکل ۱۱

در برهان قضیهٔ اخیر حکمی ثابت‌شد که درآتیه برای ما مفید است. به‌همین‌دلیل، آن‌را در اینجا به‌منظور مراجعه تکرار می‌کنیم.

۵.۴.۰ لم اگر Y زیرمجموعه‌ای فشرده از فضای هاوسدورف X باشد و x_0 در Y نباشدآنگاه مجموعه‌های بازازهم‌جدایی‌مانند U و V از X وجود دارندکه، بترتیب، شامل x_0 وحاوی Yاند.

مثال ۵. به‌محض اینکه ثابت‌کنیم که بازهٔ $[a, b]$ از R فشرده است ، بـا استفاده از قضیهٔ ۲.۵، نتیجه خواهیم گرفت‌که هرزیرمجموعهٔ بستهٔ $[a, b]$ نیز فشرده است. از طرف دیگر، ازقضیهٔ ۳.۵، نتیجه می‌شودکه بازه‌های $[a, b)$ و (a, b) در R فشرده نیستند (که پیش‌ازاین‌نیزبرما معلوم بود). زیرا این بازه‌ها زیرمجموعه‌های بستهٔ فضای هاوسدورف R نیستند.

مثال ۶. درمفروضات قضیهٔ ۳.۵، شرط هاوسدورف‌بودن ضروری‌است. مثلاً[۴]، توپولوژی $\mathcal{T}_f$ برخط حقیقی راکه‌تشکیل شده است از R وهمهٔ متممهای مجموعه‌هـای متناهی در نظر می‌گیریم. تنها زیرمجموعه‌های سرهٔ R که در این توپولوژی بسته‌اند، زیرمجموعه‌هـای متناهی هستند. امـا می‌توان بسهولت تحقیق‌کردکه هر زیرمجموعهٔ R در این توپولوژی فشرده است

۵.۵. قضیه تصویر هرفضای فشرده تحت نگاشتی پیوسته فشرده است.

برهان. فرض کنیم $f: X \to Y$ پیوسته و X فشرده بـاشد. $\mathcal{A}$ را پوششی برای

$f(X)$ با مجموعه‌های باز Y درنظر می‌گیریم. گردایهٔ

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

X را می‌پوشاند وهرعضوآن به‌دلیل پیوستگی f باز است. بنابراین، تعدادی متناهی از این مجموعه‌ها، مانند

$$f^{-1}(A_1), \cdots, f^{-1}(A_n)$$

X را می‌پوشانند. پس مجموعه‌های $A_1, \cdots, A_n$ پوششی برای $f(X)$ هستند.□

یك فایدهٔ مهم قضیهٔ اخیر این است که می‌توان آن‌را به‌عنوان وسیله‌ای برای ساختن هومئومورفیسمها به‌کار برد:

۵. ۶. قضیه فرض‌کنیم $f: X \to Y$ تابعی پیوسته و دو سویی باشد. اگر X فشرده و Y هاوسدورف باشدآنگاه f هومئومورفیسم است.

برهان. ثابت می‌کنیم که تصاویر مجموعه‌های بستهٔ X تحت f در Y بسته‌اند؛ این امر برای اثبات پیوستگی f^{-1} کافی است. اگر A در X بسته باشد، بنابرقضیهٔ ۵. ۲، در X فشرده است؛ بنابراین، به‌وسیلهٔ قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت شد، $f(A)$ در Y فشرده است. اما چون Y هاوسدورف است، بنابرقضیهٔ ۵. ۳، $f(A)$ در Y بسته است. □

۵. ۷. قضیه حاصل‌ضرب هرتعداد متناهی ازفضاهای فشرده فضایی‌است فشرده.

برهان. ثابت می‌کنیم که حاصل‌ضرب دوفضای فشرده فضایی است فشرده. حکم اصلی قضیه، به‌استقرا، برای هرحاصل‌ضرب متناهی نتیجه می‌شود. اثبات در دو مرحله انجام می‌شود.

مرحلهٔ ۱ فرض‌کنیم X و Y فضاهای مفروضی‌باشند و Y فشرده باشد. x_0 رانقطه‌ای از X می‌گیریم، وفرض می‌کنیم N مجموعه‌ای باز در $X \times Y$ باشدکه حاوی «قاچ» $x_0 \times Y$ از $X \times Y$ است. می‌خواهیم این‌حکم را ثابت‌کنیم:

یك‌همسایگی x_0 مانند W درفضای X وجوددارد به‌طوری‌که N حاوی همهٔ‌مجموعهٔ $W \times Y$ است.

مجموعهٔ $W \times Y$ را غالباً یك لوله دور $x_0 \times Y$ می‌گویند.

نخست، $x_\circ \times Y$ رابا پوششی ازاعضای پایهٔ $U \times V$ (برای توپولوژی $X \times Y$)، که تماماً در N واقع‌اند، می‌پوشانیم. چون $x_\circ \times Y$ با Y هومئومورف است، پس فشرده است. بنابراین، می‌توان $x_\circ \times Y$ را باتعدادی متناهی ازاعضای پایه مانند

$$U_1 \times V_1, \cdots, U_n \times V_n$$

پوشاند. (در اینجا فرض براین است که هرعضو پایه مانند $U_i \times V_i$ واقعاً $x_\circ \times Y$ را قطع می‌کند. چه، در غیر این‌صورت، وجود آن زاید است؛ یعنی، می‌توان آن‌را از این گردایهٔ متناهی حذف کرد، وباز پوششی برای $x_\circ \times Y$ داشت.)

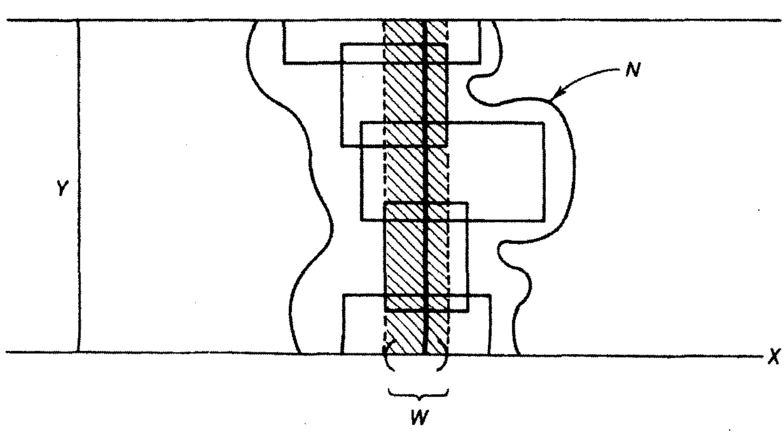
حال مجموعهٔ W را چنین تعریف می‌کنیم:

$$W = U_1 \cap \cdots \cap U_n$$

مجموعهٔ W باز وشامل $x_\circ$ است، زیرا هر مجموعهٔ $U_i \times V_i$، $x_\circ \times Y$ را قطع می‌کند.

مدعی هستیم که مجموعه‌های $U_i \times V_i$ که دراصل چنان اختیار شده بودند تا قاچ $x_\circ \times Y$ را بپوشانند، درواقع $W \times Y$ را می‌پوشانند. شکل ۱۲ را نگاه کنید. فرض کنیم $x \times y$ نقطه‌ای از $W \times Y$ باشد. نقطهٔ $x_\circ \times y$ از قاچ $x_\circ \times Y$ را، که مختص yام آن با این نقطه یکی است، درنظر می‌گیریم. حال ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای اندیسی مانند i نقطهٔ $x_\circ \times y$ به $U_i \times V_i$ تعلق دارد. درنتیجه $y \in V_i$. اما به‌ازای هر j، $x \in U_j$ (چون $x \in W$). بنابراین، $x \times y \in U_i \times V_i$، واین همان‌است که می‌خواستیم.

چون همهٔ مجموعه‌های $U_i \times V_i$ در N قرار دارند و $W \times Y$ را می‌پوشانند، پس لولهٔ $W \times Y$ در N قراردارد.



شکل ۱۲

مرحلهٔ ۲. حال به‌اثبات قضیه می‌پردازیم. فرض‌کنیم X و Y فضاهایی فشرده باشند، و $\mathcal{A}$ پوشش‌بازی برای $X\times Y$ باشد. به‌ازای هرنقطهٔ x_0 از X، قاچ $x_0\times Y$ فشرده است. بنابراین، می‌توان آن‌را با تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ مانند $A_1,\ldots,A_m$، پوشاند. اجتماع آنها، یعنی $N=A_1\cup\ldots\cup A_m$ مجموعه‌ای باز وحاوی $x_0\times Y$ است. بنا برمرحلهٔ ۱، مجموعهٔ باز N حاوی لوله‌ای مانند $W\times Y$ دور $x_0\times Y$ است، که درآن W یك‌زیرمجموعهٔ باز X است. پس تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ مانند $A_1,\ldots,A_m$ مجموعهٔ $W\times Y$ را می‌پوشانند.

بدین‌ترتیب، به‌ازای هرعضو X مانند x، می‌توان یك همسایگی x مانند W_x چنان اختیار کرد که تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ لولهٔ $W_x\times Y$ را بپوشانند. گردایهٔ همهٔ همسایگیهای W_x پوششی باز برای X است؛ در نتیجه، بنا برفشردگی X، زیرگردایه‌ای متناهی از آن مانند

$$\{W_1,\ldots,W_k\}$$

وجود دارد که X را می‌پوشاند. اجتماع لوله‌های

$$W_1\times Y,\ldots,W_k\times Y$$

برابر با $X\times Y$ است؛ اما، چون هریك از این لوله‌ها را می‌توان باتعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ پوشاند، پس $X\times Y$ را نیزمی‌توان باتعدادی متناهی ازاعضای $\mathcal{A}$ پوشاند. □

حکمی که در مرحلهٔ ۱ اثبات شد، درآتیه برای مامفید خواهد بود، وآن‌را به‌منظور مراجعه به‌عنوان یك‌لم دراینجا تکرار می‌کنیم.

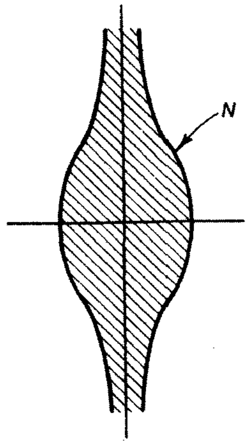
۸٫۵ لم (لم لوله) فضای حاصل‌ضربی $X\times Y$ را که درآن Y فشرده است، در نظر می‌گیریم. اگر N مجموعه‌ای باز از $X\times Y$ باشدکه‌حاوی قاچ $x_0\times Y$ از $X\times Y$ است آنگاه N حاوی لوله‌ای مانند $W\times Y$ دور $x_0\times Y$ است، که درآن W یك همسایگی x_0 در X است.

مثال ۷. واضح است‌که اگر Y فشرده نباشد، لم لوله برقرار نیست. مثلاً، فرض‌کنیم Y محور yها در R^2 باشد، و

$$N=\{x\times y;\ |x|<1/(y^2+1)\}.$$

در این‌صورت، N مجموعه‌ای باز است‌که حاوی مجموعهٔ $0\times R$ است. ولی حاوی هیچ لوله‌ای دور $0\times R$ نیست. درشکل ۱۳ این‌مطلب را نمایش داده‌ایم.

دراینجا طبیعی است این‌سؤال را مطرح کنیم‌که آیا حاصل‌ضرب تعدادی نامتناهی از فضاهای فشرده نیزفشرده است؟ توقع آن است که جواب «مثبت» باشد و واقعاً نیزچنین است. باید افزودکه اهمیت (ودشواری) این قضیه چندان است‌که سزاوار است آن‌را



شکل ۱۳

منسوب به‌شخصی کنیم که آن را ثـابت‌کرده است؛ این قضیه به قضیهٔ تیخونوف[1] موسوم است.

در اثبات اینکه حاصل‌ضرب دکارتی فضاهای همبند فضایی است همبند، نخست آن را برای حاصل‌ضربهای متناهی ثابت کردیم وحالت کلی را ازآن نتیجه‌گرفتیم. اما برای اثبات فشردگی حاصل‌ضرب دکارتی فضاهای فشرده روشی برای‌رسیدن ازحاصل‌ضربهای متناهی به‌حاصل‌ضربهای نامتناهی وجود ندارد. حالت نـامتناهی بسیار دشوار است و به‌روشی‌کاملاً متفاوت نیاز دارد. به‌دلیل دشواری آن و همچنین به‌خاطر آنکه نمی‌خواهیم از مسیر اصلی بحث خود، در این فصل، خارج شویم تصمیم گرفته‌ایم آن‌را به‌بعد موکول کنیم. با وجود این، شما اگر بخواهید می‌توانید هم‌اکنون بخشی از بخش ۵ ـ ۱ را که این‌قضیه درآن ثابت‌شده است، بدون اینکه شکافی درپیوستگی مطالب ایجادشود، بلافاصله بعد ازاین بخش مطالعه‌کنید.

برای فشرده‌بودن یك‌فضا ضابطهٔ دیگری وجود داردکه به‌جای مجموعه‌هـای بـاز برحسب مجموعه‌های بسته فرمولبندی می‌شود. این‌ضابطه در بادی امر نه‌خیلی طبیعی و نه خیلی مفید به‌نظر می‌رسد، امـا حقیقت غیر از این است. بزودی خواهیم دیدکه، در مواردی چند، این تعریف‌کاملاً مفید است. نخست، به‌بیان یك‌تعریف می‌پردازیم:

تعریف. گردایه‌ای مـانند $\mathcal{C}$ از زیرمجموعه‌های X را گوییم در **شرط مقطع متنـاهی** صدق می‌کند درصورتی‌که به‌ازای هرزیرگردایهٔ متناهی ازآن، مانند

---

1. Tychonoff

$$\{C_1, \ldots, C_n\},$$

مقطع $C_1 \cap \ldots \cap C_n$ ناتهی باشد.

۵.۹. قضیه فرض‌کنیم X فضایی توپولوژیك باشد. دراین صورت ، X فشرده است اگر وفقط اگر به‌ازای هرزیرگردایه از مجموعه‌های بسته X ، مانند $\mathcal{C}$ ، که درشرط مقطع متناهی صدق‌کند، مقطع همهٔ اعضای $\mathcal{C}$ ، یعنی $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ ، ناتهی باشد.

برهان. فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، و

$$\mathcal{C} = \{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

گردایهٔ متممهای اعضای $\mathcal{A}$ باشد. دراین‌صورت، احکام ذیل برقرارند:

(۱) $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز است اگر و فقط اگر $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های بسته باشد.

(۲) گردایهٔ $\mathcal{A}$ مجموعهٔ X را می‌پوشاند اگر وفقط اگر مقطع همهٔ اعضای $\mathcal{C}$ ، یعنی $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ ، تهی باشد.

(۳) زیر گردایهٔ متناهی $\{A_1, \ldots, A_n\}$ از $\mathcal{A}$ مجموعهٔ X را می‌پوشاند اگر و فقط اگر مقطع اعضای متناظر آنها از $\mathcal{C}$، یعنی مقطع $C_i = X - A_i$ها، تهی باشد.

حکم اول بدیهی است واحکام دوم و سوم نتیجهٔ قانون دمورگن هستند :

$$X - (\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in J} (X - A_\alpha)$$

اکنون برهان قضیه در دو مرحلهٔ ساده انجام می‌شود: گرفتن عکس نقیض (از قضیه)، و بعد درنظر گرفتن متممها (ازمجموعه‌ها)!

فشردگی فضای X معادل‌است بااینکه بگوییم:«به‌ازای‌هر گردایه اززیرمجموعه‌های باز X ، مانند $\mathcal{A}$، اگر $\mathcal{A}$ مجموعهٔ X را بپوشاند آنگاه زیر گردایه‌ای متناهی‌از$\mathcal{A}$وجود داردکه X را می‌پوشاند.» امـا این‌حکم معادل عکس نقیض خود است‌که عبارت است از: «به‌ازای هرگردایه از زیرمجموعه‌های باز X ، مانند $\mathcal{A}$ ، اگر هیچ زیر گردایهٔ متناهی آن X را نپوشاندآنگاه $\mathcal{A}$ نیز X را نمی‌پوشاند.» حال اگر فرض‌کنیم $\mathcal{C}$، همان‌طور که ذکر شد،گردایهٔ $\{X - A \mid A \in \mathcal{A}\}$ باشد و (۱)ـ(۳) را به‌کاربریم ، خواهیم دیدکه این‌حکم نیز به نوبهٔ خود معادل است با اینکه: «به‌ازای هر گردایهٔ $\mathcal{C}$ از مجموعه‌های بسته ، اگر هرمقطع متناهی از اعضای $\mathcal{C}$ ناتهی باشد آنگاه مقطع همهٔ اعضای $\mathcal{C}$ نیز ناتهی است.» واین درست همان شرط قضیه است. □

یك‌حالت خاص این‌قضیه هنگامی پیش می‌آیدکه **دنبالهٔ تودرتویی** از مجموعه‌های بسته مانند

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots C_n \supset C_{n+1} \supset \cdots$$

در فضای فشردهٔ X داشته‌باشیم. اگر هریک از مجموعه‌های C_n ناتهی باشدآنگاه گردایهٔ $\mathscr{C}=\{C_n\}_{n\in Z_+}$ خود به‌خود درشرط مقطع متناهی صدق می‌کند، که می‌توان درستی آن‌را به‌آسانی تحقیق کرد. پس مقطع

$$\bigcap_{n\in Z_+} C_n$$

ناتهی است.

مواردی که درآنها ضابطهٔ مجموعه‌های بسته رابرای فشردگی به‌کارمی بریم، بترتیب، عبارتند از: اثبات ناشمارایی مجموعهٔ اعدادحقیقی دربخش بعدی، اثبات قضیهٔ تیخونوف در فصل ۵، واثبات قضیهٔ مقولهٔ بئر[1] درفصل ۷. برای اثبات قضیهٔ تیخونوف، در واقع از صورتی از این ضابطه استفاده می‌کنیم که کمی باصورتی که در قضیهٔ ۹.۵ ذکر شده متفاوت است. این‌صورت را درزیر بیان واثبات آن‌را به‌خواننده وا گذار می‌کنیم:

۱۰.۵. نتیجه فضای X فشرده است اگر و فقط اگر به‌ازای هرگردایهٔ $\mathscr{A}$ از زیر مجموعه‌های X که درشرط مقطع‌متناهی‌صدق می‌کند، مقطع بستار آنها،یعنی $\bigcap_{A\in\mathscr{A}}\bar{A}$ ناتهی باشد.

تمرینها

۱. (الف) فرض‌کنید $\mathscr{T}$ و $\mathscr{T}'$ دو توپولوژی در مجموعهٔ X باشند؛ و $\mathscr{T}'\supset\mathscr{T}$. فشردگی X تحت یکی از این توپولوژیها مستلزم چه‌حکمی درمورد فشردگی تحت توپولوژی دیگر است؟

(ب) ثابت کنیدکه اگر X تحت هردو توپولوژی $\mathscr{T}$ و $\mathscr{T}'$ هاوسدورف وفشرده باشدآنگاه $\mathscr{T}=\mathscr{T}'$ ویاآنها مقایسه‌پذیر نیستند.

۲. (الف) ثابت کنیدکه هر زیرمجموعهٔ R، با توپولوژی $\mathscr{T}_f$، فشرده است. (مثال ۶ را نگاه کنید.)

(ب) آیا $[0, 1]$ به‌عنوان یك‌زیرفضای R باتوپولوژی

$$\mathscr{T}_c=\{A \mid R-A \text{ شماراست یا مساوی } R \text{ است}\}$$

فشرده است؟ با توپولوژی حد پایین R_l چطور؟

۳. ثابت کنیدکه اجتماعی متناهی ازمجموعه‌های فشرده مجموعه‌ای فشرده است.

۴. ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ فضایی متری، مجموعه‌ای بسته و باآن متریك

---

1. Baire

کراندار است. فضایی متری پیدا کنید که در آن همهٔ زیرمجموعه‌های بستهٔ کراندار فشرده نباشند.

۵. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های فشردهٔ از هم‌جدایی از فضای هاوسدورف X باشند. ثابت کنید که مجموعه‌های باز ازهم‌جدایی مانند U و V یافت می‌شوند که، بترتیب، شامل A و B هستند.

۶. ثابت کنید که اگر $f: X \to Y$، که درآن X فشرده و Y هاوسدورف و f پیوسته است، آنگاه f نگاشتی بسته است (یعنی f مجموعه‌های بسته را به‌مجموعه‌هایی بسته می‌نگارد).

۷. نتیجهٔ ۵.۱۰ را ثابت کنید.

۸. ثابت کنید که اگر Y فشرده‌باشدآنگاه‌نگاشت تصویری $\pi_1 : X \times Y \to X$ نگاشتی بسته است.

۹. قضیه. فرض‌کنید Y یك فضای هاوسدورف‌فشرده‌باشد. دراین‌صورت، تابع $f: X \to Y$ پیوسته است اگر وفقط اگر **نمودار** f، یعنی مجموعهٔ

$$G_f = \{x \times f(x) \mid x \in X\},$$

در $X \times Y$ بسته باشد.

[راهنمایی : اگر G_f بسته باشد و V یك همسایگی $f(x_0)$، لوله‌ای دور $x_0 \times (Y - V)$ بیابید که G_f را قطع نکند.]

۱۰. لم لوله را به‌قرار ذیل تعمیم دهید:

قضیه. فرض‌کنید A و B، بترتیب، زیرمجموعه‌های X و Y باشند؛ فرض کنید N مجموعه‌ای باز در $X \times Y$ باشدکه حاوی $A \times B$ است. اگر B فشرده باشد آنگاه مجموعه‌ای بازمانند U در X یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$A \times B \subset U \times B \subset N.$$

اگر A و B هردو فشرده باشند آنگاه مجموعه‌های بازی مانند U و V، بترتیب، در X و Y یافت می‌شوند به‌طوری‌که

$$A \times B \subset U \times V \subset N.$$

۱۱. (الف) مطلوب است اثبات قضیهٔ زیر که بخشی ازعکس قضیهٔ حد یکنواخت است:

قضیه. فرض‌کنید $f_n : X \to R$ دنباله‌ای‌ازتوابع پیوسته‌باشد. به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in X$، $f_n(x) \to f(x)$. اگر f پیوسته، دنبالهٔ f_n صعودی یکنوا، و X فشرده باشدآنگاه همگرایی این دنباله یکنواخت است. [دنبالهٔ f_n را در صورتی

صعودی یکنوا خوانیم که به‌ازای هر n و هر x، $[f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)]$.

(ب) با ارائهٔ مثال ثابت کنید که دراین قضیه اگر شرط فشردگی X را برداریم، و یا اگر شرط یکنوایی دنباله را برداریم، این‌حکم برقرار نمی‌ماند [راهنمایی: تمرین ۹ ازبخش ۲ — ۱۰ را نگاه کنید.]

۱۲. قضیه. فرض کنید X یک فضای هاوسدورف وفشرده باشد، $\mathcal{A}$ گردایه‌ای اززیرمجموعه‌های همبند بستهٔ X که باجزئیت سره مرتب ساده باشد. دراین صورت،

$$Y = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

همبند است.

[راهنمایی: اگر $C \cup D$ یک جداسازی برای Y باشد، مجموعه‌های بازازهم‌جدایی‌مانند U و V از X که، بترتیب، حاوی C و D هستند اختیار کنید. ثابت کنید که

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} (A - (U \cup V))$$

تهی نیست.]

۱۳. دراینجا تمرینی داریم برای آنهایی که گروههای توپولوژیک را مطالعه کرده‌اند:

قضیه. فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد و A و B زیرمجموعه‌هایی از G باشند. اگر A در G بسته و B فشرده باشد آنگاه $A \cdot B$ در G بسته است.

[راهنمایی: فرض کنید $f: G \times B \to G$ نگاشتی باضابطهٔ $f(x \times y) = xy^{-1}$ باشد. اگر $c \notin A \cdot B$ آنگاه لوله‌ای مانند $W \times B$ دور $c \times B$ واقع در $f^{-1}(G - A)$ بیابید.]

۳-۶ مجموعه‌های فشردهٔ خط حقیقی

به‌وسیلهٔ قضایای بخش‌پیش می‌توان ازمجموعه‌های فشردهٔقبلی مجموعه‌های فشردهٔ جدیدی ساخت؛ اما برای اینکه نتایج عمیقتری به‌دست‌آوریم باید تعدادی مجموعهٔ فشردهٔ مشخص داشته باشیم. طبیعی‌ترین محل برای شروع، خط حقیقی است. ثابت می‌کنیم که هر بازهٔ بسته از خط حقیقی فشرده است. به‌عنوان کاربرد، قضیهٔ مقدار ماکزیمم حسابان را که به‌نحو مناسبی تعمیم‌یافته‌است ثابت می‌کنیم. ازجمله‌سایر موارد استعمال آن مشخص کردن همهٔ زیرمجموعه‌های فشردهٔ R^n است، و برهانی برای ناشماراbودن مجموعهٔ اعدادحقیقی.

معلوم خواهد شدکه برای اثبات فشردگی هربازهٔ بستهٔ R فقط به‌یکی از خواص ترتیبی اعداد حقیقی نیاز داریم، وآن‌خاصیت کوچکترین‌کران بالاست. قضیهٔ مذکور را فقط بااستفاده ازاین فرض ثابت می‌کنیم؛ در این صورت، آن قضیه نه‌تنها در مورد خط

حقیقی بلکه درمورد مجموعه‌های خوشترتیب وسایر مجموعه‌های مرتب نیز قابل استعمال است.

۶. ۱. قضیه فرض‌کنیم X یك‌مجموعهٔ مرتب ساده و دارای خاصیت کوچکترین‌کران بالا باشد. در این صورت درتوپولوژی ترتیبی، هربازهٔ بستهٔ X فشرده است.

برهان. فرض‌کنیم $a<b$، و $\mathscr{A}$ پوششی باز برای $[a, b]$ باشدکه اعضای‌آن از مجموعه‌های باز در $[a, b]$ با توپولوژی زیرفضایی (که همان توپولوژی ترتیبی است) تشکیل شده باشند. می‌خواهیم وجود زیرگردایه‌ای متناهی از $\mathscr{A}$ را ثابت کنیم که $[a, b]$ را بپوشاند.

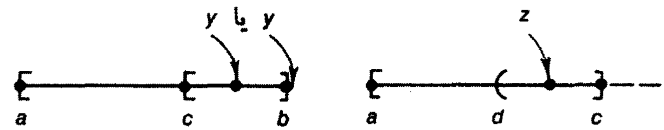
مرحلهٔ ۱. نخست، این حکم را ثابت می‌کنیم: اگر x نقطه‌ای از $[a, b]$ غیر از b باشدآنگاه نقطه‌ای از $[a, b]$ مانند y وجود داردکه $x<y$، وبازهٔ $[x, y]$ را می‌توان حداکثر با دوعضو $\mathscr{A}$ پوشاند.

اگر x دارای تالی بلافصل در X باشد، وفرض‌کنیم y این‌تالی بلافصل باشد، آنگاه $[x, y]$ فقط شامل دونقطهٔ x و y است. بنابراین، می‌توانیم $[x, y]$ را حداکثر بادوعضو $\mathscr{A}$ بپوشانیم. اگر x دارای هیچ‌تالی بلافصلی در X نباشد، عضو A از $\mathscr{A}$ را چنان اختیار می‌کنیم که شامل x باشد. چون $x\neq b$ و A باز است، A شامل بازه‌ای به‌صورت $[x, c)$ خواهد بود، که درآن c نقطه‌ای از $[a, b]$ است. حال نقطه‌ای مانند y در (x, c) انتخاب می‌کنیم؛ دراین‌صورت، بازهٔ $[x, y]$ تنها باعضو A از $\mathscr{A}$ پوشانده می‌شود.

مرحلهٔ ۲. فرض‌کنیم C مجموعهٔ همهٔ‌نقاطی از $[a, b]$ مانند y باشدکه $y>a$، و بازهٔ $[a, y]$ را بتوان به وسیلهٔ تعدادی متناهی از اعضای $\mathscr{A}$ پوشاند. اگر مرحلهٔ ۱ را برای‌حالتی‌که درآن $x=a$ به‌کار ببریم، نتیجه‌می‌گیریم که در C دست‌کم یك‌نقطه، مانند y، وجود دارد. فرض‌کنیم c کوچکترین کران بالای C باشد؛ دراین‌صورت، $a<c\leqslant b$.

مرحلهٔ ۳. ثابت می‌کنیم‌که c به C تعلق دارد؛ یعنی ثابت می‌کنیم‌که بازهٔ $[a, c]$ را می‌توانیم باتعدادی‌متناهی‌ازاعضای $\mathscr{A}$ بپوشانیم. عضوی مانند A از $\mathscr{A}$ انتخاب می‌کنیم که شامل c باشد؛ چون A باز است، حاوی بازه‌ای به‌صورت $(d, c]$ است، که درآن d نقطه‌ای از $[a, b]$ است. اگر c در C نباشد، باید نقطه‌ای از C مانند z دربازهٔ (d, c) وجود داشته باشد. زیرا، در غیراین صورت، d کوچکترین کران بالای C خواهد بودکه از c کوچکتراست. شکل ۱۴ را نگاه‌کنید. پس، z در C است، وبازهٔ $[a, z]$ را می‌توان باتعدادی متناهی، مثلاً nتا، ازاعضای $\mathscr{A}$ پوشاند.

حال ملاحظه می‌کنیم که $[z, c]$ در تنهـا عضو A از $\mathscr{A}$ قراردارد. در نتیجه، مجموعهٔ $[a, c]=[a, z]\cup[z, c]$را می‌توان با $n+1$ عضواز $\mathscr{A}$ پوشاند. بدین‌ترتیب ، c در C قرار می‌گیرد، که با فرض متناقض است.



شکل ۱۵ شکل ۱۴

مرحلهٔ۴. سرانجام ثابت می‌کنیم که $c=b$ وقضیه ثابت می‌شود. فرض کنیم $c<b$. اگر مرحلهٔ ۱ را برای حالتی که $x=c$ به‌کارببریم ، به‌این نتیجه می‌رسیم که نقطه‌ای از $[a, b]$ مانند y وجود داردکه $y>c$ وبازهٔ $[c, y]$ را می‌توانیم بـاتعدادی متناهی از اعضـای $\mathscr{A}$ بپوشانیم. شکل ۱۵ را نگاه‌کنید. در مرحلهٔ ۳ ثابت‌کردیم که c در C است . پس، بـازهٔ $[a, c]$ را می‌توان بـا تعدادی متناهی از اعضـای $\mathscr{A}$ پوشاند. بنابراین، بازهٔ

$$[a, y]=[a, c]\cup[c, y]$$

را نیز می‌توان باتعدادی متناهی از اعضای $\mathscr{A}$ پوشاند. یعنی y در C است، واین بااین فرض‌که c کوچکترین‌کران بالای C است متناقض است. □

۲.۶. نتیجه هربازهٔ بستهٔ R فشرده است.

اینك، زیرمجموعه‌های فشردهٔ R^n را مشخص می‌کنیم :

۳.۶. قضیه زیرمجموعهٔ A از R^n فشرده است اگر وفقط اگر بسته بـاشد وبامتریك اقلیدسی d یا متریك مربعی ρ کراندار باشد.

برهان. کافی است‌که فقط متریك ρ را درنظر بگیریم؛ زیرا بنابرنامساویهای

$$\rho(x, y)\leqslant d(x, y)\leqslant\sqrt{n}\,\rho(x, y)$$

نتیجه می‌شودکه A تحت d کراندار است اگر وفقط اگر تحت ρ کراندار باشد.
فرض‌کنیم A فشرده باشد. در این‌صورت، بنابرقضیهٔ ۳.۵ ، A بسته‌است. حـال گردایهٔ مجموعه‌های باز

$$\{B_\rho(\circ,\ m)\mid m\in Z_+\}$$

را در نظر می گیریم، که اجتماع آنها همهٔ R^n است. زیر گردایه‌ای متناهی هست که A را می‌پوشاند. از اینجا نتیجه می‌شود که به‌ازای M ی، $A\subset B_\rho(\circ,\ M)$. بنابراین، به‌ازای هردونقطهٔ x و y از A، داریم $\rho(x,\ y)\leqslant ۲M$. پس، A تحت ρ کراندار است.

بعکس، فرض کنیم A تحت ρ بسته و کراندار باشد؛ وبه‌ازای هرزوج x و y از نقاط A، داشته باشیم $\rho(x,y)\leqslant N$. نقطه‌ای‌مانند $x_\circ$ از A انتخاب می کنیم، وفرض می کنیم $\rho(x_\circ,\circ)=b$. ازنامساوی مثلثی نتیجه‌می‌شود که، به‌ازای‌هر x از A، $\rho(x,\circ)\leqslant N+b$. اگر $P=N+b$ آنگاه A زیرمجموعهٔ مکعب $[-P,\ P]^n$ است و این مکعب خود فشرده است. چون A بسته است، فشرده نیز می‌باشد. □

این قضیه را اغلب محصلین به‌این‌صورت به‌خاطر می‌سپارند که گردایهٔ مجموعه‌های فشردهٔ یك فضای متری با گردایهٔ مجموعه‌های بسته و کراندار آن برابر است. این حکم به‌این صورت مسلماً مضحك است، چون پاسخ این‌پرسش که کدام مجموعه‌ها کراندار هستند فقط به‌متریك مربوط است، در حالی که فشرده‌بودن یك مجموعه به‌توپولوژی فضا وابسته است.

مثال ۱. کرهٔ واحد S^{n-1} وگوی واحد بستهٔ B^n در R^n فشرده هستند، چون بسته وکراندارند. مجموعهٔ

$$A=\{x\times(۱/x)\mid \circ<x\leqslant ۱\}$$

در $R^۲$ بسته است، اما فشرده نیست، چون‌کراندار نیست. مجموعهٔ

$$S=\{x\times(\sin(۱/x))\mid \circ<x\leqslant ۱\}$$

در $R^۲$ کراندار است، ولی فشرده نیست، چون بسته نیست.

اینك، قضیهٔ مقدار ماکزیموم حسابان را، که به‌صورت مناسبی تعمیم یافته است، ثابت می‌کنیم.

۴.۶. قضیه (قضیهٔ مقدار ماکزیموم ومینیموم) فرض‌کنیم Y مجموعه‌ای مرتب با توپولوژی ترتیبی وتابع $\mathrm{f:X\to Y}$ پیوسته باشد. اگر X فشرده باشدآنگاه نقاطی مانند c و d در X وجود دارند به‌طوری‌که به‌ازای هر $\mathrm{x\in X}$، $\mathrm{f(c)\leqslant f(x)\leqslant f(d)}$.

قضیهٔ مقدار ماکزیموم حسابان حالت خاص این قضیه است وآن هنگامی روی می‌دهد که X بازه‌ای بسته در R باشد و $Y=R$.

برهان. چون f پیوسته و X فشرده است، مجموعهٔ $A=f(X)$ فشرده است. ثابت می‌کنیم که A دارای بزرگترین عضو M وکوچکترین عضو m است. در این

صورت، چون m و M به A تعلق دارند، به‌ازای نقاطی مـانند c و d از X، خواهیم داشت $m=f(c)$ و $M=f(d)$.

اگر A دارای بزرگترین عضو نباشدآنگاه گردایهٔ

$$\{(-\infty, a) \mid a\in A\}$$

پوششی باز برای A است. چون A فشرده است، زیر گردایه‌ای متناهی ازآن مانند

$$\{(-\infty, a_1), \ldots, (-\infty, a_n)\}$$

A را می‌پوشاند. اگر a_i بزرگترین اعضای a_1، ...، a_n باشدآنگاه a_i به‌هیچیك از این مجموعه‌ها تعلق ندارد. این امر بـا این فرض که مجموعه‌های فوق A را می‌پوشانند متناقض است.

با برهانی مشابه ثابت می‌شود که A دارای کوچکترین عضو است. □

سرانجام ثابت می‌کنیم که مجموعهٔ اعداد حقیقی ناشماراست. نکتهٔ جالب برهان این است که در آن هیچ موضوع جبری مداخله ندارد ــ هیچ اثری از بسط دهدهی یـا دودویی اعداد حقیقی یا نظیرآنها نیست ــ فقط خواص ترتیبی R درکار است و بس.

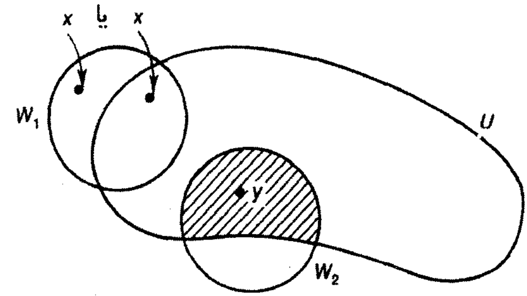
در واقع، ما نتیجهٔ کلیتر ذیل را ثابت می‌کنیم:

۵.۶ قضیه فرض‌کنیم X یك فضای (ناتهی) هاوسدورف فشرده باشد. اگر هرنقطهٔ X یك نقطهٔ حدی‌آن باشد آنگاه X ناشماراست.

برهان. مرحلهٔ ۱. نخست، ثابت می‌کنیم که به‌ازای هرمجموعهٔ باز (ناتهی) X، مانند U، و هر $x\in X$، مجموعه‌ای باز (ناتهی) مانند V جزء U وجود دارد به‌طوری که $\bar{V}$ شامل x نیست.

نقطهٔ x ممکن است در U باشد یا نباشد. اما در هرحـالت نقطه‌ای مانند y در U می‌توان‌یافت که متمایز از x باشد. درحالتی که x در U واقع است، امکان این‌عمل به‌این خاطر است که x نقطهٔ حدی X است (بنابراین، U بـاید شامل نقطه‌ای مانند y غیر از x باشد). ودرحالتی که x در U واقع نیست، امکان این‌عمل ناشی از ناتهی‌بودن U است. فرض‌کنیم W_1 و W_2 همسایگیهایی از هم‌جدا، بترتیب، از x و y باشند؛ دراین‌صورت، $V=U\cap W_2$ مجموعهٔ باز مطلوب است، که بستار آن شامل x نیست. به‌شکل ۱۶ نگاه کنید.

مرحلهٔ ۲. ثابت می‌کنیم که اگر $f{:}Z_+ \to X$ آنگاه f پوشا نیست. و از اینجا نتیجه می‌شود کـه X نـاشماراست. فرض کنیم $x_n=f(n)$. بنابرمرحلهٔ ۱ در مورد مجموعهٔ باز ناتهی $U=X$، می‌توانیم مجموعه‌ای بـاز ناتهی مـانند V_1 در X چنان اختیارکنیم که $\bar{V}_1$ شامل x_1 نباشد. به‌طورکلی، اگر V_{n-1} مجموعهٔ باز ناتهی مفروضی



شکل ۱۶

باشد، مجموعهٔ بازناتهی V_n را چنان انتخاب می‌کنیم که $V_n \subset V_{n-1}$ و $\bar{V}_n$ شامل x_n نباشد. حال دنبالهٔ تودرتوی

$$\bar{V}_1 \supset \bar{V}_2 \supset \cdots$$

از مجموعه‌های بستهٔ ناتهی X را در نظر می‌گیریم. چون X فشرده است، بنابرقضیهٔ ۹.۵ نقطه‌ای مانند x هست که $x \in \bigcap \bar{V}_n$. به‌ازای هر n، نقطهٔ x نمی‌تواند برابر با x_n باشد. زیرا، x به $\bar{V}_n$ تعلق دارد ولی x_n چنین نیست. □

۶.۶. نتیجه هربازهٔ بستهٔ $\mathbb{R}$ ناشماراست.

تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر X مجموعه‌ای مرتب باشد، که درآن هربازهٔ بسته فشرده است آنگاه X دارای خاصیت کوچکترین کران بالاست.

۲. ثابت کنید که هرفضای متری همبند که بیش از یک نقطه داشته باشد ناشماراست.

۳. فرض کنید X فضایی متری با متریک d باشد، وفرض کنید A یک زیرمجموعهٔ X باشد. یادآوری می‌کنیم که **قطر** A، درصورت وجود، بامعادلهٔ ذیل تعریف می‌شود:

$$\operatorname{diam} A = \operatorname{lub}\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

ثابت کنید که اگر A فشرده باشد آنگاه $\operatorname{diam} A$ موجود است و به‌ازای a_1 و a_2ای از A، $d(a_1, a_2) = \operatorname{diam} A$.

۴. فرض کنید X فضایی متری بامتریک d باشد؛ وفرض کنید $A \subset X$.

(الف) اگر $x \in X$، $d(x, A)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$d(x, A) = \text{glb}\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

ثابت کنید که نگاشتی که هر x از X را به $d(x, A)$ می‌نگارد نگاشتی پیوسته از X به R است.

(ب) آیا این حکم راست است که یک نقطه مانند a در A وجود دارد به‌طوری که $d(x, A) = d(x, a)$؟ اگر A بسته باشد آنگاه حکم فوق راست است؟ درصورت فشرده بودن A چطور؟

(پ) آیا این حکم راست است که $x \in \bar{A}$ اگر وفقط اگر $d(x, A) = 0$؟

(ت) ε- همسایگی A در X را به‌صورت اجتماع ذیل تعریف می‌کنیم:

$$U(A, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, \varepsilon).$$

ثابت کنید که $U(A, \varepsilon)$ مساوی است بامجموعهٔ

$$\{x \mid d(x, A) < \varepsilon\}.$$

(ث) ثابت کنید که اگر A و B زیرمجموعه‌های بستهٔ جدا از هم X باشند و B فشرده باشد آنگاه εای هست که ε- همسایگیهای A و B ازهم جدا هستند.

(ج) آیا اگر B فشرده نباشد، (ث) برقرار می‌ماند؟

۵. فرض کنید X یک فضای هاوسدورف فشرده باشد. ثابت کنید که اگر $\{A_n\}$ گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌های بستهٔ X باشد، که هرکدام از آنها دارای درونهٔ تهی در X است آنگاه نقطه‌ای در X موجود است که متعلق به‌هیچیک از A_nها نیست. [راهنمایی: برهان قضیهٔ ۵.۶ را الگو قراردهید.]

مسئلهٔ فوق حالت خاصی از قضیهٔ مقولهٔ بئراست که در فصل ۷ آن را مطالعه می‌کنیم.

۶*. فرض کنید A_0 بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ در R باشد. A_1 را مجموعه‌ای فرض کنید که از A_0 با برداشتن «ثلث میانی» آن، یعنی بازهٔ $(1/3, 2/3)$، به‌دست آمده است. فرض کنید A_2 مجموعه‌ای باشد که از A_1 با برداشتن «ثلثهای میانی» آن، یعنی $(1/9, 2/9)$ و $(7/9, 8/9)$، به‌دست آمده است. به‌طور کلی، A_n را با معادلهٔ ذیل تعریف می‌کنیم:

$$A_n = A_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n}\right).$$

مقطع A_nها، یعنی

$$C = \bigcap_{n \in Z_+} A_n$$

مجموعهٔ کانتور نام دارد که زیرفضایی از $[0, 1]$ است.

(الف) ثابت کنید که C کلاً ناهمبند است.

(ب) ثابت کنید که C فشرده است.
(پ) ثابت کنید که هرمجموعهٔ A_n اجتماعی ازتعدادی متناهی از بازه‌های بستهٔ ازهم‌جدا است که طول هریك $1/3^n$ است؛ ثابت کنید که نقاط انتهایی این بازه‌ها در C واقع‌اند.
(ت) ثابت کنید که هر نقطهٔ C یك نقطهٔ حدی C است.
(ث) نتیجه بگیرید که C ناشماراست.

۳-۷ فشردگی برحسب نقطهٔ حدی

چنانچه در آغاز مبحث مجموعه‌های فشرده اشاره شد، فرمولبندیهای دیگری از مفهوم فشردگی وجود دارند که اغلب مفید هستند. در این بخش یکی ازآنها را معرفی می‌کنیم. این‌مفهوم درحالی‌که از فشردگی به‌معنی اعم ضعیفتر است، در فضاهای متری برمفهوم فشردگی منطبق است. یك کاربردآن دراثبات سومین قضیهٔ حسابان است که درآغاز این فصل ذکرآن گذشت و آن قضیهٔ پیوستگی یکنواخت است. دراینجا صورتی ازآن‌راکه به‌طرز مناسبی تعمیم یافته است اثبات می‌کنیم.

تعریف. فضای X را **فشرده برحسب نقطهٔ حدی** خوانیم هرگاه هر زیرمجموعهٔ نامتناهی‌آن دارای یك‌نقطهٔ حدی باشد.

ازجهاتی این‌خاصیت طبیعیتر و با شهود سازگارتر ازفشردگی است. در روزهای نخستین پیدایش توپولوژی، آن‌را «فشردگی» نام نهاده بودند، و به‌مفهومی‌که تعریف‌آن برحسب پوشش باز فرمولبندی شده‌بود «دوفشردگی» می گفتند. بعدها، عنوان «فشردگی» را برای تعریف برحسب پوشش باز برگزیدند، وآن دیگری رها شد تا برای خود نامی تازه بیابد. اما، تاکنون برای آن نامی‌که مورد توافق همگان باشد یافته نشده است. به‌علل تاریخی، بعضی‌آن‌را «فشردگی فرشه‌ای[1]»می‌خوانند؛ بعضی دیگر به‌آن خاصیت «بولتانو-وایرشتراس»[2] می‌گویند. ما نام «فشردگی برحسب نقطهٔ حدی» را برای آن ساخته‌ایم. به‌نظر می‌رسد که این اصطلاح چیزی ازبقیه‌کم نداشته‌باشد؛ دست‌کم می‌تواند اطلاعی از محتوای این‌خاصیت به‌دست دهد.

۷.۱ قضیه فشردگی مستلزم فشردگی برحسب نقطهٔ حدی است، ولی نه‌بعکس.

برهان. فرض‌کنیم X فضایی فشرده و A زیرمجموعه‌ای مفروض از آن باشد. می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که اگر A نامتناهی باشدآنگاه A دارای یك‌نقطهٔ حدی است. برای

1. Fréchet 2. Bolzano – Weierstrass

این‌منظور، عکس نقیض این‌حکم را ثابت می کنیم. یعنی اگر A هیچ‌نقطهٔ حدی نداشته باشد آنگاه باید A متناهی باشد.

فرض کنیم A هیچ‌نقطهٔ حدی نداشته‌باشد. در این‌صورت، A شامل همهٔ نقاط حدی خود است، و در نتیجه، بسته است. چون هرزیرمجموعهٔ بستهٔ یك‌فضای فشرده فضایی است فشرده، پس A فشرده‌است. ازطرف دیگر، به‌ازای هر a از A، می‌توان‌یك‌همسایگی a مانند U_a را چنان اختیار کرد که U_a مجموعهٔ $A-\{a\}$ را قطع نکند، زیرا a نقطهٔ حدی A نیست. مجموعه‌های باز U_a مجموعهٔ A را می‌پوشانند؛ وچون A فشرده است، تعدادی متناهی، مثلاً n تا، ازآنها A را می‌پوشانند. چون هر U_a فقط شامل یك‌نقطه از A است، پس مجموعهٔ A فقط n عضو دارد.

مثال دیگر فضایی را توصیف می کند که فشرده برحسب نقطه حدی است ولی فشرده نیست. □

مثال ۱. مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارای مینیمال S_Ω را باتوپولوژی ترتیبی در نظر می‌گیریم. فضای S_Ω فشرده نیست، زیرا در $\bar{S}_\Omega$ بسته نیست. اما، فشرده برحسب نقطهٔ حدی است: فرض‌کنیم A یك‌زیرمجموعهٔ نامتناهی S_Ω باشد. یك‌زیرمجموعه مانند B از A انتخاب می کنیم که نامتناهی وشمارا باشد. مجموعهٔ B، از آنجاکه شماراست، دارای کران بالایی مانند b در S_Ω است؛ در نتیجه، B زیرمجموعه‌ای ازبازهٔ $[a_\circ, b]$ از S_Ω خواهد بود، که در آن $a_\circ$ کوچکترین عضو S_Ω است. ازآنجاکه S_Ω واجد خاصیت کوچکترین‌کران بالاست، بازهٔ $[a_\circ, b]$ فشرده است. بنابرقضیهٔ پیش، B در $[a_\circ,b]$ دارای نقطه‌ای حدی مانند x است. نقطهٔ x یك نقطهٔ حدی A نیز هست. بنابراین، S_Ω فشرده برحسب نقطهٔ حدی است.

قبلاً دیدیم که $\bar{S}_\Omega$ متریك‌پذیر نیست، زیرا در «لم دنباله» صدق نمی‌کند (مثال ۳ از بخش ۱۰.۲). اما، همین که ثابت‌کنیم فشردگی وفشردگی برحسب نقطهٔ حدی درفضاهای متریك‌پذیر معادل‌اند، ازآنجا نتیجه می گیریم که S_Ω نیز متریك‌پذیر نیست، اگرچه در لم دنباله صدق می‌کند. زیراکه S_Ω فشرده برحسب نقطهٔ حدی است ولی فشرده نیست.

برای‌اثبات قضیهٔ پیوستگی یکنواخت، نخست، باید لمی کلاسیك درباب پوششهای بازفضاهای متری را ثابت‌کنیم. یادآوری می کنیم که قطر زیرمجموعهٔ‌کراندار A از فضای متری (X, d) عدد

$$\operatorname{lub}\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

است.

۷.۲۰ لم(لم عدد لبگ[1]) فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ پوششی باز برای فضای متری (X, d) باشد.

1. Lebesgue

اگر X فشرده باشد آنگاه عددی مثبت مانند δ هست‌که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ X که قطر آن از δ کمتر باشد، عضوی از $\mathscr{A}$ وجود داردکه حاوی آن است.

عدد δ را یك **عدد لبگ** برای پوشش $\mathscr{A}$ گوییم.

برهان. مرحلهٔ ۱. چون X فشرده است، پس لزوماً فشرده برحسب نقطهٔ حدی نیز هست. ثابت می کنیم که فشردگی X برحسب نقطهٔ حدی نیز به‌نوبهٔ خود مستلزم این‌حکم است که هردنبالهٔ نامتناهی مانند (x_n) از نقاط X، دارای زیردنباله‌ای همگراست. یعنی، دنباله‌ای صعودی از اعداد صحیح مثبت مانند

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots$$

وجود دارد به‌طوری که دنبالهٔ

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_i}, \ldots$$

همگراست.

(اگر در فضایی مانند Y هردنباله‌داری زیردنباله‌ای همگرا باشدآنگاه فضای Y را **فشردهٔ دنباله‌ای** می‌خوانیم.)

به‌ازای دنبالهٔ مفروض (x_n)، مجموعهٔ

$$A = \{x_n \mid n \in Z_+\}$$

را درنظر می گیریم.

نخست، فرض‌کنیم A متناهی باشد. در این‌حالت، ادعا می‌کنیم‌که نقطه‌ای مانند x وجودداردکه به‌ازای بینهایت مقدار ازمقادیر n، $x_n = x$. [برای اثبات این‌حکم، فرض کنیم $f: Z_+ \to A$ تابعی اندیسگذارباشد کــه باضابطهٔ $f(n) = x_n$ تعریف شده است. دراین‌صورت، چون Z_+ اجتماع گردایه‌ای متناهی‌ازمجموعه‌های $f^{-1}(x)$ است، که درآن x مجموعهٔ A را طی می کند، پس دست‌کم یکی از مجموعه‌های $f^{-1}(x)$ باید نامتناهی باشد.] پس،دنبالهٔ (x_n) یك‌زیردنباله‌داردکه ثابت‌است. بنابراین، این‌زیردنباله خودبخود همگراست.

ثانیاً، فرض‌کنیم A نامتناهی باشد. در این‌صورت، A دارای نقطه‌ای حدی مـانند x است. به‌طریق‌ذیل، زیردنباله‌ای از (x_n) تعریف می‌کنیم‌که به x همگرا باشد: نخست، n_1 را چنان انتخاب می کنیم که

$$x_{n_1} \in B(x, 1).$$

سپس، فرض‌کنیم عدد صحیح مثبت n_{i-1} دردست باشد. چون‌گوی $B(x, 1/i)$ مجموعهٔ A را در بینهـایت نقطه قطع می کند، می‌توان اندیسی مانند n_i، که $n_i > n_{i-1}$، چنان اختیارکردکه

$$x_{n_i} \in B\left(x, \frac{1}{i}\right)$$

دراین‌صورت، زیردنبالهٔ ... , x_{n_1}, x_{n_2} به x همگراست.

مرحلهٔ ۲. حال ثابت می‌کنیم که اگر X فشردهٔ دنباله‌ای باشدآنگاه هرپوشش باز $\mathcal{A}$ از X دارای عددی لبگ مانند δ است.

این حکم را با اثبات عکس نقیض‌آن ثابت می‌کنیم: فرض‌کنیم هیچ δی مثبتی وجود نداشته باشد به‌طوری‌که هرمجموعه با قطرکمتر از δ دست‌کم دریك عضو $\mathcal{A}$ قرار گیرد؛ در این صورت، X فشردهٔ دنباله‌ای نیست.

پس، فرض‌کنیم که چنین δای وجود نداشته باشد. یعنی، به‌ازای هرعدد مثبت δ، یك‌زیرمجموعهٔ X باقطرکمتر از δ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که در هیچ عضو $\mathcal{A}$ قرار نمی‌گیرد. بویژه، به‌ازای هر $n \in Z_+$، می‌توان مجموعه‌ای مانند C_n با قطرکمتر از $1/n$ انتخاب‌کردکه در هیچ عضو $\mathcal{A}$ قرار نگیرد. به‌ازای هر n، نقطه‌ای مانند x_n از C_n انتخاب می‌کنیم. مدعی هستیم که دنبالهٔ (x_n) دارای هیچ‌زیردنبالهٔ همگرا نیست.

فرض‌کنیم (x_n) زیردنباله‌ای مانند (x_{n_i}) همگرا به x داشته‌باشد. حال x به‌عضوی از $\mathcal{A}$ مانند A تعلق دارد، وچون A باز است، عدد مثبتی مانند ε وجود دارد که $B(x, \varepsilon) \subset A$. اندیس i را به‌قدرکافی بزرگ انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که

$$d(x_{n_i}, x) < \varepsilon/2 \quad \text{و} \quad 1/n_i < \varepsilon/2.$$

حال C_{n_i} درگوی به‌مرکز x_{n_i} وبه‌شعاع $1/n_i$ قرار دارد. ازاینجا نتیجه می‌شود که

$$C_{n_i} \subset B(x, \varepsilon)$$

ودر این‌صورت، $C_{n_i} \subset A$، واین باانتخاب مجموعه‌های C_n متناقض است. □

برهانی‌که گذشت نمونه‌ای است از برهانهایی که ماهیت غیرسازنده دارند. بدین معنی‌که وجود δ را ثابت می‌کند بدون اینکه اشاره‌ای به‌طریق یافتن‌آن بکند.

حال به‌اثبات سومین قضیهٔ حسابان، که در آغاز این‌فصل بیان شد، می‌پردازیم. این قضیه دراینجا به‌طرز مناسبی تعمیم یافته است.

۳۰۷ قضیه (قضیهٔ پیوستگی یکنواخت) فرض‌کنیم $f: X \to Y$ نگاشتی پیوسته از فضای متری فشردهٔ (X, d_X) به‌فضای متری (Y, d_Y) باشد. دراین صورت، f همگرای یکنواخت است. یعنی به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد مثبتی مانند δ هست‌که به‌ازای هردونقطهٔ x_1 و x_2 از X،

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

برهان. به‌ازای عدد مثبت مفروض ε، پوشش بازی از Y متشکل از گویهای $B(y, \varepsilon/2)$ به‌شعاع $\varepsilon/2$ درنظر می‌گیریم. فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ پوشش بازی برای X باشد که از تصاویر عکس این گویها تحت f به‌دست آمده است. δ را عدد لبگ پوشش $\mathcal{A}$ می‌گیریم. در این صورت، اگر x_1 و x_2 دو نقطه از X باشند به‌طوری که $d_X(x_1, x_2) < \delta$ آنگاه قطر مجموعهٔ دو نقطه‌ای $\{x_1, x_2\}$ از δ کمتر است. پس، تصویر آن $\{f(x_1), f(x_2)\}$ در گویی مانند $B(y, \varepsilon/2)$ قرار می‌گیرد. در نتیجه $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$؛ واین همان است که می‌خواستیم. □

اینك، ثابت می‌کنیم که فشردگی و فشردگی برحسب نقطهٔ حدی در فضاهای متریك‌پذیر معادل‌اند:

۴۰۷. قضیه فرض‌کنیم X فضایی متری‌پذیر باشد. در این صورت، احکام ذیل معادل‌اند:

(۱) X فشرده است.

(۲) X فشرده برحسب نقطهٔ حدی است.

(۳) X فُشردهٔ دنباله‌ای است.

برهان. پیش از این ثابت کردیم که (۳) $\Leftarrow$ (۲) $\Leftarrow$ (۱)؛ به‌برهانهای قضیهٔ ۱۰۷ ولم ۲۰۷ مراجعه‌کنید. همچنین ثابت کردیم که فشردگی دنباله‌ای مستلزم این است که هرپوشش باز X دارای یك‌عدد لبگ است. حال برهان قضیهٔ حاضر را با اثبات این مطلب که فشردگی دنباله‌ای فضای X مستلزم فشردگی آن است به‌پایان می‌رسانیم. بنابراین، فرض کنیم X فشردهٔ دنباله‌ای باشد.

مرحلهٔ ۱. نخست، ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، یك‌پوشش متناهی از ε-گویها برای X وجود دارد. برای این‌کار، باز هم عکس نقیض این‌حکم را ثابت می‌کنیم: اگر به‌ازای ε مثبتی X را نتوان با تعدادی متناهی از ε-گویها پوشاند آنگاه X فشردهٔ دنباله‌ای نیست.

بنابراین، فرض‌کنیم X را نمی‌توان با تعدادی متناهی ازگویها به‌شعاع ε پوشاند. به‌روش‌زیر، دنباله‌ای ازنقاط X می‌سازیم: نخست، x_1 را نقطهٔ دلخواهی از X می‌گیریم. با توجه به‌اینکه‌گوی $B(x_1, \varepsilon)$ مساوی X نیست (در غیر این‌صورت، X را می‌توان با تنها ε-گوی پوشاند)، نقطهٔ x_2 را چنان انتخاب می‌کنیم که در $B(x_1, \varepsilon)$ نباشد. به‌طور کلی، با در دست‌داشتن $x_1, \ldots, x_n$ نقطهٔ x_{n+1} را چنان انتخاب می‌کنیم که در اجتماع

$$B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)$$

نباشد. این انتخاب، با توجه به‌اینکه این گویها X را نمی‌پوشانند، ممکن است. توجه داشته‌باشید که، بنابرروش ساختن جملات این دنباله، به‌ازای هر i که $i = ۱, ۲, \ldots, n$، داریم $d(x_{n+1}, x_i) \geqslant \varepsilon$. بنابراین، دنبالهٔ (x_n) نمی‌تواند دارای یك‌زیردنبالهٔ همگرا بساشد؛ در واقع هر گوی به‌شعاع $\varepsilon/۲$ می‌تواند حداکثر به‌ازای یك مقدار n شامل x_n باشد.

مرحلهٔ ۲. اینك ثابت می‌کنیم که X فشرده است. فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ پوششی باز برای X باشد. چون X فشردهٔ دنباله‌ای است، پوشش $\mathcal{A}$ عدد لبگی مانند δ دارد. با استفاده از مرحلهٔ ۱، پوششی متناهی از X با گویهای به شعاع $\delta/۳$ انتخاب می‌کنیم. قطر هریك از این گویها حداکثر $۲\delta/۳$ است. پس، به‌ازای هریك از این گویها می‌توان عضوی از $\mathcal{A}$ انتخاب کرد که حاوی‌آن باشد. بدین‌ترتیب، زیرگردایه‌ای متناهی از $\mathcal{A}$ به‌دست می‌آوریم که X را می‌پوشاند. □

تمرینها

۱. فرض‌کنید X فضایی دونقطه‌ای باتوپولوژی ناگسسته‌باشد. ثابت‌کنید که $X \times Z_+$ فشرده برحسب نقطهٔ حدی است، ولی فشرده نیست.

۲. ثابت‌کنید که $[۰, ۱]^\omega$ نه با توپولوژی یکنواخت فشرده برحسب نقطهٔ حدی است ونه باتوپولوژی جعبه‌ای.

۳. ثابت کنید که مجموعهٔ $[۰, ۱]$ به‌عنوان زیرفضایی از R_l فشرده برحسب نقطهٔ حدی نیست.

۴. فضای X را **فشردهٔ شمارشی** خوانیم هرگاه هرپوشش باز شمارای X حاوی یك زیرگردایهٔ متناهی باشد که X را بپوشاند.

(الف) ثابت‌کنید که فشردگی شمارشی مستلزم فشردگی برحسب نقطهٔ حدی است.

(ب) اگر X هاوسدورف باشد، عکس این‌حکم را ثابت‌کنید. [راهنمایی: اگر هیچ زیرگردایهٔ متناهی از $\{U_n\}$ مجموعهٔ X را نپوشاند آنگاه x_n را چنین‌انتخاب می‌کنیم: $x_n \notin U_۱ \cup \ldots \cup U_n$.]

۵. فرض‌کنید X فشرده برحسب نقطهٔ حدی باشد.

(الف) اگر $f: X \to Y$ پیوسته باشد، آیا $f(X)$ الزاماً فشرده برحسب نقطهٔ حدی است؟

(ب) اگر A زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X باشد، آیا A الزاماً فشرده برحسب نقطهٔ حدی است؟

(پ) اگر X زیرفضایی از Z باشد، آیا X در Z الزاماً بسته است؟

(ت) سؤالهای (الف) ـ (پ) را با این شرط اضافی که فضاها همه هاوسدورف هستند تکرار کنید.

*(ث) این حکم که حاصل‌ضرب دوفضای فشرده برحسب نقطهٔ حدی، فضایی فشرده برحسب نقطهٔ حدی است عموماً برقرار نیست، حتی اگر شرط هاوسدورف را نیز به‌فضاها اضافه کنیم. اما، مثالهایی که دراین مورد وجود دارد نسبتاً پیچیده‌اند. رجوع کنید بمثال ۱۱۲ در $[S-S]$.

۶. فرض کنید X، Y، و Z فضاهایی متری باشند.

(الف) اگر $f:X \to Y$ و $g:Y \to Z$ پیوستهٔ یکنواخت باشند، آیا $g\circ f:X \to Z$ الزاماً پیوستهٔ یکنواخت است؟

(ب) اگر $f:X \to Y$ هومئومورفیسم وپیوستهٔ یکنواخت باشد، آیا f^{-1} الزاماً پیوستهٔ یکنواخت است؟

۷. فرض کنید (X, d) یك‌فضای متری فشرده باشد و $f:X \to X$ نگاشتی پیوسته.

(الف) f را انقباض خوانیم در صورتی که یك عدد $\alpha < 1$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر x و y از X،

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\, d(x, y).$$

ثابت کنید که اگر f یك انقباض باشد، نقطهٔ یکتایی مانند x از X هست به‌طوری که $x=f(x)$. [راهنمایی: $\bigcap f^n(X)$ را درنظر بگیرید.]

(ب) f را **ایزومتری** خوانیم در صورتی که به‌ازای هر x و y از X، $d(f(x), f(y))=d(x, y)$. ثابت کنید که اگر f ایزومتری باشد آنگاه f پوشاست. [راهنمایی: فرض کنید $x \notin f(X)$، یك‌همسایگی x به‌شعاع ε اختیار کنید که از $f(X)$ جدا باشد. x_1 را مساوی x و، به‌طورکلی، x_{n+1} را مساوی $f(x_n)$ تعریف کنید. ثابت کنید که به‌ازای $m \neq n$، $d(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$.]

(پ) با ذکر مثالهایی ثابت کنید که اگر X فشرده نباشد آنگاه این‌قضایا برقرار نیستند.

*۸. ثابت کنید که $[0, 1]^\omega$ باتوپولوژی حاصل‌ضربی فشرده است.

*۳ـ۸ فشردگی موضعی[1]

دراین‌قسمت مفهوم فشردگی موضعی‌را مطالعه می‌کنیم، واین قضیهٔ اساسی‌را ثابت می‌کنیم که هرفضای هاوسدورف موضعاً فشرده را می‌توان در فضای هاوسدورف فشردهٔ معینی، که این‌فضا به‌فشرده شدهٔ تك‌نقطه‌ای موسوم است، نشاند.

---

۱. این‌بخش را دربخش ۵ ـ ۳ ودرفصل ۷ دانسته فرض خواهیم کرد.

تعریف. فضای X را در نقطهٔ x **موضعاً فشرده** خوانیم درصورتی که زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X مانند C موجود باشد که حاوی یك همسایگی x است. اگر X درهر نقطهٔ خود موضعاً فشرده باشدآنگاه به‌طور ساده X را **موضعاً فشرده** می‌خوانیم.

ملاحظه می‌شودکه هرفضای فشرده خود به‌خود موضعاً فشرده است.

مثال ۱. خط حقیقی R موضعاً فشرده است. نقطهٔ x متعلق به‌بازه‌ای مانند (a, b) است، که آن نیز به‌نوبهٔ خود جزء مجموعهٔ فشردهٔ $[a, b]$ است. می‌توانید بررسی‌کنیدکه زیرفضای Q متشکل ازاعدادگویا موضعاً فشرده نیست.

مثال ۲. فضای R^n موضعاً فشرده است، نقطهٔ x متعلق به‌عضوی از پایه مانند $(a_1, b_1)\times\ldots\times(a_n, b_n)$ است، که آن نیز به نوبهٔ خود در مجموعهٔ فشردهٔ $[a_1, b_1]\times\ldots\times[a_n, b_n]$ واقع است. فضای R^ω موضعاً فشرده نیست، هیچیك از اعضای پایهٔ‌آن جزء مجموعه‌های فشرده نیست. زیرا، اگر

$$B=(a_1, b_1)\times\ldots\times(a_n, b_n)\times R\times\ldots\times R\times\ldots$$

جزء مجموعه‌ای فشرده باشدآنگاه باید بستارآن

$$B=[a_1, b_1]\times\ldots\times[a_n, b_n]\times R\times\ldots$$

نیز فشرده باشد، که چنین نیست.

مثال ۳. هرمجموعهٔ مرتب ساده مانند X که دارای خاصیت‌کوچکترین کران بالا باشد، موضعاً فشرده است، زیرا هرعضو پایهٔ X جزء بازه‌ای بسته در X است که فشرده است.

دو رده ازخوشرفتارترین فضاهایی‌که در ریاضی باآنها سروکار داریم فضاهای متری پذیر و فضاهای هاوسدورف فشرده هستند. چنین فضاهایی دارای خواص بسیار مفیدی هستند، که می‌توان ازآنها در اثبات قضایا، ساختن ساختمانهای دیگر، و غیره بهره‌گرفت. اگر فضای مفروضی یکی ازاین‌دو نوع نباشد، بهترین وضعیتی‌که می‌توان انتظار داشت‌آن است‌که فضای مفروض زیرفضای یکی از این‌گونه فضاها باشد. البته، هرزیرفضای یك فضای متری پذیر خود متری پذیر است. بنابراین، از این راه هیچ فضای جدیدی حاصل نمی‌شود. اما، زیرفضای یك‌فضای هاوسدورف فشرده لازم نیست فشرده‌باشد. بدین‌ترتیب، این‌سؤال پیش می‌آیدکه: تحت چه‌شرایطی فضایی بازیرفضای یك فضای هاوسدورف فشرده هومئومورف است؟ در اینجا پاسخی برای این پرسش می‌آوریم. درفصل ۵ که فشرده‌سازی‌را به‌طورکلی مطالعه می‌کنیم بدین‌مسئله بازخواهیم گشت.

تعریف. فرض کنیم X یك فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باشد. شیئی بیرون از X درنظرمی‌گیریم. می‌توانیم این شیء را برای سهولت بانماد ∞ نمایش دهیم، وباالحاق این شیء به X، مجموعهٔ $Y = X \cup \{\infty\}$ راتشکیل می‌دهیم. حال، با تعریف گردایه‌ای از انــواع مجموعه‌هــای ذیل ، به‌عنوان مجموعه‌هــای بــاز در Y، در آن توپولوژی‌ای می‌سازیم:

(۱) U، که درآن U یکی از زیرمجموعه‌های باز X است،

(۲) $Y-C$، که درآن C یکی از زیرمجموعه‌های فشردهٔ X است.

فضای Y را **فشرده‌شدهٔ تك‌نقطه‌ای** X می‌خوانیم.

بررسی توپولوژی‌بودن این گردایه برای Y ضروری‌است. مجموعهٔ تهی‌مجموعه‌ای از نوع (۱) است ، و فضای Y مجموعه‌ای از نوع (۲) است . بررسی اینکه مقطع دو مجموعهٔ باز مجموعه‌ای باز است متضمن سه‌حالت ذیل است:

$$U_1 \cap U_2 \quad \text{ازنوع(۱) است.}$$

$$(Y-C_1)\cap(Y-C_2) = Y-(C_1 \cup C_2) \quad \text{از نوع(۲) است.}$$

$$U_1 \cap (Y-C_1) = U_1 \cap (X-C_1) \quad \text{ازنوع (۱) است،}$$

چون C_1 در X بسته است. به‌همین قیــاس، ملاحظه می‌شودکه اجتماع هر گردایه از مجموعه‌های باز، باز است:

$$\bigcup U_\alpha = U \quad \text{ازنوع(۱) است.}$$

$$\bigcup (Y-C_\beta) = Y-\left(\bigcap C_\beta\right) = Y-C \quad \text{ازنوع(۲) است.}$$

چون $C-U$ یك‌زیرمجموعهٔ بستهٔ C است، درنتیجه فشرده است؛ پس، مجموعهٔ

$$\left(\bigcup U_\alpha\right) \cup \left(\bigcup (Y-C_\beta)\right) = U \cup (Y-C) = Y-(C-U)$$

ازنوع(۲) است.

خواص اساسی فشرده‌شدهٔ تك‌نقطه‌ای درقضیهٔ ذیل آمده‌اند.

۱۰۸. قضیه فرض‌کنیم X یك‌فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باشدکه فشرده نیست و Y فشرده‌شدهٔ تك‌نقطه‌ای X باشد. دراین‌صورت، Y فضایی هاوسدورف وفشرده است، X زیرفضایی از Y است؛ مجموعهٔ $Y-X$ متشکل ازیك‌نقطه است؛ و $\overline{X} = Y$.

برهان. نخست ثابت می‌کنیم کـه X یك‌زیرفضای Y است و $\overline{X} = Y$. برای این منظور ملاحظه می‌کنیم که اولاً مقطع هرمجموعهٔ باز Y بامجموعهٔ X مجموعه‌ای بــاز

در X است. زیرا، $U\cap X=U$، و $(Y-C)\cap X=X-C$ که هردو در X بازند. بعکس، هرمجموعهٔ باز X، مجموعه‌ای از نوع(۱) است و بنابراین در Y باز است. چون X فشرده نیست، هرمجموعهٔ باز به‌صورت $Y-C$ که شامل نقطهٔ ∞ باشد X را قطع می‌کند. بنابراین، ∞ یك نقطهٔ حدی X است. وازآنجا نتیجه می‌شود $\bar{X}=Y$.

برای اینکه ثابت کنیم Y فشرده است، فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ پوشش باز دلخواهی از Y باشد. چون هیچیك ازمجموعه‌های نوع(۱) شامل نقطهٔ ∞ نیست. گردایهٔ $\mathcal{A}$ باید شامل مجموعه‌ای باز ازنوع(۲) مانند $Y-C$ باشد. مقاطع همهٔ اعضایی از $\mathcal{A}$ راکه غیر از $Y-C$ هستند بامجموعهٔ X درنظر می گیریم؛ این‌اعضا تشکیل گردایه‌ای ازمجموعه‌های باز X می‌دهندکه C را می‌پوشانند. چون C فشرده است، تعدادی متناهی ازآنها نیز C را می‌پوشانند؛ اعضایی از $\mathcal{A}$ که متناظر به‌این گردایهٔ متناهی‌اند همراه باتنها عضو $Y-C$ همهٔ Y را می‌پوشانند.

برای اثبات هاوسدورف بودن Y، فرض می‌کنیم x و y دو نقطهٔ متمایز Y باشند. اگر هردوی‌آنها در X واقع باشند، مجموعه‌های باز جدا ازهمی از X مانند U و V وجود دارندکه، بترتیب، شامل x و y اند. ازطرف دیگر، اگر $x\in X$ و $y=\infty$، می‌توان مجموعهٔ فشرده‌ای مانند C در X انتخاب کرد که حاوی یك‌همسایگی x مانند U باشد. دراین‌صورت، U و $Y-C$، بترتیب، همسایگیهای جدا ازهمی از x و y در Y اند. □

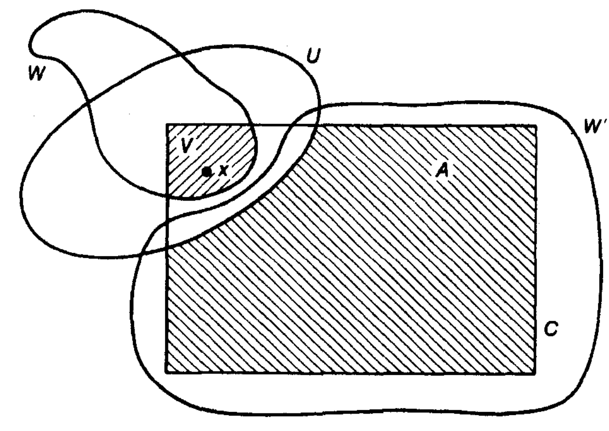
مثال ۴. بسادگی می‌توانید بررسی‌کنیدکه فشرده شدهٔ تك‌نقطه‌ای خط حقیقی R با دایره هومئومورف است. به‌همین قیاس، فشرده‌شدهٔ تك‌نقطه‌ای R^2 باکرهٔ S^2 هومئومورف است. اگر R^2 به‌عنوان فضای C از اعداد مختلط ملحوظ شودآنگاه $C\cup\{\infty\}$ را کرهٔ ریمانی یا صفحهٔ مختلط گسترده می‌خوانند.

تعریف ما ازفشردگی موضعی از جهاتی رضایت‌بخش نیست. معمولاً وقتی گفته می‌شودکه فضایی مانند X خاصیت مفروضی‌را «به‌طور موضعی» دارد، منظور این‌است‌که هر $x\in X$، دارای همسایگیهای «به‌دلخواه کوچك» است که واجد این خاصیت هستند. درتعریف‌ماازفشردگی‌موضعی‌سخنی‌ازهمسایگیهای «به‌دلخواه کوچك» به‌میان نیامده‌است. بنابراین، جای بحث است که‌آیا حق داریم اصولاً آن را فشردگی موضعی بنامیم یانه.

ذیلاً، صورت دیگری از تعریف فشردگی موضعی را می‌آوریم که براستی از ماهیت «موضعی» بیشتری برخورداراست؛ هنگامی که X هاوسدورف باشد، این‌دوتعریف معادل‌اند.

۲۰۸. لم فرض‌کنیم X فضایی هاوسدورف باشد. دراین صورت، X در نقطهٔ x موضعاً فشرده است اگر و فقط اگربه‌ازای هرهمسایگی x مانند U، یك‌همسایگی x مانند V یافت شود به‌طوری‌که $\bar{V}$ فشرده باشد و $\bar{V}\subset U$.

برهان. واضح است که این‌فرمولبندی جدید مستلزم فشردگی موضعی است؛ مجموعهٔ $C=\bar{V}$ مجموعهٔ فشردهٔ مطلوب است که حاوی یك همسایگی x است. بعکس، فرض کنیم C مجموعه‌ای‌فشرده‌باشدکه حاوی یك‌همسایگی x است و U را همسایگی دلخواهی از x می گیریم. فرض‌کنیم $A=C-U$؛ چون C بسته است، مجموعهٔ A فشرده‌است. حال با استفاده لم ۴.۵، مجموعه‌های باز جدا ازهم W و W' را چنان انتخاب می‌کنیم که، بترتیب، شامل x و حاوی A باشند. شکل ۱۷ را نگاه کنید. فرض‌کنیم $V=W\cap(\operatorname{Int}C)$. یادآوری می‌کنیم که $\operatorname{Int}C$ اجتماع همهٔ مجموعه‌های باز جزء C است. پس، V یك‌همسایگی x است. چون X هاوسدورف است، C در X بسته‌است؛ بنابراین، $\bar{V}\subset C$، و درنتیجه $\bar{V}$ فشرده است. چون V جزء W است، و W از W' جداست، مجموعهٔ $\bar{V}$ نمی‌تواند A را قطع‌کند. بنابراین، $\bar{V}\subset C-A$، و درنتیجه، $\bar{V}\subset U$. □



شکل ۱۷

در صورتی‌که X در هر نقطه موضعاً فشرده باشد برای این‌لم برهان ساده‌تری وجود دارد. در این برهان ازاین‌حکم استفاده می‌شودکه متمم U در Y، یعنی فشرده‌شدهٔ تك‌نقطه‌ای X، مجموعه‌ای فشرده است؛ سپس، همسایگیهای جدا ازهمی مانند V و W، بترتیب، از x و $Y-U$ انتخاب می‌کنیم. در این‌صورت، $\bar{V}$، بستار V در Y، فشرده وجزء U است.

۳.۸. قضیه فرض‌کنیم X یك فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باشد، و Y را

زیرفضایی از X درنظر می‌گیریم. اگر Y در X بسته یا باز باشد آنگاه Y موضعاً فشرده است.

برهان. فرض‌کنیم Y در X بسته باشد. فرض‌کنیم $y\in Y$ و C مجموعهٔ فشرده‌ای در X باشدکه حاوی یك همسایگی x مانند U در X است؛ در این‌صورت، $C\cap Y$ در C بسته است، وبنابراین، فشرده است و حاوی همسایگی $U\cap Y$ از y در Y است. (شرط هاوسدورف را دراینجا به‌کار نبرده‌ایم.)

فرض‌کنیم Y در X باز باشد. اگر $y\in Y$، بااستفاده ازلم پیش، یك همسایگی y مانند V در X چنان انتخاب می‌کنیم‌که $\bar{V}$ فشرده باشد و $\bar{V}\subset Y$. در این‌صورت، $C=\bar{V}$ مجموعه‌ای فشرده در Y است‌که حاوی همسایگی V از y در Y است. □

۴.۸ نتیجه فضای X بایك زیرمجموعهٔ بازیك‌فضای‌هاوسدورف‌فشرده هومئومورف است اگر وفقط اگر X هاوسدورف وموضعاً فشرده باشد.

برهان. این‌حکم ازقضیهٔ ۱.۸ ونتیجهٔ ۳.۸ به‌دست می‌آید. □

تمرینها

۱. ثابت‌کنیدکه Q، مجموعهٔ اعدادگویا، موضعاً فشرده نیست.

۲. (الف) ثابت‌کنیدکه اگر $\prod X_\alpha$ موضعاً فشرده باشدآنگاه هر X_α موضعاً فشرده است وبه‌ازای همهٔ مقادیر α، بجز تعدادی متناهی ازآنها، X_α فشرده است. (X_αها را ناتهی فرض‌کنید.)

(ب) با دانسته‌گرفتن قضیهٔ تیخونوف، عکس حکم بالارا ثابت‌کنید.

۳. فرض‌کنید X یك‌فضای موضعاً فشرده باشد. اگر $f:X\to Y$ پیوسته باشد، آیا لازم است‌که فضای $f(X)$ موضعاً فشرده‌باشد؟ اگر f هم‌پیوسته و هم باز باشد، چه‌روی می‌دهد؟ پاسخ خودرا توجیه کنید.

۴. ثابت‌کنیدکه $[0,1]^\omega$، باتوپولوژی یکنواخت، موضعاً فشرده نیست.

۵. ثابت‌کنیدکه شرایط قضیهٔ ۱.۸، فشرده‌شدهٔ تك نقطه‌ای را باتقریب یك‌هومئومورفیسم مشخص می‌کنند.

۶. ثابت‌کنیدکه فشرده‌شدهٔ تك نقطه‌ای R بادایرهٔ S^1 هومئومورف است.

۷. ثابت‌کنیدکه فشرده‌شدهٔ تك‌نقطه‌ای S_Ω با $\bar{S}_\Omega$ هومئومورف است.

۸. ثابت کنید که فشرده شدهٔ تك نقطه‌ای Z_+ هومئومورف است با زیرفضای

$\{0\} \cup \{1/n \mid n \in Z_+\}$ از R.

۹. ثابت کنید که فشرده‌شدهٔ تك‌نقطه‌ای R^2 هومئومورف است با کرهٔ دوبعدی S^2.

۱۰. ثابت کنید که اگر G یك گروه توپولوژیك موضعاً فشرده و H زیرگروهی از آن باشد آنگاه G/H موضعاً فشرده است.

*۱۱. (الف) لم ذیل را ثابت کنید:

لم. اگر $p: X \to Y$ نگاشتی خارج قسمتی و Z یك فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باشد آنگاه نگاشت

$$\pi = p \times i_Z : X \times Z \longrightarrow Y \times Z$$

یك نگاشت خارج قسمتی است.

[راهنمایی: اگر $\pi^{-1}(A)$ باز وشامل $x \times y$ باشد، مجموعه‌های U_1 و V را، که در آن $\bar{V}$ فشرده است، چنان انتخاب کنید که $x \times y \in U_1 \times V$ و $U_1 \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$. با فرض اینکه $U_i \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$، مجموعهٔ بازی مانند U_{i+1} که حاوی $p^{-1}(p(U_i))$ باشد چنان انتخاب کنید که $U_{i+1} \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$. فرض کنید $U = \bigcup U_i$؛ ثابت کنید که $\pi(U \times V)$ یك همسایگی $\pi(x, y)$ است که جزء A است.]

(ب) ثابت کنید:

قضیه. فرض کنید $p: A \to B$ و $q: C \to D$ نگاشتهایی خارج‌قسمتی باشند. اگر B و C فضاهای هاوسدورف موضعاً فشرده باشند آنگاه $p \times q: A \times C \to B \times D$ یك نگاشت خارج قسمتی است.

*تمرینهای تکمیلی:

تورها

درآنچه گذشت دیدیم که دنباله‌ها برای بررسی نقاط حدی، توابع پیوسته، ومجموعه‌های فشرده در فضاهای متری «کافی» بودند. تعمیمی از مفهوم دنباله موجود است، موسوم به تور، که همین‌کار را برای فضاهای توپولوژیك دلخواه انجام‌می‌دهد. در اینجا، تعریفهای مربوطه را می‌آوریم و اثباتها را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم. یادآوری می کنیم که رابطه‌ای مانند $\preccurlyeq$ را در مجموعهٔ A یك رابطهٔ ترتیبی جزئی می‌خوانیم در صورتی که در شرایط ذیل صدق کند:

(۱) به‌ازای هر α، $\alpha \preccurlyeq \alpha$.
(۲) اگر $\alpha \preccurlyeq \beta$ و $\beta \preccurlyeq \alpha$ آنگاه $\alpha = \beta$.
(۳) اگر $\alpha \preccurlyeq \beta$ و $\beta \preccurlyeq \gamma$ آنگاه $\alpha \preccurlyeq \gamma$.

اینك، تعریف ذیل را می‌آوریم:

یك **مجموعهٔ جهت‌دار** مانند J مجموعه‌ای است با یك ترتیب جزئی، مانند $\preccurlyeq$، به‌طوری‌که به‌ازای هرزوج α و β ازاعضای J، عضوی از J مانند γ موجود باشد با این خاصیت‌که $\alpha \preccurlyeq \gamma$ و $\beta \preccurlyeq \gamma$.

۱. ثابت کنید که مجموعه‌های ذیل جهت‌دار هستند:
(الف) هرمجموعهٔ مرتب باترتیب ساده وبارابطهٔ $\preccurlyeq$.
(ب) گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای مانند S، که با رابطهٔ جزئیت به‌ترتیب جزئی مرتب شده است (یعنی، $A \preccurlyeq B$ درصورتی که $A \subset B$).
(پ) گردایه‌ای مانند $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های S که تحت مقطع‌گیری متناهی‌بسته است وبا عکس رابطهٔ جزئیت به‌ترتیب جزئی مرتب شده است (یعنی، $A \preccurlyeq B$ در صورتی که $B \subset A$).
(ت) گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های بستهٔ فضایی مانند X که بارابطهٔ جزئیت به‌ترتیب جزئی مرتب شده است.

۲. زیرمجموعه‌ای مانند K از J را در J **همپایان** خوانیم در صورتی‌که به‌ازای هر $\alpha \in J$، βیی در K موجود باشد که $\alpha \preccurlyeq \beta$. ثابت کنید‌که اگر J مجموعه‌ای جهت‌دار باشد و K در J همپایان باشد آنگاه K نیز جهت‌دار است.

۳. فرض کنید X یك‌فضای توپولوژیك باشد. یك‌**تور** در X تابعی است مانند f از مجموعهٔ جهت‌داری مانند J بتوی X. اگر $\alpha \in J$، معمولاً، $f(\alpha)$ را با x_α نمایش می‌دهیم. خود تور f را بانماد $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$، و یا اگر مجموعهٔ اندیس از سیاق مطلب فهمیده شود، مختصراً با (x_α) نمایش می‌دهند.

تور (x_α) را **همگرا** به‌نقطهٔ x از X گوییم (وچنین می‌نویسیم: $x_\alpha \rightarrow x$) هر گاه به‌ازای هرهمسایگی U از x، αیی از J موجود باشدکه

$$\alpha \preccurlyeq \beta \Longrightarrow x_\beta \in U.$$

ثابت کنید که این‌تعریفها وقتی $J = Z_+$ به‌تعریفهای مأنوس تحویل می‌یابند.

۴. فرض کنید

$$x_\alpha)_{\alpha \in J} \longrightarrow x \text{ در } X \quad \text{و} \quad (y_\alpha)_{\alpha \in J} \longrightarrow y \text{ در } Y.$$

ثابت کنید که

$x\times y \longrightarrow (x_\alpha \times y_\alpha)$ در $X\times Y$.

۵. ثابت کنید که اگر X هاوسدورف باشد، هر تور در X حداکثر به‌یك نقطه همگراست.

۶. قضیه. فرض‌کنید $A \subset X$. در این صورت، $x \in \bar{A}$ اگر و فقط اگر توری از نقاط A همگرا به x وجود داشته باشد.

[راهنمایی: برای اثبات استلزام $\Longrightarrow$، گردایهٔ همهٔ همسایگیهای x را که با عکس جزئیت به‌ترتیب جزئی مرتب است به‌عنوان مجموعهٔ اندیس اختیار کنید.]

۷. قضیه. فرض‌کنید $f:X \to Y$. دراین‌صورت، f پیوسته است اگر و فقط اگر به‌ازای هر تور همگرا مانند (x_α) در X که همگرا به x است، تور $(f(x_\alpha))$ به $(f(x))$ همگرا باشد.

۸. فرض کنید $f:J \to X$ توری در X باشد، و $f(\alpha)=x_\alpha$. اگر K مجموعه‌ای جهت‌دار باشد و $g:K \to J$ تابعی باشد که

(الف) اگر $i \prec j$ آنگاه $g(i) \prec g(j)$،

(ب) $g(K)$ در J همپایان است.

آنگاه تابع مرکب $f\circ g:K \to X$ را یك **زیرتور** (x_α) می گوییم. ثابت کنید که اگر تور (x_α) به x همگرا باشد آنگاه هر زیرتور آن نیز چنین است.

۹. فرض‌کنید $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ توری در X باشد. x را یك **نقطهٔ انباشتگی** تور (x_α) خوانیم هرگاه به‌ازای هر همسایگی U از x، مجموعهٔ α هایی که به‌ازای آنها $x_\alpha \in U$ در J همپایان باشد.

لم. نقطهٔ x یکی از نقاط انباشتگی تور (x_α) است اگر و فقط اگر زیرتوری از (x_α) به x همگرا باشد.

[راهنمایی : برای اثبات استلزام $\Longrightarrow$، فرض کنید K مجموعهٔ همهٔ زوجهای (α, U) باشد که درآن $\alpha \in J$ و U یك همسایگی x شامل x_α است. اگر $\alpha \prec \beta$ و $V \subset U$ آنگاه تعریف می کنیم $(\alpha, U) \prec (\beta, V)$. ثابت کنید که K مجموعه‌ای جهت‌داراست، و ازآن برای تعریف زیرتور مطلوب استفاده کنید.]

۱۰. قضیه. فضای X فشرده است اگر و فقط اگر هر تور در X زیرتوری همگرا داشته باشد.

[راهنمایی: برای اثبات استلزام $\Longrightarrow$، فرض کنید $B_\alpha = \{x_\beta \mid \alpha \prec \beta\}$. ثابت کنید که $\{B_\alpha\}$ واجد شرایط مقطع متناهی است. برای اثبات $\Longleftarrow$، فرض کنید $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های بسته باشد که درشرط مقطع متناهی صدق می کند،

و $\mathscr{B}$ را گردایهٔ همهٔ مقاطع متناهی اعضای $\mathscr{A}$، که باعکس رابطهٔ‌جزئیت به‌ترتیب جزئی مرتب شده است، بگیرید.]

۱۱. نتیجه. فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد و A و B زیرمجموعه‌هایی از G باشند. اگر A در G بسته و B فشرده‌باشدآنگاه $A.B$ در G بسته است.

[راهنمایی: نخست، با فرض اینکه G متری پذیر است برهانی با استفاده از دنباله‌ها بیاورید.]

۴

اصول جداسازی و شمارایی

مفاهیمی راکه اینک معرفی می‌کنیم، برخلاف فشردگی و همبندی، به‌طور طبیعی ازمطالعهٔ حسابان (حساب دیفرانسیل وانتگرال) وآنالیز ناشی نمی‌شوند، بلکه از مطالعهٔ عمیقتری در خود توپولوژی پدید می‌آیند. مسائلی مانند نشاندن فضای مفروضی در یک‌فضای متری یا در یک فضای هاوسدورف فشرده، در اساس، بیشتر مسائلی توپولوژیک هستند تا آنالیزی. این‌مسائل خاص، راه‌حلهایی دارند که متضمن اصول‌شمارایی وجداسازی است.

اولین اصل شمارایی را قبلاً در بخش ۲ ـ ۱۰، هنگام مطالعهٔ دنباله‌های همگرا معرفی کردیم. همچنین، اصل هاوسدورف را، که یکی از اصول جداسازی است، مطالعه کردیم. دراین فصل، اصول قویتر دیگری‌را معرفی وبعضی ازنتایج‌آنها راکشف می‌کنیم. هدف‌اساسی مااثبات قضیهٔ متریسازی اوریسون است. بنابراین‌قضیه، اگرفضای‌توپولوژیک X در اصول شمارایی (دومین) وجداسازی معینی (اصل منتظم بودن) صدق‌کند، آنگاه X را می‌توان در فضایی متری نشاند. ودر نتیجه متریک‌پذیر است. این‌قضیهٔ‌کلاسیک را می‌توان نقطهٔ اوج قسمت اول این‌کتاب به‌شمارآورد.

درآخرین بخش این‌فصل، قضیهٔ نشاندن دیگری می‌آیدکه برای دست‌اندرکاران هندسه حائز اهمیت است. بنابراین قضیه، هربسلای فشردهٔ مفروض (چیزی نظیر یک‌رویه درسطوح بالاتر) را می‌توان در یک‌فضای اقلیدسی با بعد متناهی نشاند.

۴ـ۱ اصول موضوع شمارایی

تعریفی راکه دربخش ۲ ـ ۱۰ بیان‌کردیم به‌خاطر بیاورید:

تعریف . گوییم فضای X **در نقطهٔ** x **پایهٔ شمارا** دارد هرگاه گردایهٔ شمارایی از همسایگیهای x مانند $\mathscr{B}$ موجود باشد به‌طوری که هرهمسایگی x دست‌کم حاوی یك عضو این گردایه باشد. اگر فضایی در هرنقطه‌اش یك‌پایهٔ شمارا داشته باشد، گوییم در **اولین اصل‌شمارایی** صدق می کند.

قبلاً متذکر شدیم که هرفضای متریك‌پذیر دراین اصل صدق می‌کند؛ بخش ۲ــ۱۰ ملاحظه شود.

مفیدترین مطلب مربوط به‌فضاهای واجد این‌خاصیت‌آن است که در فضایی از این نوع، دنباله‌های همگرا برای یافتن نقاط حدی مجموعه‌ها و بررسی پیوستگی توابع کفایت می کنند. این احکام را قبلاً متذکر شده‌ایم اکنون رسماً به‌عنوان قضیه بیان می کنیم:

۱۰۱. قضیه فرض‌کنیم فضای X دراولین اصل شمارایی صدق‌کند.

(الف) نقطهٔ x به‌بستار $\bar{A}$ زیرمجموعهٔ A ازX تعلق دارد اگر و فقط اگر دنباله‌ای ازنقاط A همگرا به x موجود باشد.

(ب) تابع $f:X \to Y$ پیوسته است اگر و فقط اگر به‌ازای هردنبالهٔ همگرا در X مانند (x_n)، که مثلاً به x همگراست، دنبالهٔ $(f(x_n))$ به $f(x)$ همگرا باشد.

با فرض متریك‌پذیری، برهان قضیهٔ فوق تعمیم مستقیم برهانی‌است که در بخش ۲ــ۱۰ آمده است. بنابراین، از تکرار آن خودداری می کنیم.

پراهمیتتر از اولین اصل شمارایی، اصل زیر است:

تعریف . هرگاه توپولوژی فضای X دارای پایه‌ای شمارا باشد،گوییم X در **دومین اصل شمارایی** صدق می کند.

بدیهی است که دومین اصل مستلزم اولی است: اگر $\mathscr{B}$ یك پایهٔ شمارا برای توپولوژی X باشد، آنگاه زیرمجموعه‌ای از $\mathscr{B}$ که متشکل ازاعضای پایهٔ شامل نقطهٔ x است، پایه‌ای شمارا درنقطهٔ x می‌باشد. دومین اصل، درواقع بسیار قویتر از اولی‌است، تاآن حدکه حتی نمی‌توان گفت هرفضای متری واجدآن است.

پس، در این صورت اهمیت آن به‌خاطر چیست؟ یکی‌آنکه بسیاری از فضاهای شناخته‌شده واجد این خاصیت‌اند. ودیگر، همان‌طورکه خواهید دید، این‌خاصیت وسیلهٔ بسیار مهم وحساسی است‌که در اثبات قضیهٔ متریسازی اوریسون به‌کار می‌رود.

مثال۱. خط حقیقی R پایه‌ای شمارا داردکه گردایهٔ همهٔ بازه‌های باز مانند (a, b) با نقاط انتهایی‌گویا است. به‌طریقی مشابه، R^n نیز یك‌پایهٔ شمارا دارد. یعنی، گردایهٔ همهٔ حاصل‌ضربهای بازه‌های بازی بانقاط انتهایی گویا. حتی R^ω هم پایه‌ای شمارا دارد؛

گردایهٔ همهٔ حاصل‌ضربهای $\prod_{n \in Z_+} U_n$، که به‌ازای تعدادی متناهی از nها، U_n بازه‌های بازی است با نقاط انتهایی گویا، وبه‌ازای سایر مقادیر n، $U_n=R$.

مثال ۲ . R^ω ، مجهز به‌توپولوژی یکنواخت ، در اولین اصل شمارایی صدق می‌کند (چون متریك‌پذیر است). ولی در دومین اصل صدق نمی‌کند. زیرمجموعهٔ ناشمارای C از R^ω راکه ازهمهٔ دنباله‌های باجملات ۰ و ۱ تشکیل شده است درنظر می‌گیریم . اگر $\mathscr{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی یکنواخت در R باشد، به‌ازای هر $x \in C$ می‌توان عضوی مانند B_x از $\mathscr{B}$ چنان برگزیدکه شامل x باشد ودرگوی به‌مرکز x وشماع ۱ قرارگیرد. حال اگر x و y دونقطهٔ متمایز C باشند، آنگاه $B_x \neq B_y$ ، زیرا $\rho(x, y)=1$، بنابراین $y \notin B_x$. نتیجه می‌گیریم که $\mathscr{B}$ ناشماراست.

هردو اصل‌شمارایی نسبت به‌عمل تعیین‌زیرفضاها یاعمل‌حاصل‌ضربهای‌شمارش‌پذیر خوش‌رفتارند:

۲۰۱. قضیه هرزیرفضای یك فضای شمارای نوع اول خود شمارای نوع اول است، وحاصل‌ضرب شمارای فضاهای شمارای نوع اول نیزشمارای نوع اول است. هرزیرفضای شمارای نوع دوم خود شمارای نوع دوم است ، همچنین ، حاصل‌ضرب شمارای فضاهای شمارای نوع دوم نیز شمارای نوع دوم است.

برهان. دومین اصل شمارایی را درنظر می‌گیریم . اگر $\mathscr{B}$ یك پایهٔ شمارای X باشد، آنگاه $\{B \cap A \mid B \in \mathscr{B}\}$ پایه‌ای شمارا برای زیرفضای A از X است. اگر $\mathscr{B}_i$ پایه‌ای شمارا برای‌فضای X_i باشد، آنگاه گردایهٔ همهٔ حاصل‌ضربهای $\prod U_i$ که به‌ازای تعدادی متناهی از i ها ، $U_i \in \mathscr{B}_i$ وبه‌ازای‌سایر مقادیر i ، $U_i=X_i$ یك‌پایهٔ شمارا برای $\prod X_i$ است.

برهان درمورد اولین اصل شمارایی‌کاملاً مشابه است.□

دو نتیجه ازدومین اصل شمارایی‌که بعداً برای مامفید واقع خواهند شد در قضیهٔ زیرآمده است. نخست، به‌تعریف زیر توجه‌کنید:

تعریف. زیرمجموعهٔ A از فضای X را در X **چگال** خوانیم اگر $\bar{A}=X$.

۳۰۱. قضیه فرض‌کنیم X پایه‌ای شمارا داشته‌باشد. دراین‌صورت:

(الف) هرپوشش باز X شامل زیرگردایهٔ شمارایی‌است‌که X را می‌پوشاند.

(ب) زیرمجموعهٔ شمارایی از X وجود دا دکه در X چگال است.

برهان. فرض‌کنیم $\{B_n\}$ یك‌پایهٔ شمارش‌پذیر X باشد.

(الف) فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک‌پوشش باز X باشد. به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، درصورت امکان، عضوی از $\mathcal{A}$ مانند A_n انتخاب می کنیم که حاوی عضو B_n باشد. گردایهٔ $\mathcal{A}'$ متشکل ازمجموعه‌های A_n شماراست، چون بازیرمجموعه‌ای ازاعداد صحیح مثبت اندیسگذاری شده است. بعلاوه، این گردایه X را می‌پوشاند: به‌ازای نقطهٔ مفروض $x \in X$ می‌توان‌عضوی از $\mathcal{A}$ مانند A انتخاب کرد که شامل x باشد. چون A بازاست، یک‌عضو پایه مانند B_n موجود است به‌طوری که $x \in B_n \subset A$. چون B_n در عضوی‌از $\mathcal{A}$ قرار دارد، لذا، به‌ازای اندیس n، مجموعهٔ A_n تعریف شده است؛ از طرفی چون A_n شامل B_n است، خواهیم داشت $x \in A_n$. در نتیجه، $\mathcal{A}'$ زیر گردایهٔ شمارایی است از $\mathcal{A}$ که X را می‌پوشاند.

(ب) از هرعضو پایهٔ غیرتهی B_n، عضوی مانند x_n انتخاب می کنیم. مجموعهٔ $D = \{x_n \mid n \in Z_+\}$ در X چگال است؛ زیرا، به‌ازای نقطهٔ مفروض $x \in X$، هرعضو پایه که شامل x باشد مجموعهٔ D را قطع می کند. □

گاه دوخاصیتی راکه در قضیهٔ ۳.۱ آمدند به‌عنوان صورت دیگری برای اصول شمارایی، در نظر می گیرند. معمولاً فضایی راکه هرپوشش بازآن شامل یک‌زیرپوشش شمارا باشد **فضای لیندلوف**[1] می‌نامند. فضایی راکه دارای زیرمجموعهٔ شمارا وچگال باشد اغلب **تفکیک‌پذیر** می گویند. زمانی‌که فضا متری پذیر باشد، هریک از این دو خاصیت هم‌ارز دومین اصل شمارایی است، ولی در حالت‌کلی از آن ضعیفترند (تمرین ۷ را ببینید). اگرچه این دواصل ازدومین اصل شمارایی کم‌اهمیت‌ترند، اما، باید از وجود آنهاآگاهی داشته‌باشیم. چون گاهی مفید واقع می‌شوند. مثلاً، اغلب ارائهٔ یک زیرمجموعهٔ شمارای چگال برای فضای X آسانتر از ارائهٔ یک پایهٔ شماراست. اگر فضا متری‌پذیر باشد (چنانکه در آنالیز معمولاً چنین است) با حل مسئلهٔ‌آسانتر، مسئلهٔ دشوارتر نیز حل می‌شود.

این خواص را در اثبات هیچ قضیه‌ای به کار نخواهیم برد، ولی یکی از آنها ـ یعنی شرط لیندلوف ـ درحل بعضی ازمثالها مفید است. چنانکه در مثالهای زیرملاحظه خواهیم‌کرد (همچنین تمرین ۱۰ را ببینید)، برخلاف انتظار، هیچیک از این‌دو خاصیت نسبت به‌عمل تعیین زیرفضاها وعمل حاصل‌ضرب دکارتی خوشرفتار نیستند.

مثال ۳. فضای R_l در همهٔ اصول شمارایی، بجز دومین اصل، صدق می‌کند. به‌ازای $x \in R_l$، مجموعهٔ همهٔ اعضای پایه به‌صورت $[x, x+1/n)$ تشکیل پایه‌ای شمارا درنقطهٔ x می‌دهد. بسهولت می‌توان دیدکه مجموعهٔ اعدادگویا در R_l چگال است.

برای اثبات اینکه R_l پایهٔ شمارایی ندارد، فرض کنیم $\mathcal{B}$ پایه‌ای‌برای R_l باشد. به‌ازای هرx، عضو B_x از $\mathcal{B}$ راچنان انتخاب می‌کنیم‌که $x \in B_x \subset [x, x+1)$. اگر $x \neq y$، آنگاه $B_x \neq B_y$. زیرا $x = \text{glb}\, B_x$ و $y = \text{glb}\, B_y$. بنابراین، $\mathcal{B}$ باید ناشمارا باشد.

1. Lindelöf

اثبات لیندلوف بودن R_l کار بیشتری لازم دارد. کافی است ثابت‌کنیم که هرپوشش باز R_l ازاعضای پایه حاوی یك‌زیرگردایهٔ شماراست که R_l را می‌پوشاند. (می‌توانید این امر را بررسی کنید.) بنابراین، فرض کنیم

$$\mathcal{A}=\{[a_\alpha, b_\alpha)\}_{\alpha\in J}$$

یك پوشش R از اعضای پایه برای توپولوژی حد پایینی باشد. می‌خواهیم زیرگردایه‌ای شمارا بیابیم که R را بپوشاند. مجموعهٔ

$$C=\bigcup_{\alpha\in J}(a_\alpha, b_\alpha)$$

را به‌عنوان زیرفضای R درنظر می‌گیریم. در این صورت، C در دومین اصل شمارایی صدق می‌کند. چون گردایهٔ $\{(a_\alpha, b_\alpha)\}$ ازمجموعه‌های باز C تشکیل شده است، باید حاوی زیرگردایهٔ شمارایی باشد که C را می‌پوشاند. مثلاً زیرگردایه‌ای از اعضایی به‌صورت (a_α, b_α) به‌ازای $\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. دراین‌صورت گردایهٔ

$$\mathcal{A}'=\{[a_\alpha, b_\alpha)\mid \alpha=\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$$

نیز C را می‌پوشاند.

مدعی هستیم که مجموعهٔ $R-C$ شماراست. ازاین مطلب نتیجهٔ موردنظربه‌دست می‌آید، به‌ازای هرنقطهٔ $R-C$ عضوی از $\mathcal{A}$ راکه شامل‌آن باشد انتخاب می‌کنیم، باافزودن این اعضا به $\mathcal{A}'$، زیرگردایهٔ شمارایی از $\mathcal{A}$ به‌دست می‌آیدکه همهٔ R_l را می‌پوشاند.

اکنون فرض‌کنیم $x\in R-C$. الزاماً α یی در J هست به‌طوری‌که $x=a_\alpha$. عدد q_x را عددگویایی متعلق به‌بازهٔ (a_α, b_α) انتخاب می‌کنیم ؛ چون این‌بازه زیرمجموعهٔ C است، بازهٔ (x, q_x) نیز چنین است. نتیجه اینکه تابع $x\to q_x$ تابعی یك به‌یك از $R-C$ به‌مجموعهٔ اعدادگویا، Q، است. بنابراین، $R-C$ شماراست.[زیرا، اگر x و y دونقطهٔ $R-C$ باشند و $x<y$ آنگاه الزاماً $q_x<q_y$ ، چه درغیر این‌صورت، y به (x, q_x) تعلق خواهد داشت ، درحالی‌که y در $R-C$ است و (x, q_x) زیرمجموعهٔ C است.]

مثال ۴ . حاصلضرب دوفضای لیندلوف لزومی ندارد لیندلوف باشد. زیرا، فضای R_l لیندلوف است، وثابت می‌کنیم که R_l^2 لیندلوف نیست .

فضای R_l^2 که نام **صفحهٔ سورجنفری**[1] برآن نهاده‌اند، مثال بی‌اندازه مفیدی‌در توپولوژی است. یك‌پایهٔ این‌فضا متشکل از همهٔ مجموعه‌هایی به صورت $[a, b)\times[c, d)$ در صفحه است . زیرفضای

$$L=\{x\times(-x)\mid x\in R_l\}$$

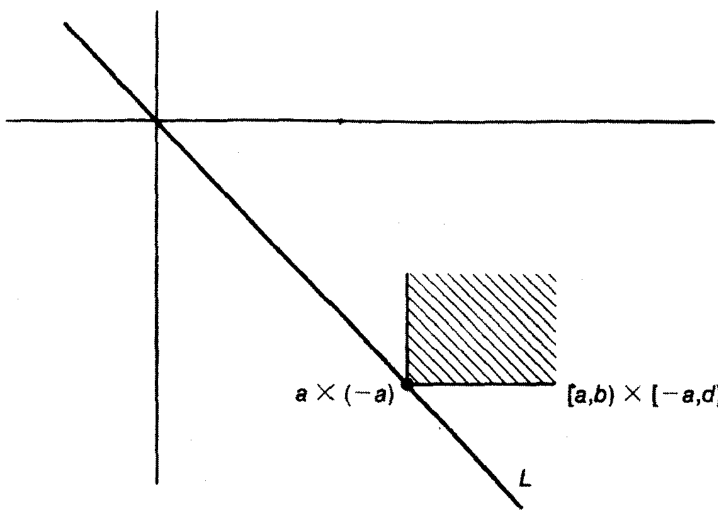
---

1. Sorgenfrey

از R_l^2 را در نظر می‌گیریم. بسهولت می‌توان بسته‌بودن L در R_l^2 را بررسی کرد. مجموعهٔ باز R_l^2-L بعلاوهٔ همهٔ اعضای پایه به‌صورت

$$[a, b)\times[-a, d)$$

پوشش بازی برای R_l^2 را تشکیل می‌دهند. هریك ازاین اعضای پایه، L را حداکثردر یك نقطه قطع می‌کند. چون L ناشماراست، هیچ‌زیرگردایه‌ای شمارا R_l^2 را نمی‌پوشاند (شکل ۱).



شکل ۱

مثال ۵. اگر فضایی یك زیرمجموعهٔ شمارای چگال داشته باشد، لزومی ندارد هرزیرفضای آن نیز یك زیرمجموعهٔ شمارای چگال داشته باشد. بسهولت می‌توان دید که مجموعهٔ همهٔ نقاط با مختصات گویا در R_l^2 چگال است. اما زیرفضای L (که در مثال ۴ تعریف شد) دارای توپولوژی گسسته است، و چون ناشماراست، نمی‌تواند زیرمجموعه‌ای شمارا وچگال داشته باشد.

مثال ۶. فضای S_Ω در اولین اصل شمارایی صدق می‌کند، ولی واجد هیچیک از خواص شمارایی دیگر نیست.

به‌ازای عضو مفروض a از S_Ω، فرض‌کنیم b تالی بلافصل a باشد. گردایهٔ همهٔ بازه‌هایی‌که نقاط انتهایی آنها کوچکتر از یا مساوی b است، شماراست. بنابراین، S_Ω پایه‌ای شمارا در a دارد.

بوضوح، S_Ω هیچ‌زیرمجموعهٔ شمارای چگال ندارد. زیرا، هرزیرمجموعهٔ شمارای S_Ω دارای یك‌کران بالا در S_Ω است. به‌طریق مشابه، S_Ω لیندلوف نیست، گردایهٔ

$$\mathcal{A}=\{[a_0, b) \mid b\in S_\Omega\}$$

ازمجموعه‌های باز راکه پوششی برای S_Ω است درنظر می‌گیریم، دراینجا a_0 کوچکترین عضو S_Ω است. اگر $\mathcal{A}'$ زیرگردایهٔ شمارایی از $\mathcal{A}$ باشد، مجموعهٔ نقاط انتهای راست بازه‌های واقع در $\mathcal{A}'$ یك‌کران بالا مانند b در S_Ω دارد، در این‌صورت، b در هیچیك از اعضای $\mathcal{A}'$ نیست. بنابراین، گردایهٔ $\mathcal{A}'$ فضای S_Ω را نمی‌پوشاند. پس S_Ω لیندلوف نیست. درنتیجه، فضای S_Ω نمی‌تواند پایهٔ شمارایی داشته‌باشد.

توجه‌کنید‌که فضای $\bar{S}_\Omega$ (به‌خاطر فشرده‌بودن) لیندلوف است، وزیرفضای S_Ω چنین نیست.

تمرینها

۱. (الف) مجموعهٔ A را یك مجموعهٔ G_δ در فضای X می‌نامیم اگر مساوی مقطع شمارایی ازمجموعه‌های باز باشد. ثابت‌کنیدکه در هر فضای هاوسدورف شمارای نوع اول، هرمجموعهٔ تك‌عضوی یك‌مجموعهٔ G_δ است.
(ب) فضای شناخته‌شده‌ای وجوددارد‌که هرزیرمجموعهٔ تك‌عضوی‌آن یك‌مجموعهٔ G_δ است، ولی دراولین اصل شمارایی صدق نمی‌کند. آن‌فضا چیست؟

۲. ثابت‌کنیدکه هرفضای متری پذیر فشردهٔ X پایه‌ای شمارا دارد. [راهنمایی: فرض کنید $\mathcal{A}_n$ یك‌پوشش متناهی X به‌وسیلهٔ گویهایی باشعاع $1/n$ باشد.]

۳. ثابت‌کنیدکه اگر X پایه‌ای شمارا داشته باشدآنگاه هرگردایه از مجموعه‌های باز جدا ازهم‌آن نیز شماراست.

۴. فرض‌کنید X دارای پایه‌ای شمارا، و A زیرمجموعهٔ ناشمارایی ازآن باشد.
(الف) ثابت‌کنیدکه توپولوژی زیرفضایی A توپولوژی گسسته نیست.
(ب) ثابت‌کنیدکه A دست‌کم شامل یکی ازنقاط حدی خود است.
(پ) ثابت‌کنیدکه A شامل تعداد ناشمارایی ازنقاط حدی خود است.

۵. ثابت کنید که اگر X دارای پایهٔ شمارایی مانند $\{B_n\}$ باشد، آنگاه هرپایهٔ X مانند $\mathscr{C}$ حاوی پایهٔ شمارایی برای X است. [راهنمایی: به‌ازای‌هرزوج از اندیسها مانند n و m، در صورت امکان، عضو $C_{n,m}$ از $\mathscr{C}$ را چنان انتخاب کنید که $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$. سپس، $\mathscr{C}'$ را گردایهٔ مجموعه‌های $C_{n,m}$ بگیرید.]

۶. ثابت کنید که درفضاهای هاوسدورف باپایهٔ شمارا، هرچهار نوع فشردگی (فشردگی، فشردگی برحسب نقطهٔ حدی، فشردگی دنباله‌ای، فشردگی‌شمارایی) با هم معادل‌اند.

۷. فرض کنید X فضایی متری پذیر باشد.
(الف) ثابت کنید که اگر X زیرمجموعهٔ چگال شمارایی داشته باشد آنگاه X پایه‌ای شمارا دارد.
(ب) ثابت کنید که اگر X لیندلوف باشد آنگاه پایه‌ای شمارا دارد. [راهنمایی: باتمرین ۲ مقایسه کنید.]

۸. ثابت کنید R_l و $I \times I$ باتوپولوژی ترتیب قاموسی متری پذیر نیستند.

۹. در R^{ω}، با توپولوژی یکنواخت، کدامیک ازاصول شمارایی برقرار است؟

۱۰. ثابت کنید که اگر X حاصل‌ضربی شمارا از فضاهایی که زیرمجموعه‌های چگال شمارا دارند آنگاه X نیز زیرمجموعهٔ چگال شمارا دارد.

۱۱. ثابت کنید که اگر X لیندلوف و Y فشرده‌باشد،آنگاه $X \times Y$ لیندلوف است.

۱۲. $\mathscr{C}(I, R)$ مجموعهٔ همهٔ‌توابع پیوسته مانند $f: I \to R$ را، که درآن $I = [0, 1]$، با متریک

$$\rho(f, g) = \operatorname{lub}\{|f(x) - g(x)|\}$$

درنظر بگیرید. ثابت کنید که این‌فضا یک‌زیرمجموعهٔ چگال شمارا دارد، ودر نتیجه، پایه‌ای شمارا دارد. [راهنمایی: A را مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته‌ای بگیرید که نمودارآنها ازتعدادی متناهی قطعهٔ‌خط بانقاط انتهایی گویا تشکیل شده است.]

۱۳. ثابت کنید فضای حاصل‌ضربی I^I، که در آن $I = [0, 1]$، زیرمجموعهٔ چگال شمارایی دارد.

۱۴. ثابت کنید که فضای I^2، بامتریک I^2، زیرمجموعهٔ‌چگال شمارایی دارد. و بنابراین دارای پایه‌ای شماراست. (تمرین ۹ ازبخش ۲ ــ ۹ را ببینید.)

۴-۲ اصول جداسازی

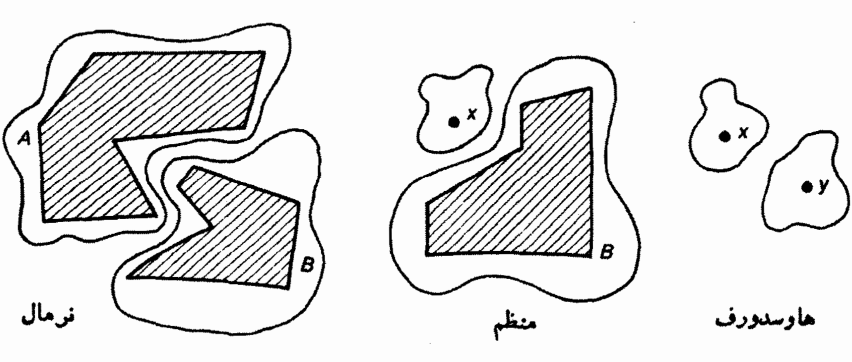
در این مبحث، به‌معرفی سه‌اصل جداسازی و استخراج بعضی از خواص آنها مبادرت

می‌ورزیم . اصل هاوسدورف را قبلاً دیده‌ایم. بقیه مشابه ولی قویتر از آن هستند . مطابق معمول، به‌هنگام معرفی مفاهیم جدید ، به‌بررسی روابط بین این‌اصول و مفاهیم معرفی‌شدهٔ قبلی این کتاب می‌پردازیم.

یادآوری می‌کنیم که اگر به‌ازای هردونقطهٔ متمایز x و y از X مجموعه‌های باز جدا ازهمی بترتیب شامل x و y موجود باشند آنگاه فضای X را هاوسدورف گوییم.

تعریف . فرض کنیم مجموعه‌های تك‌عضوی در X بسته باشند. در این صورت، X را **منتظم** خوانیم اگر به‌ازای هرنقطهٔ آن مانند x وهرمجموعهٔ بستهٔ جدا از x مانند B ، مجموعه‌های باز جدا ازهمی، بترتیب، شامل x وحاوی B موجود باشند. فضای X را **نرمال** گوییم اگر به‌ازای هردو مجموعهٔ بستهٔ جدا از هم آن، مانند A و B ، مجموعه‌های باز جدا ازهمی، بترتیب، حاوی A و B موجود باشند.

بدیهی است که هرفضای منتظم فضایی است هاوسدورف ، وهرفضای نرمال فضایی است منتظم. (برای برقراری این‌دوحکم، افزودن شرط بسته‌بودن مجموعه‌های تك‌عضوی، به‌عنوان قسمتی ازتعریف منتظم‌بودن ونرمال‌بودن یك‌فضا، ضرورت‌دارد. فضای دونقطه‌ای با توپولوژی ناگسسته ، اگرچه هاوسدورف نیست ، ولی درسایر شرایط تعاریف منتظم بودن ونرمال‌بودن صدق می‌کند.) به‌منظورملاحظهٔ این امرکه اصل منتظم‌بودن قویتر از اصل هاوسدورف، ونرمال‌بودن قویتر ازمنتظم‌بودن است، به‌مثالهای ۱ تا ۳ مراجعه کنید. این‌اصول را از آن جهت اصول جداسازی می‌نامیم که انواع معینی از مجموعه‌ها



شکل ۲

را به‌وسیلهٔ مجموعه‌های بازازهم‌جدا از یکدیگر «جدامی کند». البته اصطلاح «جداسازی» را قبلاً هنگام مطالعهٔ فضاهای همبند نیز به‌کار بردیم. ولی، درآن مورد، هدف یافتن مجموعه‌های باز جدا ازهمی بود که اجتماع آنها برابر تمام فضا باشد. وضع کنونی کاملاً متفاوت است، زیرا لزومی نداردکه مجموعه‌های باز موردنظر در این شرط صدق کنند.

این‌سه اصل جداسازی درشکل ۲ نشان داده‌اند.

شیوه‌های دیگری برای بیان اصول جداسازی موجودند. یکی ازآنها که گاه مفید خواهد بود درلم زیرآمده است:

۱۰۲۰ لم فرض کنیم X فضایی توپولوژیك و مجموعه‌های تك عضوی آن بسته باشند.

(الف) X منتظم است اگر و فقط اگر به ازای هرنقطه مانند x از X و هر همسایگی آن مانند U، یك همسایگی x مانند V موجود باشد به‌طوری که $\bar{V} \subset U$.

(ب) X نرمال است اگر و فقط اگر به‌ازای هر مجموعهٔ بسته مانند A وهرمجموعهٔ باز حاوی A مانند U، مجموعهٔ بازی مانند V حاوی A موجود باشد به‌طوری‌که $\bar{V} \subset U$.

برهان. (الف) فرض کنیم X فضایی منتظم، $x \in X$، و U همسایگی مفروضی از x باشد. فرض کنیم $B = X - U$، دراین‌صورت B مجموعه‌ای‌است بسته. بنابرفرض، مجموعه‌های باز جدا ازهمی مانند V و W وجود دارند به‌طوری‌که $x \in V$ و $B \subset W$. مجموعهٔ $\bar{V}$ از B جداست. زیرا اگر $y \in B$، مجموعهٔ W یك‌همسایگی y است و V را قطع نمی‌کند. بنابراین، $\bar{V} \subset U$، واین همان است که می‌خواستیم.

برای اثبات عکس آن، فرض‌کنیم نقطهٔ x و مجموعهٔ بستهٔ B که شامل نقطهٔ x نیست مفروض‌اند. فرض‌کنیم $U = X - B$. بنابرفرض، یك‌همسایگی x مانند V موجود است به‌طوری‌که $\bar{V} \subset U$. مجموعه‌های باز V و $X - \bar{V}$ مجموعه‌های بازجدا ازهم‌اند، و بترتیب، شامل x وحاوی B می‌باشند. بنابراین، X منتظم است.

برای اثبات (ب)، دقیقاً همین برهان به‌کار می‌رود؛ بااین اختلاف‌که مجموعهٔ A را جانشین نقطهٔ x می‌کنیم. □

اکنون به‌کند وکاو دربستگی‌اصول جداسازی بامفاهیم تعریف‌شدهٔ قبلی می‌پردازیم. ابتدا، انواع توپولوژیهای مختلفی را که در فصل ۲ معرفی شدند مورد مطالعه قرار می‌دهیم تا ببینیم درکدامیك از اصول جداسازی صدق می‌کنند. درضمن، دوقضیه ثابت می‌کنیم‌که نشان می‌دهند وجود فشردگی، یا پایهٔ شمارا، خواص جداسازی ضعیف را قوی می‌کند. این موضوع، فهرست نسبتاً طویلی از قضایایی را به‌دست می‌دهد که باید به‌خاطر سپرد، وخوشبختانه برهان بیشترآنها چندان دشوار نیست.

۲۰۲ قضیه (الف) هرزیرفضای یك‌فضای هاوسدورف فضایی است هاوسدورف؛

حاصل‌ضرب فضاهای هاوسدورف نیز هاوسدورف است.

(ب) هرزیرفضای یك‌فضای منتظم فضایی‌است منتظم، حاصل‌ضرب فضاهای منتظم نیز منتظم است.

(پ) زیرفضای یك فضای نرمال لزومی ندارد نرمال باشد، حاصل‌ضرب فضاهای نرمال لزومی ندارد نرمال باشد (!)

برهان. (الف) فرض‌کنیم X هاوسدورف و x و y دو نقطهٔ متمایز زیرفضای Y از X باشند. اگر U و V، بترتیب، همسایگیهای جدا ازهمی برای x و y در X باشند، آنگاه $U \cap Y$ و $V \cap Y$ همسایگیهای جدا ازهم x و y در Y خواهندبود.

فرض کنیم $\{X_\alpha\}$ خانواده‌ای ازفضاهای هاوسدورف باشد، و $\mathbf{x}=(x_\alpha)$ و $\mathbf{y}=(y_\alpha)$ دونقطهٔ متمایز فضای حاصل‌ضربی ΠX_α باشند. چون $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$، اندیسی‌مانند β یافت می‌شود که $x_\beta \neq y_\beta$. مجموعه‌های باز ازهم‌جدای U و V را که، بترتیب، شامل x_β و y_β هستند در X_β برمی‌گزینیم. دراین‌صورت، $\pi_\beta^{-1}(U)$ و $\pi_\beta^{-1}(V)$ مجموعه‌های باز جدا ازهم در ΠX_α هستندکه، بترتیب، شامل نقاط $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ اند.

(ب) فرض‌کنیم Y زیرفضایی از فضای منتظم X باشد. چون Y هاوسدورف است، مجموعه‌های تك‌عضوی آن در Y بسته‌اند. فرض‌کنیم x نقطه‌ای از Y و B زیرمجموعهٔ بسته‌ای ازآن باشد به‌طوری که $x \notin B$. اگر $\bar{B}$ بستار B در X باشد آنگاه $\bar{B} \cap Y = B$. بنابراین، $x \notin \bar{B}$. چون منتظم‌بودن X را به‌کار ببریم، مجموعه‌های باز جدا از همی مانند U و V از X می‌توانیم انتخاب کنیم به‌طوری که $x \in U$ و $\bar{B} \subset V$. درنتیجه، $U \cap Y$ و $V \cap Y$ مجموعه‌های باز جدا از همی در Y هستندکه، بترتیب، شامل x و حاوی B هستند.

فرض کنیم $\{X_\alpha\}$ خانواده‌ای ازفضاهای منتظم باشد و $X = \Pi X_\alpha$. بنا بر (الف)، فضای X هاوسدورف است، و در نتیجه، مجموعه‌های تك عضوی آن در X بسته‌اند. برای اثبات منتظم‌بودن X از لم قبل کمك می گیریم. فرض‌کنیم $\mathbf{x}=(x_\alpha)$ نقطه‌ای از X، و U یك‌همسایگی $\mathbf{x}$ در X باشد. یك‌عضو پایهٔ ΠU_α را حول $\mathbf{x}$ چنان برمی گزینیم که در U قرار داشته باشد. چون به‌ازای هر α، فضای X_α منتظم است، می‌توان یك همسایگی x_α مانند V_α در X_α یافت به طوری که $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$؛ اگر $U_\alpha = X_\alpha$، دراین‌صورت V_α را مساوی X_α می گیریم. حال، $V = \Pi V_\alpha$ یك‌همسایگی $\mathbf{x}$ در X است. مدعی هستیم که $\bar{V} = \Pi \bar{V}_\alpha$، و چون X منتظم است، از آن نتیجه می‌شود که $\bar{V} \subset \Pi U_\alpha \subset U$.

برای اثبات ادعای فوق، ثابت می کنیم که اگر به ازای هر α، داشته باشیم $A_\alpha \subset X_\alpha$، و اگر $A = \Pi A_\alpha$، آنگاه $\bar{A} = \Pi \bar{A}_\alpha$. (این‌مطلب به‌صورت تمرینی در بخش ۲-۸ آورده شد.) فرض‌کنیم $\mathbf{y}=(y_\alpha)$ نقطه‌ای از $\Pi \bar{A}_\alpha$ باشد، و $U = \Pi U_\alpha$ عضو پایه‌ای‌شامل $\mathbf{y}$. چون $y_\alpha \in \bar{A}_\alpha$، مجموعهٔ باز U_α باید A_α را قطع کند. درنتیجه،

به‌ازای هر α، می‌توان نقطه‌ای مانند $z_\alpha \in U_\alpha \cap A_\alpha$ انتخاب کرد. در این‌صورت، U مجموعهٔ A را درنقطهٔ $\mathbf{z} = (z_\alpha)$ قطع می‌کند. پس، $\mathbf{y} \in \bar{A}$.

بعکس، فرض کنیم $\mathbf{y} \in \bar{A}$. ثابت می‌کنیم که به‌ازای هراندیس مفروض β، $y_\beta \in \bar{A}_\beta$. فرض کنیم U_β یك‌همسایگی y_β باشد. در این‌صورت، $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ یك همسایگی $\mathbf{y}$ است، به‌طوری‌که مجموعهٔ A را درنقطه‌ای مانند $\mathbf{z}$ قطع می‌کند. پس، U_β مجموعهٔ $\pi_\beta(A) = A_\beta$ را درنقطهٔ $\pi_\beta(\mathbf{z})$ قطع می‌کند. یعنی، $y_\beta \in \bar{A}_\beta$.

(پ) یافتن فضایی نرمال‌که زیرفضایی غیرنرمال داشته‌باشد، نسبتاً مشکل است. همچنین، یافتن حاصل‌ضربی از فضاهای نرمال که خود نرمال نباشد، آسان نیست. اتفاقاً فضایی هست‌که هردو مقصود ما را برآورده می‌کند؛ این فضا در مثال ۲ آمده است.□

سه‌قضیهٔ زیر، سه‌دستهٔ بسیار مهم ازشرایطی را به‌دست می‌دهندکه باهریك از آنها نرمال‌بودن یك‌فضا محرز می‌شود.

۳۰۲. قضیه هرفضای متری‌پذیر فضایی است نرمال.

برهان. فرض‌کنیم X یك‌فضای متریکپذیر با متریك d باشد؛ A و B را دوزیر-مجموعهٔ بستهٔ جدا ازهم X می گیریم. به‌ازای هر $a \in A$، عدد مثبت ε_a را چنان‌انتخاب می‌کنیم که‌گوی $B(a, \varepsilon_a)$ مجموعهٔ B را قطع‌نکند. همچنین، به‌ازای هرعضو B مانند b، عدد ε_b را چنان انتخاب می‌کنیم‌که گوی $B(b, \varepsilon_b)$ مجموعهٔ A را قطع نکند. حال قرار می‌دهیم

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon_a/۲) \quad \text{و} \quad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \varepsilon_b/۲).$$

در این‌صورت، U و V مجموعه‌های بازی هستندکه، بترتیب، حاوی A و B هستند. مدعی هستیم‌که U و V جدا از هم‌اند. زیرا، اگر $z \in U \cap V$، آنگاه به‌ازای عضوی از A مانند a، وعضوی از B مانند b، خواهیم داشت

$$z \in B(a, \varepsilon_a/۲) \cap B(b, \varepsilon_b/۲).$$

بابه‌کاربردن نامساوی مثلثی، ملاحظه می‌کنیم که $d(a, b) < (\varepsilon_a + \varepsilon_b)/۲$. اگر $\varepsilon_a \leqslant \varepsilon_b$ آنگاه $d(a, b) < \varepsilon_b$، که در نتیجه، گوی $B(b, \varepsilon_b)$ شامل نقطهٔ a می‌شود. و اگر $\varepsilon_b \leqslant \varepsilon_a$، آنگاه $d(a, b) < \varepsilon_a$، در نتیجه، گوی $B(a, \varepsilon_a)$ شامل نقطهٔ b می‌شود؛ هیچیك از این‌دو شق ممکن نیست.□

۴۰۲. قضیه هرفضای هاوسدورف فشرده فضایی است نرمال.

برهان. فرض‌کنیم X یك‌فضای هاوسدورف فشرده باشد. قبلاً ثابت کردیم‌که چنین فضایی ضرورتاً منتظم است. زیرا، اگر x نقطه‌ای از این‌فضا و B زیرمجموعهٔ

بسته‌ای از آن باشد به‌طوری‌که $x \notin B$ آنگاه B فشرده است، وبنابرلم ۴.۵ در فصل۳، مجموعه‌های باز جدا ازهمی موجودندکه، بترتیب، شامل x وحاوی B می‌باشند.

اصولاً همان‌استدلالی‌راکه برای‌آن لم‌آمده‌است، می‌توان برای اثبات نرمال‌بودن X نیز به‌کار گرفت: اگر A و B دو مجموعهٔ بستهٔ جدا ازهم مفروض در X باشند، به‌ازای هر عضو A مانند a، مجموعه‌های باز جدا از هم U_a و V_a را چنان انتخاب می‌کنیم‌که $a \in U_a$ و $B \subset V_a$. (در اینجا از منتظم بودن X استفاده‌کردیم.) گردایهٔ $\{U_a\}$ پوششی‌است برای A؛ چون A فشرده است، می‌توان آن‌را به‌وسیلهٔ تعدادی‌متناهی از مجموعه‌ها، مثلاً U_{a_1}، . . .، U_{a_m}، پوشاند. دراین‌صورت،

$$V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m} \quad \text{و} \quad U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$$

مجموعه‌های باز جدا ازهمی هستندکه، بترتیب، حاوی A و B می‌باشند. □

۵۰۲. قضیه هرفضای منتظم‌که پایه‌ای شمارا داشته باشد نرمال است.

برهان. فرض می‌کنیم X فضایی منتظم و $\mathscr{B}$ یك‌پایهٔ شمارای آن باشد. A و B را دوزیرمجموعهٔ بستهٔ جدا ازهم X می‌گیریم. هرنقطهٔ x از A یك همسایگی مانند U داردکه مجموعهٔ B را قطع نمی‌کند. بنابرمنتظم‌بودن X، یك همسایگی مانند V از x یافت می‌شود به‌طوری‌که $\bar{V} \subset U$؛ و بالاخره، عضوی از $\mathscr{B}$ انتخاب می‌کنیم‌که شامل x وزیرمجموعهٔ V باشد. باانتخاب چنین عضو پایه‌ای برای هریك از اعضای A، یك پوشش شمارا از مجموعه‌های باز برای A می‌سازیم به‌طوری‌که بستار هیچیك ازآنها B را قطع نکند. چون این پوشش A شماراست، می‌توان آن‌را به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای از اعداد صحیح ومثبت اندیسگذاری کرد؛ فرض‌کنیم $\{U_n\}$ این‌پوشش باشد.

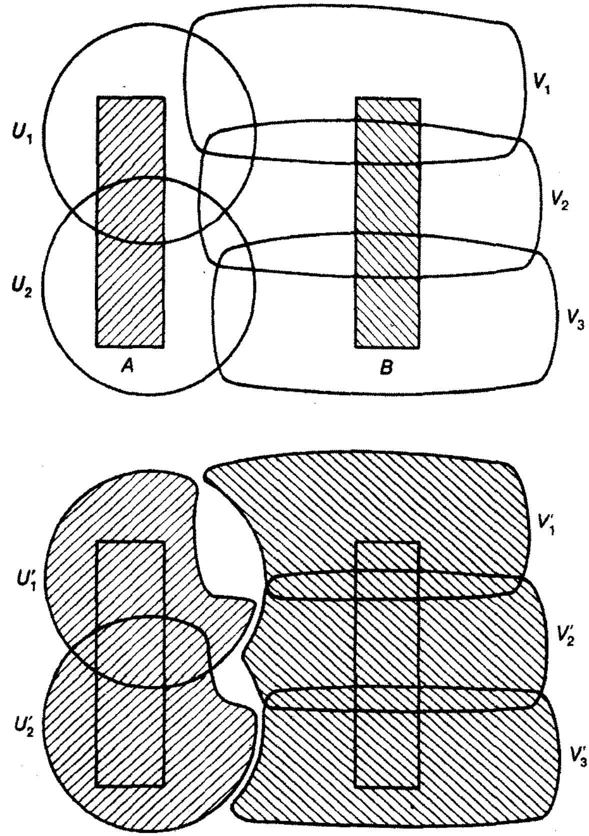
به‌همین قیاس، گردایهٔ شمارای $\{V_n\}$ ازمجموعه‌های بازرا چنان انتخاب می‌کنیم که پوششی برای B باشد وبه‌ازای هر n مجموعهٔ $\bar{V}_n$ از A جدا باشد.

اکنون، $U = \bigcup U_n$ و $V = \bigcup V_n$ مجموعه‌های بازی هستندکه، بترتیب، حاوی A و B می‌باشند، ولی لزومی ندارد جدا ازهم باشند. با ابتکار سادهٔ زیر، دومجموعهٔ باز جدا ازهم مورد نظر را می‌سازیم. به‌ازای عدد مفروض n، چنین تعریف می‌کنیم:

$$V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i \quad \text{و} \quad U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i$$

(شکل ۳). توجه کنیدکه هریك از U'_nها باز است، زیرا، تفاضل مجموعهٔ باز U_n و مجموعهٔ بستهٔ $\bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i$ است. همین‌طور، V'_nها نیز بازند. گردایهٔ $\{U'_n\}$ پوششی است برای A. زیرا، هرنقطهٔ A مانند x، به‌ازای nای به U_n تعلق دارد، و x به‌هیچیك از $\bar{V}_i$ها تعلق ندارد. همچنین، گردایه $\{V'_n\}$ پوششی است برای B.

سرانجام، مجموعه‌های باز



شکل ۳

$$V'=\bigcup_{n\in Z_+}V'_n \quad \text{و} \quad U'=\bigcup_{n\in Z_+}U'_n$$

جدا ازهم‌اند. چون، اگر $x\in U'\cap V'$، آنگاه اندیسهای j و k وجود دارند به‌طوری که $x\in U'_j\cap V'_k$. فرض‌کنیم $j\leqslant k$. ازتعریف U'_j نتیجه می‌شود که $x\in U_j$؛ وچون $j\leqslant k$، ازتعریف V'_k نتیجه می‌شود که $x\notin \bar{U}_j$. درمورد $j\geqslant k$ نبز تناقض مشابهی رخ می‌دهد. □

ازقضیهٔ زیر برای بررسی بعضی مثالها استفاده خواهیم کرد.

۶.۲ قضیه هرمجموعهٔ خوشترتیب X باتوپولوژی ترتیبی فضایی است نرمال.

در حقیقت، هر توپولوژی ترتیبی، نرمال است (مثال ۳۹ از $[S-S]$ را ملاحظه

کنید)؛ ولی ما ازاین نتیجهٔ قویتر درجایی استفاده نخواهیم کرد.

برهان. فرض کنیم X مجموعه‌ای خوشترتیب باشد. مدعی هستیم که هر بازه به صورت $(x, y]$ در X بازاست: اگر X دارای بزرگترین عضو باشد واین عضو را y بنامیم، در این‌صورت، $(x, y]$ یک‌عضو پایهٔ حول y است. اگر y بزرگترین عضو X نباشد، آنگاه $(x, y]$ مساوی مجموعهٔ باز (x, y') است، که در آن y' تالی بلافصل y است.

اکنون، A و B را دو مجموعهٔ بستهٔ جدا ازهم X اختیار می‌کنیم؛ فعلاً فرض می‌کنیم که هیچیک از A و B شامل a_0، کوچکترین عضو X، نیست. به‌ازای هر $a \in A$، یک‌عضو پایهٔ حول a جدا از B یافت می‌شود؛ این عضو پایه حاوی بازه‌ای به‌صورت $(x, a]$ است. (از فرض «a کوچکترین عضو X نیست» در همین‌جا استفاده می‌شود.) بنابراین، به‌ازای هرعضو A مانند a، بازه‌ای مانند $(x_a, a]$ طوری انتخاب می‌کنیم که از B جدا باشد. به‌طریقی مشابه، به‌ازای هر $b \in B$، بازه‌ای به‌صورت $(y_b, b]$ جدا از A انتخاب می‌کنیم. مجموعه‌های

$$V = \bigcup_{b \in B}(y_b, b] \quad \text{و} \quad U = \bigcup_{a \in A}(x_a, a]$$

مجموعه‌های بازی‌هستند که، بترتیب، حاوی A و B می‌باشند؛ مدعی هستیم این‌دو مجموعه جدا ازهم نیزهستند. زیرا، اگر $z \in U \cap V$ آنگاه به‌ازای عضوی از A مانند a وعضوی از B مانند b، خواهیم داشت $z \in (x_a, a] \cap (y_b, b]$. فرض کنیم $a < b$. در این صورت، اگر $a \leqslant y_b$، این‌دوبازه‌جدا ازهم‌می‌باشند، واگر $a > y_b$ آنگاه $a \in (y_b, b]$، که این با ازهم جدابودن A و $(y_b, b]$ متناقض است. تناقض مشابهی در حالت $b < a$ رخ می‌دهد.

سرانجام، فرض کنیم A و B دومجموعهٔ بستهٔ جدا ازهم X باشند و A شامل a_0، کوچکترین عضو X، باشد. مجموعهٔ $\{a_0\}$ در X هم باز وهم بسته است. بنابرنتیجهٔ پاراگراف‌قبل، مجموعه‌های بازجدا ازهمی مانند U و V موجودند به‌طوری که، بترتیب، حاوی مجموعه‌های بستهٔ $A-\{a_0\}$ و B باشند. درنتیجه $U \cup \{a_0\}$ و V مجموعه‌های باز جدا ازهمی هستند که، بترتیب، حاوی A و B می‌باشند. □

مثال ۱. دراینجا مثالی می‌آوریم که ثابت می‌کند اصل منتظم‌بودن ازاصل هاوسدورف قویتر است. زیرمجموعهٔ K ازخط حقیقی R را چنین تعریف می‌کنیم:

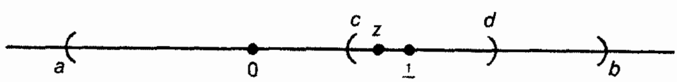
$$K = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in Z_+\right\}$$

با درنظر گرفتن همهٔ مجموعه‌هایی به‌صورت زیر، پایه‌ای برای‌یک‌توپولوژی روی R تعریف می‌کنیم:

(۱) هربازهٔ باز (a, b).

(۲) هرمجموعه به‌صورت $(a, b)-K$.
به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که این مجموعه‌ها پسایه‌ای برای یك‌توپولوژی در R هستند، زیرا مقطع هردو عضو پایه یا تهی است و یا عضو دیگری ازپایه است. این‌فضا هاوسدورف است. زیرا هردوعضو متمایز R بازه‌های جدا ازهمی حول خود دارند.

ولی این فضا منتظم نیست. مجموعهٔ K در این توپولوژی بسته است و شامل نقطهٔ ۰ نیست. حال فرض‌کنیم U و V مجموعه‌های باز جدا ازهمی بـاشند به‌طوری‌که $0 \in U$ و $K \subset V$. یك‌عضو پایه انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که شامل ۰ وزیرمجموعهٔ U باشد، طبعاً این عضو پایه باید ازنوع(۲) باشد، یعنی به‌صورت $(a, b)-K$، زیرا هرعضو پایه از نوع اول که شامل ۰ باشد مجموعهٔ K را قطع می‌کند. سپس، n را به‌قدرکافی بزرگ اختیار می‌کنیم به‌طوری‌که $1/n \in (a, b)$. یك عضو پایه شامل $1/n$ و زیرمجموعهٔ V برمی‌گزینیم ؛ این مجموعه باید عضو پایه به صورت (c, d) از نوع (۱) باشد. سرانجام ، عدد z را طوری انتخاب می‌کنیم که $z < 1/n$ و $z > \max\{c, 1/(n+1)\}$. دراین صورت z به‌هردو مجموعهٔ U و V تعلق خواهد داشت ، پس این دو مجموعه نمی‌توانند جدا از هم باشند (شکل ۴).



شکل ۴

مثال ۲. فضای حاصل‌ضربی $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ نرمال نیست.[1]

مجموعهٔ خوشترتیب $\bar{S}_\Omega$ را باتوپولوژی ترتیبی ، و زیرمجموعهٔ S_Ω را بـا توپولوژی زیرفضایی (که همان توپولوژی ترتیبی است) درنظر می‌گیریم . بنابرقضیهٔ ۶.۲، این‌دو فضا نرمال‌اند. ثابت می‌کنیم که فضای حاصل‌ضربی $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ نرمال نیست.

این‌مثال سه‌مقصود را برآورده می‌کند. اولاً، ثابت می‌کند که لزومی ندارد هرفضـای منتظم، نرمال باشد، زیرا $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ حـاصل‌ضرب دو فضای منتظم است وبنابراین منتظم است. ثانیاً، ثابت می‌کند که زیرفضای یك فضای نرمال لزومی ندارد نرمال بـاشد، زیرا $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ زیرفضایی‌است از $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$، که یك‌فضای هاوسدورف فشرده است و بنابراین ، نرمال است. ثالثاً، ثابت می‌کند که حاصل‌ضرب دوفضای نرمال الزاماً نرمال نیست.

---

۱. کلی (Kelley) [K] این مثـال را مستقلاً به ژ. دیودونه (J. Dieudonné) و ا. پ. مورس (A.P . Morse) نسبت می‌دهد.

ابتدا فضـای $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ و « قطر » آن $\Delta = \{x \times x | x \in \bar{S}_\Omega\}$ را در نظر می‌گیریم. به‌دلیل‌هاوسدورف‌بودن $\bar{S}_\Omega$، قطر Δ در $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ بسته است، اگر U و V همسایگیهای جدا ازهمی، بترتیب، برای x و y باشند آنگاه $U \times V$ یك همسایگی $x \times y$ است که Δ را قطع نمی‌کند.

بنابراین مجموعهٔ

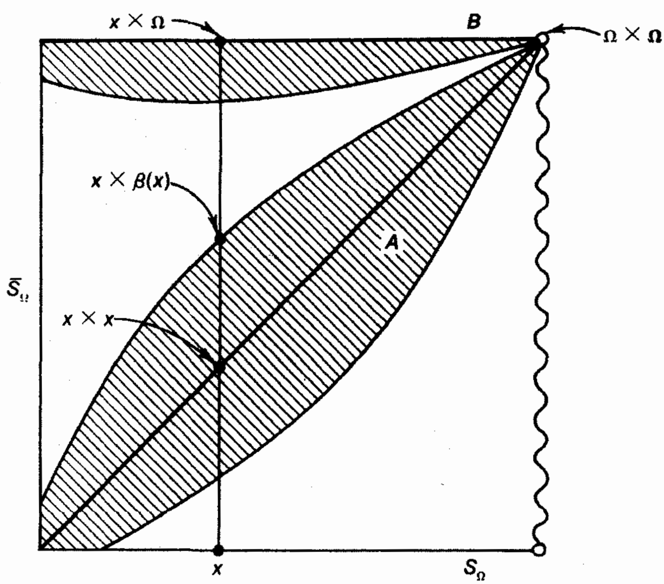
$$A = \Delta \cap (S_\Omega \times \bar{S}_\Omega) = \Delta - \{\Omega \times \Omega\}$$

در زیرفضای $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ بسته است. به‌طریقی مشابه،مجموعهٔ

$$B = S_\Omega \times \{\Omega\}$$

نیز در $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ بسته است، زیرا یك«قاچ» از این‌فضای حـاصل‌ضرب است (شکل ۵). مجموعه‌های A و B جدا از هم می‌باشند. فرض می‌کنیم‌که مجموعه‌های بـاز جدا ازهمی در $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ مانند U و V وجود دارند به‌طوری‌که، بترتیب، حـاوی A و B هستند و به‌تناقض می‌رسیم.

به‌ازای نقطهٔ مفروض $x \in S_\Omega$ ، قاچ‌قائم $x \times \bar{S}_\Omega$ را درنظر می‌گیریم . مدعی هستیم



شکل ۵

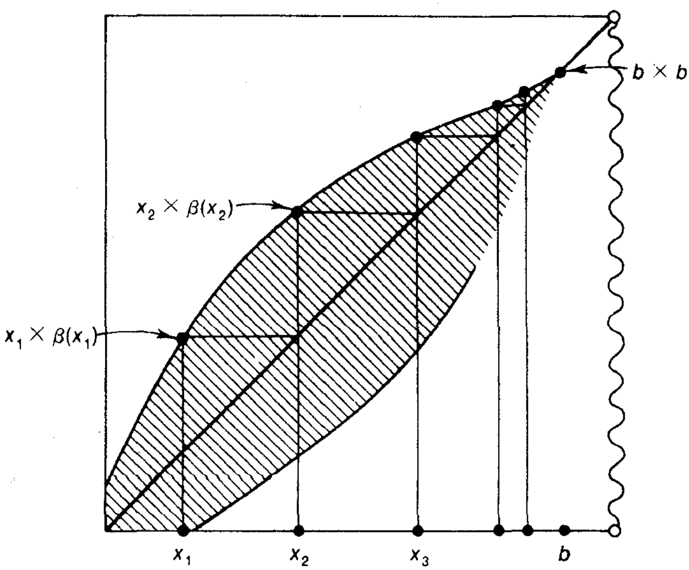
که نقطه‌ای مانند β هست به‌طوری که $x<\beta<\Omega$ و $x\times\beta$ خارج از U است. چه، به‌ازای هر β، به‌طوری که $x<\beta<\Omega$، مجموعهٔ U باید شامل نقطهٔ $x\times\beta$ باشد، زیرا $x\times\Omega$ که رأس قاچ $x\times S_\Omega$ است باید یک نقطهٔ حدی U باشد، ولی چنین نیست. زیرا V مجموعهٔ بازی است جدا از U وشامل این نقطهٔ رأسی.

این نقطه را با $\beta(x)$ نمایش می‌دهیم ؛ و برای آنکه ابهامی نباشد، $\beta(x)$ را کوچکترین عضوی از S_Ω می‌گیریم که $x<\beta(x)<\Omega$ و $x\times\beta(x)$ خارج از U قرارگیرد. اکنون، دنباله‌ای از نقاط S_Ω را بدین طریق تعریف می‌کنیم ، x_1 را نقطهٔ دلخواهی از S_Ω اختیار می‌کنیم. فرض کنیم $x_2=\beta(x_1)$، ودرحالت کلی، $x_{n+1}=\beta(x_n)$. چون به‌ازای هر x، $x<\beta(x)$، خواهیم داشت

$$x_1<x_2<\dots.$$

مجموعهٔ $\{x_1, x_2, \dots\}$ شمارا و در نتیجه در S_Ω دارای یک کران بالاست ؛ فرض کنیم $b\in S_\Omega$ کوچکترین کران بالای این مجموعه باشد. چون این دنباله صعودی است، باید به کوچکترین کران بالای خود همگرا باشد، پس $x_n\to b$. ازطرفی $\beta(x_n)=x_{n+1}$، درنتیجه، $\beta(x_n)\to b$. بنابراین، درفضای حاصلضرب،

$$x_n\times\beta(x_n)\to b\times b$$



شکل ۶

(شکل۶). و این تناقض است، زیرا نقطهٔ $b \times b$ درمجموعهٔ A قرار دارد که خود زیرمجموعهٔ U است؛ و U شامل هیچیك از نقاط $x_n \times \beta(x_n)$ نیست.

مثال ۳. فضای R_l نرمال است، ولی فضای R_l^2 نرمال نیست.

این مثال دومقصود را برآورده می‌کند. اولاً، ثابت می‌کند که یك‌فضای منتظم لزومی ندارد نرمال باشد، ثانیاً، حاصل‌ضرب دوفضای نرمال ممکن است نرمال نباشد.

به‌آسانی ملاحظه می‌شودکه R_l نرمال است. فرض‌کنیم A و B دومجموعهٔ بستهٔ جدا از هم R_l باشند. به‌ازای هرعضو A مانند a، عضو پایهٔ $[a, x_a)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که B را قطع نکند؛ و به‌ازای هرعضو b از B، یك‌عضو پایه مانند $[b, x_b)$ را چنان انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که A را قطع نکند. مجموعه‌های باز

$$V = \bigcup_{b \in B} [b, x_b) \quad \text{و} \quad U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a)$$

باز و جدا ازهم‌اندکه، بترتیب، حاوی A و B هستند.

اثبات نرمال‌نبودن R_l^2 بسیار دشوارتر است. خط

$$L = \{x \times (-x) \mid x \in R_l\}$$

را درنظر می‌گیریم. L در R_l^2 بسته است؛ وبه‌عنوان زیرفضایی از R_l^2، دارای توپولوژی گسسته است. بنابر بسته‌بودن L در R_l^2، هرزیرمجموعهٔ بستهٔ L در R_l^2 نیز بسته است. اگر R_l^2 نرمال باشد، بدین‌معنی است که به‌ازای هرزیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی L مانند A، می‌توان مجموعه‌های باز جدا ازهمی در R_l^2 یافت که، بترتیب، حاوی مجموعه‌های‌بستهٔ A و $L-A$ باشند.

با به‌کاربردن برهانی ساده براساس «عدد اصلی» می‌توان ثابت‌کردکه این امر ممکن نیست. طرح برهان در تمرین ۱۴ این‌بخش آمده است.

یك‌زیرمجموعهٔ مشخص L که برای‌آن اختیارکردن چنین مجموعه‌های بازی غیرممکن است، زیرمجموعه‌ای است مانند A متشکل ازنقاطی‌که مختصات گنگ دارند. اثبات اینکه این انتخاب خاص به‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسد، موقوف‌است به‌استفاده از وسیله‌ای توانا، حالت خاصی از قضیهٔ رستهٔ بئر که‌آن‌را به‌عنوان تمرین دربخش ۳ ـ ۶ آوردیم. با مفروض گرفتن آن تمرین، ثابت می‌کنیم‌که این مجموعهٔ خاص نتیجهٔ مطلوب‌را به‌دست می‌دهد.

بنابراین، فرض‌کنیم A زیرمجموعه‌ای از L باشدکه از نقاطی بامختصات‌گنگ تشکیل شده است. U و V را مجموعه‌های باز جدا از همی در R_l^2 می‌گیریم‌که، بترتیب، حاوی A و $L-A$ باشند. به‌ازای هرنقطهٔ $x \times (-x)$ از A، عدد صحیح مثبتی مانند n موجود است به‌طوری‌که عضو پایهٔ

$$[x, x+1/n) \times [-x, -x+1/n)$$

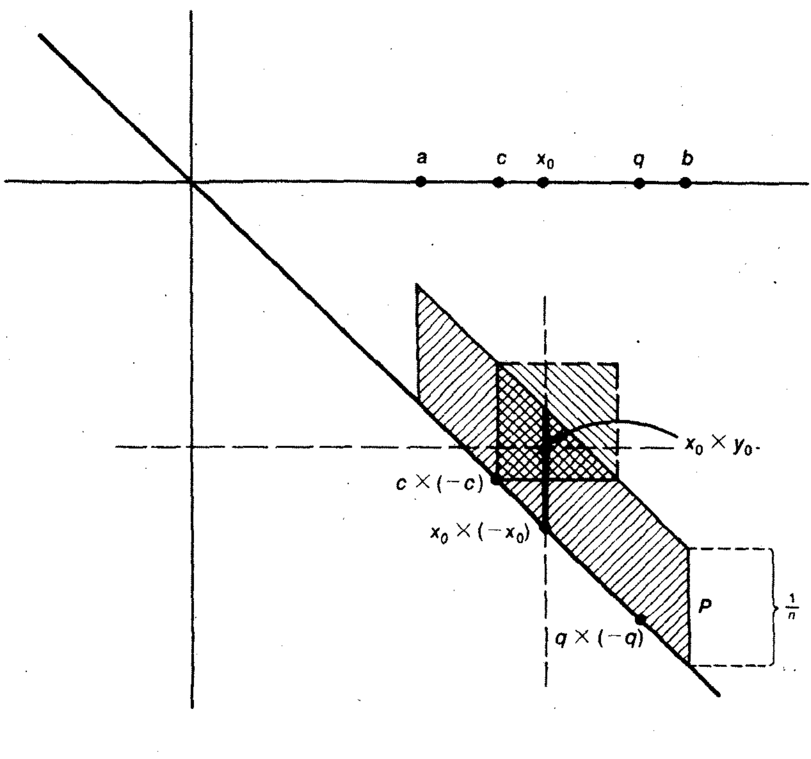
که حول $x \times (-x)$ است درزیرمجموعهٔ U باشد. فرض‌کنیم K_n مجموعهٔ همهٔ اعداد گنگی

مانند x از بازهٔ $[0, 1]$ باشدکه به‌ازای آنها این‌عضو پایه در U قرار می‌گیرد. در این صورت، $\bigcup K_n$ دقیقاً مجموعهٔ همهٔ اعدادگنگ بازهٔ $[0, 1]$ است.

اگر $\bar{K}_n$ را بستار مجموعهٔ K_n در $[0, 1]$ بگیریم، آنگاه چون $\bigcup \bar{K}_n$ حاوی $\bigcup K_n$ است، حاوی همهٔ اعداد گنگ $[0, 1]$ نیز هست . بنابراین ، $[0, 1]$ را می‌توان به‌صورت اجتماع شمارای مجموعه‌هــای بستهٔ $\bar{K}_n$ (به‌ازای $n \in Z_+$) و مجموعه‌هــای تک‌عضوی $\{q\}$ نوشت (q عددگویایی در $[0, 1]$ است). بنا بر تمرین ۵ دربخش ۳ ــ ۶، دست‌کم یکی‌از این مجموعه‌ها باید درون ناتهی در $[0, 1]$ داشته‌باشد؛ البته، این‌درون نمی‌تواند مجموعهٔ تک‌عضوی $\{q\}$ باشد. بنابراین، عددی مانند n موجود است به‌طوری‌که مجموعهٔ $\bar{K}_n$ حاوی بازهٔ بازی از R مانند (a , b) است.

بنا بر تعریف، به‌ازای هرعضو K_n مانند c ، عضو پایهٔ

$$[c, c+1/n)\times[-c, -c+1/n)$$



شکل ۷

زیرا R_l^2 در U قرار دارد. مدعی‌هستیم که اجتماع این اعضای پایه‌ای وقتی که c در K_n تغییر کند، حاوی همهٔ «ناحیهٔ متوازی‌الاضلاع شکل»

$$P=\{x\times y \mid a<x<b\ ,\ -x<y<-x+1/n\}$$

است، به‌طوری که P در U قرار می‌گیرد (شکل ۷).

برای اثبات این امر، فرض کنیم $x_0\times y_0$ نقطه‌ای از P باشد. با به‌کارگیری این امر که $K_n\cap(a,b)$ در (a,b) چگال است، می‌توان نقطه‌ای مانند c در $K_n\cap(a,b)$ با این شرط انتخاب کرد که $c\times(-c)$ در زیر خط $y=y_0$ و در سمت چپ خط $x=x_0$ قرار گیرد. در این صورت، به آسانی می‌توان نشان داد که $x_0\times y_0$ در عضو پایهٔ

$$[c,\ c+1/n)\times[-c,-c+1/n)$$

قرار دارد. [به‌بیان دقیقتر، c را نقطه‌ای از K_n می‌گیریم که در بازهٔ $(max\{a,-y_0\}\ ,\ x_0)$ باشد. در نتیجه، نامساویهای زیر را خواهیم داشت:

$$-c<y_0<-x_0+1/n \quad و \quad c<x_0$$

این نامساویها مستلزم این‌هستند که $c<x_0<c+1/n$ و $-c<y_0<-c+1/n$.]

بقیهٔ کار آسان است. عدد q را عدد گویای دلخواهی از بازهٔ (a,b) می‌گیریم. بدیهی است که $q\times(-q)$، در توپولوژی R_l^2، یکی از نقاط حدی ناحیهٔ متوازی‌الاضلاع شکل P است. چون $P\subset U$، این نقطه یک‌نقطهٔ حدی U نیز هست. و این تناقضی است با این امر که V مجموعهٔ بازی است در R_l^2 شامل $q\times(-q)$ وجدا از U.

مثال ۴. اگر J ناشمارا باشد، فضای حاصلضربی R^J نرمال نیست. برهان این‌قضیه نسبتاً دشوار است، و ما آن را به‌عنوان تمرینی هماورد جو به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم (تمرین ۱۵ ملاحظه شود).

این مثال، سه‌مقصود رابرآورده می‌کند. اولاً، ثابت‌می‌کند که فضای منتظم R^J لزومی ندارد نرمال باشد، ثانیاً، ثابت می‌کند که یك زیرفضای فضایی نرمال ممکن است نرمال نباشد، زیرا R^J با $(0,1)^J$، که زیرفضایی است از $[0,1]^J$، هومئومورف است، و (با فرض قضیهٔ تیخونوف) چون $[0,1]^J$ هاوسدورف فشرده است، در نتیجه، نرمال است. بالاخره، ثابت می‌کند که حاصلضرب ناشمارایی از فضاهای نرمال لزومی ندارد نرمال باشد. اما به‌این پرسش که «آیا حاصلضربی متناهی یا شمارا ازفضاهای نرمال می‌توانند نرمال باشند؟» پاسخی نمی‌دهد. برای پاسخ به‌این‌پرسش به‌یکی ازدو مثال گذشته نیازداریم.

تمرینها

۱. ثابت کنید اگر X منتظم باشد، هرزوج از نقاط متمایز X همسایگیهایی دارند که بستار آنها جدا ازهم‌اند.

۲. ثابت کنیداگر X نرمال باشد، هردو مجموعهٔ بستهٔ جدا ازهم آن همسایگیهایی دارند که بستارآنها جدا از هم‌اند.

۳. ثابت کنید که یك زیرفضای بستهٔ فضایی نرمال خود نرمال است.

۴. ثابت کنید که هرتوپولوژی ترتیبی، منتظم است.

۵. ثابت کنید که اگر $\prod X_\alpha$ هاوسدورف، یا منتظم، یا نرمال باشدآنگاه X_α نیز چنین است. (فرض کنید هریك از X_α ها ناتهی است.)

۶. فرض کنید X و X' نمایش یك مجموعه تحت، بترتیب، توپولوژیهای $\mathscr{T}$ و $\mathscr{T}'$ باشند؛ فرض کنید $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$. اگریکی ازاین دو فضا هاوسدورف (یامنتظم، یانرمال) باشد. آنگاه چه حکمی درمورد دیگری می‌توان کرد؟

۷. ثابت کنید که هرفضای هاوسدورف موضعاً فشرده فضایی است منتظم.

۸. ثابت کنید هرفضای لیندلوف منتظم،فضایی است نرمال.

۹. فرض کنید توابع $f,g : X \to Y$ پیوسته باشند و Y هاوسدورف باشد. ثابت کنید که مجموعهٔ $\{x|f(x)=g(x)\}$ در X بسته است.

۱۰. آیا R^ω، با توپولوژی حاصل‌ضربی، نرمال است؟ با توپولوژی یکنواخت چطور؟
هنوز معلوم نیست که R^ω با توپولوژی جعبه‌ای نرمال است یا نه. مری الن رودین[1] ثابت کرده‌است که، با قبول فرض پیوستار، جواب مثبت است [R]. درواقع، وی ثابت می‌کند که این فضا درشرط قویتری موسوم به‌پیرافشردگی نیزصدق می‌کند.

۱۱. فضای X را **تماماً نرمال** گوییم اگر هر زیرفضای آن نرمال باشد. ثابت کنید X تماماً نرمال است اگر و فقط اگر به ازای هردو مجموعهٔ جداشدهٔ X مانند A و B (یعنی، مجموعه‌هایی باشرایط $\bar{A} \cap B = \varnothing$ و $A \cap \bar{B} = \varnothing$)، مجموعه‌های باز جدا ازهمی که حاوی آنها هستند موجود باشند. [راهنمایی: اگر X تماماً نرمال باشد، مجموعهٔ $X-(\bar{A} \cap \bar{B})$ را درنظر بگیرید.]

۱۲. کدامیك از فضاهای زیر تماماً نرمال است؟ برای جواب خود دلیلی بیاورید.
(الف) زیرفضای یك فضای تماماً نرمال.
(ب) حاصل‌ضرب دوفضای تماماً نرمال.
(پ) مجموعه‌ای خوشترتیب با توپولوژی ترتیبی.
(ت) فضایی متریکپذیر .
(ث) یك فضای هاوسدورف فشرده.

---
1. Mary - Ellen Rudin

(ج) یک‌فضای منتظم با پایه‌ای شمارا.
(چ) فضای R_l.

۱۳. فرض کنید A مجموعه‌ای بسته در X باشد، و Y را فضای خارج قسمتی حاصل از تبدیل A به‌یك نقطه بگیرید (رجوع شود به‌بخش ۲ ـ ۱۱). ثابت کنید که اگر X منتظم باشد، Y هاوسدورف است؛ و اگر X نرمال باشد، Y نرمال است.

*۱۴. به‌شیوهٔ زیر ثابت کنید که R_l^2 نرمال نیست: فرض کنید به‌ازای هرزیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی L مانند A، مجموعه‌های بازازهم‌جدایی در R_l^2 مانند U_A و V_A موجودند به‌طوری که، بترتیب، حاوی A و $L-A$ هستند. همچنین فرض کنید D مجموعهٔ نقاطی از R_l^2 باشد که مختصات گویا دارند، فرض کنید $\mathcal{P}(L)$ و $\mathcal{P}(D)$، بترتیب، نمایش گردایه‌های همهٔ زیرمجموعه‌های L و D باشند. اکنون نگاشت $\theta:\mathcal{P}(L)\to\mathcal{P}(D)$ را باضابطهٔ زیر تعریف کنید:

اگر $A\neq\varnothing$ و $A\neq L$، $\theta(A)=U_A\cap D$،

$$\theta(\varnothing)=\varnothing,$$

$$\theta(L)=D.$$

(الف) ثابت کنید که θ یك‌به‌یك است.
(ب) تابع یك‌به‌یکی از $\mathcal{P}(D)$ به L بسازید.
(پ) تناقضی استخراج کنید.

*۱۵. قضیه. اگر J ناشمارا باشدآنگاه R^J نرمال نیست.

برهان. (این برهان از ا. ه. استون[1] است و ما آن را به‌نحوی که در $[S-S]$ عرضه شده می‌آوریم.) چون $(Z_+)^J$ در R^J بسته است، کافی است که نرمال نبودن $(Z_+)^J$ را ثابت کنیم. X را فضای $(Z_+)^J$ بگیرید؛ اعضای X را با علامت‌گذاری تابعی مشخص کنید.

(الف) P_1 را زیرمجموعه‌ای از X بگیرید که متشکل است از همهٔ توابعی مانند $\mathbf{x}:J\to Z_+$ به‌طوری که به‌ازای هر $i\neq 1$، مجموعهٔ $\mathbf{x}^{-1}(i)$ حداکثر یك عضو داشته‌باشد. P_2 را زیرمجموعه‌ای از X بگیرید که متشکل است از همهٔ توابعی مانند $\mathbf{x}$ به‌طوری که به‌ازای هر $i\neq 2$، زیرمجموعهٔ $\mathbf{x}^{-1}(i)$ حداکثر یك عضو داشته‌باشد. ثابت کنید مجموعه‌های P_1 و P_2 جدا از هم‌اند و در X بسته هستند.

---

1. A. H. Stone

(ب) فرض کنید U و V مجموعه‌های باز جدا ازهمی باشند که، بترتیب، حاوی P_1 و P_2 هستند. ثابت کنید که دنباله‌ای از اعضای متمایز J مانند

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots,$$

و دنباله‌ای از اعداد صحیح مانند

$$n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \cdots,$$

می‌توان یافت به‌طوری که به‌ازای هرعدد صحیح مثبت i، مجموعهٔ U_i که در زیر تعریف شده است زیرمجموعهٔ U باشد. در اینجا، U_i مجموعهٔ همهٔ $\mathbf{x}$ هایی است که

$$\mathbf{x}(\alpha_j) = \begin{cases} j & \text{به‌ازای } 1 \leqslant j \leqslant n_{i-1} \\ 1 & \text{به‌ازای } n_{i-1} < j < n_i \end{cases}$$

(پ) اکنون، فرض کنید $A = \{\alpha_j \mid j \in Z_+\}$. ثابت کنید که می‌توان زیرمجموعه‌ای متناهی از J مانند B یافت به‌طوری که مجموعهٔ V_B، که در زیر تعریف شده است، زیرمجموعهٔ V باشد. در اینجا، V_B مجموعهٔ همهٔ $\mathbf{x}$ هایی است که

$$\mathbf{x}(\alpha_j) = j \quad \text{به‌ازای } \alpha_j \in B \cap A$$

$$\mathbf{x}(\alpha) = 2 \quad \text{به‌ازای } \alpha \in B - A$$

(ت) ثابت کنید که به‌ازای عددی مانند i، $U_i \cap V_B \neq \varnothing$.

۱۶. آیا هر گروه توپولوژیك منتظم فضایی است نرمال؟

۳-۴ لم اوریسون

اکنون به‌نخستین قضیهٔ عمیق این کتاب می‌رسیم، قضیه‌ای که عموماً به «لم اوریسون» معروف است. این قضیه وجود توابع حقیقی پیوستهٔ خاصی برفضای نرمال X را ثابت می‌کند. این لم وسیلهٔ قاطعی است برای اثبات تعدادی ازقضایای مهم. یکی ازآنها، قضیهٔ گسترش تیتسه[1] است که ما آن‌را در این بخش ثابت می‌کنیم. دیگری قضیهٔ متریسازی اوریسون است که در بخش بعدی ثابت می‌کنیم. و بالاخره، یك قضیهٔ نشاندن برای بسلاهاست که درآخرین بخش این فصل با آن روبرو خواهیم شد.

به‌چه دلیل لم اوریسون‌را قضیه‌ای «عمیق» می‌گوییم؟ چون برهان آن متضمن ایده‌ای

1. Tietze

واقعاً ابتکاری است که برهانهای قبلی فاقد آن بودند. شاید بتوانیم مقصود خود را بدین‌شرح توضیح دهیم: چنانچه برهانهای قضایایی راکه تا اینجا در این کتاب آورده‌ایم حذف کنیم و سپس کتاب را به‌دانشجوی با استعدادی بدهیم که قبلاً توپولوژی مطالعه نکرده است، روی هم‌رفته انتظار می‌رود که آن دانشجو حتماً قادر به‌درك مطالب کتاب باشد و بتواند خود قضایا را به‌ثبوت برساند. (البته، این‌کار مقدار قابل‌ملاحظه‌ای وقت می‌گیرد و تلاش قابل‌توجهی لازم دارد، و انتظار نداریم که مثالهای ابتکاری را هم بتواند ارائه دهد.) اما لم اوریسون در سطح متفاوتی است، خلاقیت قابل‌ملاحظه‌ای، بیش از آنچه اغلب ما داریم، لازم است تا بتوان این‌لم را ثابت کرد، مگر آنکه شخص بیش از حد راهنمایی شود!

۱۰۳. قضیه (لم اوریسون) فرض‌کنیم X فضایی نرمال باشد، و A و B دو زیر-مجموعهٔ بستهٔ جدا ازهم X . همچنین، $[a, b]$ را بازهٔ بسته‌ای ازاعداد حقیقی می‌گیریم. در این‌صورت، نگاشت پیوسته‌ای مانند

$$f: X \longrightarrow [a, b]$$

موجوداست به‌طوری‌که به‌ازای هر x در A، $f(x)=a$ و به‌ازای‌هر x در B، $f(x)=b$.

برهان. کافی است فقط حالتی را در نظر بگیریم‌که بازهٔ موردنظر $[0, 1]$ باشد، زیرا حالت کلی ازآن نتیجه می‌شود.

نخستین مرحلهٔ برهان، با استفاده از نرمال‌بودن فضا، ساختن خانوادهٔ معینی از مجموعه‌های باز X است، مانند U_p که بااعدادگویا اندیسگذاری شده‌اند. سپس، با به‌کاربردن این مجموعه‌ها تابع پیوستهٔ f را تعریف می‌کنیم.

مرحلهٔ ۱. فرض‌کنیم P مجموعهٔ همهٔ اعدادگویای بازهٔ $[0, 1]$ باشد[1]، به‌ازای هرعضو p مانند p مجموعهٔ بازی از X مانند U_p چنان تعریف می‌کنیم که هر گاه $p < q$، داشته باشیم

$$\bar{U}_p \subset U_q.$$

بنابراین، مجموعه‌های U_p به‌همان نحو که اندیسهای آنها به‌وسیلهٔ ترتیب معمولی خط حقیقی مرتب شده‌اند، بارابطهٔ (جزئیت) ترتیب ساده پیدا خواهندکرد.

چون P شماراست، برای تعریف مجموعه‌های U_p، می‌توان روش‌استقرا (یاحتی، اصل تعریف بازگشتی) را به‌کاربرد. اعضای P را، به‌طریقی، به‌صورت یك دنبالهٔ

---

۱. عملاً P می‌تواند هرزیرمجموعهٔ چگال شمارای $[0, 1]$ باشد، به‌شرط آنکه نقاط ۰ و ۱ در P باشند.

نـامتناهی مرتب می کنیم؛ برای سهولت، فرض می کنیم اعداد ۱ و ۰ دو عضو اول این دنباله باشند.

اکنون، مجموعهٔ U_p را به‌شرح زیر تعریف می کنیم: ابتدا، U_1 را برابر $X-B$ می گیریم. سپس، چون A بسته است وجزء مجموعهٔ باز U_1 است، بنا برنرمال بودن X، می‌توان مجموعهٔ باز U_0 را چنان انتخاب کرد که

$$A\subset U_0 \quad \text{و} \quad \bar{U}_0\subset U_1.$$

به‌طور کلی، فرض کنیم P_n مجموعهٔ نخستین n عددگویا در این‌دنباله باشد، و U_p به‌ازای همهٔ اعداد گویا مانند p که به‌مجموعهٔ P_n تعلق دارند تعریف شده است و در شرط

$$p<q \implies \bar{U}_p\subset U_q \tag{*}$$

صدق می کند. فـرض‌کنیم r عددگویای بعدی درآن دنباله بـاشد؛ می‌خواهیم U_r را تعریف کنیم.

مجموعهٔ $P_{n+1}=P_n\cup\{r\}$ زیرمجموعه‌ای است متناهی ازبازهٔ $[0, 1]$، وبدین عنوان، دارای ترتیب ساده‌ای است‌که از رابطهٔ ترتیبی عـادی $<$ در خط حقیقی به‌آن القا شده است. دریك مجموعهٔ مرتب سادهٔ متناهی، هرعضو (بجز کوچکترین و بزرگترین عضو) دارای یك‌سابق بلافصل ویك‌تـالی بلافصل است. (مراجعه شود به‌قضیهٔ ۱۰۱۰ در فصل ۱.) عدد ۰ کوچکترین عضو و عدد ۱ بزرگترین عضو مجموعهٔ مرتب سادهٔ P_{n+1} است، و r مخالف ۰ , ۱. بنابراین، r در P_{n+1} دارای سابق بلافصلی مانند p وتالی بلافصلی مـانند q است. مجموعه‌هـای U_p و U_q قبلاً تعریف شده‌اند و، بنابرفرض استقرا، $\bar{U}_p\subset U_q$. با بهره‌گیری از نرمال‌بودن X، می‌توان مجموعهٔ بـازی از X مانند U_r یافت به‌طوری که

$$\bar{U}_p\subset U_r \quad \text{و} \quad \bar{U}_r\subset U_q.$$

حال ادعا می کنیم کـه شرط (*)، به‌ازای هردو عضو دلخواه P_{n+1} برقرار است. اگر هردو عضو در P_n قرارگیرند، بنابرفرض استقرا، (*) برقرار است. اگر یکی از آنها r و دیگری عضوی از P_n مانند s باشد، آنگاه یا $s\leqslant p$، که دراین حالت

$$\bar{U}_s\subset \bar{U}_p\subset U_r,$$

یا $s\geqslant q$، که دراین‌حالت

$$\bar{U}_r\subset U_q\subset U_s.$$

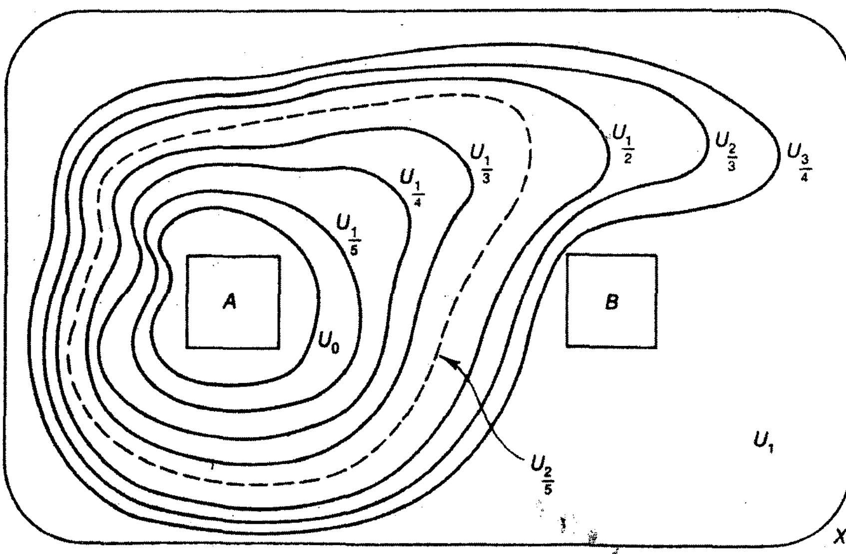
بنابراین به‌ازای هرزوج ازعناصر P_n، رابطهٔ(*) برقرار است.

به‌استقرا، به‌ازای هرعضو P مانند p مجموعهٔ باز U_p تعریف شده است.

برای توضیح بیشتر، فرض‌کنیم اعضای P را، با همان شیوهٔ متعارف، در یك‌دنبالهٔ نامتناهی مرتب کرده‌باشیم:

$$P=\left\{۱,\ ۰,\ \frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۳},\ \frac{۲}{۳},\ \frac{۱}{۴},\ \frac{۳}{۴},\ \frac{۱}{۵},\ \frac{۲}{۵},\ \frac{۳}{۵},\dots\right\}$$

بعد از تعریف $U_۰$ و $U_۱$، مجموعهٔ $U_{۱/۲}$ را چنان تعریف می‌کنیم که $\overline{U}_۰ \subset U_{۱/۲}$ و $\overline{U}_{۱/۲}\subset U_۱$. سپس، $U_{۱/۳}$ را بین $U_۰$ و $U_{۱/۲}$، و $U_{۲/۳}$ را بین $U_{۱/۲}$ و $U_۱$ گنجانده به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم. درهشتمین مرحلهٔ برهان، وضعیتی را که در شکل۸ نشان داده شده است خواهیم داشت.



شکل ۸

ونهمین مرحله، درحقیقت عبارت‌است‌از گنجاندن مجموعهٔباز $U_{۲/۵}$ بین $U_{۱/۳}$ و $U_{۱/۲}$، والی‌آخر.

مرحلهٔ ۲. تـا کنون، به‌ازای هرعددگویای p از بازهٔ $[۰, ۱]$، مجموعهٔ U_p را تعریف کرده‌ایم. این‌تعریف را، به‌طریق زیر، به‌هر عددگویا p در R گسترش می‌دهیم:

اگر $p<0$ ، $U_p=\phi$،

اگر $p>1$ ، $U_p=X$.

می‌توانید تحقیق کنید که در این‌حالت نیز به‌ازای هرزوج ازاعداد گویا، مانند p و q،

$$p<q \Longrightarrow \bar{U}_p\subset U_q.$$

مرحلهٔ ۳. به‌ازای نقطهٔ مفروضی از X مانند x، $Q(x)$ را مجموعهٔ اعداد گویایی مانند p تعریف می‌کنیم به‌طوری که مجموعه‌های U_p نظیر آنها شامل x باشند:

$$Q(x)=\{p\mid x\in U_p\}.$$

این‌مجموعه شامل هیچ عدد کوچکتر از ۰ نیست ، چون به‌ازای $p<0$ ، هیچ x ی در U_p وجود ندارد، ولی هرعدد بزرگتر از ۱ درآن قرار دارد، زیرا به‌ازای هر $p>1$، هر x در U_p است. بنابراین، $Q(x)$ ازپایین کراندار است وبزرگترین کران پایین آن نقطه‌ای ازبازهٔ $[0, 1]$ است. حال تابع f را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\operatorname{glb} Q(x)=\operatorname{glb}\{p\mid x\in U_p\}.$$

مرحلهٔ ۴. ثابت می‌کنیم که f همان تابع مطلوب‌است. اگر $x\in A$ آنگاه به‌ازای هر $p\geqslant 0$ ، $x\in U_p$. بنابراین، $Q(x)$ مساوی مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای نامنفی است و $f(x)=\operatorname{glb} Q(x)=0$. همچنین، اگر $x\in B$ ، آنگاه هیچ $p\leqslant 1$ وجود ندارد به‌طوری که $x\in U_p$. بنابراین، $Q(x)$ عبارت است ازهمهٔ اعداد گویای بزرگتر از ۱، پس $f(x)=1$.

تا به‌اینجا ، مطالب ساده بودند. تنها قسمت مشکل، اثبات پیوستگی f است. برای این‌منظور، ابتدا احکام مقدماتی زیر را ثابت می‌کنیم.

(۱) $x\in\bar{U}_r \Longrightarrow f(x)\leqslant r$.

(۲) $x\notin U_r \Longrightarrow f(x)\geqslant r$.

برای اثبات (۱)، توجه کنید که اگر $x\in\bar{U}_r$ آنگاه به‌ازای هرعدد گویای s به‌طوری که $s>r$ ، داریم $x\in U_s$. بنابراین، $Q(x)$ شامل همهٔ اعداد گویای بزرگتر از r است، ودر نتیجه بنابر تعریف،

$$f(x)=\operatorname{glb} Q(x)\leqslant r.$$

برای اثبات(۲)، توجه کنید که اگر $x\notin U_r$ ، آنگاه به‌ازای‌هرعدد گویای s به‌طوری که $s<r$ ، داریم $x\notin U_s$. بنابراین، $Q(x)$ شامل هیچ‌عدد گویای کوچکتر از r نیست. در نتیجه،

$$f(x)=\operatorname{glb} Q(x)\geqslant r.$$

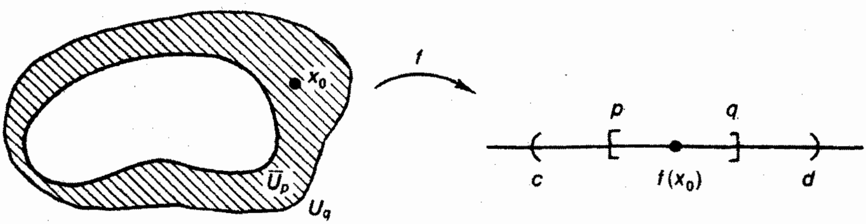
اکنون، پیوستگی f را ثابت می‌کنیم. به‌ازای نقطهٔ مفروضی از X مانند x_0 و بازهٔ باز (c, d) از R که شامل نقطهٔ $f(x_0)$ است، می‌خواهیم یك همسایگی x_0 مانند U بیابیم به‌طوری که $f(U) \subset (c, d)$. اعدادگویای p و q را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$c < p < f(x_0) < q < d.$$

مدعی هستیم که مجموعهٔ باز

$$U = U_q - \bar{U}_p$$

همان همسایگی مطلوب x_0 است (شکل ۹).



شکل ۹

اولاً، ثابت می‌کنیم که $x_0 \in U$. الزاماً $x \in U_q$، زیرا، بنا بر(۲)، $x_0 \notin U_q$ مستلزم آن است که $f(x_0) \geqslant q$. همچنین، $x_0 \notin \bar{U}_p$، چون بنا بر (۱)، $x \in \bar{U}_p$ مستلزم آن است که $f(x) \leqslant p$. بنابراین، $x_0 \in U$.

ثانیاً، ثابت می‌کنیم که $f(U) \subset (c, d)$. فرض‌کنیم $x \in U$. در این صورت، $x \in U_q \subset \bar{U}_q$، وبنابر (۱)، $f(x) \leqslant q$. چون $x \notin \bar{U}_p$، ولهذا، $x \notin U_p$، وبنابر(۲)، $f(x) \geqslant p$. بنابراین، $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$، واین همان‌است که‌می‌خواستیم. □

تعریف. اگر A و B دو زیرمجموعهٔ فضای توپولوژیك X باشند وتابع‌پیوسته‌ای مانند $f : X \rightarrow [0, 1]$ موجود باشد به‌طوری که $f(A) = \{0\}$ و $f(B) = \{1\}$ آنگاه‌گوییم A و B را **می‌توان به‌وسیلهٔ تابعی پیوسته ازهم جداکرد.**

لم اوریسون بیانگر این است‌که اگر بتوان دو مجموعهٔ بسته در X را به‌وسیلهٔ مجموعه‌های باز جدا ازهم جداکرد آنگاه هرچنین دومجموعه را می‌توان به‌وسیلهٔ تابعی

پیوسته نیز ازهم جداکرد. عکس این‌نکته بدیهی است؛ زیرا، اگر $f: X \to [0, 1]$ چنین تابعی باشد آنگاه $f^{-1}([0, 1/2))$ و $f^{-1}((1/2, 1])$ مجموعه‌های باز جدا ازهمی هستند که، بترتیب، حاوی A و B می‌باشند.

این نکته موجب طرح سؤالی می‌شود که ممکن است قبلاً برای شما هم پیش‌آمده باشد: چرا برهان لم اوریسون را نمی‌توان به‌فضاهای منتظم تعمیم داد؟ یعنی در جایی که می‌توان نقاط ومجموعه‌های بسته را به‌وسیلهٔ مجموعه‌های باز جدا ازهم، جداکرد، آیا نمی‌توان این‌نقاط و مجموعه‌های بسته را باتوابع پیوسته ازهم جداکرد؟

در وهلهٔ اول به‌نظر می‌رسد که برهان لم اوریسون باید مؤثر باشد. نقطه‌ای مانند a ومجموعهٔ بستهٔ B راکه شامل a نیست انتخاب می‌کنیم. و مانندگذشته برهان را با استفاده از منتظم‌بودن X با تعریف $U_1 = X - B$ وبرگزیدن مجموعهٔ بازی حول a مانند U_0 به‌طوری‌که $\bar{U}_0 \subset U_1$، آغاز می‌کنیم. ولی در همان اولین مرحلهٔ بعدی برهان به‌مشکل برمی‌خوریم. فرض‌کنیم عدد گویای p جملهٔ بعد از ۰ و ۱ دردنبالهٔ‌موردنظر باشد. هدف، یافتن مجموعه‌ای باز مانند U_p است به‌طوری‌که $\bar{U}_0 \subset U_p$ و $\bar{U}_p \subset U_1$. برای این منظور منتظم‌بودن X کافی نیست.

در واقع، برای جداکردن یک‌نقطه از یک مجموعهٔ بسته، به‌وسیلهٔ تابعی پیوسته، شرطی قویتر از منتظم‌بودن (یعنی امکان جداکردن نقاط از مجموعه‌های بسته به‌وسیلهٔ مجموعه‌های باز جدا ازهم) مورد نیازاست. این‌نیاز را به‌صورت اصل جداسازی تازه‌ای بیان می‌کنیم، ودر فصل ۵ به‌مطالعهٔ بیشتر آن می‌پردازیم: فضای X را **تماماً منتظم** نامیم اگر مجموعه‌های تک‌عضوی در X بسته‌باشند، و به‌ازای هرنقطهٔ X مانند a وهرمجموعهٔ بستهٔ‌آن مانند B که شامل a نیست، تابعی پیوسته مانند $f: X \to [0, 1]$ موجودباشد به‌طوری‌که $f(a) = 0$ و $f(B) = \{1\}$.

در اینجا، توضیح دیگری درمورد لم اوریسون می‌دهیم: توجه‌کنیدکه لم اوریسون به‌وجود تابعی پیوسته مانند f که تنها به‌ازای هرنقطهٔ $x \in A$، $f(x) = 0$، و تنها به‌ازای هر $x \in B$، $f(x) = 1$ حکم نمی‌کند. در حالت‌کلی، نمی‌توان تابعی با این شرایط برگزید؛ به‌تمرین ۵ مراجعه کنید.

یک‌نتیجهٔ مستقیم‌لم اوریسون‌قضیهٔ مفیدی‌است موسوم به **قضیهٔ‌گسترش تیتسه**. این‌قضیه بیانگر این است‌که هرتابع پیوستهٔ f راکه زیرمجموعهٔ بسته‌ای از یک فضای نرمال را در R می‌نگارد می‌توان به‌نگاشتی پیوسته از همهٔ آن فضا به‌خط حقیقی R گسترش داد. در این کتاب (جز در چند تمرین) از قضیهٔ تیتسه استفاده نخواهیم‌کرد، ولی این‌قضیه در کاربردهای توپولوژی بسیار اهمیت دارد.

۲.۳. قضیه (قضیهٔ‌گسترش تیتسه) فرض‌کنیم X یک‌فضای نرمال، و A زیرمجموعهٔ بسته‌ای ازآن باشد.

(الف) هرنگاشت پیوسته از A در بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ از R را می‌توان به‌یک

نگاشت پیوسته ازهمهٔ X به [a, b] گسترش داد.

(ب) هرنگاشت پیوسته از A در خط حقیقی R را می‌توان به‌نگاشت پیوسته‌ای ازهمهٔ X در R گسترش داد.

برهان. ایدهٔ این برهان ساختن دنباله‌ای از توابع پیوسته مانند s_n است که بر کل فضای X تعریف شده‌اند، به‌طوری که این‌دنباله همگرای یکنواخت باشد، و تحدید s_n به A، هرقدر n بزرگتر می‌شود، تقریب بهتری از f باشد. دراین‌صورت، تابع حدی پیوسته است و تحدیدآن به A مساوی f است.

مرحلهٔ ۱. اولین مرحله، ساختن تابع ویژه‌ای است برهمهٔ X، مانند g، به‌طوری که مقادیر g زیاد بزرگ نباشند، وبا دقتی مناسب، g تقریبی برای f روی A باشد.

برای بیان دقیقتر، حالت $f:A \to [-r, r]$ را درنظر می‌گیریم. مدعی‌هستیم که تابعی پیوسته مانند $g: X \to R$ موجود است به‌طوری که

$$\text{به‌ازای هر } x\in X،\qquad |g(x)| \leqslant \frac{۱}{۳}r،$$

$$\text{به‌ازای هر } a\in A،\qquad |g(a)-f(a)| \leqslant \frac{۲}{۳}r.$$

تابع g به‌شرح زیر ساخته می‌شود:

بازهٔ $[-r, r]$ را به‌سه‌قسمت مساوی به‌طول ۲r/۳ تقسیم می‌کنیم:

$$I_۱=\left[-r, -\frac{۱}{۳}r\right],\quad I_۲=\left[-\frac{۱}{۳}r, \frac{۱}{۳}r\right],\quad I_۳=\left[\frac{۱}{۳}r, r\right].$$

زیرمجموعه‌های B و C از A را چنین تعریف می‌کنیم:

$$B=f^{-۱}(I_۱) \quad \text{و} \quad C=f^{-۱}(I_۳).$$

چون f پیوسته است، B و C زیرمجموعه‌های بستهٔ جدا از همی در A هستند. در نتیجه، در X نیز بسته‌اند. بنابرلم اوریسون، تابعی پیوسته مانند

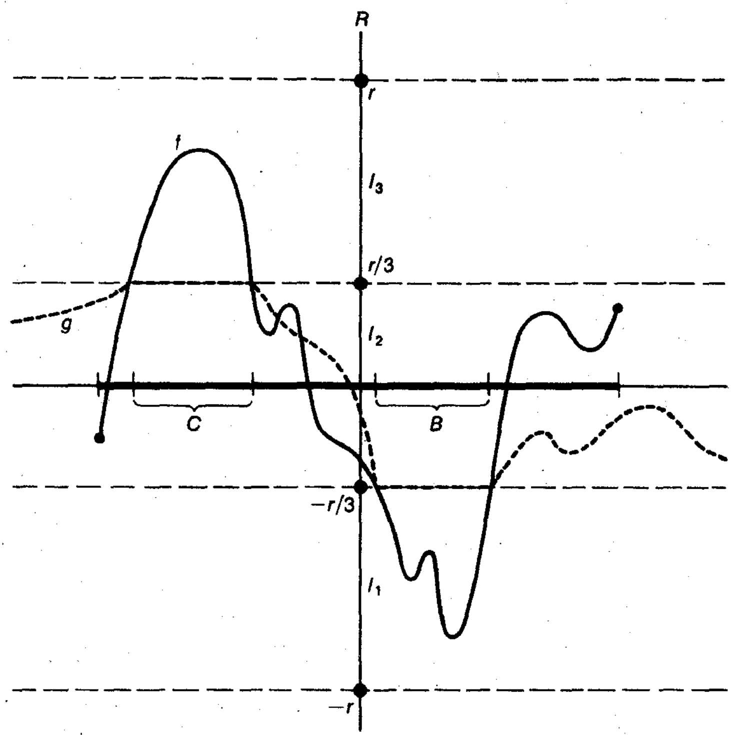
$$g:X \longrightarrow \left[-\frac{۱}{۳}r, \frac{۱}{۳}r\right]$$

موجود است که به‌ازای هر x از B، $g(x)=-r/۳$، و به‌ازای هر x از C، $g(x)=r/۳$ (شکل ۱۰).

در این‌صورت، به‌ازای هر x، $|g(x)| \leqslant r/۳$. مدعی هستیم که به‌ازای هر عضو A مانند a،

$$|g(a)-f(a)| \leqslant \frac{۲}{۳}r.$$

سه‌حالت رخ می‌دهد . اگر $a \in B$ آنگاه $f(a)$ و $g(a)$ هردو به $I_۱$ تعلق خواهند داشت. اگر $a \in C$ آنگاه $f(a)$ و $g(a)$ در $I_۳$ خواهند بود. واگر $a \notin B \cup C$ آنگاه $f(a)$ و $g(a)$ متعلق به $I_۲$ می‌باشند. درهرحالت، $|g(a)-f(a)| \leqslant ۲r/۳$.



شکل ۱۰

مرحلهٔ۲. حال قضیهٔ تیتسه رادرحالت $f: A \to [-۱, ۱]$ ثابت می کنیم. قسمت (الف) قضیه، کـه درآن f نگاشتی از A دربازهٔ بستهٔ دلخواهی مانند $[a, b]$ است، مستقیماً نتیجه می‌شود.

ابتدا، مرحلهٔ ۱ را در مورد تابع $f:A \to [-1, 1]$ اعمال می‌کنیم، در این حالت $r = 1$. تابعی حقیقی مانند g_1 به‌دست می‌آید که برهمهٔ X تعریف شده است و

$$\text{به‌ازای } x \in X،\quad |g_1(x)| \leqslant \frac{1}{3}،$$

$$\text{به‌ازای } a \in A،\quad |f(a) - g_1(a)| \leqslant \frac{2}{3}.$$

حال تابع $f - g_1$ را درنظر می گیریم. با فرض $r = 2/3$، ملاحظه می کنیم که $f - g_1$ مجموعهٔ A را در بازهٔ $[-r, r]$ می‌نگارد؛ با اعمال مرحلهٔ ۱، تابعی حقیقی مانند g_2 به‌دست می‌آید که برهمهٔ X تعریف شده است و

$$\text{به‌ازای } x \in X،\quad |g_2(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)،$$

$$\text{به‌ازای } a \in A،\quad |f(a) - g_1(a) - g_2(a)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

سپس، مرحلهٔ ۱ را در مورد $f - g_1 - g_2$ اعمال می‌کنیم. و به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

در حالت کلی، فرض‌کنیم توابع حقیقی $g_1, \ldots, g_n$ برهمهٔ X تعریف شده‌باشند به‌طوری که به‌ازای هر a از A داشته‌باشیم

$$|f(a) - g_1(a) - \cdots - g_n(a)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

با به‌کاربردن مرحلهٔ ۱ در مورد تابع $f - g_1 - \cdots - g_n$ به‌ازای $r = (2/3)^n$، تابعی حقیقی مانند g_{n+1} برهمهٔ X به‌دست می‌آوریم به‌طوری که

$$\text{به‌ازای } x \in X،\quad |g_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n،$$

$$\text{به‌ازای } a \in A،\quad |f(a) - g_1(a) - \cdots - g_{n+1}(a)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

در نتیجه، به‌استقرا، به‌ازای هرعدد n، تابع g_n تعریف می‌شود.

حال تابع g را، به‌ازای هر x از X، چنین تعریف می کنیم:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

البته، باید ازهمگرایی این‌سری نامتناهی اطمینان حاصل کنیم و این هم ازقضیهٔ مقایسه‌ای حساب دیفرانسیل وانتگرال نتیجه می‌شود. با مقایسهٔ تابع $g(x)$ باسری هندسی

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

همگرایی سری فوق نتیجه می‌شود. چون این سری هندسی به ۱ همگراست (می‌توانید این مطلب را تحقیق کنید)، نتیجه می‌شود که $|g(x)| \leqslant 1$. بنابراین، g نگاشتی است از X در $[-1, 1]$، و این همان است که می‌خواستیم.

مدعی هستیم که به‌ازای هر a از A، $g(a)=f(a)$. فرض کنیم $s_n(x)=\sum_{i=1}^{n} g_i(x)$ nمین مجموع جزئی این سری باشد. در این صورت، بنابر تعریف، $g(x)$ عبارت است از حد دنبالهٔ نامتناهی $s_n(x)$. چون به‌ازای هر عضو A مانند a،

$$\left| f(a)-\sum_{i=1}^{n} g_i(a) \right| = | f(a)-s_n(a) | \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

ازآنجا نتیجه می‌شود که به‌ازای هر a از A، $s_n(a) \to f(a)$. بنابراین، به‌ازای هر a از A، $f(a)=g(a)$.

برای اثبات پیوستگی g، باید ثابت کنیم که همگرایی دنبالهٔ s_n به g یکنواخت است. که این نیز مستقیماً از «آزمون M - وایرشتراس» ازآنالیز نتیجه می‌شود. بدون در نظر گرفتن این قاعده، می‌توان به‌آسانی ملاحظه کرد که اگر $k>n$ آنگاه

$$\begin{aligned} | s_k(x)-s_n(x) | &= \left| \sum_{i=n+1}^{k} g_i(x) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{3}\sum_{i=n+1}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \\ &< \frac{1}{3}\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n}. \end{aligned}$$

با ثابت نگهداشتن n و میل‌دادن k به ∞، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر x از X،

$$| g(x)-s_n(x) | \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n}.$$

بنابراین، همگرایی s_n به g یکنواخت است.

مرحلهٔ ۳. اکنون، قسمت (ب) قضیه را ثابت می‌کنیم، که در این قسمت f مجموعهٔ A را در R می‌نگارد. می‌توان به‌جای R بازهٔ $(-1, 1)$ را در نظر گرفت، چون این بازه با R هومئومورف است.

بنابراین، فرض کنیم f نگاشتی پیوسته از A در $(-1, 1)$ باشد. نیمی از قضیهٔ تیتسه که اثبات آن گذشت، ثابت می‌کند که f را می‌توان به‌نگاشتی پیوسته مانند $g: X \to [-1, 1]$ گسترش داد، که X را دربازهٔ بستهٔ $[-1, 1]$ می‌نگارد. حال، چگونه می‌توان نگاشتی مانند h یافت که X را دربازهٔ باز $(-1, 1)$ بنگارد؟

به‌ازای تابع مفروض g، زیرمجموعهٔ D از X را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$D = g^{-۱}(\{-۱\}) \cup g^{-۱}(\{۱\}).$$

چون g پیوسته است، زیرمجموعهٔ D بسته است. چون $f(A) = g(A)$، و این‌مجموعه در بازهٔ $(۱\ ,۱-)$ قرار دارد، در نتیجه مجموعه‌های A و D ازهم جدا هستند. بنا بر لم اوریسون، تابعی پیوسته مانند $\phi : X \to [۰, ۱]$ موجود است به‌طوری‌که

$$\phi(A) = \{۱\} \quad و \quad \phi(D) = \{۰\}.$$

اکنون، تابع h را بر X چنین تعریف می‌کنیم:

$$h(x) = \phi(x)\, g(x).$$

h پیوسته است. زیرا، حاصل‌ضرب دو تابع پیوسته است. همچنین، h یك گسترش f است. چون به‌ازای هر a از A

$$h(a) = \phi(a) g(a) = ۱ \cdot g(a) = f(a).$$

بالاخره، h همهٔ X را دربازهٔ باز $(۱\ ,۱-)$ می‌نگارد. زیرا، اگر $x \in D$ آنگاه $h(x) = ۰ \cdot g(x) = ۰$. و اگر $x \notin D$ آنگاه $|g(x)| < ۱$؛ و از این مطلب مستقیماً نتیجه می‌شود که $|h(x)| \leqslant ۱ \cdot |g(x)| < ۱$. $\square$

مثال ۱. در لم اوریسون و قضیهٔ تیتسه، فرض بسته‌بودن دو مجموعهٔ موردنظر الزامی است. مثلاً، مجموعه‌های

$$B = (۱, ۲) \quad و \quad A = (۰, ۱)$$

دوزیرمجموعهٔ جدا ازهم‌فضای نرمال R اند، ولی هیچ تابع پیوسته‌ای مانند $f: R \to [۰, ۱]$ یافت نمی‌شود که A را به ۰ و B را به ۱ بنگارد. چه، در این‌صورت، تابع f نقطهٔ ۱ از $\bar{A} \cap \bar{B}$ را به‌چه نقطه‌ای می‌تواند بنگارد؟

تمرینها

۱. با بررسی برهان لم اوریسون، ثابت کنید که به‌ازای عدد مفروض r،

$$f^{-۱}(r) = \cap_{p > r} U_p - \cup_{q < r} U_q,$$

p و q گویا هستند.

۲. ثابت کنید که قضیهٔ گسترش تیتسه مستلزم لم اوریسون است.

۳. (الف) ثابت کنید که هرفضای نرمال همبند که بیش از یك نقطه داشته باشد

ناشمارا است.
(ب) ثابت کنید که هر فضای منتظم همبند که بیش از یک نقطه داشته باشد ناشمارا است[۱]!
[راهنمایی: هر فضای شمارا فضایی است لیندلوف.]

۴. فرض کنید X فضای منتظمی باشد با یک پایهٔ شمارا، و U را در X باز بگیرید.
(الف) ثابت کنید که X را می‌توان به‌صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌های بستهٔ X نوشت.
(ب) ثابت کنید تابعی پیوسته مانند $f:X \to [0, 1]$ موجود است به‌طوری که اگر $x \in U$ آنگاه $f(x) > 0$ و اگر $x \notin U$ آنگاه $f(x) = 0$.

۵. یادآوری می‌کنیم که A را یک «مجموعهٔ G_δ» در X گوییم اگر A به‌صورت مقطع گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌های باز X باشد.

قضیه (صورت قوی لم اوریسون). فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های بستهٔ جدا از هم فضای نرمال X باشند. تابع پیوسته‌ای مانند $f:X \to [0, 1]$ به‌طوری که $f^{-1}(\{0\}) = A$ و $f(B) = \{1\}$ وجود دارد اگر وفقط اگر A یک مجموعهٔ G_δ در X باشد.

۶. فرض کنید X متریک‌پذیر باشد. ثابت کنید که احکام زیر معادل‌اند:
(یک) X تحت هر متریک که توپولوژی X را تولید کند کراندار است.
(دو) هر تابع پیوستهٔ $\phi:X \to R$ کراندار است.
(سه) X فشرده است.
[راهنمایی: اگر ϕ کراندار نباشد، با نگاشت $x \to x \times \phi(x)$ فضای X را در $X \times R$ بنگارید. اگر دنبالهٔ (x_n) از نقاط متمایز X دارای هیچ زیردنبالهٔ همگرا نباشد، تابعی پیوسته مانند ϕ با ضابطهٔ $\phi(x_n) = n$ بیابید.]

۷. فرض کنید Z یک فضای توپولوژیک و Y یک زیرفضای آن باشد. Y را یک توکشیدهٔ Z گوییم اگر نگاشتی پیوسته مانند $r:Z \to Y$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر y از Y، $r(y) = y$.
(الف) ثابت کنید اگر Z هاوسدورف و Y یک توکشیدهٔ Z باشد آنگاه Y در Z بسته است.
(ب) فرض کنید A یک زیرمجموعهٔ دوعضوی R^2 باشد. ثابت کنید A نمی‌تواند یک توکشیدهٔ R^2 باشد.
(پ) فرض کنید S^1 دایرهٔ واحد در R^2 باشد؛ ثابت کنید که S^1 یک توکشیدهٔ $R^2 - \{0\}$ است، که در آن 0 مبدأ است. می‌توانید حدس بزنید که S^1 یک توکشیدهٔ R^2 هست یا نه؟

---
۱. تعجب‌آور است که فضای هاوسدورف همبندی وجود دارد که شمارا و نامتناهی است. مثال ۷۵ در $[S - S]$ را ملاحظه کنید.

۸. گوییم فضای Y دارای **خاصیت گسترش عمومی** است هرگاه به‌ازای هرفضای نرمال X و هرزیرمجموعهٔ بستهٔ X مانند A و هرتابع پیوستهٔ $f:A \to Y$، تابع f گسترشی پیوسته از X در Y داشته‌باشد.
(الف) ثابت کنید که R^J دارای خاصیت گسترش عمومی است.
(ب) ثابت کنید که اگر Y با یك توکشیدهٔ R^J هومئومورف باشد آنگاه Y دارای خاصیت گسترش عمومی است.

۹. فرض کنید $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ دنباله‌ای از فضاها باشد، که به‌ازای هر i، X_i یك زیرفضای بستهٔ X_{i+1} است. قرار دهید $X = \bigcup X_i$. فرض کنید بازبودن زیرمجموعهٔ U را در X چنین تعریف کنیم که به‌ازای هر i مجموعهٔ $U \cap X_i$ در X_i باز باشد. توپولوژی حاصل، توپولوژی **هموسته** با فضاهای X_i نامیده می‌شود.
(الف) ثابت کنید که در این توپولوژی X_i یك‌زیرفضای X است.[1]
(ب) ثابت کنید اگر هریك از فضاهای X_i نرمال باشد، X نیز نرمال است. [راهنمایی: ازقضیهٔ تیتسه استفاده کنید.]

*۱۰. زیرفضای $\tilde{R}^n$ از R^ω متشکل از همهٔ دنباله‌هایی مانند $(x_1, x_2, \ldots)$ که به‌ازای هر $i > n$، $x_i = 0$ توپولوژی استاندهٔ ای دارد. فرض کنید مجموعهٔ $R^\infty = \bigcup \tilde{R}^n$ به‌توپولوژی هموسته با زیرفضاهای $\tilde{R}^n$ مجهز باشد. این توپولوژی R^∞ را با توپولوژی القایی از توپولوژی جعبه‌ای R^ω مقایسه کنید.

۴-۴ قضیهٔ متریسازی اوریسون

اکنون به‌هدف اصلی این فصل می‌رسیم، یعنی قضیه‌ای که به‌ما شرایطی را عرضه می‌کند که تحت‌آن شرایط فضایی توپولوژیك متریك‌پذیر می‌شود. برهان این‌قضیه بافتی است از تاروپودهایی که قبلاً در این کتاب آماده شده‌اند؛ در این برهان از قضایای مربوط به‌توپولوژیهای متری در فصل ۲ ومطالب مربوط به‌شمارایی واصول جداسازی، که در فصل حاضر ثابت شدند، بهره می‌گیریم. ساختمان اساسی مورد استفادهٔ این‌برهان، ساده و در عین‌حال بسیار مفید است. در این‌کتاب چندبار دیگر با صورتهای گوناگون آن روبرو خواهیم شد.

دوبیان برای این‌برهان موجود است. وچون هریك ازآنها دارای تعمیمهای مفیدی هستند، که بعداً باآنها مواجه خواهیم شد، هردو را در اینجا عرضه می‌کنیم. اولین بیان

---

۱. منظور این است که توپولوژی زیرفضایی X_i (به‌عنوان یك‌زیرمجموعهٔ X) همان توپولوژی اولیهٔ فضای X_i است. ـم.

را درفصل ۵ برای اثبات یک‌قضیهٔ نشاندن درمورد فضاهای‌کاملاً منتظم به‌کار خواهیم‌برد، و دومی را در فصل ۶ هنگام اثبات قضیهٔ متریسازی ناگاتا ـ اسمیرنوف[1] تعمیم می‌دهیم.

۴.۱.۰ قضیه (قضیهٔ متریسازی اوریسون). هرفضای منتظم X با یک پـایهٔ شمارا فضایی است متری پذیر.

برهان. با نشاندن X در یک فضای متری Y، متریک‌پذیری X را ثابت می‌کنیم؛ یعنی، ثابت می‌کنیم‌که X با زیرفضایی از Y هومئومورف است. تفاوت در بیـان این برهان در انتخاب فضای متریک‌پذیر Y است. دراولین بیان برهان، Y فضای R^ω است بـا توپولوژی حاصل‌ضربی که قبلاً متریک‌پذیری آن را ثـابت کرده‌ایم (قضیهٔ ۹.۰.۵ در فصل ۲). در دومین بیان، Y مجدداً فضای R^ω است، منتها این‌بار با توپولوژی حاصل از متریک یکنواخت $\bar{\rho}$ (به بخش ۲ ـ ۹ مراجعه‌کنید) در هر دو صورت، برهان عملاً منجر به‌نشاندن X در $[0, 1]^\omega$ می‌شود. فرض‌کنید $\{B_n\}$ یک‌پایهٔ شمارای X باشد.

مرحلهٔ ۱. حکم زیر را ثـابت می‌کنیم : گردایه‌ای شمارا از توابع پیوسته مـانند $f_n:X \to [0,1]$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هرنقطهٔ مفروض x_0 از X و هرهمسایگی x_0 مانند U، اندیسی مانند n موجود است به‌طوری که f_n درنقطهٔ x_0 مثبت است و در خارج U صفر می‌شود.

ساختن توابع f_n ساده است. به ازای هرعضو پایهٔ B_n، بنابرتمرین ۴ دربخش پیش، تابعی پیوسته مـانند $f_n : X \to [0, 1]$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر x از B_n، $f_n(x) > 0$ و اگر $x \notin B_n$ آنگاه $f_n(x) = 0$. گردایهٔ $\{f_n\}$ خواستهٔ مارا برآورده می‌کند. زیرا به‌ازای نقطهٔ مفروض x_0 و یک همسایگی‌آن مانند U، یك عضو پایه مانند B_n را می‌توانیم چنان انتخاب‌کنیم‌که $x_0 \in B_n \subset U$؛ در این صورت، تابع f_n در x_0 مثبت ودر خارج از U صفر است.

طریقه دیگر ساختن گردایهٔ $\{f_n\}$ ، که به تمرین مذکور متکی نباشد، چنین است، با به‌کـارگیری لم اوریسون درمورد هر زوج از اندیسهای n و m به‌طوری که $\bar{B}_n \subset B_m$، می‌توان تابع پیوستهٔ $g_{n,m} : X \to [0,1]$ را چنان برگزید که

$$g_{n,m}(\bar{B}_n) = \{1\} \text{ و } g_{n,m}(X - B_m) = \{0\}.$$

در این صورت ، گـردایهٔ $\{g_{n,m}\}$ در شرایط لازم صدق می‌کند : به‌ازای نقطهٔ مفروض $x \in U$ ، یك عضو پایه مانند B_m را طوری انتخاب می‌کنیم که $x \in B_m \subset U$. با استفاده از منتظم‌بودن X ، عضو پایهٔ B_n را می‌توان چنان برگزید که $x_0 \in B_n$ و $\bar{B}_n \subset B_m$. در این‌صورت، تابع $g_{n,m}$ تعریف شده‌است ودر x_0 مثبت و در خارج از U صفراست. از طرفی

---

1. Nagata - Smirnov

چون گردایه $\{g_{n,m}\}$ با زیر مجموعه‌ای از $Z_+ \times Z_+$ اندیسگذاری شده شماراست؛ بنابراین، می‌توان با اندیسگذاری مجدد آن توسط اعداد صحیح مثبت، خانوادهٔ مطلوب $\{f_n\}$ را به‌دست آورد.

مرحلهٔ ۲. (نخستین بیان برهان) توابع f_n از مرحلهٔ ۱ مفروض‌اند، R^ω را با توپولوژی حاصل‌ضربی در نظر می‌گیریم و نگاشت $F: X \to R^\omega$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = (f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots).$$

مدعی هستیم که F یك نشاننده است.

اولاً، چون R^ω دارای توپولوژی حاصل‌ضربی است وهریك از f_n ها پیوسته است، پس F پیوسته است. ثانیاً، F یك‌به‌یك است؛ زیرا، اگر $x \neq y$ آنگاه می‌دانیم که اندیسی مانند n هست به‌طوری که $f_n(x) > 0$ و $f_n(y) = 0$؛ بنابراین، $F(x) \neq F(y)$.

سرانجام، باید ثابت کنیم که F یك‌هومئومورفیسم از X بروی تصویر خود، یعنی زیرفضای $Z = F(X)$ از R^ω، است. می‌دانیم که F نگاشت دوسویی پیوسته‌ای از X بروی Z است، بنابراین، تنها باید ثابت کنیم که به‌ازای هرمجموعهٔ باز X مانند U، مجموعهٔ $F(U)$ در Z باز است. فرض کنیم $z_0 \in F(U)$. هدف یافتن مجموعهٔ بازی است از Z مانند W به‌طوری که

$$z_0 \in W \subset F(U).$$

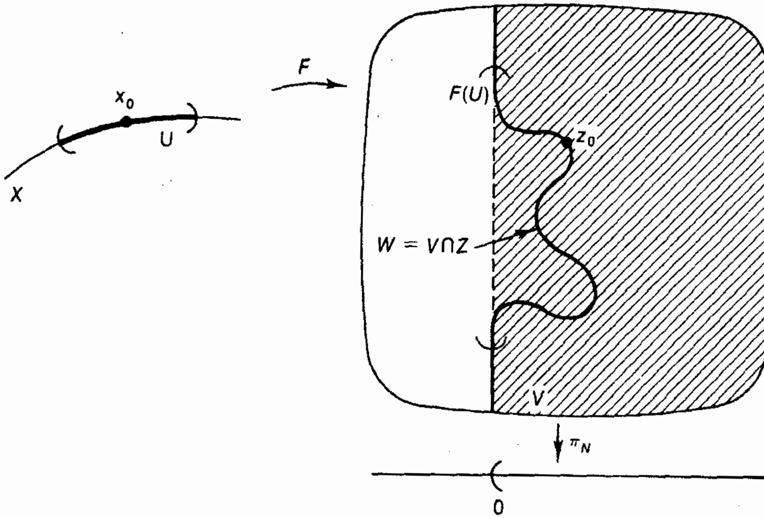
فرض کنیم x_0 نقطه‌ای از U باشد به‌طوری که $F(x_0) = z_0$. حال اندیس N را چنان برمی گزینیم که به‌ازای آن $f_N(x_0) > 0$ و $f_N(X - U) = \{0\}$. شعاع باز $(0, +\infty)$ را در R، ومجموعهٔ باز

$$V = \pi_N^{-1}((0,\ +\infty))$$

را در R^ω اختیار می کنیم. قرار می‌دهیم $W = V \cap Z$؛ در این‌صورت، بنابرتعریف توپولوژی زیرفضایی، W در Z بازاست (شکل ۱۱). مدعی‌هستیم که $z_0 \in W \subset F(U)$. اولاً، $z_0 \in W$، زیرا

$$\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0.$$

ثانیاً، $W \subset F(U)$. زیرا، اگر $z \in W$ آنگاه به‌ازای عضوی از X مانند x داریم $z = F(x)$ و $\pi_N(z) \in (0, +\infty)$. ازآنجاکه $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$ و f_N در خارج از U صفر است، باید x در U باشد. در نتیجه، $z = F(x)$ در $F(U)$ قرار دارد، واین همان است که می‌خواستیم.



شکل ۱۱

بنابراین، F نشانندهای از X در R^ω است.

مرحلهٔ ۳ . (دومین بیان برهان). این بار، X را در فضای متری $(R^\omega, \bar{\rho})$ می‌نشانیم. در واقع، X در زیرفضای $[0, 1]^\omega$ نشانده می‌شود، که بر آن متریک $\bar{\rho}$ برابر است با

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{lub}\{|x_i - y_i|\}.$$

گردایهٔ شمارای توابع $f_n^*: X \to [0, 1]$ را که در مرحلهٔ ۱ ساختیم به‌کار می‌بریم. ولی این بار توابع f_n را به‌شرطی اضافی مقید می‌کنیم، به‌این صورت که به‌ازای هر x، $f_n(x) \leqslant 1/n$. (برقرارکردن این شرط آسان است؛ کافی است که هرتابع f_n را بر n تقسیم کنیم.)

تابع $F: X \to [0, 1]^\omega$ را، مانند سابق، باضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots).$$

مدعی هستیم که F نسبت به‌متریک ρ بر $[0, 1]^\omega$ یك‌نشاننده است. در مرحلهٔ ۲ دیدیم که F یك‌به‌یك است. بعلاوه، می‌دانیم که اگر $[0, 1]^\omega$ را با توپولوژی حاصلضربی

درنظر گیریم آنگاه نگاشت F هرمجموعهٔ باز X را بروی مجموعهٔ بازی از $Z=F(X)$ می‌نگارد. اگر توپولوژی ظریفتری (بزرگتری) را کـه توسط متریك ρ بر $[0,1]^\omega$ القا می‌شود در نظر بگیریم، همین‌حکم برقرار می‌ماند.

تنها موضوعی که مانده اثبات پیوستگی F است. چون در این مرحله، توپولوژی حاصلضربی را بر R^ω به‌کار نگرفته‌ایم، پیوستگی F از این امرکـه هرتابع مؤلفه‌ای پیوسته است نتیجه نمی‌شود. دراینجاست که فرض $f_n(x) \leqslant 1/n$ به‌کار می‌آید.

فرض‌کنیم x_0 نقطه‌ای از X باشد و $\varepsilon > 0$. برای اثبات پیوستگی، بـاید یك همسایگی x_0 مانند U بیابیم به‌طوری که

$$x \in U \implies \rho(F(x), F(x_0)) < \varepsilon.$$

ابتدا N را به‌قدرکافی بزرگ اختیار می‌کنیم به‌طوری که $1/N \leqslant \varepsilon/2$. سپس به‌ازای هر n، که $n=1, 2, \ldots, N$، بنابرپیوستگی f_n، یك‌همسایگی x_0 مانند U_n موجود است به‌طوری که به‌ازای هر x در U_n داریم

$$|f_n(x)-f_n(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

اکنون، ثـابت می‌کنیم که $U=U_1 \cap \ldots \cap U_N$ همان همسایگی مطلوب x_0 است. فرض‌کنیم $x \in U$. اگر $n \leqslant N$ آنگاه بنابرتعریف U،

$$|f_n(x)-f_n(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

اگر $n > N$ آنگاه چون f_n مجموعهٔ X را در $[0, 1/n]$ می‌نگارد، پس

$$|f_n(x)-f_n(x_0)| < \frac{1}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

بنابراین، به‌ازای هر x از U،

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

و این همان است که می‌خواستیم.□

در مرحلهٔ دوم برهان فوق، عملاً چیزی قویتر ازآن نتیجه‌ای که در آنجا بیان شد ثابت‌کردیم. برای استفاده‌های بعدی، این‌نتیجه را در اینجا بیان می‌کنیم:

۲.۴. قضیه (قضیهٔ نشاندن) فرض‌کنیم X فضایی هـاوسدورف و $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ گردایه‌ای از توابع پیوستهٔ $f_\alpha : X \to R$ باشندکه به‌ازای هر x_0 از X و هرهمسایگی x_0 مانند U اندیسی مانند α موجود باشد به‌طوری‌که $f_\alpha(x_0) > 0$ و

f_α درخارج از U صفر شود. دراین‌صورت، تابع $F:X \to R^J$ باضابطهٔ

$$F(x)=(f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$

نشاننده‌ای از X در R^J است.

برهان تقریباً مشابه همان چیزی است که در مرحلهٔ دوم برهان قبل گذشت؛ با این تفاوت که فقط باید α را به‌جای n قرارداد و R^J را به‌جای R^ω.

اگرگردایهٔ توابع پیوستهٔ $\{f_\alpha\}$ در شرایط این قضیه صدق کند، گویند این گردایه در X **نقاط را از مجموعه‌های بسته جدا می‌سازد.**

تمرینها

۱. با مثالی ثابت کنید که لزومی ندارد هرفضای هاوسدورف با پایهٔ شمارا فضایی متریک‌پذیر باشد.

۲. با مثالی ثابت کنید که ممکن است یك فضا تماماً نرمال باشد ودر اولین اصل شمارایی و شرط لیندلوف صدق کند و زیرمجموعهٔ چگال شمارا هم داشته باشد ولی متریك‌پذیر نباشد.

۳. فرض کنید X یك‌فضای هاوسدورف فشرده باشد. آیا درست است که اگر X پایه‌ای شمارا داشته‌باشد، آنگاه X متری پذیر است؟ در مورد عکس این حکم چه می‌توان گفت؟

۴. فرض کنید X یك‌فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باشد.
(الف) آیا درست است که اگر X پایه‌ای شمارا داشته‌باشد آنگاه X متریك‌پذیر است؟ در مورد عکس این‌حکم چه می‌توان گفت؟
(ب) فرض کنید Y فشرده شدهٔ تك نقطه‌ای X باشد. آیا درست است که اگر X پایه‌ای شمارا داشته‌باشد آنگاه Y متریك‌پذیر است؟ در مورد عکس این‌حکم چه می‌توان گفت؟

۵. فضای X را **موضعاً متری‌پذیر** خوانیم اگر هرنقطهٔ آن مانند x یك همسایگی متریك‌پذیر با توپولوژی زیرفضایی داشته باشد. ثابت کنید که فضای هاوسدورف فشردهٔ X به‌شرطی متری‌پذیراست که موضعاً متری پذیرباشد. [راهنمایی: ثابت کنید که X اجتماعی متناهی اززیرفضاهای بازی است که هریك پایه‌ای شمارا دارند.]

۶. ثابت کنید هرفضای لیندلوف منتظم اگر موضعاً متری پذیر باشد آنگاه متریك‌پذیر است. [راهنمایی: هرزیرفضای بستهٔ یك فضای لیندلوف خود لیندلوف است.] در این‌تمرین فرض منتظم‌بودن لازم است؛ درکدام قسمت برهان ازآن استفاده می کنید؟

۷. ثابت کنید که اگر Y فضایی نرمال باپایهٔ $\mathcal{B}$ باشدآنگاه Y را می‌توان در $[0, 1]^J$ نشاند، که دراینجا J زیرمجموعه‌ای است $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$.

۸. برهان قضیهٔ ۲.۴ را بتفصیل بررسی کنید.

۹. ثابت کنید که اگر $\{f_\alpha\}$ خانواده‌ای از توابع پیوسته با مقادیر حقیقی بر X باشد به‌طوری که نقاط را از مجموعه‌های بسته جدا کند آنگاه توپولوژی X درشتترین (کوچکترین) توپولوژیی است که درآن همهٔ f_αها پیوسته‌اند.

۱۰. ثابت کنید اگر X تماماً منتظم باشدآنگاه به‌ازای مجموعهٔاندیسی مانند J، می‌توان X را در $[0, 1]^J$ نشاند.

۱۱. فضای نرمال Y را **یک‌توکشیدهٔ مطلق** خوانیم اگر به‌ازای هرنشانندهٔ Y در یک فضای نرمال مانند Z، $h: Y \to Z$، به‌طوری که $h(Y)$ در Z بسته باشد آنگاه $h(Y)$ یک توکشیدهٔ Z باشد. ثابت کنید که اگر Y فشرده باشد آنگاه احکام زیر معادل‌اند:

(یک) به‌ازای Jیی، Y با یک توکشیدهٔ $[0, 1]^J$ هومئومورف است.
(دو) به‌ازای Jیی، Y با یک توکشیدهٔ R^J هومئومورف است.
(سه) Y دارای خاصیت گسترش عمومی است.
(چهار) Y یک توکشیدهٔ مطلق است.

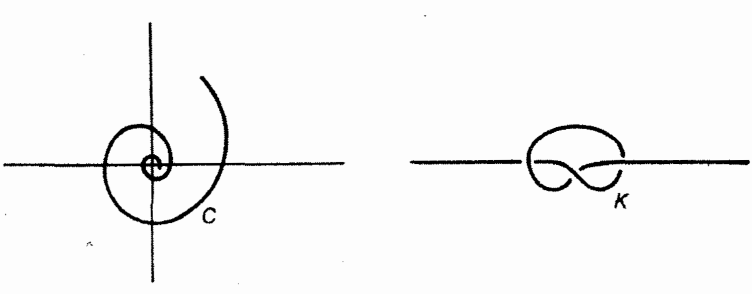
در واقع، بدون درنظر گرفتن فشردگی Y، باید ثابت کنید که

(چهار) $\Longrightarrow$ (سه) $\Longrightarrow$ (دو) $\Longrightarrow$ (یک)

واگر Y فشرده باشد (یک) $\Longrightarrow$ (چهار). [راهنمایی: با دانسته گرفتن قضیهٔ تیخونوف، می‌دانید که $[0, 1]^J$ نرمال است.]

۱۲. (الف) ثابت کنید که مارپیچ لگاریتمی

$$C=\{0\times 0\}\cup\{e^t\cos t\times e^t\sin t \mid t\in R\}$$



شکل ۱۲

یك توكشیدهٔ R^2 است. آیا می‌توانید تابع توکش مشخصی مانند $r:R^2 \to C$ تعریف کنید؟

(ب) ثابت کنید که K، «محور گره‌خوردهٔ x ها» در شکل ۱۲، یك توکشیدهٔ R^3 است.

*۱۳. قضیهٔ زیر را ثابت کنید:

قضیه. فرض‌کنید Y فضایی نرمال باشد. دراین‌صورت، Y یك توکشیدهٔ مطلق است اگر وفقط اگر دارای خاصیت‌گسترش عمومی باشد.

[راهنمایی: اگر X و Y دوفضای نرمال جدا از هم باشند، A در X بسته، ونگاشت $f: A \to Y$ پیوسته باشد آنگاه **فضای الحاقی** Z_f را چنین تعریف می‌کنیم: Z_f عبارت است از فضای خارج‌قسمتی حاصل از $X \cup Y$ به‌وسیلهٔ یکی گرفتن هرنقطهٔ a از A با نقطهٔ $f(a)$ و نیز با همهٔ نقاط $f^{-1}(\{f(a)\})$. به‌کمك قضیهٔ تیتسه، ثابت‌کنید که Z_f نرمال است.]

*۱۴. زیرفضای Y از فضای Z را یك **توکشیدهٔ همسایه‌ای** Z خوانیم اگر Y یك توکشیدهٔ مجموعه‌ای باز از Z باشد. فضای نرمال Y را یك **توکشیدهٔ همسایه‌ای مطلق** خوانیم اگر Y یك توکشیدهٔ همسایه‌ای هرفضای نرمال Z باشدکه درآن به‌عنوان یك زیرفضای بسته نشانده شده است. گوییم Y دارای **خاصیت گسترش همسایه‌ای عمومی** است اگر هرنگاشت پیوسته مانند $f: A \to Y$، که درآن A زیرمجموعهٔ بسته‌ای از فضای نرمال X است، دارای گسترشی پیوسته به یك زیرمجموعهٔ‌باز X درحول A باشد. تمرینهای ۱۱ و ۱۳ را به‌توکشیدهٔ همسایه‌ای تعمیم دهید.

*۴-۵ افرازهای واحد[1]

ثابت کردیم که هرفضای منتظم باپایهٔ شمارا را می‌توان درفضای اقلیدسی «با بعدنامتناهی» R^ω نشاند. طبیعی است اگر سؤال شود تحت‌چه‌شرایطی فضای X را می‌توان درفضای اقلیدسی با بعد متناهی R^N نشاند. یك جواب این سؤال را دراین بخش می‌آوریم؛ ثابت می‌کنیم هر بسلای فشرده، به‌ازای عددی مانند N، را می‌توان در R^N نشاند. در فصل ۷، هنگام مطالعهٔ نظریهٔ ابعاد، جواب کلیتری به‌دست می‌آید.

در برهان این بخش ازخانوادهٔ بخصوصی ازتوابع بر X، $\{\phi_\alpha\}$، استفاده می‌شود که به «افراز واحد» موسوم است. ثابت شده است که چنین خانواده‌هایی ابزار بسیار

---

۱. دربخش ۷ــ۹ هنگام مطالعهٔ نظریهٔ ابعاد ازاین بخش استفاده خواهیم‌کرد.

سودمندی درآنالیز، هندسه، وتوپولوژی هستند. ما فقط حالت افرازهای متناهی واحد را در نظر خواهیم گرفت (که بیش از این هم لازم نداریم) و حالت کلی را به‌عنوان تمرین به‌عهدهٔ خواننده می گذاریم.

نخست، نیاز به‌چند اصطلاح‌داریم:

محمل تابع $\phi: X \to R$ را بستارمجموعهٔ $\phi^{-1}(R-\{0\})$ تعریف می کنیم. بنابراین، اگر x خارج محمل ϕ قرارگیرد آنگاه یك همسایگی x یافت می‌شود که ϕ برآن صفر است.

تعریف . فرض‌کنیم $\{U_1, \ldots, U_n\}$ یك‌پوشش باز اندیسدار متناهی فضای X باشد. خانوادهٔ اندیسداری ازتوابع پیوسته مانند

$$\phi_i: X \to [0, 1] \quad \text{،}i=1, 2, \ldots, n \text{ به‌ازای}$$

را یك **افراز واحد** مغلوب به‌وسیلهٔ $\{U_i\}$[1] خوانیم اگر:

(۱) به‌ازای هر i، $U_i \supset$ (محمل ϕ_i).

(۲) به‌ازای هر x، $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)=1$.

۱۰۵. قضیه (وجود افرازهای متناهی واحد) فرض‌کنیم $\{U_1,\ldots,U_n\}$ یك‌پوشش باز متناهی فضای نرمال X باشد. دراین‌صورت یك افراز واحد مغلوب به‌وسیلهٔ $\{U_i\}$ موجود است.

برهان. مرحلهٔ۱. نخست، ثابت می کنیم که می‌توان پوشش $\{U_i\}$ را به‌یك‌پوشش باز X مانند $\{V_1, \ldots, V_n\}$ تبدیل کرد به‌طوری‌که به‌ازای هر i، $\bar{V}_i \subset U_i$. اثبات به‌استقراست. برای شروع، توجه کنید‌که مجموعهٔ

$$A=X-(U_2 \cup \cdots \cup U_n)$$

یك زیرمجموعهٔ بستهٔ X است. وچون $\{U_1, \ldots, U_n\}$ فضای X را می‌پوشاند، مجموعهٔ A جزء مجموعهٔ باز U_1 است. بنابرنرمال بودن X، مجموعهٔ بازی مانند V_1 موجود است به‌طوری‌که حاوی A است و $\bar{V}_1 \subset U_1$. دراین‌صورت، گردایهٔ $\{V_1,U_2,\ldots,U_n\}$ نیز X را می‌پوشاند.

درحالت کلی،فرض‌کنیم‌مجموعه‌های باز V_1، ...، V_{k-1} مفروض باشند به‌طوری که گردایهٔ

$$\{V_1, \ldots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$$

---

۱. توجه‌کنید‌که «مغلوب به‌وسیلهٔ $\{U_i\}$» صفت «افرازواحد» است نه‌صفت «واحد». ـ م.

X را بپوشاند، وفرض کنیم

$$A = X - (V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1}) - (U_{k+1} \cup \cdots \cup U_n).$$

در این صورت، A زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X است و جزء مجموعهٔ باز U_k است. مجموعهٔ باز V_k را چنان برمی‌گزینیم که حاوی A باشد و $\bar{V}_k \subset U_k$. بنابراین،

$$\{V_1, \cdots, V_{k-1}, V_k, U_{k+1}, \cdots, U_n\}$$

X را می‌پوشاند. در nمین مرحلهٔ استقرا، نتیجهٔ موردنظر ثابت می‌شود.

مرحلهٔ ۲. اکنون، قضیه را ثابت می‌کنیم. به‌ازای پوشش باز مفروض X مانند $\{U_1, \ldots, U_n\}$ پوشش‌باز $\{V_1, \ldots V_n\}$ از X را چنان برمی‌گزینیم که به‌ازای هر i، $\bar{V}_i \subset U_i$. سپس، یك‌پوشش X مانند $\{W_1, \ldots, W_n\}$ انتخاب می کنیم به‌طوری که به‌ازای هر i، $\bar{W}_i \subset V_i$. بنابرلم اوریسون، به‌ازای هر i، تابع‌پیوستهٔ

$$\psi_i : X \longrightarrow [0, 1]$$

را طوری انتخاب می‌کنیم که $\psi_i(\bar{W}_i) = \{1\}$ و $\psi_i(X - V_i) = \{0\}$. چون $\psi_i^{-1}(R - \{0\})$ جزء V_i است، پس

$$(\psi_i \text{ محمل}) \subset \bar{V}_i \subset U_i.$$

از طرفی چون‌گردایهٔ $\{W_i\}$ مجموعهٔ X را می‌پوشاند، به‌ازای هر x، حاصل‌جمع $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)$ مثبت است. بنابراین، به ازای هر j، تابع ϕ_j را می‌توان چنین تعریف کرد:

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\Psi(x)}.$$

بسهولت می‌توان تحقیق کرد که توابع $\phi_1, \ldots, \phi_n$ افراز واحد مطلوب را تشکیل می‌دهد. □

تعریف . یك بسلای m **بعدی** عبارت است از فضای هاوسدورفی مانند X با یك پایهٔ شمارا به‌طوری که هرنقطهٔ آن یك همسایگی هومئومورف با یك‌زیر مجموعهٔ باز R^m داشته‌باشد.

اغلب بسلای۱ بعدی‌را **منحنی** وبسلای۲ بعدی را **رویه** می‌نامیم. بسلاها ردهٔ بسیار مهمی از فضاها را تشکیل می‌دهند؛ آنها را بیشتر درهندسهٔ دیفرانسیل وتوپولوژی جبری مورد مطالعه قرار می‌دهند.

ثابت می کنیم که اگر X یك‌بسلای فشرده باشدآنگاه X را می‌توان دریك فضای

اقلیدسی بـا بعد متناهی نشاند. این‌قضیه بدون فرض فشردگی *نیز* برقرار است، ولی در آن حالت برهان‌آن بسیار دشوارتر است.

۲۰۵. قضیه اگر X یك‌بسلای m بعدی فشرده باشد آنگاه به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند N، می‌توان X را در R^N نشاند.

برهان. فضای X را بـا تعدادی متناهی از مجموعه‌های بـاز $\{U_1,\ldots U_n\}$ می‌پوشانیم به‌طوری‌که هریك از U_iها را بتوان R^m نشاند. به‌ازای هر i، تابع‌نشاندن $g_i: U_i \to R^m$ را درنظر می گیریم . چون X هـاوسدورف و فشرده است ، در نتیجه نرمال است. فرض‌کنیم ϕ_1 ، . . . ، ϕ_n يك افراز واحد مغلوب به‌وسیلهٔ $\{U_i\}$ بـاشد؛ و $A_i=$(محمل ϕ_i). تابع $h_i: X \to R^m$ را به‌ازای $i=1,\ldots,n$ ، با ضابطهٔ زیر تعریف می کنیم:

$$h_i(x)=\begin{cases}\phi_i(x)\cdot g_i(x) & \text{به‌ازای } x\in U_i، \\ 0=(0,\ldots,0) & \text{به‌ازای } x\in X-A_i،\end{cases}$$

[که در اینجا $\phi_i(x)$ عددی است حقیقی مانند c و $g_i(x)$ نقطه‌ای است از R^m مانند $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_m)$ و حـاصل‌ضرب $c\mathbf{y}$ نقطهٔ $(cy_1,\ldots,cy_m)$ از R^m را نمایش می‌دهد.] ازآنجاکه دوضابطهٔ تعریف h_i برفصل مشترك قلمروهای خود يك‌مقدار دارند، تابع h_i خوشتعریف است. بعلاوه، h_i پیوسته است، زیرا تحدید آن به مجموعه‌های باز U_i و $X-A_i$ پیوسته است.

اکنون، تابع

$$F:X \longrightarrow (\underbrace{R\times\cdots\times R}_{\text{بار } n}\times\underbrace{R^m\times\cdots\times R^m}_{\text{بار } n})$$

را با ضابطهٔ زیر تعریف می کنیم:

$$F(x)=(\phi_1(x),\ldots,\phi_n(x),\, h_1(x),\ldots,h_n(x)).$$

پیوستگی F بدیهی است. برای اثبات اینکه F يك‌نشاننده است تنها لازم است ثابت کنیم‌که F يك به‌يك است (چون X فشرده است). فرض‌کنیم $F(x)=F(y)$. در این صورت، به‌ازای هر i ، $\phi_i(x)=\phi_i(y)$ و $h_i(x)=h_i(y)$. اکنون به‌ازای اندیسی مانند i ، $\phi_i(x)>0$ [چون $\sum\phi_i(x)=1$]. پس $\phi_i(y)>0$ ، و در نتیجه ، $x,\ y\in U_i$. پس،

$$\phi_i(x)\cdot g_i(x)=h_i(x)=h_i(y)=\phi_i(y)\cdot g_i(y).$$

از طرفی چون $\phi_i(x)=\phi_i(y)>0$ ، خواهیم داشت $g_i(x)=g_i(y)$. اما ، بنا بر

یك‌به‌یك بودن $g_i : U_i \longrightarrow R^m$ ، $x=y$ ؛ و این همان است که می‌خواستیم. □

در بسیاری ازکاربردهای افراز واحد، نظیر همین مورد اخیر، تنها چیز ضروری‌آن است که به‌ازای هر x ، حاصل‌جمع $\sum \phi_i(x)$ مثبت بـاشد. اگرچه، مواردی هم پیش می‌آیدکه شرط قویتر $\sum \phi_i(x)=1$ لازم است. بخش ۷ ـ ۹ را ملاحظه کنید.

تمرینها

۱. ثابت‌کنیدکه هربسلا فضایی است منتظم و درنتیجه متری پذیر است. درکدام قسمت برهان ازشرط هاوسدورف استفاده می‌کنید؟

۲. فرض‌کنید X یك‌فضای هاوسدورف فشرده بـاشد. همچنین فرض کنید به‌ازای هر x از X ، یك‌همسایگی‌آن مانند U و عدد صحیح مثبتی مـانند k موجود بـاشد به‌طوری‌که U را بتوان در R^k نشاند. ثابت‌کنید عدد صحیح مثبتی مـانند N موجود است به‌طوری‌که X را می‌توان در R^N نشاند.

۳. گردایهٔ اندیسدار $\{A_\alpha\}$ از زیرمجموعه‌های X را یك **خانوادهٔ اندیسدار نقطه ـ متناهی** نامیم اگر هر x از X تنهـا به‌ازای تعدادی متناهی از مقادیر α به A_α تعلق داشته‌باشد.

لم (لم درهم‌کشیدن). فرض کنید X یك‌فضای نرمال باشد، $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ یك پوشش باز اندیسدار نقطه ـ متناهی X. دراین‌صورت، یك‌پوشش بازاندیسدار X مانند $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر α، $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$.

(الف) در حالتی‌که $J=Z_+$ ، به‌استقرا، لم فوق را ثابت‌کنید. در کدام قسمت برهان از این امرکه $\{U_\alpha\}$ نقطه ـ متناهی است استفاده می‌کنید؟

*(ب) بـا به‌کارگیری استقرای ترانسفینی، لم فوق را به‌ازای مجموعهٔ اندیسگذار خوشترتیب دلخواهی مانند J ثابت‌کنید.

۴. خـانوادهٔ اندیسدار $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ از زیرمجموعه‌هـای فضای X را یك **خـانوادهٔ اندیسدار موضعاً متناهی** نامیم اگرهر نقطهٔX یك‌همسایگی داشته‌باشدکه تنها به‌ازای تعدادی متناهی از مقادیر α، A_α را قطع‌کند.

فرض‌کنید $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ یك‌پوشش باز اندیسدارXباشد. یك خانواده از توابع پیوسته مانند

$$\phi_\alpha : X \longrightarrow [0,1]$$

را کـه به‌وسیلهٔ $\alpha \in J$ اندیسگذاری شده است یك **افراز واحد** مغلوب به‌وسیلهٔ $\{U_\alpha\}$ گوییم اگر

(یك) به‌ازای هر α از J، (محمل ϕ_α) $\subset U_\alpha$ ،

(دو) خانوادهٔ $\{\phi_\alpha$ محمل$\}_{\alpha \in J}$ موضعاً متناهی باشد،

(سه) به‌ازای هر x ، $\sum_{\alpha\in J}\phi_\alpha(x)=1$.

[حاصل جمع بالا به‌ازای نقطهٔ مفروض x با معنی است. زیرا ، تنها برای تعداد متناهی از مقادیر α داریم $\phi_\alpha(x)\neq 0$.] با فرض لم درهم‌کشیدن، قضیهٔ زیر را ثابت کنید:

قضیه. اگر X فضایی نرمال باشد و $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ یك خانوادهٔ اندیسدار موضعاً متناهی از مجموعه‌های بازی باشدکه X را می‌پوشانندآنگاه یك‌افرازواحد مغلوب به‌وسیلهٔ $\{U_\alpha\}$ موجود است.

۵. اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، گوییم گردایه‌ای مانند $\{V_\beta\}_{\beta\in K}$ گردایهٔ $\{U_\alpha\}$ را **ظریف** می‌کند درصورتی‌که به‌ازای هر V_β ، حداقل یك U_α باشدکه حاوی‌آن است.

قضیه. فرض‌کنید X فضایی نرمال باشد و $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ یك‌پوشش باز اندیسدار X. اگر پوشش بازی مانند $\{V_\beta\}_{\beta\in K}$ از X موجود باشدکه $\{U_\alpha\}$ را ظریف‌کند و موضعاً متناهی باشدآنگاه یك‌افراز واحد مغلوب به‌وسیلهٔ $\{U_\alpha\}$ وجود دارد.

[راهنمایی: تابع $f:K\to J$ را چنان برگزینید که $V_\beta\subset U_{f(\beta)}$. فرض‌کنید W_α اجتماع V_βهایی باشدکه $f(\beta)=\alpha$؛ ثابت‌کنیدکه $\{W_\alpha\}_{\alpha\in J}$ موضعاً متناهی است.]

فضای هاوسدورف X را **پیرافشرده** نامیم اگر هرپوشش باز X یك تظریف موضعاً متناهی داشته باشدکه X را بپوشاند. فضاهای پیرافشرده را در فصل ۶ مطالعه خواهیم کرد.

۶. شرط هاوسدورف‌بودن یك‌قسمت ضروری تعریف بسلاست، یعنی سایر قسمتهای تعریف مستلزم این‌شرط نیست. زیرمجموعهٔ زیر از R^2 را اختیارکنید:

$$X=(R\times 0)\cup(R_+\times 1).$$

روی X توپولوژیی تعریف می‌کنیم که مجموعه‌هایی به‌صورت انواع زیر یك‌پایهٔ آن‌را تشکیل می‌دهند:

(یك) $(a,b)\times 0$ ، به‌ازای $a<b$ ،

(دو) $(a,b)\times 1$ ، به‌ازای $0\leqslant a<b$ ،

(سه) $((a,0)\times 0)\cup([0,b)\times 1)$ ، به‌ازای $a<0<b$.

(الف) ثابت‌کنیدکه این مجموعه‌ها تشکیل یك‌پایه را می‌دهند.

(ب) ثابت‌کنیدکه هریك از زیرفضاهای $R\times 0$ و $(R_-\times 0)\cup(R_+\times 1)$ از X با R هومئومورف است.

(پ) ثابت‌کنیدکه X دارای پایه‌ای شماراست، مجموعه‌های متناهی در X

بسته‌اند، وهرنقطه X یك‌همسایگی هومئومورف بایك مجموعهٔ باز R دارد.

(ت) ثابت‌کنیدکه X هاوسدورف نیست.

*تمرینهای تکمیلی:
موروری برقسمت اول

صفات زیر راکه ممکن است فضایی متصف به‌آنها باشد درنظر بگیرید:

(۱) همبند
(۲) همبند راهی
(۳) موضعاً همبند
(۴) موضعاً همبند راهی
(۵) فشرده
(۶) فشرده برحسب نقطهٔ حدی
(۷) موضعاً فشرده‌هاوسدورف
(۸) هاوسدورف
(۹) منتظم
(۱۰) نرمال
(۱۱) شمارای نوع اول
(۱۲) شمارای نوع دوم
(۱۳) لیندلوف
(۱۴) دارای زیرمجموعهٔ چگال شمارا
(۱۵) موضعاً متریك‌پذیر
(۱۶) متریك‌پذیر

۱. در مورد هریك ازفضاهای زیر (درصورت امکان) تعیین‌کنید که دارای کدامیك از صفات فوق است. (درصورت لزوم می‌توانید قضیهٔ تیخونوف را دانسته بگیرید.)

(الف) S_Ω
(ب) $\bar{S}_\Omega$
(پ) $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$
(ت) $S_\Omega \times [0, 1)$ باترتیب قاموسی
(ث) $I \times I$ با ترتیب قاموسی، که درآن $I = [0, 1]$
(ج) R_l
(چ) R_l^2
(ح) R^ω باتوپولوژی جعبه‌ای، حاصلضربی، و یکنواخت

(خ) R^I باتوپولوژی حاصل‌ضربی
(د) R با توپولوژی متمم متناهی

۲. کدامیك ازصفات فوق را هرفضای متری الزاماً باید داشته باشد؟

۳. کدامیك از این‌صفات را هرفضای هاوسدورف فشرده دارد؟

۴. کدامیك از این خواص برای زیرفضاها محفوظ می‌ماند؟ کدامیك برای زیرفضاهای باز؟ کدامیك برای زیرفضاهای بسته؟

۵. کدامیك از این صفات تحت حاصل‌ضربهای متناهی محفوظ می‌ماند ؟ کدامیك تحت حاصل‌ضربهای شمارا؟ کدامیك تحت حاصل‌ضربهای دلخواه؟

۶. کدامیك ازاین‌خواص به‌وسیلهٔ نگاشتهای پیوسته محفوظ می‌ماند؟

۷. پس از مطالعهٔ فصول ۵ ، ۶ و ۷ ، تمرینهای ۱ ــ ۶ رابرای صفات زیر تکرار کنید:
(۱۷) تماماً منتظم
(۱۸) پیرافشرده
(۱۹) از جنبهٔ توپولوژیکی تمام

باید بتوانید به‌همهٔ ۳۳۶ سؤالی که در تمرینهـای ۱ــ۶ مطرح شده، بجز یکی از آنها، پاسخ دهید ؛ همین‌طور همهٔ ۶۳ سؤال تمرین ۷ ، به‌استثنای یکی از آنها . این‌دو سؤال هنوز حل نشده‌اند، تبصرهٔ تمرین ۱۵ ازبخش ۴ ــ ۲ را ملاحظه کنید.

قسمت دوم

۵

قضیهٔ تیخونوف

اینك به‌مسئله‌ای بـاز می گردیم که درفصل ۳ حل نشده رهایش کردیم. می‌خواهیم قضیهٔ تیخونوف را ثابت‌کنیم ، که می گوید هرحـاصل‌ضرب دلخواه از فضاهای فشرده فضائی است فشرده. برهان از اصل ماکزیموم نظریهٔ مجموعه‌هـا بهره می گیرد (بخش ۱ ــ ۱۱ را نگاه کنید).

قضیهٔ تیخونوف برای علمای آنالیز بسیار سودمنداست (وبرای هندسه‌دانان کمتر). در بخش ۵ ــ ۲ این قضیه را در به‌دست‌آوردن مشخصهٔ جـالبی از فضاهای تماماً منتظم به‌کار خـواهیم بست . کاربرد دیگر این قضیه در بخش ۵ ــ ۳ می‌آید ، کـه در آنجا فشرده‌سازی استون ـ چخ[1] را می‌سازیم و به‌جستجوی خواص آن می‌پردازیم. در این‌بخش مطالب بخش ۳ ــ ۸ ، فشردگی موضعی، را دانسته می گیریم.

۵ ـ ۱ قضیهٔ تیخونوف

قضیهٔ تیخونـوف ، همچون لم اوریسون ، از آن‌دست احکامی است که مـا آن‌را «عمیق» می‌خوانیم . در برهان آن ، نه یك ، بلکه چندین نکتهٔ اساسی وجود دارد؛ این برهـان به‌هیچ‌وجه سرراست و مستقیم نیست. پیش ازآنکه وارد اصل برهان شویم، نکات‌حساس آن‌را با قدری تفصیل بررسی می کنیم.

در فصل ۳ ، ثابت کردیم که $X \times Y$ ، حاصل‌ضرب دوفضای فشرده فضایی است فشرده. برای آن برهان، صورتی از تعریف فشردگی که با پوششهای بـاز بیان می‌شود کاملاً رضایتبخش بود. به‌ازای پوشش باز مفروضی برای $X \times Y$ از اعضای پـایه ،

1. Stone - Čech

هرقاچ $X \times Y$ را به‌وسیلهٔ تعدادی متناهی ازآنها پوشاندیم، و به‌دنبال‌آن پوششی متناهی برای $X \times Y$ ساختیم.

این شیوه ، هرقدر هم با مهارت به‌کار رود ، برای اثبات فشرده‌بودن حاصل‌ضربی نامتناهی از فضاهای فشرده کارگر نمی‌تواند باشد . پس نخستین نکته در برهان قضیهٔ تیخونوف کنار گذاشتن پوششهای باز و به‌کارگیری صورتی از تعریف فشردگی است که برحسب مجموعه‌های بسته بیان می‌شود. در واقع ، آنچه مورد استفادهٔ ماست ، صورتی است که در نتیجهٔ ۵ . ۱۰ در فصل ۳ بیان شد ، بدین مضمون که فضای X فشرده است اگر و فقط اگر به‌ازای هرگردایه مانند $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X که در شرط مقطع متناهی صدق کند، مقطع $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$ از بستارهای اعضای $\mathcal{A}$ ناتهی باشد.

برای آشناشدن با چگونگی عمل این شیوه ، نخست ساده‌ترین حالت را در نظر می‌گیریم : مثلاً حاصل‌ضرب دو فضای فشردهٔ $X_1 \times X_2$. فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های $X_1 \times X_2$ باشد که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند. نگاشت تصویری $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ را در نظر می‌گیریم. گردایهٔ

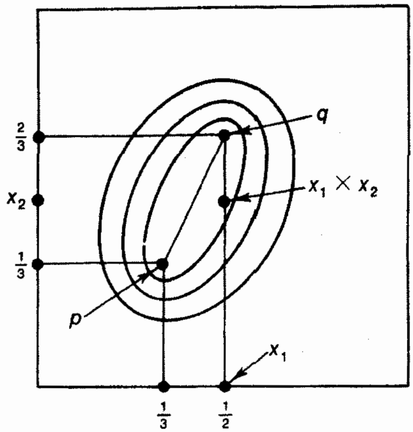
$$\{\pi_1(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

از زیرمجموعه‌های X_1 نیز در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند . زیرا ، اگر $x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$ آنگاه $\pi_1(x) \in \pi_1(A_1) \cap \cdots \cap \pi_1(A_n)$ ، پس مجموعهٔ اخیر ناتهی است. فشردگی X_1 ناتهی‌بودن مقطع همهٔ مجموعه‌های به‌شکل $\overline{\pi_1(A)}$ را تضمین می‌کند. فرض‌کنیم x_1 نقطه‌ای از این مقطع باشد. به‌همین قیاس ، x_2 را نقطه‌ای از مقطع همهٔ مجموعه‌های به‌شکل $\overline{\pi_2(A)}$ انتحاب می‌کنیم . نتیجهٔ روشنی که میل داریم به‌دست بیاوریم آن است که $x_1 \times x_2$ به $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$ تعلق دارد ، چه در آن صورت قضیه ثابت می‌شود.

ولی این نتیجه متأسفانه درست نیست. مثال ذیل را در نظر می‌گیریم ، که در آن $X_1 = X_2 = [0, 1]$ و گردایهٔ $\mathcal{A}$ عبارت است از همهٔ نواحی بیضی‌شکل محدود به بیضیهایی به‌کانونهای $p = (1/3, 1/3)$ و $q = (1/3, 2/3)$. به‌شکل ۱ نگاه کنید. مسلماً $\mathcal{A}$ در شرط مقطع متناهی‌صدق می‌کند. حال،نقطه‌ای مانند x_1 ازمقطع مجموعه‌های $\{\overline{\pi_1(A)} \mid A \in \mathcal{A}\}$ اختیار می‌کنیم. x_1 می‌تواند هرنقطه‌ای از بازهٔ $[1/3, 1/2]$ باشد؛ فرض‌کنید نقطهٔ $x_1 = 1/2$ را انتخاب‌کرده باشیم. به‌همین قیاس، نقطه‌ای مانند x_2 متعلق به‌مقطع مجموعه‌های $\{\overline{\pi_2(A)} \mid A \in \mathcal{A}\}$ انتخاب می‌کنیم. x_2 نیز می‌تواند هرنقطه‌ای از بازهٔ $[1/3, 2/3]$ باشد؛ فرض‌کنیم نقطهٔ $x_2 = 1/2$ را انتخاب‌کرده باشیم. اما ، این انتخاب نامطلوبی است، چه‌نقطهٔ

$$x_1 \times x_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

متعلق به‌مقطع مجموعه‌های $\bar{A}$ نیست.



شکل ۱

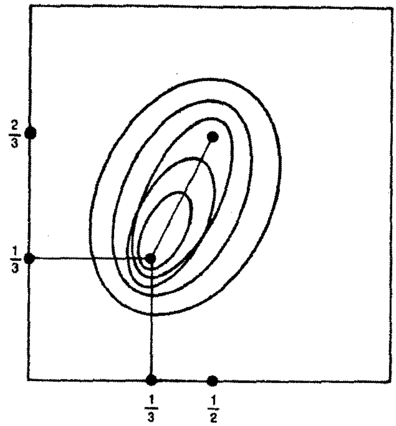
حتماً می‌گویید: «انتخابمان بد بوده است. مثلاً، اگر بعدازانتخاب $x_1 = ۱/۲$، نقطهٔ $x_2 = ۲/۳$ را اختیار کرده بودیم، آن‌وقت نقطه‌ای در $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$ می‌یافتیم». ولی، اشکال برهان متزلزل ما در این است که دست ما را بیش ازاندازه در انتخاب نقاط x_1 و x_2 باز گذاشته است؛ چنانکه به‌ما امکان داد به‌جای انتخابی «خوب» انتخابی «بد» انجام دهیم.

برای پرهیز از این‌دشواری چه‌تغییری می‌توانیم دربرهان به‌عمل‌آوریم؟

این‌پرسش منجر به‌دومین نکتهٔ برهان قضیهٔ تیخونوف می‌شود: گردایهٔ $\mathcal{A}$ را طوری گسترش می‌دهیم (البته، به‌طوری‌که شرط مقطع متناهی محفوظ بماند) کـه این گسترش انتخابهای x_1 و x_2 راآن‌قدر مقیدکند که ما مجبور به‌انتخاب «صحیح» باشیم. برای روشن‌شدن موضوع،فرض‌کنیم درمثال قبلی گردایهٔ $\mathcal{A}$ را به گردایه‌ای مانند $\mathcal{D}$ گسترش داده باشیم که عبارت است از همهٔ نواحی بیضی‌شکل محدود به‌بیضیهایی که یك کانون آنها نقطهٔ $p = (۱/۳، ۱/۳)$ و کانون دیگر آنها در هر نقطه‌ای ازقطعه خط pq است. این گردایه در شکل ۲ نشان داده شده است. گردایهٔ جدید $\mathcal{D}$ نیز در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند. اما، اگر بخواهید نقطه‌ای مانند x_1 در

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_1(D)}$$

انتخاب کنید، تنها انتخاب ممکن برای x_1 نقطهٔ ۱/۳ است. همچنین، تنها انتخاب‌ممکن



شکل ۲

برای x_2 نیز ۱/۳ است. ونقطهٔ ۱/۳ × ۱/۳ بی‌شك به هرمجموعهٔ D تعلق دارد ، و در نتیجه متعلق به‌هر $\bar{A}$ است. به‌بیان دیگر، گسترش گردایهٔ $\mathscr{A}$ به‌گردایهٔ $\mathscr{D}$ انتخاب مناسب را برما تحمیل می‌کند.

البته ملاحظه می‌شود که دراین مثال $\mathscr{D}$ را دقیقاً طوری انتخاب کردیم که برهانمان انجام گیرد. در حالت کلی، آیا امکان انتخاب صحیح $\mathscr{D}$ وجود دارد؟ اینجا سومین نکتهٔ برهان پدیدار می‌شود : چراکار را ساده نکنیم و $\mathscr{D}$ را گردایه‌ای «به‌قدر امکان وسیع» انتخاب نکنیم ــ به‌طوری که هیچ گردایهٔ بزرگتر ازآن درشرط مقطع متناهی صدق نکند ــ و بعد ببینیم که این گردایه برای مقصود مـا مفید است یا نه؟ امـا وجود چنین گردایه‌ای به‌هیچ‌وجه بدیهی نیست؛ برای اثبات آن باید به‌اصل ماکزیموم نظریهٔ مجموعه‌ها توسل جست. بعد از اثبات وجود $\mathscr{D}$، در واقع ، باید ثابت کنیم که وسعت‌کافی $\mathscr{D}$ انتخابهای صحیح را برما تحمیل می‌کند.

اکنون برهانی را با به‌کار گیری نکات بالا آغاز می‌کنیم:

۱۰۱. قضیه (قضیهٔ تیخونوف) هرحاصل‌ضرب دلخواه ازفضاهای فشرده با توپولوژی حاصل‌ضربی فشرده است.

برهـــان . مرحلهٔ ۱ . فرض کنیم X مجموعه‌ای بـــاشد ؛ و $\mathscr{A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X که در شرط مقطع متناهی صدق می کند. ثابت می کنیم که گردایه‌ای مانند $\mathscr{D}$ از زیرمجموعه‌های X وجود دارد به‌طوری که

(۱) $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$.

(۲) $\mathcal{D}$ در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند.

(۳) اگر $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{E}$ آنگاه $\mathcal{E}$ در شرط مقطع متناهی صدق نمی‌کند.

معمولاً دو شرط (۲) و (۳) را چنین بیان می‌کنند که $\mathcal{D}$ «نسبت به‌شرط مقطع متناهی ماکزیمال» است.

اصل ماکزیموم‌را به‌خاطر بیاورید. برطبق این‌اصل، اگر $>$ رابطهٔ ترتیبی جزئی اکیدی در مجموعهٔ A باشد، و B زیرمجموعه‌ای از A باشد که به‌وسیلهٔ $>$ مرتب‌ساده شده است آنگاه زیرمجموعهٔ مرتب سادهٔ ماکزیمالی از A، مانند C، یافت می‌شود که حاوی B است. دراینجا به‌حالت‌خاصی ازاین‌اصل، که در آن B یك‌زیرمجموعهٔ تك‌عضوی A است، نیاز داریم. چنین زیرمجموعه‌ای خود به‌خود مرتب ساده است. بدین‌ترتیب آنچه مورد نیازماست از این قرار است:

اگر A مجموعه‌ای با یك ترتیب جزئی اکید و a عضوی از A باشد آنگاه زیرمجموعهٔ مرتب ساده ماکزیمالی از A، مانند C، وجود دارد به‌طوری که $a \in C$.

ما این اصل را در موردی به‌کار خواهیم بست که A نه یك مجموعه است، و نه حتی گردایه‌ای ازمجموعه‌ها، بلکه مجموعه‌ای‌است که اعضای‌آن گردایه‌هایی ازمجموعه‌ها هستند. به‌منظور تسهیل‌کار در این برهان، چنین مجموعه‌ای‌را یك «ابرمجموعه» می‌نامیم وآن را با یك حرف خطدار نمایش می‌دهیم. این علامت‌گذاری را می‌توان چنین‌خلاصه کرد:

c عضوی از X است،

C زیرمجموعه‌ای از X است،

$\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X است،

$\mathbb{C}$ ابرمجموعه‌ای از گردایه‌های زیرمجموعه‌های X است.

گردایهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X، که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند، مفروض‌است. فرض کنیم $\mathbb{A}$ ابرمجموعه‌ای باشد متشکل ازهمهٔ گردایه‌های زیرمجموعه‌های X که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کنند. در این‌صورت، $\mathcal{A} \in \mathbb{A}$. رابطهٔ جزئیت سرهٔ $\subsetneq$ را به‌عنوان یك رابطهٔ ترتیبی جزئی اکید بر $\mathbb{A}$ به‌کار می‌بریم. بنابرحالت خاصی از اصل ماکزیموم‌که در بالا بیان شد، ابرزیرمجموعهٔ مرتب سادهٔ ماکزیمالی مانند $\mathbb{C}$ از $\mathbb{A}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$.

گردایهٔ $\mathcal{D}$ را مساوی اجتماع اعضای $\mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم؛

$$\mathcal{D} = \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathbb{C}} \mathcal{C}$$

مدعی هستیم که $\mathcal{D}$ همان گردایهٔ مطلوب است.

نخست، ملاحظه می‌کنیم که $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$، زیرا، $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$. ثانیاً، ثابت می‌کنیم که $\mathcal{D}$ در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند. فرض کنیم $D_1, \ldots, D_n$ اعضای $\mathcal{D}$ باشند. چون $\mathcal{D}$ اجتماع اعضای $\mathbb{C}$ است، به‌ازای هر i، عضوی مانند $\mathcal{C}_i$ از $\mathbb{C}$ وجود دارد

به‌طوری‌که $D_i \in \mathcal{C}_i$. امـا $\mathbb{C}$ تحت رابطهٔ جزئیت سره مرتب ساده است . بنابراین ، ابرمجموعهٔ $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n\}$ نیز تحت‌جزئیت سره مرتب ساده است. چون این‌ابرمجموعه متناهی است، دارای بزرگترین عضو است؛ یعنی، اندیسی مانند k هست‌که به‌ازای هر i که $i = 1, \ldots, n$ ، $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_k$. بالاخص، مجموعه‌های D_1 ، ... ، D_n همه به $\mathcal{C}_k$ تعلق‌دارند. بنابرفرض، چون $\mathcal{C}_k$ درشرط مقطع متناهی صدق می‌کند، پس $D_1 \cap \ldots \cap D_n$ ناتهی است .

ثالثاً ، ثابت می‌کنیم‌که $\mathcal{D}$ نسبت به‌شرط مقطع متناهی ماکزیمال است. فرض‌کنیم $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{E}$ و $\mathcal{E}$ در شرط مقطع متناهی صدق‌کند. در این‌صورت، با افزودن عضو $\mathcal{E}$ به $\mathbb{C}$ می‌توانیم ابرمجموعه‌ای جدید مانند $\mathbb{C}'$ تشکیل دهیم؛

$$\mathbb{C}' = \mathbb{C} \cup \{\mathcal{E}\}$$

اکنون، به‌ازای هر $\mathcal{C}$ از $\mathbb{C}$ ، داریم $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ ، و $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{E}$. بنابراین ، هردو عضو $\mathbb{C}'$ تحت رابطهٔ جزئیت سره بـا هم مقایسه‌پذیرند، در نتیجه $\mathbb{C}'$ مرتب ساده است. و این با ماکزیمال بودن $\mathbb{C}$ متناقض است.

مرحلهٔ ۲. $\mathcal{D}$ را گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X می‌گیریم‌که نسبت به‌شرط مقطع متناهی ماکزیمال باشد. در این‌صورت:

(الف) هرمقطع متناهی از اعضای $\mathcal{D}$ متعلق به $\mathcal{D}$ است.

فرض‌کنیم B مقطع تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{D}$ باشد. بـا افزودن B به $\mathcal{D}$ ، گردایهٔ جدیدی مانند $\mathcal{E}$ تعریف می‌شود. یعنی $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{B\}$. ثابت می‌کنیم‌که $\mathcal{E}$ در شرط مقطع متناهی‌صدق می‌کند؛ سپس، ازماکزیمال‌بودن $\mathcal{D}$ نتیجه می‌گیریم‌که $\mathcal{E} = \mathcal{D}$، و در نتیجه $B \in \mathcal{D}$ ، و این همان است‌که می‌خواستیم.

تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{E}$ را در نظر می‌گیریم. اگر هیچیك‌از آنها مجموعهٔ B نباشد آنگاه مقطع‌آنها ناتهی است، زیرا $\mathcal{D}$ درشرط مقطع متناهی صدق می‌کند. اگر یکی ازآنها مجموعهٔ B باشدآنگاه مقطع‌آنها به‌صورت

$$D_1 \cap \cdots \cap D_m \cap B$$

است. از آنجا که B مساوی مقطعی متناهی از اعضای $\mathcal{D}$ است، این مجموعه ناتهی است .

(ب) اگر A زیرمجموعهٔ دلخواهی از X بـاشدکه هرعضو $\mathcal{D}$ را قطع‌کندآنگاه A به $\mathcal{D}$ تعلق دارد.

به‌ازای A مفروض، قرار می‌دهیم $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{A\}$. ثابت می‌کنیم‌که $\mathcal{E}$ در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند ، و ازآن نتیجه می‌گیریم که A به $\mathcal{D}$ تعلق دارد. تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{E}$ را درنظر می‌گیریم. اگر هیچیك ازآنها مجموعهٔ A نباشند، مقطع آنها خود به‌خود ناتهی است. در غیراین‌صورت، این‌مقطع به‌صورت

$$D_1 \cap \cdots \cap D_n \cap A$$

می‌شود. حال، بنا بر (الف)، $D_1 \cap \cdots \cap D_n$ متعلق به $\mathcal{D}$ است؛ پس، بنا برفرض، این مقطع ناتهی است.

مرحلهٔ ۳. اینك قضیهٔ تیخونوف را ثابت می‌کنیم. فرض‌کنیم

$$X = \Pi_{\alpha \in J} X_\alpha,$$

که در آن X_α هـا فضاهایی فشرده‌اند. فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند. ثابت می‌کنیم که

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$$

ناتهی است. از اینجا فشردگی X نتیجه می‌شود.

با به‌کار گرفتن مرحلهٔ ۱، گردایه‌ای مانند $\mathcal{D}$ از زیرمجموعه‌های X را چنان انتخاب می‌کنیم که $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ و $\mathcal{D}$ نسبت به‌شرط مقطع متناهی مـاکزیمال باشد. کافی است ثابت‌کنیم که $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D}$ ناتهی است.

به‌ازای هرعضو J مانند α، طبق معمول، فرض می‌کنیم $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ همان نگاشت تصویری باشد. گردایهٔ

$$\{\pi_\alpha(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$$

از زیرمجموعه‌هـای X_α را درنظر می‌گیریم. این‌گردایه در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند، زیرا $\mathcal{D}$ چنین است. بنابرفشردگی X_α، به‌ازای هر α، می‌توانیم نقطه‌ای از X_α مانند x_α چنان انتخاب‌کنیم که

$$x_\alpha \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}.$$

فرض‌کنیم $\mathbf{x}$ نقطهٔ $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ از X باشد. ثـابت می‌کنیم‌که به‌ازای هر D از $\mathcal{D}$، $\mathbf{x} \in \bar{D}$. بدین‌گونه، برهان به‌انجام می‌رسد.

نخست، ثابت می‌کنیم‌که اگر $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ عضو زیرپایهٔ دلخواهی (برای‌توپولوژی حاصل‌ضربی در X) باشدکه شامل $\mathbf{x}$ است‌آنگاه $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ هرعضو $\mathcal{D}$ را قطع می‌کند: مجموعهٔ U_β یك‌همسایگی x_β در X_β است. بنا برتعریف، چون $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)}$، U_β مجموعهٔ $\pi_\beta(D)$ را درنقطه‌ای مانند $\pi_\beta(\mathbf{y})$ قطع می‌کند، که در آن $\mathbf{y} \in D$. از اینجا نتیجه می‌شودکه $\mathbf{y} \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap D$.

از گزارهٔ (ب) در مرحلهٔ ۲ نتیجه می‌شودکه هرعضو پـایه‌ای‌که شامل $\mathbf{x}$ باشد به $\mathcal{D}$ تعلق دارد. ازآنجا، بنـا برگزارهٔ (الف) در مرحلهٔ ۲، نتیجه می‌شود کـه هر

عضو پایه‌ای که شامل $\mathbf{x}$ باشد به $\mathscr{D}$ تعلق دارد. چون $\mathscr{D}$ در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند، این بدان معنی است که هرعضو پایه‌ای که شامل $\mathbf{x}$ باشد هرعضو $\mathscr{D}$ را قطع می‌کند؛ بنابراین، به‌ازای هر D از $\mathscr{D}$، $\mathbf{x} \in \bar{D}$، و این همان است که می‌خواستیم. □

تمرینها

۱. فرض‌کنید X فضایی باشد، و $\mathscr{D}$ گردایه‌ای ماکزیمال از زیرمجموعه‌های X که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند.
(الف) ثابت‌کنید که به‌ازای هر D از $\mathscr{D}$، $x \in \bar{D}$ اگر وفقط اگر هرهمسایگی x به $\mathscr{D}$ تعلق داشته‌باشد. درکدام استلزام از ماکزیمال بودن $\mathscr{D}$ استفاده می‌شود؟
(ب) فرض‌کنید $D \in \mathscr{D}$. ثابت‌کنید که اگر $D \subset A$ آنگاه $A \in \mathscr{D}$.
(پ) ثابت‌کنید که اگر X هاوسدورف باشد، حداکثر یك‌نقطه در $\bigcap_{D\in\mathscr{D}} \bar{D}$ موجود است.

۲. گردایه‌ای مانند $\mathscr{A}$ از زیرمجموعه‌های X درصورتی در **شرط مقطع شمارا** صدق می‌کند که هرمقطع شمارا از اعضای $\mathscr{A}$ ناتهی باشد. ثابت‌کنید که X یك فضای لیندلوف‌است اگر و فقط اگر به ازای هر گردایه از زیرمجموعه‌های X مانند $\mathscr{A}$ که درشرط مقطع متناهی صدق‌کند،

$$\bigcap_{A\in\mathscr{A}} \bar{A} \neq \varnothing .$$

۳. سه‌حکم ذیل را در نظر بگیرید:
(یك) اگر $\mathscr{A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ X باشدکه در شرط مقطع متناهی صدق می‌کندآنگاه‌گردایه‌ای مانند $\mathscr{D}$ از زیرمجموعه‌های X وجود دارد به‌طوری که $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$ و $\mathscr{D}$ نسبت به شرط مقطع شمارا ماکزیمال است.
(دو) فرض‌کنید $\mathscr{D}$ نسبت به‌شرط مقطع‌شمارا ماکزیمال باشد. دراین‌صورت، مقاطع شمارای اعضای $\mathscr{D}$ در $\mathscr{D}$ قرار دارند. واگر A زیرمجموعه‌ای از X باشدکه هرعضو $\mathscr{D}$ را قطع می‌کندآنگاه الزاماً $A \in \mathscr{D}$.
(سه) هرحاصل‌ضربی از فضاهای لیندلوف فضایی است لیندلوف.
(الف) حکم (دو) را ثابت کنید.
(ب) ثابت‌کنید که (یك) و (دو) هردو باهم مستلزم (سه) هستند.
(پ) به‌ازای مجموعه‌ای مفروض مانند X، ثابت‌کنید که گردایه‌ای ماکزیمال از زیرمجموعه‌های X وجود داردکه در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند. چرا این مطلب برای اثبات (یك) کافی نیست؟

(ت) فضای R_l لیندلوف است، ولی، فضای R_l^2 چنین نیست. (مثال ۴ از بخش ۴ـ ۱ را نگاه کنید.) بنابراین، (یك) برقرار نیست. برهان (یك) در کجا از کار می‌افتد؟

۴. اینك قضیهٔ دیگری داریم که در برهانش از اصل ماکزیموم استفاده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که اگر x و y دونقطهٔ فضای A باشند، x و y را متعلق به‌یك شبه مؤلفهٔ A خوانیم درصورتی که هیچ جداسازی از A به‌صورت دومجموعهٔ جدا ازهم که در A باز باشند مانند $A=C\cup D$ یافت نشود به‌طوری که $x\in C$ و $y\in D$.

(الف) فرض کنید X یك‌فضای فشردهٔ هاوسدورف باشد، و $x , y\in X$. همچنین فرض کنید که $\mathscr{A}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های بستهٔ X باشد به‌طوری که به‌ازای هر A از $\mathscr{A}$، نقاط x و y متعلق به‌یك‌شبه مؤلفهٔ A باشند. اگر $\mathscr{A}$ تحت رابطهٔ جزئیت سره مرتب ساده باشد، ثابت کنید که x و y متعلق به‌یك‌شبه مؤلفهٔ

$$y=\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$$

هستند. [راهنمایی: تمرین ۱۲ ازبخش ۳ـ ۵ را نگاه کنید.]

(ب) قضیهٔ زیر را ثابت کنید:

قضیه. اگر X فشرده و هاوسدورف باشد، شبه مؤلفه‌های X برابر مؤلفه‌های X هستند.

[راهنمایی: به‌ازای هر x و y که متعلق به یك شبه مؤلفهٔ X باشند، فرض کنید $\mathscr{A}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های بستهٔ X مانند A باشد به‌طوری که A در X بسته است و x و y متعلق به‌یك شبه مؤلفهٔ A هستند. فرض کنید $\mathscr{A}'$ زیر گردایهٔ مرتب سادهٔ ماکزیمالی باشد. ثابت کنید که

$$\bigcap_{A\in\mathscr{A}'} A$$

همبند است.]

(پ) قضیهٔ ذیل را ثابت کنید:

نتیجه. فرض‌کنید X فشرده وهاوسدورف باشد، و $x\in X$. مقطع همهٔ‌مجموعه‌هایی مانند A که شامل x هستند و در X هم بازند و هم بسته مساوی است با مؤلفه‌ای از X که شامل x است.

۵ـ ۲ فضاهای تماماً منتظم

چنانکه پیش از این متذکر شدیم، نارسایی برهان لم اوریسون در تعمیم به‌فضاهای منتظم ما را به‌فرمولبندی اصل موضوع جداسازی تازه‌ای هدایت می‌کند، و آن، اصل موضوع

انتظام تمام است. در این بخش، بعضی از خواص فضاهایی را که در این اصل موضوع صدق می کنند مطالعه می کنیم. به‌عنوان توجیهی برعلت علاقهٔ ما به‌این رده از فضاها، باید بگوییم که بزودی قضیهٔ نشاندنی را ثابت خواهیم کرد که ثابت می کند ردهٔ فضاهای تماماً منتظم با رده‌ای از فضاها، که قبلاً بررسی کرده‌ایم، یکی است؛ یعنی ردهٔ همهٔ زیرفضاهای فضاهای هاوسدورف فشرده.

تعریف. فضای X را **تماماً منتظم** خوانیم در صورتی که مجموعه‌های تك‌عضوی در X بسته باشند و به‌ازای هرنقطه‌ای مانند $x_\circ$ و هرمجموعهٔ بسته‌ای مانند A که شامل $x_\circ$ نباشد، تابعی پیوسته مانند $f:X \to [\circ, \text{۱}]$ موجودباشد به‌طوری که $f(x_\circ)=\text{۱}$ و $f(A)=\{\circ\}$.

بنا برلم اوریسون هرفضای نرمال فضایی است تماماً منتظم، وهرفضای تماماً منتظم فضایی است منتظم. زیرا با در نظر گرفتن تابع f ی که در تعریف داده شده است، $f^{-\text{۱}}([\circ, \text{۱}/\text{۲}))$ و $f^{-\text{۱}}((\text{۱}/\text{۲}, \text{۱}])$ مجموعه‌های باز ازهم‌جدایی‌هستندکه، بترتیب، حاوی A وشامل $x_\circ$ اند. در نتیجه، این اصل موضوع جدید درفهرست اصول موضوع جداسازی، بین اصول موضوع منتظم‌بودن و نرمال‌بودن قرار می گیرد. ملاحظه کنید که در تعریف بالا، تابع‌را می‌توانستیم طوری برگزینیم که $x_\circ$ را بر $\circ$ و A را بر $\{\text{۱}\}$ بنگارد، زیرا تابع $g(x)=\text{۱}-f(x)$ در این شرط صدق می کند.

۱۰۲. قضیه هرزیرفضای یك فضای تماماً منتظم فضایی است تماماً منتظم. هر حاصل‌ضرب از فضاهای تماماً منتظم فضایی است تماماً منتظم.

برهان. فرض‌کنیم Y زیرفضایی از فضای تماماً منتظم X باشد. همچنین، فرض کنیم $x_\circ$ نقطه‌ای از Y و A مجموعه‌ای بسته از Y باشد به‌طوری که $x_\circ \notin A$، می‌دانیم $A=\bar{A} \cap Y$، که در آن $\bar{A}$ نمایش بستار A در X است. بنابراین، $x_\circ \notin \bar{A}$. چون X تماماً منتظم است، می‌توان تابعی پیوسته مانند $f:X \to [\circ, \text{۱}]$ چنان برگزید که $f(x_\circ)=\text{۱}$ و $f(\bar{A})=\{\circ\}$. تحدید f به Y همان تابع پیوسته مطلوب بر Y است.

فرض‌کنیم $X=\Pi X_\alpha$ حاصل‌ضربی‌ازفضاهای‌تماماً منتظم‌باشد. همچنین، فرض کنیم $\mathbf{b}=(b_\alpha)$ نقطه‌ای از X و A مجموعهٔ بسته‌ای در X باشد که از $\mathbf{b}$ جداست. عضو پایه‌ای مانند ΠU_α شامل $\mathbf{b}$ را چنان انتخاب می کنیم که A را قطع نکند؛ دراین‌صورت، $U_\alpha=X_\alpha$ مگر به‌ازای تعدادی متناهی از مقادیر α، مثلاً به‌ازای $\alpha=\alpha_\text{۱}, \ldots, \alpha_n$. به‌ازای $i=\text{۱}, \ldots, n$، تابعی پیوسته مانند

$$f_i:X_{\alpha_i} \longrightarrow [\circ, \text{۱}]$$

را چنان انتخاب می کنیم که $f_i(b_{\alpha_i})=\text{۱}$ و $f_i(X_{\alpha_i}-U_{\alpha_i})=\{\circ\}$. حال اگر $\phi_i(\mathbf{x})=f_i(\pi_{\alpha_i}(\mathbf{x}))$؛ در این صورت ϕ_i فضای X را به‌طور پیوسته بتوی R

می‌نگارد و در خارج مجموعهٔ $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ صفر می‌شود. تابع حاصل‌ضرب

$$f(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) \times \phi_2(\mathbf{x}) \times \cdots \times \phi_n(\mathbf{x})$$

همان تابع پیوستهٔ مطلوب بر X است، زیرا در $\mathbf{b}$ مساوی ۱ و درخارج از ΠU_α صفر می‌شود. □

مثال ۱. فضای $S \times \bar{S}_\Omega$ فضایی است که تماماً منتظم است، زیرا زیرفضایی از فضای نرمال $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ است. اما نرمال نیست؛ به‌مثال ۲ ازبخش ۴ـ۲ مراجعه کنید.

یافتن فضایی که منتظم باشد ولی تماماً منتظم نباشد بس‌دشوار است. بیشتر مثالهایی که بدین‌منظور ساخته شده‌اند مشکل‌اند و برای ساختن آنها نیاز به‌آشنایی قابل‌ملاحظه‌ای با اعداد اصلی است. لیکن، بتازگی، جان‌تامس[1] [T] مثالی ساخته که بسیار مقدماتی است، وما آن‌را به‌طور خلاصه در تمرین ۶ شرح می‌دهیم.

جداسازی مجموعه‌های بستهٔ جدا از هم به‌وسیلهٔ توابع پیوسته با مقادیر حقیقی وسیلهٔ بسیار مهم و حساسی است که در اثبات قضیهٔ متریسازی اوریسون به‌کار می‌رود؛ آن‌را برای نشاندن فضای X در فضای حاصل‌ضربی R^ω به‌کار می‌برند. در هرفضای تماماً منتظم، می‌توانیم به‌وسیلهٔ توابع پیوسته نقاط‌را ازمجموعه‌های بسته ازهم‌جدا سازیم. بنابراین، طبیعی‌است که بپرسیم، آیا بافرض تماماً منتظم‌بودن فضای X، می‌توان قضیه‌ای مشابه ثابت کرد؟ بله می‌توان. البته، حاصل یك‌قضیهٔ متریسازی از کار درنمی‌آید، ولی قضیهٔ نشاندن جالبی است:

۲.۲. قضیه اگر X تماماً منتظم باشد آنگاه X را می‌توان به‌ازای J ای در $[0, 1]^J$ نشاند.

برهان. فرض‌کنیم $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$، که به‌وسیلهٔ مجموعهٔ اندیسی مانند J اندیسگذاری شده است، نمایش همهٔ توابع پیوسته از X به‌بازهٔ $[0, 1]$ باشد. تماماً منتظم‌بودن X، ضمانت می‌کند که این گردایه در X نقاط را از مجموعه‌های بسته جدا می‌سازد. پس، بنابرقضیهٔ نشاندن دربخش ۴ ـ ۴، نگاشت

$$F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$

نشانده‌ای از X در $[0, 1]^J$ است. □

۳.۲. نتیجه در فضایی مانند X احکام ذیل معادل‌اند:

(۱) X تماماً منتظم است.

(۲) X با زیرفضایی از یك فضای هاوسدورف هومئومورف است.

---

1. John Thomas

(۳) X با زیرفضایی از یک فضای نرمال هومئومورف است.

تمرینها

۱. ثابت کنید که هر فضای هاوسدورف وموضعاً فشرده فضایی است تماماً منتظم.

۲. ثابت کنید که اگر چه R_l^2 نرمال نیست، اما تماماً منتظم است.

۳. فرض کنید X تماماً منتظم باشد، و A و B زیرمجموعه‌های بستهٔ جدا ازهمی از X باشند. ثابت کنید که اگر A فشرده باشد، تابعی پیوسته مانند $f: X \to [0, 1]$ وجود دارد به‌طوری که $f(A)=\{0\}$ و $f(B)=\{1\}$.

*۴. ثابت کنید که R^ω با توپولوژی جعبه‌ای تماماً منتظم است. (این حکم نتیجهٔ فوری قضیهٔ ذیل است، اما شما برای آن برهانی مستقیم بیاورید.)

*۵. قضیهٔ ذیل را ثابت کنید:

قضیه. هرگروه توپولوژیک هاوسدورف فضایی است تماماً منتظم.

برهان. فرض کنید V_0 یک همسایگی عضو خنثای e در گروه توپولوژیک G باشد. در حالت کلی، همسایگی V_n از e را طوری انتخاب می‌کنیم که $V_n \cdot V_n \subset V_{n-1}$. مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای دودویی مانند p را درنظر می‌گیریم. یعنی، همهٔ اعداد گویای به‌شکل $k/2^n$ را که درآن k و n اعداد صحیحی هستند. به‌ازای هرعدد گویای دودویی p از $(0, 1]$، مجموعه‌ای باز مانند $U(p)$ را به‌استقرا چنین تعریف می‌کنیم: $U(1)=V_0$ و $U(1/2)=V_1$. به‌ازای n مفروض، و به‌ازای $0 < k/2^n \leqslant 1$، اگر مجموعهٔ $U(k/2^n)$ تعریف شده باشد آنگاه به‌ازای هر k که $0 < k < 2^n$، چنین تعریف می‌کنیم:

$$U(1/2^{n+1})=V_{n+1},$$
$$U((2k+1)/2^{n+1})=V_{n+1}\cdot U(k/2^n).$$

به‌ازای $p \leqslant 0$، فرض کنید $U(p)=\varnothing$؛ وبه‌ازای $p>1$، فرض کنید $U(p)=G$. ثابت کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر k و n،

$$V_n \cdot U(k/2^n) \subset U((k+1)/2^n).$$

و سپس، نظیر برهان لم اوریسون، برهان را ادامه دهید.

این تمرین از [M - Z] اقتباس شده است، و برای آگاهی بیشتر در مورد گروههای توپولوژیک خواننده را به‌آن رجوع می‌دهیم.

*۶. مجموعهٔ X را به‌قرار زیر تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر عدد صحیح زوجی مانند m، فرض کنید L_m نمایش قطعه خط $m\times[-۱, ۰]$ در صفحه باشد. به‌ازای هرعدد صحیح فردی مانند n و هرعدد صحیح k که $k\geqslant ۲$، فرض کنید $C_{n,k}$ نمایش اجتماع قطعه خطهای

$$(n-۱+۱/k)\times[-۱, ۰] \text{ و } (n+۱-۱/k)\times[-۱, ۰]$$

و نیمدایرهٔ

$$\{x\times y \mid (x-n)^۲+y^۲=\left(۱-\frac{۱}{k}\right)^۲ \text{ و } y\geqslant ۰\}$$

در صفحه باشد. همچنین، فرض کنید $p_{n,k}$ نمایش نقطهٔ $n\times(۱-۱/k)$، که بلندترین نقطهٔ این نیمدایره است، باشد. بالاخره فرض کنید X اجتماع همهٔ مجموعه‌های L_m و $C_{n,k}$ باشد همراه با دو نقطهٔ اضافی دیگر a و b. با در نظر گرفتن چهارنوع مجموعه‌های ذیل، به‌عنوان اعضای پایه، در X یك توپولوژی می‌سازیم:

(یك) مقطع X با یك قطعه خط باز افقی که شامل هیچیك ازنقاط $p_{n,k}$ نیست.

(دو) مجموعه‌های حاصل از $C_{n,k}$ ها با حذف تعدادی متناهی ازنقاط آنها.

(سه) به‌ازای هرعدد صحیح زوج m، اجتماع $\{a\}$ و مجموعهٔ همهٔ نقاطی مانند $x\times y$ از X به‌طوری که $x<m$.

(چهار) به‌ازای هرعدد صحیح زوج m، اجتماع $\{b\}$ و مجموعهٔ همهٔ نقاطی مانند $x\times y$ از X به‌طوری که $m<x$.

(الف) X را رسم کنید؛ ثابت کنید که این مجموعه‌ها تشکیل پایه‌ای برای یك توپولوژی در X می‌دهند.

(ب) فرض کنید f تابعی پیوسته با مقادیر حقیقی بر X باشد. ثابت کنید که به ازای هر c مجموعهٔ $f^{-۱}(c)$ یك مجموعهٔ G_δ در X است. (این مطلب برای هرفضای X برقرار است.) نتیجه بگیرید که مجموعهٔ $S_{n,k}$، متشکل از همهٔ نقاطی مانند p از $C_{n,k}$ به‌طوری که $f(p)\neq f(p_{n,k})$، شماراست. نقطهٔ $b\in[-۱,۰]$ را چنان انتخاب کنید که خط $y=b$ هیچیك از مجموعه‌های $S_{n,k}$ را قطع نکند. ثابت کنید که به‌ازای هر n فرد،

$$f((n-۱)\times b)=\lim_{k\to\infty} f(p_{n,k})=f((n+۱)\times d).$$

نتیجه بگیرید که $f(a)=f(b)$.

(پ) ثابت کنید که X منتظم است اما تماماً منتظم نیست.

۵-۳ فشرده‌سازی استون ـ چخ

پیش از این، یك‌طریق برای فشرده‌سازی یك‌فضای توپولوژیك X را مطالعه کردیم، و آن فشرده‌سازی تك‌نقطه‌ای بود (بخش ۳ ـ ۸)؛ حاصل آن، به‌تعبیری، فشرده‌شدهٔ مینیمال X است. فشرده‌شدهٔ استون ـ چخ X، به تعبیری، فشرده‌شدهٔ ماکزیمال X است. این فشرده‌سازی را در اینجا به‌عنوان کاربرد جالبی از قضیهٔ تیخونوف معرفی می‌کنیم. فشرده‌سازی استون ـ چخ در آنالیز مدرن دارای کاربردهایی چند است، که از موضوع بحث این کتاب خارج است.

تعریف. منظور از یك **فشرده‌شدهٔ** فضایی مانند X فضای هاوسدورف فشرده‌ای است حاوی X، مانند Y، که X در آن چگال است (یعنی $\bar{X}=Y$). دو فشرده‌شدهٔ X مانند Y_1 و Y_2 را **هم‌ارز** می‌خوانیم درصورتیکه هومئومورفیسمی مانند $h:Y_1 \to Y_2$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر x از X، $h(x)=x$.

برای اینکه X یك‌فضای فشرده‌شده‌باشد، باید تماماً منتظم باشد. بالعکس، هرفضای تماماً منتظم دست کم یك فشرده شده دارد. یك‌طریق به‌دست‌آوردن فشرده شده‌ای از X به‌قرار ذیل است:

فرض‌کنیم X تماماً منتظم باشد. نشاننده‌ای مانند $h:X \to Z$ از X به‌فضای هاوسدورف فشردهٔ Z انتخاب می‌کنیم. فرض‌کنیم X_0 نمایش زیرفضای $h(X)$ از Z باشد، و Y_0 نمایش بستار آن در Z. در این صورت، Y_0 یك‌فضای هاوسدورف فشرده است و $\bar{X}_0=Y_0$؛ پس Y_0 یك‌فشرده‌شدهٔ X_0 است.

اکنون، فضایی حاوی X، مانند Y، را طوری می‌سازیم که زوج (X, Y) با زوج (X_0, Y_0) هومئومورف باشد. نخست، مجموعه‌ای جدا از X، مانند A، اختیار می‌کنیم که تحت نگاشتی مانند $k:A \to Y_0-X_0$ با مجموعهٔ Y_0-X_0 در تناظر دوسویی باشد. قرار می‌دهیم $Y=X\cup A$، وتناظری دوسویی مانند $H:Y \to Y_0$ را با ضابطهٔ ذیل تعریف می‌کنیم.

$$\text{به‌ازای } x\in X،\quad H(x)=h(x)،$$

$$\text{به‌ازای } a\in A،\quad H(a)=k(a).$$

سپس، Y را فضایی توپولوژیك در نظر می‌گیریم، بدین‌گونه‌که مجموعهٔ U را در Y باز می‌نامیم اگر و فقط اگر $H(U)$ در Y_0 باز باشد. نگاشت H خود به‌خود هومئومورفیسم می‌شود؛ وفضای X زیرفضایی از Y است، زیرا تحدید H به‌زیرمجموعهٔ X از Y همان هومئومورفیسم h است.

فضای Y را **فشرده‌شدهٔ X القاشده به‌وسیلهٔ نشانندهٔ h** می‌خوانیم.

آنچه را که در بالا ساختیم به‌قرار ذیل خلاصه می‌کنیم: اگر $h:X \to Z$

نشانده‌ای از X به‌فضای هاوسدورف فشردهٔ Z باشدآنگاه h فشرده‌شده‌ای از X مانند Y را القا می‌کند. وآن دارای این‌خاصیت است‌که نشانندهٔ h را می‌توان به‌نشانندهای مانند $H:Y \to Z$ گسترش‌داد.

به‌طور کلی، راههــای بسیار گوناگونی برای فشرده‌سازی فضای X وجود دارد. مثلاً، به‌فشرده‌سازی‌های ذیل از بازهٔ باز $X=(0,1)$ توجه کنید:

مثال ۱. دایرهٔواحد S^1 در R^2 را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم $h:(0,1) \to S^1$ نگاشت

$$h(t)=(\cos 2\pi t)\times(\sin 2\pi t)$$

باشد. فشرده‌شدهٔ القا شده به‌وسیلهٔ نشانندهٔ h با فشرده‌شدهٔ تك‌نقطه‌ای X هم‌ارز است.

مثال ۲ . فرض‌کنیم Y فضای $[0,1]$ باشد . در این‌صورت، Y یك‌فشرده‌شدهٔ X است، که با «افزودن یك‌نقطه در هریك از دو انتهای $(0,1)$» به‌دست می‌آید.

مثال ۳. مــربع $[-1,1]^2$ را در R^2 در نظر می‌گیریــم و فرض می‌کنیم $h: (0,1) \to [-1,1]^2$ نگاشتی باشد باضابطهٔ

$$h(x)=x\times\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

فضای $Y_0=\overline{h(X)}$ منحنی سینوسی توپولوژیدانهــا است (به‌مثــال ۸ در بخش ۳ ــ ۲ مراجعه‌کنید). نشانندهٔ h به‌گونه‌ای‌کاملاً متفاوت از دومثال قبل فشرده‌شده‌ای از بــازهٔ $(0,1)$ را به‌دست می‌دهد . برای به‌دست‌آوردن آن بــاید یك نقطه در انتهای راست $(0,1)$ وکلیهٔ نقاط قطعه خطی را درانتهای چپ به‌آن افزود!

مسئلهٔ اساسی‌ای‌که در مطالعهٔ فشرده‌شده‌ها پیش می‌آید به‌قرار ذیل است:
اگر Y یکی از فشرده‌شده‌های X باشد، تحت چه شرایطی می‌توان تابع حقیقی پیوسته‌ای مانند f راکه بر X تعریف شده است به‌طور پیوسته به Y گسترش‌داد؟

اگر تابع f گسترش‌پذیر باشد، بایدکراندار باشد، زیراگسترش آن باید فضای فشردهٔ Y را به R ببردکه در نتیجه‌کراندار خواهد بود. امــا، در حــالت‌کلی، کرانداربودن کافی نیست. مثال ذیل‌را ملاحظه‌کنید:

مثال ۴. فرض‌کنیم $X=(0,1)$. فشرده‌شدهٔ تك‌نقطه‌ای X راکه در مثال ۱ آوردیم در نظر می‌گیریم. تابعی پیوسته مانند $f:(0,1) \to R$ براین فشرده‌شده گسترش‌پذیر است اگر وفقط اگر حدهای

$$\lim_{x\to 1-} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0+} f(x)$$

موجود ومساوی باشند.

در مورد «فشرده‌شدهٔ دو نقطه‌ای» که در مثال ۲ ملاحظه‌شد، تابع f گسترش‌پذیر است اگر و فقط اگر این‌دو حد موجود باشند.

در مورد فشرده‌شدهٔ مثال ۳، هنوز هم‌گسترشهایی برای رده‌های وسیعتری از توابع موجوداست. به‌آسانی می‌توان دیدکه اگرهردوحد بالا موجود باشندآنگاه f گسترش‌پذیر است. اما تابع $f(x)=\sin(1/x)$ نیز براین فشرده شده‌گسترش‌پذیر است، فرض کنیم H نشانندهٔ Y در R^2 باشدکه برزیرفضای X با h مساوی است. در این‌صورت، نگاشت مرکب

$$Y \xrightarrow{H} R\times R \xrightarrow{\pi_2} R$$

گسترش مطلوب f است. زیرا، اگر $x\in X$ آنگاه $H(x)=h(x)=x\times\sin(1/x)$، درنتیجه $\pi_2(H(x))=\sin(1/x)$، واین همان است که می‌خواستیم.

نکتهٔ خاص جالبی در مورد فشرده شدهٔ اخیرهست. ما این فشرده‌شده را با انتخاب نشانندهٔ‌ای مانند

$$h:(0,1) \longrightarrow R^2$$

ساختیم که توابع مؤلفه‌ای‌آن x و $\sin(1/x)$ بودند. بعد دریافتیم که هردو تابع x و $\sin(1/x)$ را می‌توان براین فشرده شده‌گسترش داد. از اینجا چنین به‌نظر می‌رسد که اگر گردایه‌ای از توابع پیوستهٔ‌کراندار بربازهٔ باز $(0,1)$ داشته‌باشیم، مجموعه‌ای مانند J وجود دارد به‌طوری که می‌توانیم آنها را به‌عنوان توابع مؤلفه‌ای یك نشانندهٔ بازهٔ باز $(0,1)$ بتوی R^J، به‌ازای مقداری از J، به‌کاربرد، وبدین‌وسیله فشرده‌شده‌ای به‌دست‌آوردکه به‌ازای‌آن هریك از توابع متعلق به‌آن‌گردایه گسترش‌پذیر است.

این همان نکتهٔ اساسی موجود در فشرده‌سازی استون ـ چخ است، که ذیلاً آن را تعریف می‌کنیم:

فرض کنیم X یك‌فضای تماماً منتظم، و $\{f_\alpha\}_{\alpha\in J}$ گردایهٔ همهٔ توابع حقیقی کراندار بر X باشدکه به‌وسیلهٔ مجموعهٔ اندیس J اندیسگذاری شده است. به‌ازای هر α از J، بازهٔ بسته‌ای مانند I_α در R انتخاب‌میکنیم که‌حاوی $f_\alpha(X)$ باشد. برای‌آنکه این انتخاب بدون ابهام باشد، فرض می‌کنیم

$$I_\alpha=[\operatorname{glb} f_\alpha(X),\ \operatorname{lub} f_\alpha(X)].$$

حال، نگاشت $h:X\to\Pi_{\alpha\in J} I_\alpha$ را با ضابطهٔ

$$h(x)=(f_\alpha(x))_{\alpha\in J}$$

تعریف می‌کنیم. بنابرقضیهٔ تیخونوف، $\prod I_\alpha$ فشرده است. از آنجا که X تماماً منتظم است، گردایهٔ $\{f_\alpha\}$ در X، نقاط را از مجموعه‌های بسته جدا می‌سازد. پس، بنابرقضیهٔ نشاندن در بخش ۴ ـ ۴، h یک‌نشاننده است.

فشرده شده‌ای از X را که به‌وسیلهٔ h القا می‌شود **فشرده شدهٔ استون ـ چخ** X می‌نامیم، ومعمولاً آن‌را با $\beta(X)$ نمایش می‌دهیم.

بسیاری از ریاضیدانان وقتی می‌خواهند فشرده‌سازی استون ـ چخ را تعریف کنند از به‌کاربستن مجموعهٔ اندیس دلخواه J پرهیز می‌کنند. در عوض، گردایهٔ $\mathcal{F}$ متشکل از همهٔ توابع پیوستهٔ کراندار با مقادیر حقیقی بر X را برای اندیسگذاری خودآن بکار می‌برند. این کار باقراردادن $J=\mathcal{F}$ وتابع همانی به جای تابع اندیسگذاری $f:J\to\mathcal{F}$ شدنی است. البته، این‌گونه اندیسگذاری برای این‌تعریف ضروری نیست؛ با وجود این، به‌نظر ما این‌کار منجر به‌مشوش‌کردن علامتگذاری می‌شود.

خاصیت بسیار مهم فشرده‌سازی استون ـ چخ خاصیت گسترشی ذیل است:

۱۰۳۰ قضیه فرض‌کنیم X تماماً منتظم، و $\beta(\mathrm{X})$ فشرده‌شدهٔ استون ـ چخ‌آن باشد. در این‌صورت، هرتابع حقیقی پیوستهٔ کراندار بر X را می‌توان به‌طور یکتا به‌تابع‌حقیقی پیوسته‌ای بر $\beta(\mathrm{X})$ گسترش‌داد.

برهان. فشرده‌شدهٔ $\beta(X)$ به‌وسیلهٔ نشانندهٔ $h: X\to \prod X_\alpha$، که در بالا تعریف شد، القا می‌شود. این بدان معنی است‌که نشاننده‌ای مانند $H:\beta(X)\to\prod I_\alpha$ وجود دارد به‌طوری‌که تحدیدآن برزیرفضای X از $\beta(X)$ مساوی h است به‌ازای هرتابع حقیقی پیوستهٔ کراندار بر X، β یی در J هست به‌طوری که f_β باآن مساوی است. حال اگر $\pi_\beta:\prod I_\alpha\to I_\beta$ نگاشت تصویری بروی مختص β ام باشد آنگاه نگاشت مرکب $\pi_\beta\circ H:\beta(X)\to I_\beta$ گسترش مطلوب f_β است. زیرا، اگر $x\in X$، داریم

$$\pi_\beta(H(x))=\pi_\beta(h(x))=\pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha\in J})=f_\beta(x).$$

یکتایی گسترش نتیجه‌ای ازلم ذیل است. □

۰۲۰۳ لم فرض‌کنیم $\mathrm{A}\subset\mathrm{X}$، و $\mathrm{f:A}\to\mathrm{Z}$ نگاشتی پیوسته از A بتوی فضای هاوسدورف Z باشد. دراین‌صورت، f حداکثر دارای یک‌گسترش به‌تابعی پیوسته مانند $\mathrm{g}:\bar{\mathrm{A}}\to\mathrm{Z}$ است.

برهان. این لم را در بخش ۲ ـ ۷ به‌عنوان تمرین‌آوردیم؛ در اینجا برهانی برای آن می‌آوریم. فرض‌کنیم g و g' از $\bar{A}$ بتوی Z دو گسترش متفاوت f باشند؛ و x را چنان‌انتخاب می‌کنیم که $g(x)\neq g'(x)$. فرض کنیم U و U'، بترتیب، همسایگیهای جدا از همی برای $g(x)$ و $g'(x)$ باشند. همسایگی V از x را چنان انتخاب می‌کنیم

که $g(V) \subset U$ و $g'(V) \subset U'$. حال V مجموعهٔ A را در نقطه‌ای مانند y قطع می‌کند؛ در نتیجه، $g(y) \in U$ و $g'(y) \in U'$. اما چون $y \in A$ ، داریم

$$g(y)=f(y) \quad \text{و} \quad g'(y)=f(y).$$

و این با این فرض که U و U' جدا ازهم‌اند متناقض است. □

اینک قضیه‌ای ثابت می‌کنیم بدین مضمون که فشرده‌شدهٔ استون ـ چخ اساساً یکتاست، و به‌وسیلهٔ خاصیت گسترشی خود مشخص می‌شود.

۰۳.۰ قضیه فرض‌کنیم X تماماً منتظم باشد. Y_1 و Y_2 را دوفشرده‌شدهٔ X می‌گیریم‌که دارای‌خاصیت‌گسترشی مذکور درقضیهٔ۱.۳ باشند. در این‌صورت هومئومورفیسمی مانند ϕ از Y_1 بروی Y_2 وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر x از X ، $\phi(x)=x$.

برهان. مرحلهٔ ۱. نخست، حکم ذیل را ثابت می‌کنیم: فرض کنیم Y فشرده‌شده‌ای از X ودارای خاصیت گسترشی مذکور درقضیهٔ۱.۳ باشد. اگر Z یک‌فضای هاوسدورف فشردهٔ دلخواه باشد و $g: X \to Z$ تابع پیوستهٔ دلخواهی باشد آنگاه g را می‌توان به‌تابع پیوسته‌ای مانند k که Y را بتوی Z می‌نگارد گسترش داد.

برای اثبات این‌حکم، ملاحظه‌کنید که Z تماماً منتظم‌است، در نتیجه، به‌ازای J ای، آن‌را می‌توان در $[0,1]^J$ نشاند. بنابراین، می‌توان فرض‌کردکه $Z \subset [0,1]^J$. اکنون، نگاشت

$$g: X \longrightarrow Z \subset [0,1]^J \subset R^J$$

را در نظر می‌گیریم. هرتابع مؤلفه‌ای نگاشت g ، مانند g_α ، تابعی است حقیقی و کراندار و پیوسته بر X ؛ بنابرفرض، g_α را می‌توان به‌نگاشت پیوسته‌ای مانند k_α از Y بتوی R گسترش داد. نگاشت $k: Y \to R^J$ را با ضابطهٔ $k(y)=(k_\alpha(y))_{\alpha \in J}$ تعریف می‌کنیم. k پیوسته است، زیرا R^J دارای توپولوژی حاصل‌ضربی است. مدعی هستیم‌که k در واقع Y را بتوی زیرفضای Z می‌نگارد. زیرا $g(X)$ زیرمجموعهٔ Z است، و $k(X)=g(X)$. چون Z در R^J بسته است، از اینجا نتیجه می‌شودکه $\overline{k(X)} \subset Z$. بنابرپیوستگی k

$$k(Y)=k(\bar{X}) \subset \overline{k(X)}.$$

پس، k نگاشتی است‌که Y را بتوی Z می‌نگارد.

مرحلهٔ ۲. اینک به اثبات قضیه می‌پردازیم. نگاشت احتوای $j_2: X \to Y_2$ را در نظر می‌گیریم، که نگاشتی است پیوسته از X بتوی فضای هاوسدورف فشردهٔ Y_2. چون Y_1 دارای خاصیت‌گسترشی است، بنابرمرحلهٔ ۱، می‌توان j_2 را به‌نگاشتی پیوسته مانند

$f_{۲}:Y_{۱} \rightarrow Y_{۲}$ گسترش داد . همچنین ، می‌توان نگاشت احتوای $j_{۱}:X \rightarrow Y_{۱}$ را به‌نگاشتی پیوسته مانند $f_{۱}:Y_{۲} \rightarrow Y_{۱}$ گسترش‌داد (زیرا $Y_{۲}$ دارای خاصیت گسترشی و $Y_{۱}$ هاوسدورف فشرده است).

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccc} X \subset Y_{۱} & & \\ j_{۲} \downarrow & \swarrow f_{۲} & \\ Y_{۲} & & \end{array} & \qquad\qquad &
\begin{array}{ccc} X \subset Y_{۲} & & \\ j_{۱} \downarrow & \swarrow f_{۱} & \\ Y_{۱} & & \end{array}
\end{array}$$

تابع مرکب $f_{۱}\circ f_{۲}:Y_{۲} \rightarrow Y_{۲}$ واجد این خاصیت است که به‌ازای هر x از X ، داریم $x = ((x)f_{۲})f_{۱}$. بنابراین ، $f_{۱}\circ f_{۲}$ گسترشی پیوسته است از نگاشت همانی $i_X:X \rightarrow X$. اما نگاشت همانی $Y_{۱}$ نیز گسترشی پیوسته از i_X است . بنابریکتایی گسترش (لم ۲.۳)، $f_{۱}\circ f_{۲}$ باید مساوی نگاشت همانی $Y_{۱}$ باشد. همچنین، $f_{۲}\circ f_{۱}$ باید برابر نگاشت همانی $Y_{۲}$ باشد. بنابراین، $f_{۱}$ و $f_{۲}$ هومئومورفیسم هستند. □

تمرینها

۱. احکامی را که در مثالهای ۱ و ۲ آوردیم ثابت کنید.

۲. ثابت کنید که تابع پیوستهٔ کراندار $g:(۰,۱) \rightarrow R$ با ضابطهٔ $g(x) = \cos(۱/x)$ را نمی‌توان به‌فضای فشرده‌شدهٔ مثال ۳ گسترش‌داد. نشاننده‌ای مانند $h:(۰,۱) \rightarrow R^{۳}$ تعریف کنید به‌طوری که توابع x ، $\sin(۱/x)$ ، $\cos(۱/x)$ همگی به‌فشرده‌شدهٔ القاشده به‌وسیلهٔ h گسترش‌پذیر باشند.

۳. تحت چه‌شرایطی یك‌فضای متریك‌پذیر می‌تواند فشرده‌شده‌ای متریك‌پذیر داشته‌باشد؟

۴. فرض کنید Y فشرده‌شدهٔ دلخواهی از X باشد ، و $\beta(X)$ فشرده‌شدهٔ استون - چخ آن باشد . ثابت کنید که نگاشت بستهٔ پوشای پیوسته‌ای مانند $g:\beta(X) \rightarrow Y$ وجود دارد که بر X مساوی تابع همانی است.

[این‌تمرین بدقت معلوم می کند که منظور ما از بیان‌این‌مطلب که $\beta(X)$ فشرده‌شدهٔ «ماکزیمال» است چیست. اگر با فضاهای خارج‌قسمتی مأنوس باشید ، متوجه می‌شوید که g نگاشتی خارج قسمتی است. بدین‌ترتیب، هرفشرده‌شدهٔ X با یك فضای خارج‌قسمتی $\beta(X)$ هم‌ارز است.]

۵. (الف) ثابت کنید که هرتابع پیوستهٔ حقیقی که بر S_{Ω} تعریف‌شده‌باشد «سرانجام ثابت» است. [راهنمایی: نخست ، ثابت کنید که به‌ازای هر ε ، عضوی مانند α از

S_Ω وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $\alpha < \beta$، داریم $\varepsilon > |f(\beta)-f(\alpha)|$.
سپس، قراردهید $\varepsilon = 1/n$، که درآن $n \in Z_+$، و α_n ها نقاط متناظر به‌آنها را درنظر بگیرید.]
(ب) ثابت کنید که فشرده‌شدهٔ تك نقطه‌ای S_Ω با فشرده‌شدهٔ استون ـ چخ آن هم‌ارز است.
(پ) نتیجه بگیرید که هرفشرده‌شدهٔ S_Ω با فشرده‌شدهٔ تك‌نقطه‌ای آن هم‌ارز است.

۶. فرض کنید فضای X تماماً منتظم باشد. ثابت کنید که X همبند است اگر وفقط اگر $\beta(X)$ همبند باشد. [راهنمایی: اگر $X = A \cup B$ یك جداسازی X باشد، فرض کنید به‌ازای هر $x \in A$، $f(x) = 0$ و به‌ازای هر $x \in B$، $f(x) = 1$.]

۷. فرض کنید فضای X گسسته‌باشد. $\beta(X)$ را درنظر بگیرید.
(الف) ثابت کنید که اگر $A \subset X$ آنگاه $\bar{A}$ و $\overline{X-A}$ جدا از هم‌اند [بستارها در $\beta(X)$ در نظر گرفته می‌شوند].
(ب) ثابت کنید که اگر U در $\beta(X)$ باز باشدآنگاه $\bar{U}$ در $\beta(X)$ باز است.
(پ) ثابت کنید که $\beta(X)$ کاملاً ناهمبند است.

۸. ثابت کنید که عدد اصلی $\beta(Z_+)$ دست‌کم به‌بزرگی عدد اصلی I^I است، که درآن $I = [0, 1]$. [راهنمایی: بنا برتمرین ۱۳ از بخش ۴ ـ ۱، I^I دارای زیرمجموعهٔ چگال شمارایی است.]

۹. ثابت کنید که اگر $\beta(X) \neq X$ آنگاه $\beta(X)$ متریك‌پذیر نیست. [راهنمایی: ثابت کنید که اگر X نرمال و y نقطه‌ای از $\beta(X)-X$ باشد آنگاه y حد دنباله‌ای ازنقاط X نیست.]

۶

قضایای متریسازی و پیرافشردگی

قضیهٔ متریسازی اوریسون که درفصل ۴ آمد نخستین مرحله ـ و بحق گامی عظیم ـ به سوی پاسخی به‌این پرسش بود که: چه‌وقت فضایی توپولوژیك متری‌پذیر است؟ آن قضیه شرایطی راکه تحت‌آن X متری پذیر است عرضه می‌دارد: منتظم‌بودن و پایهٔ شمارا داشتن. اما ریاضیدانان مادامی‌که امید به‌اثبات قضیه‌ای قویتر باشد هرگز به‌اثبات قضیه‌ای ضعیفتر قناعت نمی‌کنند. در مورد حاضر می‌توان با یافتن شرایطی لازم وکافی برای متریك‌پذیری X، به‌تواناترکردن این‌قضیه امیدوار بود؛ یعنی، شرایطی معادل با متریك‌پذیری.

می‌دانیم که فرض منتظم‌بودن در قضیهٔ متری‌پذیری اوریسون لازم است، اما شرط دارابودن پایه‌ای شمارا لازم نیست. بنابراین،کار بدیهی ما این است که به‌جای شرط داشتن پایه‌ای شمارا، شرط ضعیفتری را قرار دهیم. یافتن چنین شرطی کار ظریفی است؛ این شرط باید آن‌قدر قوی باشدکه مستلزم متری پذیری باشد، ودرعین‌حال آن‌قدر ضعیف که همهٔ فضاهای متری پذیر درآن صدق کنند. درچنین وضعی،کشف فرضی مناسب قسمت عمدهٔکار است.

شرطی که‌سرانجام به‌وسیلهٔ ج. ناگاتا[1] و ی. اسمیرنوف[2] مستقلاً تقریرشد، متضمن مفهومی جدید موسوم به‌متناهی‌بودن موضعی‌است. گردایه‌ای مانند $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های فضای X را موضعاً متناهی خوانیم درصورتی‌که هرنقطهٔ X دارای همسایگی‌ای باشدکه فقط تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ را قطع می‌کند.

---

1. J. Nagata   2. Y. Smirnov

دراین‌صورت روشی برای بیان این‌شرط که‌شمارایی پایهٔ $\mathscr{B}$، این است که بگوییم، $\mathscr{B}$ را می‌توان به‌صورت

$$\mathscr{B}=\bigcup_{n\in Z_+}\mathscr{B}_n$$

نمایش داد، که در آن هریك از گردایه‌های $\mathscr{B}_n$ متناهی است. البته، روش جالبی برای بیان شمارابودن $\mathscr{B}$ نیست، ولی این مزیت را دارد که راهگشای فرمولبندی صورتی ضعیفتر از آن باشد. شرط ناگاتا ـ اسمیرنوف آن است که پایهٔ $\mathscr{B}$ را بتوان به‌صورت

$$\mathscr{B}=\bigcup_{n\in Z_+}\mathscr{B}_n$$

نوشت، که در آن هریك ازگردایه‌های $\mathscr{B}_n$ موضعاً متناهی باشد. در این‌صورت، گوییم که گردایهٔ $\mathscr{B}$ موضعاً متناهی شمارشی است. با کمال شگفتی، این‌شرط، همراه با شرط منتظم‌بودن، برای متری پذیری X هم لازم است وهم‌کافی.

در بخش ۶ ـ ۱ مفهوم متناهی بودن موضعی را مطالعه می‌کنیم. در بخش ۶ ـ ۲ ثابت می‌کنیم که شرط ناگاتا اسمیرنوف برای X، همراه باشرط منتظم بودن، مستلزم متریك‌پذیری X است؛ برهان اقتباسی است از برهان قضیهٔ متریسازی اوریسون. در بخش ۶ ـ ۳ ثابت می‌کنیم متری پذیری مستلزم شرط ناگاتا ـ اسمیرنوف است؛ در این برهان از قضیهٔ خوشترتیبی استفاده می‌شود.

در توپولوژی مفهوم دیگری وجود دارد که متضمن مفهوم متناهی‌بودن موضعی است، و آن تعمیمی است از فشردگی موسوم به «پیرافشردگی». اگر چه این‌مفهوم از مفاهیم نسبتاً متأخر توپولوژی است، ولی، معلوم شده که دربسیاری از بخشهای ریاضیات مفید است. منظور ما از معرفی این‌مفهوم این است که بتوانیم دستهٔ دیگری از شرایط لازم وکافی برای متریك‌پذیری X را عرضه کنیم. چنانکه خواهیم دید، X متری پذیر است اگر و فقط اگر پیرافشرده وموضعاً متری پذیر باشد. اثبات این حکم را در بخش ۶ ـ ۵ می‌آوریم.

بعضی از بخشهای این فصل مستقل از یکدیگرند. وابستگی بین آنها در نمودار ذیل بیان شده است:

بخش ۶ ـ ۱ متناهی‌بودن موضعی.

بخش ۶ ـ ۲ قضیهٔ ناگاتا ـ اسمیرنوف (کفایت).

بخش ۶ ـ ۳ قضیهٔ ناگاتا ـ اسمیرنوف (لزوم).

بخش ۶ ـ ۴ پیرافشردگی.

بخش ۶ ـ ۵ قضیهٔ متریسازی اسمیرنوف.

۶-۱ متناهی‌بودن موضعی

دراین‌بخش بعضی از خواص مقدماتی گردایه‌های موضعاً متناهی را ثابت می‌کنیم.

تعریف . فرض‌کنیم X فضایی توپولوژیك باشد. گردایهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X **موضعاً متناهی** خوانیم در صورتی که هرنقطهٔ X همسایگی‌ای داشته باشد که فقط تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ را قطع کند.

مثال ۱. گردایهٔ بازه‌های

$$\mathcal{A}=\{(n,\ n+۲)\mid n\in Z\}$$

را در فضای توپولوژیك R موضعاً متناهی است، واثبات آن‌را به‌خواننده واگذار می‌کنیم. همچنین است گردایهٔ

$$\mathcal{B}=\{(n,\ ۲n)\mid n\in Z_+\}.$$

لیکن، نه گردایهٔ

$$\mathcal{C}=\left\{\left(\circ,\frac{1}{n}\right)\middle|\, n\in Z_+\right\}$$

در R موضعاً متناهی است و نه گردایهٔ

$$\mathcal{D}=\left\{\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\middle|\, n\in Z_+\right\}.$$

۱.۰ لم فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ گردایه‌ای موضعاً متناهی از زیرمجموعه‌های X باشد. در این‌صورت :

(الف) هرزیرگردایهٔ $\mathcal{A}$ موضعاً متناهی است.

(ب) گردایهٔ $\mathcal{B}=\{\bar{A}\}_{A\in\mathcal{A}}$ از بستارهای اعضای $\mathcal{A}$ موضعاً متناهی است .

(پ) $\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A}=\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\bar{A}$.

برهان. حکم (الف) بدیهی است. برای اثبات (ب)، ملاحظه می‌کنیم که هر مجموعهٔ باز، مانند U، که مجموعهٔ $\bar{A}$ را قطع کند الزاماً A را نیز قطع می‌کند. بنابراین، اگر U یك همسایگی x باشد که تنها تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{A}$، مانند A ها، را قطع کند آنگاه U می‌تواند حداکثر همان تعداد مجموعه از اعضای گردایهٔ $\mathcal{B}$ را قطع کند. (البته، ممکن است که عدهٔ کمتری از مجموعه‌های $\mathcal{B}$ را قطع کند . زیرا، ممکن است $\bar{A}_1$ و $\bar{A}_۲$ مساوی باشند درحالی‌که A_1 و $A_۲$ متفاوت‌اند.)

برای اثبات (پ)، فرض‌کنیم Y نمایش اجتماع اعضای $\mathcal{A}$ باشد:

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A=Y.$$

درحالت‌کلی، $\bigcup \bar{A}\subset \bar{Y}$؛ اینک، با فرض متناهی‌بودن موضعی، ثابت می‌کنیم‌که $\bar{Y}\subset\bigcup\bar{A}$. فرض‌کنیم $x\in\bar{Y}$؛ U را یك‌همسایگی x می‌گیریم‌که تنها تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{A}$، مثلاً A_1، . . .، A_k را قطع می‌کند. مدعی هستیم‌که x به‌یکی از مجموعه‌های $\bar{A}_1$، . . .، $\bar{A}_k$ تعلق دارد، و در نتیجه، متعلق است به $\bigcup\bar{A}$. زیرا، اگر چنین نباشد، مجموعهٔ $U-\bar{A}_1-\ldots-\bar{A}_k$ یك‌همسایگی x است‌که هیچ عضو $\mathcal{A}$، و در نتیجه Y را قطع نمی‌کند، واین خلاف فرض $x\in\bar{Y}$ است. □

در تمرینات بخش ۲ ــ ۷ و بخش ۴ ــ ۵، مفهومی از متناهی‌بودن موضعی را برای خانواده‌ای اندیسدار از زیرمجموعه‌های X تعریف‌کردیم. خانوادهٔ اندیسدار $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ را یك‌خانوادهٔ اندیسدار موضعاً متناهی خوانیم در صورتی‌که هر x از X همسایگی‌ای داشته‌باشدکه تنها به‌ازای تعدادی متناهی از مقادیر α، مجموعهٔ A_α را قطع‌کند. چه رابطه‌ای بین‌دوبیان مذکور برای‌تعریف متناهی‌بودن موضعی وجود دارد؟ به‌آسانی می‌توان دید که $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ یك خانوادهٔ اندیسدار موضعاً متناهی است اگر و فقط اگر به‌عنوان گردایه‌ای از مجموعه‌ها موضعاً متناهی باشد و هرزیرمجموعهٔ ناتهی A از X حداکثر به‌ازای تعدادی متناهی از مقادیر α مساوی A_α باشد.

در این فصل ما کاری با خانواده‌های اندیسدار موضعاً متناهی نخواهیم داشت، مگر در یکی دو تمرین.

تعریف. گردایهٔ $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X را **موضعاً متناهی شمارشی** خوانیم در صورتی‌که $\mathcal{B}$ را بتوان به‌صورت اجتماعی شمارا از گردایه‌هایی مانند $\mathcal{B}_n$ نوشت، که هرکدام ازآنها موضعاً متناهی است.

اغلب نویسندگان اصطلاح «σ ـ موضعاً متناهی» را برای این مفهوم به کار می‌برند. حرف σ ازنظریهٔ اندازه گرفته شده‌است وبه‌جای عبارت «اجتماع‌شمارای» به‌کارمی‌رود. ملاحظه کنید که هم گردایهٔ شمارا و هم گردایهٔ موضعاً متناهی هر دو موضعاً متناهی شمارشی هستند.

تمرینها

۱. احکام درمثال ۱ را تحقیق‌کنید.

۲. رابطه‌ای را که در فوق بین متناهی‌بودن موضعی برای گردایه‌ای از مجموعه‌ها و

برای‌خانواده‌ای اندیسدار ازمجموعه‌های ذکرشده تحقیق کنید.

۳. یك‌پوشش بازنقطه-متناهی از R مانند $\mathcal{A}$ بیابید که موضعاً متناهی نباشد. [گردایه $\mathcal{A}$ را نقطه-متناهی گوییم در صورتی‌که هر نقطهٔ R تنهـا در تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ واقع باشد.]

۴. مثالی ازگردایه‌ای از مجموعه‌ها مـانند $\mathcal{A}$ بیاورید که موضعـاً متناهی نباشد، ولی گردایهٔ $\mathcal{B}=\{\bar{A}|A\in\mathcal{A}\}$ موضعاً متناهی باشد.

۵. ثابت کنیدکه اگر X پایه‌ای شمارا داشته‌باشد، گردایهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های X موضعاً متناهی شمارشی است اگر وفقط اگرشمارا باشد.

۶. R^{ω} را بـا توپولوژی جعبه‌ای در نظر بگیرید. گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های R^{ω} بیابیدکه موضعاً متناهی شمارشی باشد اما نه‌شمارا باشد ونه موضعاً متناهی.

۷. بسیاری از فضاها دارای پایهٔ شمارا۱ هستند؛ اما هیچ فضای هاوسدورفی دارای پایهٔ موضعاً متناهی نیست، مگرآنکه گسسته باشد. این‌حکم را ثابت کنید.

۸. فضایی‌بیابیدکه پایهٔ موضعاً متناهی شمارشی‌داشته‌باشد، ولی،پایهٔ‌شمارا نداشته‌باشد.

۶-۲ قضیهٔ متریسازی ناگاتا-اسمیرنوف (کفایت)

اکنون ثابت می‌کنیم که منتظم‌بودن وشرط ناگاتا-اسمیرنوف برای اثبات متری پذیری یك‌فضا کفایت می‌کنند.

این‌برهان بسیار نزدیك به دومین برهانی‌است‌که برای قضیهٔ متریسازی اوریسون آوردیم. دراین برهان نگاشتی ساختیم ازفضای X بتوی فضای R^{ω} که نسبت به‌متریك متشابه $\bar{\rho}$ بر R^{ω} نشاننده بود. حال، نکات اصلی آن برهـان را مرور می‌کنیم. اولین مرحلهٔ برهان، اثبات این‌حکم بودکه هرفضای منتظم بـا پایهٔ شمارا نرمال است. مرحلهٔ دوم، ساختن‌گردایه‌ای شمارا از توابع با مقادیر حقیقی بر X مانند $\{f_n\}$ بودکه نقاط را از مجموعه‌هـای بسته جدا می‌کرد. و مرحلهٔ سوم، استفاده از توابع f_n بود برای نشاندن X درفضای متری $(R^{\omega},\bar{\rho})$.

برای اثبات قضیهٔ ناگاتا-اسمیرنوف باید هر یك از این مراحل را تعمیم دهیم. اولاً، ثابت می‌کنیم که یك‌فضای منتظم با پایهٔ موضعاً متناهی شمارشی نرمال است. ثانیاً، گردایهٔ خاصی از توابع بـامقادیر حقیقی مانند $\{f_\alpha\}$ بر X می‌سازیم. ثـالثاً، بـا استفـاده از این توابع به‌ازای مجموعه‌ای مـانند J، X را در فضای متری $(R^J,\bar{\rho})$ می‌نشانیم.

پیش از شروع، لازم است که مفهوم مجموعهٔ G_δ راکه قبلاً در تمرینها آورده‌ایم یادآوری کنیم.

تعریف. زیرمجموعهٔ A از فضای X را یك **مجموعهٔ** G_δ خوانیم درصورتی که مساوی مقطع گردایه‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های باز X باشد.

مثال ۱. واضح است که هرزیرمجموعهٔ باز X یك‌مجموعهٔ G_δ است. در یك فضای هاوسدورف شمارای نوع‌اول، هرمجموعهٔ تك‌عضوی یك‌مجموعهٔ G_δ است. می‌توان ثابت‌کرد که زیرمجموعهٔ تك‌عضوی $\{\Omega\}$ از $\bar{S}_\Omega$ یك‌مجموعهٔ G_δ نیست.

مثال ۲. در فضای متری X، هـرمجموعهٔ بسته یك‌مجموعهٔ G_δ است. به‌ازای زیرمجموعهٔ مفروض A از X، مجموعهٔ $U(A, \varepsilon)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$U(A, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon).$$

اگر A بسته باشد، می‌توان ثابت‌کرد که

$$A = \bigcap_{n \in Z_+} U\left(A, \frac{1}{n}\right).$$

۱۰۲. لم فرض‌کنیم X فضایی منتظم باشد با پایه‌ای مانند $\mathscr{B}$ که موضعاً متناهی شمارشی‌است. در این‌صورت، X نرمال است، و هر مجموعهٔ بسته در X یك مجموعهٔ G_δ در X است.

برهان. مرحلهٔ۱. فرض‌کنیم W در X باز باشد. ثابت می‌کنیم که گردایه‌ای شمارا مانند $\{U_n\}$ از مجموعه‌های باز X وجود دارد به‌طوری که

$$W = \bigcup U_n = \bigcup \bar{U}_n.$$

چون پایهٔ $\mathscr{B}$ برای X موضعاً متناهی شمارشی‌است، می‌توان نوشت $\mathscr{B} = \bigcup \mathscr{B}_n$، که درآن هر گردایهٔ $\mathscr{B}_n$ موضعاً متناهی است. فرض‌کنیم $\mathscr{C}_n$ گردایه‌ای از اعضای پایه باشدکه به‌ازای هرعضو B ازآن داشته باشیم $B \in \mathscr{B}_n$ و $\bar{B} \subset W$. دراین‌صورت، $\mathscr{C}_n$ موضعاً متناهی است، چون زیرگردایه‌ای از $\mathscr{B}_n$ است. حال مجموعهٔ U_n را چنین تعریف می‌کنیم:

$$U_n = \bigcup_{B \in \mathscr{C}_n} B.$$

در این‌صورت، U_n یك‌مجموعهٔ باز است، وبنابرلم ۱۰۱،

$$\bar{U}_n = \bigcup_{B \in \mathscr{C}_n} \bar{B}$$

بنابراین $\bar{U}_n \subset W$، در نتیجه،

$$\bigcup U_n \subset \bigcup \bar{U}_n \subset W.$$

مدعی هستیم که تساوی برقرار است. به‌ازای عضو مفروضی از W مانند x، بنابر منتظم بودن X، عضو پایه‌ای مانند B از $\mathcal{B}$ موجود است به‌طوری که $x \in B$ و $\bar{B} \subset W$. اما nی وجود دارد که $B \in \mathcal{B}_n$. در این صورت، بنابر تعریف، $B \in \mathcal{C}_n$، و در نتیجه، $x \in U_n$. بنابراین، $W \subset \bigcup U_n$، و این همان است که می‌خواستیم.

مرحلهٔ ۲. ثابت می‌کنیم که هرمجموعهٔ بستهٔ C از X، یك مجموعهٔ G_δ در X است. به‌ازای C مفروض، فرض کنیم $W = X - C$. بنابرمرحلهٔ ۱، مجموعه‌هایی مانند U_n در X وجود دارند به‌طوری که $W = \bigcup \bar{U}_n$. در این‌صورت،

$$C = \bigcap (X - \bar{U}_n),$$

و در نتیجه، C مساوی است با مقطعی شمارا ازمجموعه‌های باز X.

مرحلهٔ ۳. اکنون، ثابت‌می‌کنیم که X نرمال‌است. فرض‌کنیم C و D مجموعه‌های بستهٔ جدا ازهمی در X باشند. با به‌کار گیری مرحلهٔ ۱ در مورد مجموعهٔ باز $X - D$، گردایهٔ شمارای $\{U_n\}$ ازمجموعه‌های باز را چنان می‌سازیم که

$$\bigcup U_n = \bigcup \bar{U}_n = X - D.$$

در این صورت، $\{U_n\}$ مجموعهٔ C را می‌پوشاند و هر مجموعهٔ $\bar{U}_n$ از D جداست. همچنین، پوششی شمارا مانند $\{V_n\}$ برای D از مجموعه‌های باز را چنان می‌سازیم که بستارهایشان از C جدا باشند.

اینك، به‌وضعی بازگشته‌ایم که در اثبات نرمال‌بودن یك‌فضای منتظم با پایهٔ شمارا پیش‌آمد (قضیهٔ ۵.۲ در فصل ۴). می‌توانیم‌آن برهان را کلمه به‌کلمه تکرار کنیم. برای این منظور، مجموعه‌های U'_n و V'_n را چنین تعریف می‌کنیم:

$$V_n' = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i \quad \text{و} \quad U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i$$

در این‌صورت، مجموعه‌های

$$V' = \bigcup_{n \in Z_+} V'_n \quad \text{و} \quad U' = \bigcup_{n \in Z_+} U'_n$$

مجموعه‌های باز از هم‌جدایی هستندکه، بترتیب، حاوی C و D هستند. □

۲.۲ قضیه فرض‌کنیم X فضایی منتظم‌باشد باپایه‌ای مانند $\mathcal{B}$ که موضعاً متناهی شمارشی است. در این صورت، X متری‌پذیراست.

برهان. مرحلهٔ ۱. نخست، ثابت می‌کنیم که اگر W در X باز باشد، تابعی‌پیوسته مانند $f:X \rightarrow [\text{۰}, \text{۱}]$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای $x \in W$، داریم $f(x) > \text{۰}$ و به‌ازای $x \notin W$، داریم $f(x) = \text{۰}$.

بنابرلم پیش، هرمجموعهٔ بستهٔ X مساوی مقطعی شمارا از مجموعه‌هـای باز X است. بـا متمم‌گیری، از اینجا نتیجه می‌شود که مجموعهٔ باز W اجتماعی شمارا از مجموعه‌های بستهٔ A_n در X است. با استفاده از نرمال‌بودن X، به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، تابعی پیوسته مانند $f_n:X \rightarrow [\text{۰}, \text{۱}]$ را چنان برمی‌گزینیم که

$$f_n(X - W) = \{\text{۰}\} \quad \text{و} \quad f_n(A_n) = \{\text{۱}\}.$$

حال تابع f را چنین تعریف می‌کنیم: $f(x) = \sum f_n(x)/\text{۲}^n$. از مقایسهٔ این سری با $\sum \text{۱}/\text{۲}^n$، نتیجه می‌شود که سری $\sum f_n(x)/\text{۲}^n$ همگرای یکنواخت است، بنابراین، f پیوسته است. همچنین، f بر W مثبت است وخارج از W صفر می‌شود.

مرحلهٔ ۲. فرض کنیم $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$، که درآن هر گردایهٔ $\mathcal{B}_n$ موضعاً متناهی است. به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، وهرعضو پایهٔ $\mathcal{B}_n$، مانند B، تابعی پیوسته مانند

$$f_{n,B} : X \longrightarrow \left[\text{۰}, \frac{\text{۱}}{n}\right]$$

اختیار می‌کنیم کـه به‌ازای هر x که $x \in B$، $f_{n,B}(x) > \text{۰}$، و به‌ازای هر x که $x \notin B$، $f_{n,B}(x) = \text{۰}$. گردایهٔ $\{f_{n,B}\}$ نقـاط را ازمجموعه‌های بستهٔ در X جدا می‌سازد: اگر $x_\text{۰}$ نقطهٔ مفروضی‌باشد و U یك‌همسایگی $x_\text{۰}$ باشد، عضو پایه‌ای مانند B وجوددارد به‌طوری‌که $x_\text{۰} \in B \subset U$. دراین‌صورت، nای هست که $B \in \mathcal{B}_n$، ودرنتیجه، $f_{n,B}(x_\text{۰}) > \text{۰}$ و $f_{n,B}$ خارج از U صفر می‌شود.

فرض‌کنیم J زیرمجموعه‌ای از $Z_+ \times \mathcal{B}$ باشدکه ازهمهٔ زوجهایی مانند (n, B) که $B \in \mathcal{B}_n$ تشکیل‌شده است. تابع

$$F: X \longrightarrow [\text{۰}, \text{۱}]^J$$

را باضابطهٔ

$$F(x) = (f_{n,B}(x))_{(n,B) \in J}$$

تعریف می‌کنیم. بنابرقضیهٔ نشاندن در بخش ۴-۴، نگاشت F نسبت به توپولوژی حاصل‌ضربی در $[\text{۰}, \text{۱}]^J$ نشاننده است.

البته، درحالت کلی، $[\text{۰}, \text{۱}]^J$ متری‌پذیر نیست. بنابراین،هنوز قضیهٔ متریسـازی اثبات نشده است.

مرحلهٔ ۳. اینك، $[\text{۰}, \text{۱}]^J$ را به‌توپولوژی القا شده به‌وسیلهٔ متریك یکنواخت $\bar{\rho}$

مجهز می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که F، نسبت به‌این توپولوژی نیز، نشانده‌است. توپولوژی یکنواخت ظریفتر (بزرگتر) از توپولوژی حاصل‌ضربی است. بنابراین، نسبت به‌متریك یکنواخت، نگاشت F یك به‌یك است ومجموعه‌های باز X را بروی مجموعه‌های باز فضای تصویر $Z=F(X)$ می‌نگارد. برای اثبات پیوستگی F باید برهان جداگانه‌ای بیاوریم.

ملاحظه می‌کنیم که متریك یکنواخت، برزیرفضای $[0,1]^J$ از R^J مساوی است با متریك

$$\rho((x_\alpha),(y_\alpha))=\operatorname{lub}\{|x_\alpha-y_\alpha|\}.$$

برای اثبات‌پیوستگی، نقطه‌ای مانند x_0 از X اختیار می‌کنیم وعدد $0<\varepsilon$ را مفروض می‌گیریم، وهمسایگی‌ای از x_0، مانند W را چنان می‌یابیم که

$$x\in W \implies \rho(F(x),F(x_0))<\varepsilon.$$

فرض کنیم n فعلاً ثابت باشد. همسایگی‌ای‌از x_0، مانند U_n راچنان‌انتخاب می‌کنیم که تنها تعدادی متناهی از اعضای گردایهٔ $\mathcal{B}_n$ را قطع کند. در نتیجه وقتی B گردایهٔ $\mathcal{B}_n$ را طی می‌کند، همهٔ توابع $f_{n,B}$، مگر تعدادی متناهی از آنها، بر U_n صفرمی‌شوند. چون هر تابع $f_{n,B}$ پیوسته است، می‌توان همسایگی‌ای مانند V_n از x_0 را چنان‌انتخاب کرد که جزء U_n باشد، و به‌ازای $B\in\mathcal{B}_n$، تغییرات هریك از توابع $f_{n,B}$ بر V_n حداکثر $\varepsilon/2$ باشد.

به‌ازای هر n از Z_+، V_n را چنین همسایگی‌ای از x_0 می‌گیریم. سپس، N را طوری اختیار می‌کنیم که $1/N\leqslant\varepsilon/2$، و W را چنین تعریف می‌کنیم:

$$W=V_1\cap\cdots\cap V_N.$$

مدعی هستیم کـه W همان همسایگی مطلوب برای x_0 است. فرض‌کنیم $x\in W$. اگر $n\leqslant N$ آنگاه

$$|f_{n,B}(x)-f_{n,B}(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

زیرا تابع $f_{n,B}$ یا صفر می‌شود و یـا حداکثر به‌میزان $\varepsilon/2$ بر W تغییر می‌کند. اگر $n>N$ آنگاه

$$|f_{n,B}(x)-f_{n,B}(x_0)|\leqslant\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

زیرا $f_{n,B}$ فضای X را بتوی $[0,1/n]$ می‌نگارد. پس،

$$\rho(F(x),F(x_0))\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

و این همان است که می‌خواستیم. □

تمرینها

۱. (الف) ثابت کنید که در هر فضای متری هرمجموعهٔ بسته مجموعه‌ای G_δ است.
(ب) ثابت کنید که مجموعهٔ اعداد گنگ مجموعه‌ای G_δ در R است.

۲. زیرمجموعهٔ W از X را یك «مجموعهٔ F_σ» در X گوییم در صورتی که W مساوی اجتماعی شمارا از مجموعه‌های بستهٔ X باشد. نشان دهید که W یك مجموعهٔ F_σ در X است اگر وفقط اگر $X-W$ یك مجموعهٔ G_δ در X باشد.
[اصل این اصطلاح فرانسوی است. حرف «F» برای واژهٔ «fermé» است که به‌معنی «بسته» است وحرف σ برای واژهٔ «somme» است که به‌معنی «اجتماع» است.]

۳. فرض کنید $(X$ و $d)$ فضایی متری باشد. ثابت کنید که اگر U در X باز باشد آنگاه تابع

$$f(x)=d(x,\ X-U)$$

بر U مثبت است و برخارج از U صفر می‌شود. (تابع $d(x,\ A)$ در تمرین ۴ در بخش ۳ ـ ۶ تعریف شده است.)

۶ـ۳ قضیهٔ ناگاتا ـ اسمیرنوف (لزوم)

اینك، ثابت می‌کنیم که هرفضای متری پذیر دارای یك‌پایهٔ موضعاً متناهی شمارشی است. و بدین‌ترتیب اثبات قضیهٔ متریسازی ناگاتا ـ اسمیرنوف کامل می‌شود.

تعریف. فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های فضای X باشد. گردایهٔ $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X را یك **تظریف** $\mathcal{A}$ خوانیم (یاگوییم $\mathcal{A}$ را ظریف می‌کند) در صورتی که به‌ازای هرعضو $\mathcal{B}$ مانند B، عضوی مانند A از $\mathcal{A}$ یافت شود به‌طوری‌که حاوی B باشد. اگر اعضای $\mathcal{B}$ مجموعه‌های بازی باشند، $\mathcal{B}$ را یك **تظریف باز** $\mathcal{A}$ می‌نامیم؛ واگر اعضای B بسته باشند، $\mathcal{B}$ را یك **تظریف بستهٔ** $\mathcal{A}$ می‌نامیم.

اولین مرحله دربرهان لزوم شرط ناگاتا ـ اسمیرنوف لم ذیل است. این لم را در بخش بعد تعمیم می‌دهیم.

۳.۱. لم فرض‌کنیم X فضایی متری‌پذیرباشد. اگر $\mathcal{A}$ پوششی باز برای X باشد آنگاه‌گردایه‌ای مانند $\mathcal{D}$ اززیرمجموعه‌های X وجود دارد به‌طوری‌که:

(۱) $\mathcal{D}$ یک‌پوشش باز X است.
(۲) $\mathcal{D}$ یک‌تظریف $\mathcal{A}$ است.
(۳) $\mathcal{D}$ موضعاً متناهی شمارشی است.

برهان. در اثبات این قضیه به‌قضیهٔ خوشترتیبی نیاز داریم. برای گردایهٔ $\mathcal{A}$ خوشترتیبی‌ای مانند $>$ انتخاب می کنیم. اعضای نوعی $\mathcal{A}$ را باحروف U، V، W،... نمایش می‌دهیم.

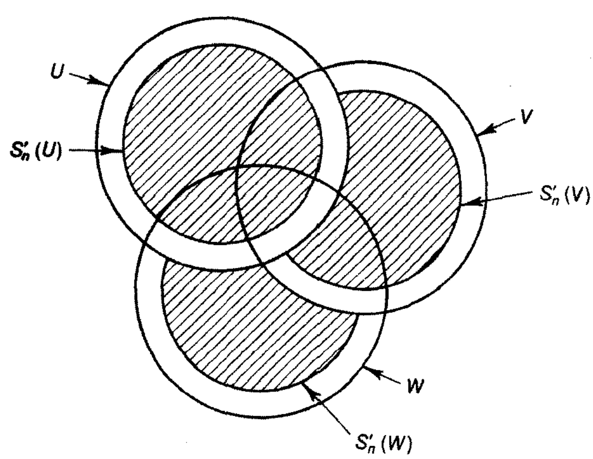
متریکی برای X در نظر می گیریم. فرض کنیم n عدد صحیح مثبتی باشد، که فعلاً ثابت است. به‌ازای عضوی مفروض مانند U از $\mathcal{A}$، مجموعهٔ $S_n(U)$ را زیرمجموعه‌ای از U تعریف می کنیم که به‌وسیلهٔ «درهم کشیدن» U به‌اندازهٔ $1/n$ به‌دست می‌آید. به‌عبارت دقیقتر، فرض کنیم که

$$S_n(U)=\left\{x \,\middle|\, B\left(x\ ,\ \frac{1}{n}\right)\subset U\right\}.$$

(اگر چه برحسب اتفاق $S_n(U)$ مجموعه‌ای بسته است، اما، این‌مطلب برای منظور ما بی‌اهمیت است.) حال با استفاده از رابطهٔ خوشترتیبی $>$ در $\mathcal{A}$ مجموعهٔ کوچکتری به‌دست می‌آوریم. به‌ازای هر U در $\mathcal{A}$، فرض می کنیم

$$S_n{}'(U)=S_n(U)-\bigcup_{V<U}V.$$

در شکل ۱، وضعی را که در آن $\mathcal{A}$ فقط از سه مجموعهٔ $U<V<W$ تشکیل شده است، نشان داده‌ایم. درست همان‌طور که ازشکل پیداست، مجموعه‌هایی که ساخته‌ایم



شکل ۱ $U<V<W$

ازهم جدا هستند. درواقع، مدعی هستیم که آنها با فاصله‌ای حداقل برابر $۱/n$ از هم جدا شده‌اند. یعنی، اگر V و W اعضای متمایزی از $\mathcal{A}$ باشند، مدعی هستیم که

$$\text{اگر } x \in S'_n(V) \text{ و } y \in S'_n(W) \text{ آنگاه } d(x, y) \geqslant \frac{1}{n}. \qquad (*)$$

برای اثبات این حکم، فرض می‌کنیم علامتها چنان انتخاب شده باشند که $V < W$. حال $x \in S'_n(V)$ مستلزم آن است که $x \in S_n(V)$. و گزارهٔ $y \in S_n'(W)$، بنابرتعریف، مستلزم آن است که $y \notin V$ (زیرا $V < W$). چون $x \in S_n(V)$ و $y \notin V$، باید داشته‌باشیم $d(x, y) \geqslant ۱/n$.

مجموعه‌های $S_n'(U)$ هنوزآنچه که ما می‌خواهیم نیستند، زیرا نمی‌دانیم که آنها مجموعه‌هایی باز هستند یا نه. (درواقع بسته‌اند.) بنابراین، هریك از آنها راکمی بسط می‌دهیم تامجموعهٔ بازی مانند $E_n(U)$رابه‌دست آوریم. بالاخص، فرض می‌کنیم که $E_n(U)$ $۱/۳n$- همسایگی ازمجموعهٔ $S_n'(U)$ باشد؛ یعنی

$$E_n(U) = \bigcup \left\{ B\left(x\,,\,\frac{1}{3n}\right) \middle| \, x \in S_n'(U) \right\}.$$

درحالت $U < V < W$، وضع اخیررا درشکل ۲ تصویرکرده‌ایم. چنانکه ازشکل پیداست، مجموعه‌هایی که تشکیل داده‌ایم ازهم جدا هستند، در حقیقت بافاصله‌ای حداقل برابر $۱/۳n$ از یکدیگر جداشده‌اند. یعنی، اگر V و W اعضای متمایزی از $\mathcal{A}$ باشند، مدعی هستیم که:

$$\text{اگر } x \in E_n(V) \text{ و } y \in E_n(W) \text{ آنگاه } d(x, y) \geqslant \frac{1}{3n}.$$

این‌حکم بلافاصله از (*) و نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود. همچنین، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر V از $\mathcal{A}$ مجموعهٔ $E_n(V)$ جزء V است.

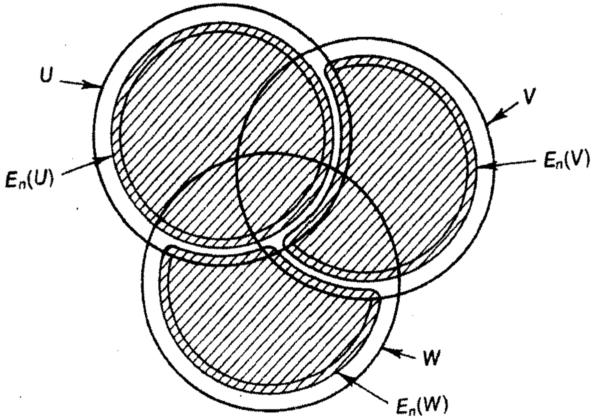
اینك، $\mathcal{E}_n$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{E}_n = \{E_n(U) \mid U \in \mathcal{A}\}.$$

مدعی هستیم که $\mathcal{E}_n$ گردایه‌ای موضعاً متناهی ازمجموعه‌های بازاست وهمچنین $\mathcal{E}_n$ گردایهٔ $\mathcal{A}$ را ظریف می‌کند. این‌حکم که $\mathcal{E}_n$ پوشش $\mathcal{A}$ را ظریف می‌کند ازاین‌امرناشی می‌شود که به‌ازای هر V از $\mathcal{A}$، $E_n(V) \subset V$. موضعاً متناهی بودن $\mathcal{E}_n$ نتیجهٔ این امر است که به‌ازای هر عضو X مانند x، $۱/۶n$- همسایگی نقطهٔ x حداکثر می‌تواند یك عضو $\mathcal{E}_n$ را قطع کند.

البته، گردایهٔ $\mathcal{E}_n$ فضای X را نمی‌پوشاند. (شکل ۲ این مطلب را نشان می‌دهد.) با این وجود، مدعی هستیم که گردایهٔ

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in Z_+} \mathcal{E}_n$$



شکل ۲

X را می‌پوشانند.

فرض کنیم x نقطه‌ای از X باشد. گردایهٔ $\mathcal{A}$، که با آن آغاز کردیم، X را می‌پوشاند؛ فرض کنیم U (با خوشترتیبی $<$) اولین عضو $\mathcal{A}$ باشد که شامل x است. چون U باز است، می‌توانیم n را طوری انتخاب کنیم که $B(x, 1/n) \subset U$. در این صورت، بنابر تعریف، $x \in S_n(U)$. اما، چون U اولین عضو $\mathcal{A}$ است که شامل x است، نقطهٔ x به $S_n'(U)$ تعلق دارد. پس، x نیز به‌عضو $E_n(U)$ از $\mathcal{E}_n$ تعلق دارد، و این همان است که می‌خواستیم.

از اینجا حکم لم نتیجه می‌شود؛ $\mathcal{E}$ گردایهٔ مجموعه‌های باز مطلوب است.□

۲.۳. قضیه اگر X یک فضای متری پذیر باشد آنگاه X دارای یک پایهٔ موضعاً متناهی شمارشی است.

برهان. متریکی برای X درنظر می گیریم. به‌ازای هر m مفروض، $\mathcal{A}^m$ را پوشش بازی از X می گیریم که متشکل ازهمهٔ گویهای باز به‌شعاع $1/m$ باشد؛

$$\mathcal{A}^m = \left\{ B\left(x, \frac{1}{m}\right) \middle| x \in X \right\}$$

بنابرلم پیش، پوششی باز مانند $\mathcal{D}^m$ از X وجود داردکه $\mathcal{A}^m$ را ظریف کند و همچنین موضعاً متناهی شمارشی است. ملاحظه کنیدکه قطر هرعضو $\mathcal{D}^m$ حداکثر برابر $2/m$ است. فرض کنیم

$$\mathcal{D}=\bigcup_{m\in Z_+}\mathcal{D}^m$$

چون هر گردایهٔ $\mathcal{D}^m$ اجتماعی شمارا از گردایه‌هـای موضعاً متناهی است، $\mathcal{D}$ نیز چنین است. مدعی هستیم که $\mathcal{D}$ پایه‌ای برای X است؛ در این‌صورت، قضیه ثابت می‌شود.

ثابت می کنیم که به‌ازای هرعضو X مـانند x و عدد مثبت مفروض ε ، عضوی مانند D از $\mathcal{D}$ یـافت می‌شود که شامل x و جزء $B(x, \varepsilon)$ است. نخست، m را چنان انتخاب می کنیم که $۱/m < \varepsilon/۲$. سپس، چون $\mathcal{D}^m$ فضای X را می‌پوشاند، می‌توانیم عضوی از $\mathcal{D}^m$ مانند D چنان انتخاب کنیم که شامل x باشد. چون D شامل x و قطر آن حداکثر $۲/m$ است و $۲/m<\varepsilon$ ، پس D جزء $B(x, \varepsilon)$ است .

از لم ۳.۲ درفصل ۲ ، نتیجه می‌شود که $\mathcal{D}$ پایه‌ای برای X است.□

تمرینها

۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ گردایهٔ ذیل از زیرمجموعه‌های R باشد:

$$\mathcal{A}=\{(n, n+۲) \mid n\in Z\}.$$

کدامیك از گردایه‌های ذیل $\mathcal{A}$ را ظریف می کند ؟

$$\mathcal{B}=\{(x, x+۱) \mid x\in R\},$$

$$\mathcal{C}=\left\{\left(n\ ,\ n+\frac{۳}{۲}\right)\middle| n\in Z\right\},$$

$$\mathcal{D}=\left\{\left(x,\ x+\frac{۳}{۲}\right)\middle| x\in R\right\}.$$

۲. گردایهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌هـای X را **موضعاً گسسته** خوانیم در صورتی که هرنقطهٔ X یك همسایگی داشته باشد که حداکثر یك عضو $\mathcal{A}$ را قطع کند . گردایه‌ای مانند $\mathcal{B}$ را **موضعاً گسستهٔ شمارشی** (یـا «σ ـ موضعاً گسسته») گوییم در صورتی کـه مساوی اجتماعی شمارا ازگردایه‌های موضعاً گسسته باشد. حکم ذیل را ثابت کنید.

قضیه (قضیهٔ متریسازی بینگ[1]) . فضای X متری پذیر است اگر وفقط اگر منتظم باشد و یك پایهٔ موضعاً گسستهٔ شمارشی داشته باشد.

۶ ـ ۴ پیرافشردگی

مفهوم پیرافشردگی یکی از سودمندترین تعمیمهـای فشردگی است که در سالهـای اخیر

1. Bing

تقریر شده است. این مفهوم بخصوص در توپولوژی جبری و هندسهٔ دیفرانسیل سودمند است. ما تنها یکی از کاربردهای آن را، که در اثبات یك قضیهٔ متریکسازی است، در بخش بعد می‌آوریم.

بسیاری ازفضاهایی که قبلاً باآنها مأنوس شدیم پیرافشرده هستند. مثلاً، هرفضای هاوسدورف فشرده فضایی است پیرافشرده؛ این مطلب نتیجهٔ مستقیمی از تعریف است، همچنین هرفضای متریك‌پذیر فضایی‌است پیرافشرده؛ که این قضیه از آ. ه. استون[1] است وما آن‌را ثابت می‌کنیم. بنا براین، فضاهای پیرافشرده شامل دو رده ازمهمترین فضاهایی است که تا به‌حال مطالعه کرده‌ایم: فضاهای هاوسدورف فشرده، و فضاهای متریك‌پذیر. البته شامل فضاهای دیگری نیز هست. (به‌تمرین ۲ رجوع شود.)

برای اینکه ببینیم چگونه فشردگی به‌پیرافشردگی تعمیم می‌یابد، تعریف فشردگی را یادآوری می‌کنیم: فضای X را فشرده گوییم درصورتی که هرپوشش باز X مانند $\mathcal{A}$ حاوی زیرگردایه‌ای متناهی مانند $\mathcal{A}'$ باشدکه X را می‌پوشاند. بیان زیر معادل همین تعریف است:

فضای X فشرده است درصورتی‌که هرپوشش بازآن دارای یك‌تظریف بازمتناهی باشد که X را بپوشاند.

این تعریف با تعریف معمولی معادل است؛ اگر $\mathcal{B}$ چنین تظریفی باشد، به‌ازای هرعضو $\mathcal{B}$ می‌توان عضوی از $\mathcal{A}$ راکه حاوی‌آن است انتخاب‌کرد؛ بدین‌ترتیب، یك زیرگردایهٔ متناهی از $\mathcal{A}$ به‌دست می‌آیدکه X را می‌پوشاند.

این تقریر جدید فشردگی کمی ناهنجار است، ولی راهی برای تعمیم آن پیش‌پای ما می‌گذارد:

تعریف. فضای X را **پیرافشرده** خوانیم در صورتی که هاوسدورف باشد و هر پوشش بازآن مانند $\mathcal{A}$ دارای یك‌تظریف باز موضعاً متناهی مانند $\mathcal{B}$ باشدکه X را بپوشاند.

مثال ۱. بدیهی است‌که هرفضای هاوسدورف فشرده فضایی است پیرافشرده. خط‌حقیقی R فضای پیرافشرده‌ای است که فشرده نیست. این امرکه R پیرافشرده است نتیجه‌ای از این‌قضیه است‌که هرفضای متریك‌پذیر فضایی‌است پیرافشرده. اما، می‌توان برهان مستقیمی به‌قرار ذیل‌آورد:

فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ پوشش باز دلخواهی برای R باشد. بدازای هرعدد صحیح n، تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که بازهٔ $[n, n+1]$ را بپوشانند، ومقطع هریك از آنها را با بازهٔ باز $(n-۱, n+۲)$ در نظر می‌گیریم. گردایهٔ حاصل از

---

1. A. H. Stone

مجموعه‌های باز را به $\mathcal{B}_n$ نمایش می‌دهیم . در این صورت ، همان‌طور که خود می‌توانید تحقیق کنید، گردایهٔ

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in Z} \mathcal{B}_n$$

یك تظریف باز موضعاً متناهی‌است که R را می‌پوشاند.

بعضی ازخواص فضای پیرافشرده شبیه به‌خواص فضاهای هاوسدورف‌فشرده است. مثلاً ، هرزیرفضای یك‌فضای پیرافشرده الزاماً پیرافشرده نیست؛ اما ، هرزیرفضای بستهٔ آن‌حتماً پیرافشرده است. همچنین، هرفضای پیرافشرده الزاماً نرمال است. ازجهات دیگر، فضاهای پیرافشرده شبیه فضاهای هاوسدورف فشرده نیستند ؛ بخصوص ، حاصل‌ضرب دو فضای پیرافشرده لازم نیست پیرافشرده باشد .

یکی از مفیدترین خواص فضاهـای پیرافشرده آن است که به‌ازای هرپوشش بـاز اندیسدار فضای‌پیرافشردهٔ X مانند $\{U_\alpha\}$ ، یکی افراز واحد مغلوب به‌وسیلهٔ $\{U_\alpha\}$ وجود دارد . خطوط اصلی برهان این مطلب درتمرینهای بخش ۴ ــ ۵ ترسیم شـده است . در این بخش خواص دیگری از فضاهای پیرافشرده راکه ذکرکردیم اثبات می کنیم.

۴۰۱. قضیه هرفضای پیرافشردهٔ X نرمال است.

برهان. برهان آن تـا حدودی شبیه برهانی است که برای نرمـال‌بودن یك‌فضای هاوسدورف فشرده‌آوردیم.

نخست ، منتظم‌بودن فضـا را ثـابت می کنیم . فرض‌کنیم a نقطه‌ای از X و B مجموعه‌ای بسته در X باشدکه $a \notin B$. شرط هاوسدورف به‌ما امکان می‌دهدکه به‌ازای هرعضو B مانند b، مجموعهٔ بازی مانند U_b را حول b چنـان انتخاب کنیم که بستار آن از a جدا باشد. X را با مجموعه‌هـای باز U_b به‌اضافهٔ مجموعهٔ بـاز $X-B$ می‌پوشانیم؛ یك‌تظریف باز موضعاً متناهی این‌پوشش، مـانند $\mathcal{C}$ ، که X را می‌پوشاند اختیـار می کنیم. زیرگردایهٔ $\mathcal{D}$ از $\mathcal{C}$ را متشکل از همهٔ اعضایی از $\mathcal{C}$ که B را قطع می‌کند در نظر می گیریم. در این‌صورت ، $\mathcal{D}$ مجموعهٔ B را می‌پوشاند . بعلاوه ، اگر $D \in \mathcal{D}$ آنگاه $\bar{D}$ از a جداست. چون D مجموعهٔ B را قطع‌می کند ،پس دریك مجموعهٔ U_b قرار می گیردکه بستارش از a جداست. فرض‌کنیم

$$V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D;$$

در این صورت ، V مجموعه‌ای باز در X و حـاوی B است. چون $\mathcal{D}$ موضعاً متناهی است ،

$$\bar{V} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \bar{D},$$

و در نتیجه، $\bar{V}$ از a جداست. بدین‌ترتیب، منتظم‌بودن X ثابت می‌شود .

برای اثبات نرمال‌بودن X ، کافی است همین استدلال‌را تکرارکنیم، وبه‌جای نقطهٔ

a مجموعهٔ بستهٔ A و به‌جای شرط هاوسدورف شرط منتظم‌بودن را قراردهیم. □

۲.۴. قضیه (الف) هرزیرفضای بستهٔ فضایی پیرافشرده فضایی است پیرافشرده.
(ب) زیرفضای دلخواهی از فضایی پیرافشرده لازم نیست پیرافشرده باشد.
(پ) حاصل‌ضرب فضاهای پیرافشرده لازم نیست پیرافشرده باشد.

برهان. فرض کنیم Y زیرفضای بسته‌ای از فضای پیرافشردهٔ X باشد؛ و $\mathscr{A}$ یك پوشش Y است که از مجموعه‌های باز Y تشکیل شده است. به‌ازای هر A از $\mathscr{A}$، مجموعه‌های باز A' از X را چنان برمی گزینیم که $A' \cap Y = A$. فضای X را با مجموعه‌های باز A' ومجموعهٔ باز $X-Y$ می‌پوشانیم. فرض می کنیم که $\mathscr{B}$ یك‌تظریف باز موضعاً متناهی این‌پوشش باشدکه X را می‌پوشاند؛ در این‌صورت، گردایهٔ

$$\mathscr{C} = \{B \cap Y \mid B \in \mathscr{B}\}$$

تظریف باز موضعاً متناهی مطلوب برای $\mathscr{A}$ است.
مثالهای ذیل برقراری احکام (ب) و (پ) را ثابت می‌کنند. □

مثال ۲. فضای $\bar{S}_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ هاوسدورف فشرده است، در نتیجه پیرافشرده است. زیرفضای $S_\Omega \times \bar{S}_\Omega$ پیرافشرده نیست، زیرا نرمال نیست (به‌بخش ۴—۲ مراجعه کنید).

مثال ۳. فضای R_l پیرافشرده است ، اثبات‌آن‌را به‌عنوان تمرین باقی می‌گذاریم. اما، R_l^2 پیرافشرده نیست، زیرا نرمال نیست (به‌بخش ۴—۲ مراجعه‌کنید).

۳.۴. قضیه (قضیهٔ استون) هرفضای متری پذیر فضایی است پیرافشرده.

برهان. فرض‌کنیم X فضایی متریك‌پذیر باشد. قبلاً، با توجه به‌لم ۱.۳ می‌دانیم که هرپوشش باز X تظریفی باز داردکه X را می‌پوشاند و در ضمن موضعاً متناهی شمارشی است. آنچه‌که می‌ماند اثبات این‌حکم است‌که شرط اخیر مستلزم آن است‌که هرپوشش باز X دارای تظریفی باز است که X را می‌پوشاند و موضعاً متناهی است و این نتیجه‌ای است ازلم ذیل. □

۴.۴. لم فرض‌کنیم X منتظم باشد. در این‌صورت، شرایط ذیل در X معادل‌اند:
هرپوشش X تظریفی داردکه

(۱) پوششی باز برای X وموضعاً متناهی شمارشی است.
(۲) پوششی برای X وموضعاً متناهی است.
(۳) پوشش بسته‌ای برای X وموضعاً متناهی است.
(۴) پوششی باز برای X وموضعاً متناهی است.

برهان. اثبات (۱) $\Longleftarrow$ (۴) بدیهی است. آنچه ما برای اثبات قضیهٔ استون نیاز داریم عکس آن است. برای اثبات عکس این حکم، بههرحال باید مراحل (۴) $\Longleftarrow$ (۳) $\Longleftarrow$ (۲) $\Longleftarrow$ (۱) را پیمود. به همین دلیل، برای سهولت اثبات شرایط (۲) و (۳) را درصورت حکم اینلم درج کردهایم.

(۲) $\Longleftarrow$ (۱). فرضکنیم $\mathcal{A}$ یکپوشش باز X باشد، و $\mathcal{B}$ تظریفی باز برای $\mathcal{A}$ که X را میپوشاند وموضعاً متناهی شمارشی است. فرضکنیم

$$\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$$

بهطوری که هر $\mathcal{B}_n$ موضعاً متناهی است. اعضای $\mathcal{B}$ را نوعاً با حروف U، V، W... نمایش میدهیم.

حال، روشی را بهکار میبریم که دراساس همان ابتکار درهمکشیدن است که قبلاً ازآن برای جداساختن مجموعههایی متعلق به $\mathcal{B}_n$های متفاوت استفادهکردیم. بهازای هر i، فرضکنیم

$$V_i = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_i} U$$

سپس، بهازای هر n از Z_+ و هرعضو U از $\mathcal{B}_n$ مجموعهٔ $S_n(U)$ را چنین تعریف میکنیم:

$$S_n(U) = U - \bigcup_{i<n} V_i.$$

[توجهکنیدکه $S_n(U)$ الزاماً باز یابسته نیست.] فرضکنیم

$$\mathcal{C}_n = \{S_n(U) \mid U \in \mathcal{B}_n\}.$$

دراین صورت، $\mathcal{C}_n$ تظریفی از $\mathcal{B}_n$ است، زیرا بهازای هر U از $\mathcal{B}_n$، $S_n(U) \subset U$.

فرضکنیم $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}_n$. مدعی هستیمکه $\mathcal{C}$ تظریف موضعاً متناهی مطلوب $\mathcal{A}$ است که X را میپوشاند.

فرضکنیم x نقطهای از X باشد. میخواهیم ثابتکنیم که x متعلق بهعضوی از $\mathcal{C}$ است، وهمسایگیای داردکه تنها تعدادی متناهی ازاعضای $\mathcal{C}$ را قطع میکند. پوشش $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$ را درنظرمیگیریم؛ فرضکنیم N کوچکترین عددصحیحی باشدکه بهازای آن x در عضوی از $\mathcal{B}_N$ قرار دارد. همچنین، فرضکنیم U عضوی از $\mathcal{B}_N$ باشد که شامل x است. نخست، ملاحظهکنید کـه چون بهازای $i < N$، نقطهٔ x متعلق بههیچ عضو $\mathcal{B}_i$ نیست، نقطهٔ x در $S_N(U)$ که عضوی از $\mathcal{C}$ است قراردارد. ثانیاً، توجهکنید که چون هر گردایهٔ $\mathcal{B}_n$ موضعاً متناهی است، بهازای هر n، که $n = 1, \ldots, N$، یکهمسایگی x، مانند W_n، را میتوان چنان انتخاب کردکه تنها تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{B}_n$ را قطع کند. حال اگر W_n عضو $S_n(V)$ از $\mathcal{C}_n$ را قطع کند، باید عضو V از $\mathcal{B}_n$ را نیز قطع کند، زیرا $S_n(V) \subset V$. بنابراین، W_n تنها تعدادی متناهی از

اعضـای $\mathcal{C}_n$ را قطع نمی‌کند. بعلاوه، چون U در $\mathcal{B}_N$ است، به‌ازای $n > N$، هیچ عضو $\mathcal{C}_n$ را قطع نمی‌کند. درنتیجه، مجموعهٔ

$$W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_N \cap U$$

که یك همسایگی x است تنها تعدادی متناهی ازاعضای $\mathcal{C}$ را قطع می‌کند.

(۳) $\Longleftarrow$ (۲). فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ یك‌پوشش باز X بـاشد. $\mathcal{B}$ راگردایهٔ همهٔ مجموعه‌های باز U از X می‌گیریم که $\bar{U}$ زیرمجموعهٔعضوی از $\mathcal{A}$ باشد. بنابرمنتظم‌بودن X، $\mathcal{B}$ مجموعهٔ X را می‌پوشاند. با استفاده از (۲)، تظریفی مـانند $\mathcal{C}$ از $\mathcal{B}$ می‌توان یافت‌که X را بپوشاند وموضعاً متناهی باشد. فرض کنیم

$$\mathcal{D} = \{\bar{C} \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

در این‌صورت، $\mathcal{D}$ نیز X را می‌پوشاند، وبنابرلم ۱.۱، موضعاً متنـاهی است؛ و $\mathcal{A}$ را نیز ظریف می‌سازد.

(۴) $\Longleftarrow$ (۳). فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ یك‌پوشش باز X باشد. بااستفاده از (۳)، $\mathcal{B}$ را تظریفی از $\mathcal{A}$ اختیار می‌کنیم که X را بپوشاند وموضعاً متناهی باشد. (اگر بخواهیم، می‌توانیم $\mathcal{B}$ را یك‌تظریف بسته انتخاب کنیم، اما، این‌کاربی‌فایده است.)اینك‌درپی‌آنیم که هر عضو $\mathcal{B}$ را به‌قدری منبسط کنیم تامجموعه‌ای بازشود، ودر عین‌حال این انبساط‌آن‌قدر ناچیزباشدکه گردایهٔ حاصل ازمجموعه‌های بازموضعاً متناهی وهنوز تظریفی از $\mathcal{A}$ باشد.

این مرحله متضمن ابتکاری تازه است. ابتکار پیشین، که چندین‌بار به‌کار رفت، از این قرار است‌که این مجموعه‌هـا را به‌طریقی مرتب می‌کنیم، و سپس، بـا تفریق همهٔ مجموعه‌های ماقبل یك‌مجموعه ازآن مجموعه، مجمـوعـهٔ جدیدی به‌دست می‌آوریـم.[۱] این ابتکار مجموعه‌ها رامنقبض می‌کند؛ اما، برای انبساط‌آنها بایدکاردیگری کرد. پوشش کمکی موضعاً متناهی بسته‌ای از X مانند $\mathcal{C}$ معرفی می‌کنیم و با استفاده ازآن اعضای $\mathcal{B}$ را منبسط می‌کنیم.

به‌ازای هر x از X، یك همسایگی x موجود است که تنهـا تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{B}$ را قطع می‌کند. گردایهٔ همهٔ مجموعه‌هـای بـازی‌که تنها تعدادی متناهی از از اعضای $\mathcal{B}$ را قطع می‌کنند پوشش بازی برای X است. بـا استفادهٔ مجدد از (۳)، فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ تظریف بسته‌ای ازاین پوشش باشدکه X را می‌پوشاند وموضعاً متناهی است. هرعضو $\mathcal{C}$ تنها عده‌ای متناهی از اعضای $\mathcal{B}$ را قطع می‌کند.

به‌ازای هرعضو $\mathcal{B}$ مانند B، فرض‌کنیم

$$\mathcal{C}(B) = \{C \mid C \subset X - B \quad \text{و} \quad C \in \mathcal{C}\}.$$

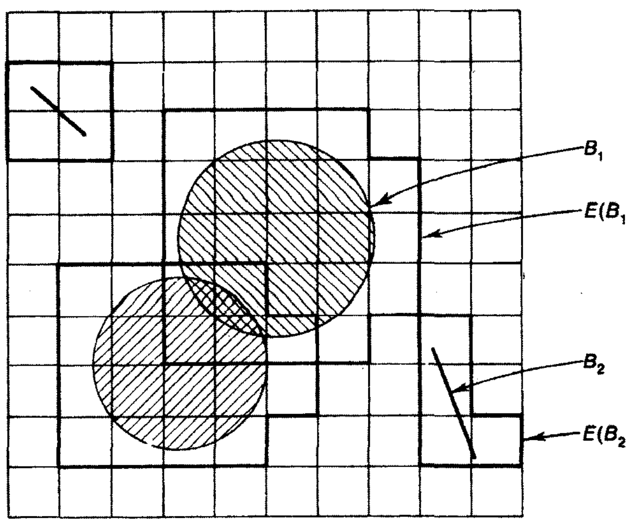
سپس، $E(B)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

---

۱. مراجعه‌کنید به‌لم ۱.۳ وهمچنین به‌برهانی‌که هم‌اکنون برای (۲) $\Longleftarrow$ (۱) آوردیم.

$$E(B)=X-\bigcup_{C\in\mathcal{C}(B)} C$$

چون $\mathcal{C}$ گردایه‌ای موضعاً متناهی از مجموعه‌های بسته است، بنا برلم ۱۰۱، اجتماع اعضای هر زیرگردایه‌ای از $\mathcal{C}$ نیز بسته است. بنابراین، مجموعهٔ $E(B)$ یك مجموعهٔ بازاست. بعلاوه، بنابر تعریف، $B\subset E(B)$. (شکل۳ را نگاه کنید. دراین شکل اعضای $\mathcal{B}$ به شکل نواحی مستدیر بسته و قطعه خطها نمایش داده شده‌اند و اعضای $\mathcal{C}$ به‌شکل نواحی مربعی.)



شکل ۳

حال ممکن است B ها را بیش ازاندازه منبسط کرده باشیم؛ یعنی، ممکن است گردایهٔ $\{E(B)\}$ احتمالاً تظریفی از $\mathcal{A}$ نباشد. چارهٔ این‌کارآسان است. به‌ازای هر B از $\mathcal{B}$ عضوی مانند $F(B)$ از $\mathcal{A}$ انتخاب می‌کنیم که حاوی B باشد. دراین‌صورت، گردایهٔ $\mathcal{D}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{D}=\{E(B)\cap F(B)\mid B\in\mathcal{B}\}$$

گردایهٔ $\mathcal{D}$ تظریفی از $\mathcal{A}$ است. زیرا $B\subset(E(B)\cap F(B))$ و $\mathcal{B}$ پوششی برای X است، وگردایهٔ $\mathcal{D}$ نیز X را می‌پوشاند.

سرانجام، اثبات موضعاً متناهی بودن $\mathcal{D}$ می‌ماند. به‌ازای نقطهٔ مفروض x از X، یك همسایگی x مانند W را چنان انتخاب می‌کنیم که تنها تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{C}$، مثلاً $C_k, \ldots, C_1$ را قطع کند. دراین‌صورت $W \subset C_1 \cup \ldots \cup C_k$. زیرا $\mathcal{C}$ پوششی برای X است. حال اگر عضوی مانند C از $\mathcal{C}$ مجموعهٔ $E(B) \cap F(B)$ را قطع کند، نمی‌تواند در $X - B$ واقع باشد (بنابرتعریف $(E(B)$)؛ پس C باید B را قطع کند. زیرا ازآنجاکه عضو C از $\mathcal{C}$ فقط تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{B}$ مانند B را قطع می کند، پس حداکثر همان تعداد از اعضای گردایهٔ $\mathcal{D} = \{E(B) \cap F(B)\}$ را را قطع می کند. در این‌صورت، چون هر C_i تنها تعدادی متناهی از اعضای $\mathcal{D}$ را قطع می کند، مجموعهٔ W نیز چنین می کند. □

تمرینها

۱. بامثالی ثابت‌کنیدکه اگر X پیرافشرده باشد، نمی‌توان نتیجه‌گرفت‌که به‌ازای هر پوشش باز X مانند $\mathcal{A}$، زیرگردایه‌ای موضعاً متناهی از $\mathcal{A}$ موجود است‌که X را می‌پوشاند.

۲. (الف) ثابت کنید که هرفضای منتظم لیندلوف فضایی است پیرافشرده.
(ب) نتیجه بگیرید که R_l پیرافشرده است.

۳. (الف) ثابت کنید که حاصل‌ضرب یك‌فضای پیرافشرده ویك‌فضای هاوسدورف‌فشرده فضایی است پیرافشرده. [راهنمایی: از لم لوله دربخش ۳ ـ ۵ استفاده کنید.]
(ب) نتیجه بگیرید که S_Ω پیرافشرده نیست.
(پ) ثابت کنید که $S_\Omega \times [0, 1)$ باترتیب قاموسی پیرافشرده نیست. [راهنمایی: S_Ω بازیرفضای بستهٔ $S_\Omega \times 0$ هومئومورف است.]

۴. فرض کنید X فضایی هاوسدورف باشد.همچنین، فرض کنید که پوشش باز شمارایی برای X مانند $\{U_n\}$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر n، $\bar{U}_n$ فشرده است و $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$. ثابت کنید که X پیرافشرده است. [راهنمایی: به‌مثال ۱ مراجعه کنید.]

۵. فرض کنید X فضایی منتظم باشد: ثابت کنید که اگر پوشش شمارایی مانند $\{U_n\}$ برای X، متشکل از مجموعه‌های بازی‌که بستارهای آنها پیرافشرده است، موجود باشدآنگاه X پیرافشرده است.

۶. آیا هرفضای هاوسدورف موضعاً فشرده فضایی است پیرافشرده؟

۷. برای پوششهای باز نقطه ـ متناهی فضایی نرمال یك «لم درهم کشیدن» داریم؛ به‌تمرینهای بخش ۴ ـ ۵ مراجعه کنید. ذیلاً «لم انبساط» را می آوریم که در بارهٔ

خانواده‌های اندیسدار موضعاً متناهی در فضایی پیرافشرده است.

لم. فرض‌کنید $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ یك خانوادهٔ اندیسدار موضعاً متناهی اززیرمجموعه‌های فضای پیرافشردهٔ X باشد. در این‌صورت، یك‌خانوادهٔ اندیسدار موضعاً متناهی مانند $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ازمجموعه‌های باز وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر α از J، $A_\alpha \subset U_\alpha$.

۸. معین کنید کدامیك از فضاهای ذیل در توپولوژی ترتیب قاموسی فضایی است پیرافشرده:

(الف) $[0, 1] \times [0, 1]$؛

(ب) $[0, 1) \times [0, 1]$؛

*(پ) $[0, 1] \times [0, 1)$.

*۹. فرض‌کنید G یك گروه توپولوژیك هاوسدورف، همبند، و موضعاً فشرده باشد. ثابت‌کنید که G پیرافشرده است. [راهنمایی: یك‌همسایگی e مانند U_1 که دارای بستار فشرده است انتخاب کنید، و به‌طور کلی، تعریف کنید $U_{n+1} = \bar{U}_n \cdot U_1$. در این صورت، $G = \bigcup \bar{U}_n$.]

*۱۰. ثابت‌کنید که اگر G یك گروه توپولوژیك پیرافشرده‌باشد و H زیرگروه فشرده‌ای ازآن باشدآنگاه G/H پیرافشرده است. [راهنمایی: ثابت‌کنید که $p:G \to G/H$ نگاشتی بسته است. سپس، ثابت‌کنید که اگر $\mathcal{B}$ یك‌پوشش بستهٔ موضعاً متناهی از G باشدآنگاه گردایهٔ $\{p(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ یك‌پوشش بسته موضعاً متناهی از G/H است.]

۶-۵ قضیهٔ متریسازی اسمیرنوف

قضیهٔ متریسازی ناگاتا ـ اسمیرنوف شرایط لازم و کافی برای متری پذیری یك فضا به‌دست می‌دهد. در این بخش قضیه متریسازی دیگری می‌آوریم که نتیجه‌ای از قضیهٔ ناگاتا ـ اسمیرنوف است واولین‌بار توسط اسمیرنوف به‌اثبات رسید.

تعریف. فضای X را وقتی **موضعاً متری پذیر** خوانیم که هرنقطهٔ آن مانند x همسایگی‌ای مانند U داشته‌باشدکه با توپولوژی زیرفضایی متری پذیر باشد.

قضیه (قضیهٔ متریسازی اسمیرنوف). فضای X متری پذیر است اگر و فقط اگر پیرافشرده و موضعاً متری پذیر باشد.

برهان. فرض‌کنیم X متری پذیر باشد. در این‌صورت، X موضعاً متری پذیر

است؛ بنابر قضیهٔ استون، X پیرافشرده نیز هست.

بعکس، فرض کنیم X پیرافشرده و موضعاً متری پذیر باشد. ثابت می‌کنیم که X دارای پایه‌ای است مانند $\mathscr{B}$، که موضعاً متناهی شمارشی است. چون X منتظم است (به‌موجب پیرافشردگی)، ازقضیهٔ متریسازی ناگاتا ـ اسمیرنوف متریك‌پذیری X نتیجه می‌شود.

این برهان اقتباسی از برهان قضیهٔ ۲.۳ است. X را بامجموعه‌های بازی که متریك‌پذیر هستند بپوشانید؛ سپس، یك‌تظریف باز موضعاً متناهی از این‌پوشش، مانند $\mathscr{C}$، طوری انتخاب کنید که X را بپوشاند. هرعضو C از $\mathscr{C}$ متریك‌پذیر است؛ فرض کنیم تابع $d_C : C\times C \rightarrow R$ متریکی باشد که توپولوژی C را تولید می‌کند. به‌ازای نقطهٔ مفروض x از C، $B_C(x, \varepsilon)$ را مجموعهٔ همهٔ نقاطی مانند y از C می‌گیریم که $d_C(x, y) < \varepsilon$. چون $B_C(x, \varepsilon)$ در C باز است، در X نیز باز است.

به‌ازای عضو مفروضی از Z_+ مانند m، گردایهٔ $\mathscr{A}^m$ را پوششی برای X می‌گیریم که از همهٔ گویهای باز با شعاع $1/m$ در مجموعه‌های C از $\mathscr{C}$ تشکیل شده است؛

$$\mathscr{A}^m=\left\{B_C\left(x,\frac{1}{m}\right)\middle|\, x\in C \quad \text{و} \quad C\in\mathscr{C}\right\}$$

فرض کنیم $\mathscr{D}^m$ یك‌تظریف باز موضعاً متناهی $\mathscr{A}^m$ باشد که X را می‌پوشاند. (در اینجا از پیرافشردگی استفاده می‌کنیم.) فرض کنیم

$$\mathscr{D}=\bigcup\mathscr{D}^m;$$

در این‌صورت، $\mathscr{D}$ موضعاً متناهی شمارشی است. مدعی هستیم که $\mathscr{D}$ یك‌پایهٔ X است؛ و با اثبات این مطلب برهان‌آن به‌پایان می‌رسد.

فرض کنیم x نقطه‌ای از X باشد و U را یك‌همسایگی x می‌گیریم. می‌خواهیم عضوی مانند D از $\mathscr{D}$ بیابیم که $x\in D\subset U$. x تنها به‌تعدادی متناهی از اعضای $\mathscr{C}$، مثلاً C_1، . . .، C_k، تعلق دارد. پس، $U\cap C_i$ یك‌همسایگی x در مجموعهٔ C_i است، و در نتیجه ε_i مثبتی وجود دارد به‌طوری که

$$B_{C_i}(x, \varepsilon_i)\subset(U\cap C_i).$$

m را چنان انتخاب می‌کنیم که $1/m<\min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}/2$. چون گردایهٔ $\mathscr{D}^m$ فضای X را می‌پوشاند، می‌باید عضوی از $\mathscr{D}^m$ مانند D شامل x موجود باشد. چون $\mathscr{D}^m$ تظریف $\mathscr{A}^m$ است، به‌ازای مجموعه‌ای مانند C از $\mathscr{C}$ و y ی در C، می‌باید عضوی از $\mathscr{A}^m$ مانند $B_C(y, 1/m)$ حاوی D موجود باشد. در این‌صورت، x متعلق به C است، و در نتیجه C باید یکی از مجموعه‌های C_1، . . .، C_k باشد. فرض کنیم $C=C_i$. در این‌صورت، بااستفاده از نامساوی مثلثی، داریم

$$D \subset Bc_i\left(y,\ \frac{1}{m}\right) \subset Bc_i(x,\ \varepsilon_i) \subset U,$$

واین همان است که می‌خواستیم. □

مثال ۱. ثابت می‌کنیم که فضای S_Ω پیرافشرده نیست. یك برهان برای این مطلب در میان تمرینهای اخیر آمد؛ در اینجا برهان دیگری می‌آوریم.

نخست، ثابت می‌کنیم که S_Ω موضعاً متریك‌پذیر است، فرض‌کنیم $x \in S_\Omega$؛ y را چنان اختیار می‌کنیم که $x < y < \Omega$. مجموعهٔ باز S_y پایه‌ای شمارا دارد؛ در واقع، گردایهٔ همهٔ بازه‌هایی که نقاط انتهایی‌آنها در S_y است، شماراست. از اینجا، بنابرقضیهٔ متریکسازی اوریسون، نتیجه می‌گیریم که S_y متریك‌پذیر است.

اگر S_Ω فرافشرده بود، از قضیهٔ اسمیرنوف نتیجه می‌شدکه S_Ω متریك‌پذیر است. اما می‌دانیم که S_Ω متریك‌پذیرنیست، زیرا فشرده برحسب نقطهٔ حدی هست اما فشرده نیست (به‌مثال ۱ از بخش ۳ ــ ۷ مراجعه‌کنید.)

تمرینها

۱. قضیهٔ ۱.۵ را با تمرینهای ۵ و ۶ دربخش ۴ ــ ۴ مقایسه‌کنید.

۲. ثابت‌کنیدکه هرفضای متری‌موضعاً فشردهٔ همبند دارای‌پایه‌ای شماراست. [راهنمایی: فرض‌کنید $\mathcal{C}$ یك‌پوشش موضعاً متناهی برای X باشدکه از مجموعه‌هایی باز با بستارهای فشرده تشکیل شده است. فرض‌کنید U_1 عضوی ناتهی از $\mathcal{C}$ باشد، ودر حالت‌کلی، U_{n+1} را اجتماع همهٔ‌اعضایی از $\mathcal{C}$ می گیریم که $\bar{U}_n$ را قطع می کنند. ثابت‌کنیدکه $\bar{U}_n$ فشرده است و $X = \bigcup U_n$.]

۳. دراینجا برای اصطلاح بسلا مفهوم‌کلیتری ازآنچه‌که دربخش ۴ ــ ۵ آمد می‌آوریم: فضای X را **فرافشردهٔ بسلا** گویند در صورتی که فضایی فرافشرده باشد و عدد صحیحی مانند m موجودباشد به‌طوری‌که هرنقطهٔ X دارای همسایگی هومئومورف با زیرمجموعهٔ بازی از R^m باشد.

(الف) ثابت‌کنیدکه هرفرافشرده بسلا متری پذیر است.

(ب) ثابت‌کنیدکه اگر X یك فرافشردهٔ بسلا باشدکه تنها از تعداد متناهی مؤلفه تشکیل شده باشد آنگاه X یك‌بسلا است؛ وبعکس.

۷

فضاهای متری تمام وفضاهای تابعی

احتمالاً، پیش از این، با مفهوم تمامیت فضای متری آشنا شده‌اید. تمامیت، مفهومی اساسی برای همهٔ جنبه‌های آنالیز است. گرچه تمامیت خاصیتی‌متری است تاتوپولوژیك، ولی قضایایی در فضاهای متری هست که سرشت توپولوژیك دارند. در این فصل، مهمترین مثالهای فضاهای متری تمام را مطالعه می‌کنیم و بعضی از قضایا را نیز اثبات خواهیم کرد.

مأنوسترین مثال فضای متری تمام، فضای اقلیدسی با هریك از متریکهای معمولی آن است. مثال دیگر، که به‌همان اندازه اهمیت‌دارد، مجموعهٔ $\mathcal{C}(X, Y)$ از همهٔتوابع پیوسته است که فضایی مانند X را بتوی فضایی مانند Y می‌نگارد. این‌مجموعه متریکی دارد موسوم به‌متریك یکنواخت که شبیه متریك‌یکنواختی‌است که برای R^J در بخش ۲ــ۹ تعریف‌کردیم. اگر Y یك‌فضای متری تمام‌باشدآنگاه $\mathcal{C}(X, Y)$، در متریك‌یکنواخت، تمام است. این‌حکم را در بخش ۷ــ۱ ثابت می‌کنیم. به‌عنوان‌کاربردی از این مطلب، دربخش ۷ــ۲ منحنی فضاپرکن پئانو[1] را می‌سازیم.

یکی از قضایای فضاهای متری، که سرشتی توپولوژیك دارد، ارتباط فشردگی یك فضا را با تمامیت آن نشان می‌دهد. این‌قضیه را در بخش ۷ــ۳ ثابت می‌کنیم. نتیجهٔ مستقیمی از آن قضیه‌ای در مورد مجموعه‌های فشرده در فضای تابعی $\mathcal{C}(X, R^n)$ است؛ واین، صورت کلاسیك قضیهٔ مشهوری است موسوم به‌قضیهٔآسکولی[2].

برفضای تابعی $\mathcal{C}(X, Y)$ علاوه برتوپولوژیی که ازمتریك‌یکنواخت‌تولید می‌شود، توپولوژیهای سودمند دیگری نیز وجود دارند. ما بعضی از آنها را دربخش ۷ــ۴ و

---

1. Peano 2. Ascoli

بخش ۷ ـ ۵ مطالعه خواهیم کرد. همچنین، صورتی تعمیم‌یافته از قضیهٔ آسکولی را در بخش ۶ ـ ۷ ثابت می‌کنیم.

دربارهٔ فضاهای متری قضیهٔ دیگری‌را، که سرشت‌توپولوژیك دارد، دربخش ۷ـ۷ ثابت می‌کنیم؛ مضمون‌آن‌قضیه این‌است که هرفضای متری تمام متعلق به‌رده‌ای ازفضاهای توپولوژیك است که فضاهای بئر[1] نام دارند. شرط تعریف‌کنندهٔ فضای بئر تا حدودی دارای بیان پیچیده‌ای است، ولی‌اغلب موارد استعمال‌آن سودمنداست. یك‌مورد استعمال آن در برهانی است که ما دربخش ۷ ـ ۸ برای اثبات وجود یك تابع حقیقی پیوسته که هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست می‌آوریم.

مورد استعمال دیگر آن در شاخه‌ای از توپولوژی است موسوم به‌نظریهٔ ابعاد. در بخش ۷ ـ ۹ مفهوم توپولوژیك بعد را (که از لبگ[2] است) تعریف می‌کنیم و این قضیهٔ کلاسیك‌را ثابت می‌کنیم که هرفضای متری پذیر فشرده بابعد توپولوژیك m را می‌توان در فضای اقلیدسی R^N با بعد $N=2m+1$ نشاند. این‌قضیه تعمیمی است از قضیهٔ نشاندن‌که در بخش ۴ ـ ۵ برای بسلاها ثابت شد.

بعضی از مباحث این‌فصل ازیکدیگر مستقل‌اند. بستگی بین‌آنها در نمودار زیر نموده شده است:

بخش ۷ ـ ۱ فضاهای متری تمام

بخش ۷ ـ ۲ یك‌منحنی فضاپرکن

بخش ۷ ـ ۳ فشردگی در فضاهای متری

بخش ۷ ـ ۴ همگرایی فشرده وهمگرایی نقطه به‌نقطه

بخش ۷ ـ ۵ توپولوژی فشرده ـ باز

بخش ۷ ـ ۶ قضیهٔ آسکولی

بخش ۷ ـ ۷ فضاهای بئر

بخش ۷ ـ ۸ یك‌تابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر

بخش ۷ ـ ۹ مقدمه‌ای برنظریهٔ ابعاد

---

1. Baire 2. Lebesgue

در سراسر این‌فصل، بخش ۳ ـ ۸ ، یعنی فشردگی موضعی، را دانسته می‌گیریم. هنگامی که از نظریهٔ ابعاد بحث می‌کنیم از بخش ۴ ـ ۵ ، افرازهای واحد، ونیز اندکی از جبر خطی استفاده می‌کنیم.

۷ـ۱ فضاهای متری تمام

در این بخش مفهوم تمامیت را تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که اگر Y یک‌فضای متری تمام باشد آنگاه فضای تابعی $\mathcal{C}(X, Y)$ ، بامتریک یکنواخت ، تمام است . همچنین ، ثابت می‌کنیم که هرفضای متری رامی‌توان به‌طور ایزومتریک دریک‌فضای متری‌تمام نشاند.

تعریف • فرض‌کنیم (X, d) یک‌فضای متری باشد. گوییم دنبالهٔ (x_n) از نقاط X **یک دنبالهٔ کوشی** در (X , d) است هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیحی مانند N وجود داشته‌باشد که

$$\text{اگر } n, m \geqslant N \quad \text{آنگاه } d(x_n\ x_m) < \varepsilon$$

فضای متری (X, d) را **تمام** گوییم در صورتی که هردنبالهٔ کوشی در X همگرا باشد.

البته هردنبالهٔ همگرا در X الزاماً یک‌دنبالهٔ کوشی است؛ تمامیت مستلزم آن است که عکس این‌حکم برقرار باشد.

ملاحظه‌کنید که هرزیرمجموعهٔ بستهٔ فضای متری تمام (X, d) مانند A الزاماً ، با متریک تحدیدی، تمام است. چون، یک‌دنبالهٔ کوشی در A دنبـالـه‌ای‌کوشی در X نیز هست، پس در X همگراست. ازآنجاکه A زیرمجموعهٔ بسته‌ای از X است، حدمذکور باید در A باشد.

همچنین، ملاحظه‌کنید که اگر X تحت متریک d تمام باشدآنگاه X تحت متریک کراندار استاندهٔ متناظر با d ، یعنی

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\},$$

نیز تمام است، و بعکس. زیرا ، دنباله‌ای مـانند (x_n) تحت $\bar{d}$ یک‌دنبالهٔ کوشی است اگر وتنها اگر تحت d دنباله‌ای کوشی بـاشد . ویک دنباله تحت $\bar{d}$ همگراست اگر و تنها اگر آن دنباله تحت d همگرا باشد.

در زیر معیار مفیدی برای تمامیت یک‌فضای متری می‌آوریم:

۱.۱.۰ لم فضـای متری X تمـام است در صورتی که هر دنبالهٔ کوشی در X زیردنباله‌ای همگرا داشته‌باشد.

برهان. فرض‌کنیم (x_n) یک‌دنباله‌ای کوشی در (X, d) باشد. ثابت می‌کنیم که

اگر (x_n) زیردنباله‌ای مانند (x_{n_i}) داشته‌باشد که به‌نقطه‌ای مانند x همگرا باشد آنگاه دنبالهٔ (x_n) نیز به x همگراست.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$. نخست، [با استفاده از این امر که (x_n) دنباله‌ای کوشی است] N را به‌قدرکافی بزرگ اختیار می‌کنیم که، به‌ازای هر $n,m \geqslant N$

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

سپس، [با استفاده از این حقیقت که $n_1 < n_2 < \dots$ دنباله‌ای صعودی از اعداد صحیح است و x_{n_i} به x همگراست] عدد صحیح i را به‌قدرکافی بزرگ اختیار می‌کنیم به‌طوری که $n_i \geqslant N$ و

$$d(x_{n_i}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

با در نظرگرفتن این احکام بایکدیگر، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود که به‌ازای $n \geqslant N$،

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \varepsilon. \quad \square$$

۲۰۱. قضیه فضای متری $\mathbb{R}^k$ با هر یك از متریکهای معمولی خود، یعنی متریك اقلیدسی d یامتریك‌مربعی ρ، تمام است.

برهان. برای اثبات تمامیت فضای متری (R^k, ρ)، فرض‌کنیم (x_n) دنباله‌ای کوشی در (R^k, ρ) باشد. در این‌صورت، مجموعهٔ $\{x_n\}$ زیرمجموعه‌ای کراندار از (R^k, ρ) خواهد بود. زیرا، اگر N را چنان برگزینیم که به‌ازای هر $m \geqslant N$ و هر $n \geqslant N$،

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant 1,$$

آنگاه عدد

$$M = \max\{\rho(x_1, 0), \dots, \rho(x_{N-1}, 0), \rho(x_N, 0) + 1\}$$

یك کران بالای $\rho(x_n, 0)$ است. بدین‌ترتیب، نقاط دنبالهٔ (x_n) همه در مکعب $[-M, M]^k$ قرار می‌گیرند. چون این مکعب فشرده است، بنابرقضیهٔ ۴.۷ در فصل ۳، دنبالهٔ (x_n) زیردنباله‌ای همگرا دارد. پس، بنابر لم ۱.۰۱، (R^k, ρ) تمام است.

برای اثبات تمامیت (R^k, d)، ملاحظه می‌کنیم که یك‌دنباله نسبت به d دنباله‌ای کوشی است اگر وتنها اگر نسبت به ρ دنباله‌ای کوشی باشد، ویك دنباله نسبت به d همگراست اگر وتنها اگر آن‌دنباله نسبت به ρ نیز همگرا باشد. $\square$

مثال ۱. فضای Q از اعدادگویا بــا متریک معمولی $d(x, y)=|x-y|$ مثالی از یک فضای متری ناتمام است. مثلاً، دنبالهٔ

۱٫۴, ۱٫۴۱, ۱٫۴۱۴, ۱٫۴۱۴۲, ۱٫۴۱۴۲۱, ...

از اعداد اعشاری متناهی همگرا به $\sqrt{2}$ (در R) است و در Q یک‌دنبالهٔ‌کوشی است اما، (در Q) همگرا نیست.

مثال ۲. بازهٔ باز $(-1, 1)$ در R با متریک $d(x, y)=|x-y|$ مثال دیگری ازفضایی ناتمام است، در این فضا دنبالهٔ (x_n) با ضابطهٔ

$$x_n=1-\frac{1}{n}$$

یک‌دنبالهٔ‌کوشی است‌که همگرا نیست. این مثال ثابت می‌کند که ناتمام بودن یک‌خاصیت توپولوژیک نیست، یعنی تحت هومئومورفیسم حفظ نمی‌شود. زیرا، بازهٔ $(-1, +1)$ با خط حقیقی R هومئومورف است، و R در توپولوژی معمولی خود تمام است.

مثال ۳. برای توپولوژی حاصل‌ضربی بر R^ω متریکی وجــود دارد که نسبت به آن R^ω تمام است. متری

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\operatorname{lub}\{\bar{d}(x_i, y_i)/i\}$$

بر R^ω، که درآن $\bar{d}(a, b)=\min\{|a-b|, 1\}$، در نظر می‌گیریم. در قضیهٔ ۵.۹ فصل ۲، ثابت کردیم‌که D برای فضای حاصل‌ضربی R^ω یک‌متریک است. برای اثبات تمامیت R^ω تحت D، فرض می‌کنیم $(\mathbf{x}_n)$ تحت D دنباله‌ای کوشی باشد. فرض می‌کنیم فعلاً i ثابت باشد. نگاشت $\pi_i: R^\omega \to R$ را تصویر برمختص i ام‌فرض می‌کنیم. ازآنجا که

$$\bar{d}(\pi_i(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{y})) \leqslant iD(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

دنبالهٔ $(\pi_i(\mathbf{x}_n))$ در $(R, \bar{d})$ یک دنبالهٔ کوشی است. بنابراین همگراست؛ مثلاً به a_i.

فرض‌کنیم $\mathbf{a}$ نقطهٔ $(a_i)_{i\in Z_+}$ از R^ω باشد. مدعی هستیم‌که $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$. زیرا، یک عضو پایهٔ نوعی شامل $\mathbf{a}$ به‌صورت $\prod U_i$ هست که در آن به‌ازای $i \geqslant m$، $U_i=R$. عدد N_i را به‌قدر کافی بزرگ اختیار می‌کنیم‌که به‌ازای هر n که $n \geqslant N_i$، $\pi_i(\mathbf{x}_n) \in U_i$. فرض‌کنیم $N=\max\{N_1, \ldots, N_m\}$؛ در این‌صورت به‌ازای هر n که $n \geqslant N$ داریم $\mathbf{x}_n \in \prod U_i$.

گرچه فضاهای حاصل‌ضربی R^n و R^ω هردو متریکهایی دارند که نسبت به‌آنها تمــام هستند، ولی در حــالت کلی نمی‌توان انتظار داشت که برای R^J نیز بتوان چنین حکمی را اثبات کرد. زیرا، وقتی J نــاشماراست R^J حتی متریک‌پذیر هم نیست

(به‌بخش ۲ ـ ۱۰ مراجعه‌کنید). با وجود این، درمجموعهٔ R^J توپولوژی دیگری موجود است که از متریك یکنواخت به‌دست می‌آید، وچنانکه خواهیم دید، نسبت به‌این متریك، R^J تمام است.

در حالت کلی، متریك یکنواخت‌را برای Y^J چنین تعریف می‌کنیم:

تعریف. فرض‌کنیم (Y, d) یك‌فضای متری باشد، و

$$\bar{d}(a, b)=\min\{d(a, b), 1\}$$

متریك‌کراندار استاندهٔ متناظر با d برای Y باشد. به‌ازای مجموعهٔ اندیس مفروض J، متریکی برمجموعهٔ Y^J متشکل از همهٔ توابع $f: J \to Y$، باضابطهٔ

$$\bar{\rho}(f, g)=\operatorname{lub}\{\bar{d}(f(\alpha), g(\alpha)) \mid \alpha \in J\},$$

تعریف می‌کنیم. تابع $\bar{\rho}$ را **متریك یکنواخت** بر Y^J متناظر بامتریك d بر Y می‌نامند؛ به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که $\bar{\rho}$ متریك است.

توجه کنید، در اینجا علامتگذاری تابعی را برای اعضای Y^J که به جای علامتگذاری «تایی» است به‌کار بردیم، در سرتاسر این فصل از این موضوع پیروی خواهیم کرد.

۱ ۰ ۴ ۰ **قضیه** اگر فضای Y در متریك d تمام باشد آنگاه فضای Y^J در متریك یکنواخت $\bar{\rho}$ متناظر با d تمام است.

برهان. یادآوری می‌کنیم که اگر (Y, d) تمام‌باشد، $(Y, \bar{d})$ نیز چنین است، که دراینجا $\bar{d}$ متریك کراندارمتناظر با d است. حال‌فرض می‌کنیم f_1، f_2، ... دنباله‌ای از نقاط Y^J باشد که نسبت به $\bar{\rho}$ دنباله‌ای‌کوشی است. به‌ازای عضو مفروضی از J مانند α، این‌حکم که به‌ازای همهٔ مقادیر m و n،

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) \leqslant \bar{\rho}(f_n, f_m)$$

بدین‌معنی است که $f_1(\alpha)$، $f_2(\alpha)$، ... در $(Y, \bar{d})$ یك‌دنبالهٔ کوشی است. بنابراین، این‌دنباله همگراست، مثلاً به‌نقطهٔ y_α. فرض کنیم $f: J \to Y$ تابعی باشد با ضابطهٔ $f(\alpha)=y_\alpha$. مدعی هستیم که دنبالهٔ (f_n) بامتریك $\bar{\rho}$ به f همگراست.

به‌ازای $\varepsilon > 0$، نخست N را به‌قدرکافی بزرگ اختیار می‌کنیم که اگر $m \geqslant N$ و $n \geqslant N$ آنگاه $\bar{\rho}(f_n, f_m) < \varepsilon/2$. در این‌صورت، بویژه، به‌ازای $m \geqslant N$ و $n \geqslant N$ و $\alpha \in J$ داریم

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

با ثابت نگهداشتن n و α و میل‌دادن m به‌بینهایت، خواهیم‌داشت

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f(\alpha)) \leqslant \frac{\varepsilon}{۲}\cdot$$

این نـامساوی به‌ازای هر α در J برقرار است، مشروط برآنکه $n \geqslant N$. بنابراین، به‌ازای $n \geqslant N$،

$$\bar{\rho}(f_n, f) \leqslant \frac{\varepsilon}{۲} < \varepsilon,$$

واین همان است که می‌خواستیم. □

اینك، به‌حالتی تاحدی خاص می‌پردازیم و به‌جای اینکه فقط یك‌مجموعه را درنظر بگیریم، مجموعهٔ Y^X راکه درآن X یك فضای توپولوژیك است موردنظر قرار می‌دهیم. البته، این برآنچه‌ که تا به‌حـال گفته‌ایم خللی وارد نمی‌سازد؛ وقتی مجموعهٔ همهٔ توابع $f:X \to Y$ مطرح‌است توپولوژی X نمی‌تواند نقشی داشته‌باشد. ولی‌اگر زیرمجموعهٔ $\mathcal{C}(X, Y)$ از Y^X راکه متشکل از همهٔ توابع پیوسته $f:X \to Y$ است در نظر گرفته باشیم. در این‌صورت، چنانکه خواهیم دید، اگر Y تمام باشد، این زیرمجموعه نیز با متریك یکنواخت تمام خواهد بود.

۱۰.۴ قضیه فرض‌کنیم X یك‌فضای توپولوژیك و $(\mathrm{Y, d})$ یك‌فضای متری باشد. مجموعهٔ $\mathcal{C}(\mathrm{X, Y})$ از همهٔ تـوابـع پیوسته، تحت‌متریك یکنواخت، در $\mathrm{Y^X}$ بسته است. بنابراین، اگر Y تمام‌باشد، $\mathcal{C}(\mathrm{X,Y})$ با متریك یکنواخت تمام است.

برهان. این‌قضیه درست همان قضیهٔ حد یکنواخت (قضیهٔ ۶.۱۰ در فصل ۲) است که با نقاب تازه‌ای ظاهر شده است. نخست، ثـابت می‌کنیم‌که اگر دنبالهٔ (f_n) از اعضای Y^X نسبت به‌متریك $\bar{\rho}$ بر Y^X به‌عضو f از Y^X همگرا باشدآنگاه f_n، نسبت به‌متریك $\bar{d}$ بر Y، بدان‌معنی‌که در بخش ۱۰ ـ ۲ تعریف شد، همگرای یکنواخت به f است. به‌ازای $\varepsilon > ۰$، عدد صحیح N را چنان اختیار می‌کنیم‌که به‌ازای هر $n \geqslant N$،

$$\bar{\rho}(f, f_n) < \varepsilon\cdot$$

در این‌صورت، به‌ازای هر x از X وهر n که $n \geqslant N$،

$$\bar{d}(f_n(x), f(x)) \leqslant \bar{\rho}(f_n, f) < \varepsilon\cdot$$

وبدین‌ترتیب (f_n) همگرای‌یکنواخت به f است.

اینك‌ثابت می‌کنیم‌که $\mathcal{C}(X, Y)$ نسبت به‌متریك $\bar{\rho}$ در Y^X بسته است. فرض‌کنیم f عضوی از Y^X ویك‌نقطهٔ حدی $\mathcal{C}(X, Y)$ باشد. در این‌صورت، دنباله‌ای ازاعضای

$\mathcal{C}(X, Y)$ مانند (f_n) وجود دارد که در متریک $\bar{\rho}$ به f همگراست. بنا بر قضیهٔ حد یکنواخت، f پیوسته است، ودر نتیجه $f \in \mathcal{C}(X, Y)$.

چون Y^X تحت $\bar{\rho}$ تمام است، زیرمجموعه بستهٔ $\mathcal{C}(X, Y)$ نیز چنین است. □

تعریف . فرض کنیم (Y, d) یك فضای متری و X یك‌مجموعه یا یك‌فضای توپولوژیك باشد. $\mathcal{F}$ را زیرمجموعه‌ای از Y^X می‌گیریم که دارای این‌خاصیت باشد که به‌ازای هرزوج از اعضای $\mathcal{F}$ مانند f و g، مجموعهٔ

$$\{d(f(x),\ g(x)) \mid x \in X\}$$

کراندار باشد. متریك ρ بر $\mathcal{F}$ را بافرمول ذیل تعریف می‌کنیم.

$$\rho(f,\ g) = \text{lub}\,\{d(f(x),\ g(x)) \mid x \in X\};$$

این متریك را **متریك مربعی** یامعمولاً **متریك سوپرموم**می‌نامند.

ارتباط این متری با متری یکنواخت $\bar{\rho}$ که در بالا تعریف شد چگونه است؟ به‌عنوان تمرینی ساده می‌توانید ثابت‌کنیدکه به‌ازای هر f و g از $\mathcal{F}$،

$$\bar{\rho}(f,\ g) = \min\{\rho(f,\ g),\ ۱\}$$

این بدان معنی است که بریك مجموعه مانند $\mathcal{F}$ که هم ρ و هم $\bar{\rho}$ تعریف شده است، $\bar{\rho}$ چیزی جز متریك کراندار استاندهٔ حاصل از ρ نیست. (به‌همین دلیل ما از ابتدا علامت $\bar{\rho}$ را برای متریك یکنواخت در نظر گرفتیم.) از اینجا نتیجه می‌شودکه توپولوژیهای القایی ρ و $\bar{\rho}$ بر $\mathcal{F}$ یکی هستند. همچنین، نتیجه می‌شودکه $\mathcal{F}$ تحت ρ تمام است اگر وتنها اگرتحت $\bar{\rho}$ تمام باشد. بنابراین، این‌دو متریك، برای همهٔ مقاصد عملی، متریکهایی هم‌ارزند.

بسیاری از نویسندگان اصلاً زحمت تعریف متریك $\bar{\rho}$ را به‌خود نمی‌دهند، و فقط خود را به‌فضاهایی مانند $\mathcal{F}$ محدود می‌کنندکه ρ برآنها تعریف شده‌باشد. ما ترجیح می‌دهیم در حالت کلیتری کارکنیم ووقتی حالت خاص متریك ρ را در نظر می‌گیریم که مفید (وممکن) باشد.

مثال ۴. فرض کنیم (Y, d) یك فضای متری و J یك‌مجموعهٔ اندیس متناهی باشد. در این‌صورت، متریك مربعی ρ برهمهٔ Y^J تعریف می‌شود. البته ، در این حالت همهٔ توپولوژیهای متفاوت بر Y^J ، یعنی توپولوژی جعبه‌ای، توپولوژی یکنواخت، وتوپولوژی حاصلضربی مساوی‌اند.

مثال ۵. فضای $\mathcal{C}(X, R)$ متشکل از همهٔ توابع پیوسته با مقادیر حقیقی برفضای فشردهٔ X را درنظر می‌گیریم. هرعضو این‌فضا تابعی‌کراندار است، درنتیجه متریك

$$\rho(f,\ g)=\text{lub}\,\{\,|f(x)-g(x)|\}$$

بر این فضا تعریف می‌شود. درواقع، قضیهٔ مقدار ماکزیموم بیان می‌کند که

$$\rho(f,\ g)=\max\,\{\,|f(x)-g(x)\,|\,\}.$$

فضای $\mathcal{C}(X,R)$ تحت متریک ρ تمام است.

اینك، به‌اثبات قضیه‌ای کلاسیك می‌پردازیم، بدین مضمون که هرفضای متری را می‌توان به‌طور ایزومتریك دریك فضای متری تمام نشاند. (در تمرین ۸، خطوط اصلی برهان دیگری را، که قدری هم سرراستتر است، طرح کرده‌ایم.) این‌قضیه، گرچه مورد نیاز ما نیست، دربحثهای دیگر ریاضیات سودمند است.

نخست، یك‌لم:

۰۱.۵ لم فرض‌کنیم X یك‌فضای توپولوژیك باشد. مجموعهٔ $\mathcal{B}(X,\ R)$ متشکل ازهمهٔ توابع‌کراندار $f:X \to R$، تحت متریك سوپرمومی ρ تمام‌است.

برهان. ثابت می‌کنیم که $\mathcal{B}(X,\ R)$ در R^X، با متریك یکنواخت $\bar{\rho}$، بسته است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\mathcal{B}(X,\ R)$ تحت متریك $\bar{\rho}$ تمام است، چون متریك ρ براین مجموعه تعریف شده است، پس این‌مجموعه تحت ρ نیز تمام است.

فرض‌کنیم f حد دنبالهٔ (f_n) از اعضای $\mathcal{B}(X,\ R)$ باشد. N را چنان اختیار می‌کنیم که به‌ازای $n \geqslant N$، $\bar{\rho}(f_n,\ f) < ۱$. در این‌صورت، چون f_N متعلق است به $\mathcal{B}(X,\ R)$، Mی وجوددارد که به‌ازای هر x از X، $|f_N(x)| \leqslant M$. درنتیجه، به‌ازای هر x از X

$$|f(x)| \leqslant M+۱$$

پس f کراندار است. □

۰۱.۶ قضیه فرض‌کنیم $(X,\ d)$ یك فضای متری باشد. نشاننده‌ای ایزومتری از X بتوی یك‌فضای متری‌تمام وجود دارد.

برهان. فرض کنیم $\mathcal{B}(X,\ R)$ مجموعهٔ همهٔ توابع کرانداری باشد که X را بتوی R می‌نگارند، و $x_\circ$ را نقطهٔ ثابتی از X می‌گیریم. به‌ازای عضو a از X، تابع $\phi_a : X \to R$ را با ضابطهٔ

$$\phi_a(x)=d(x,\ a)-d(x,\ x_\circ)$$

تعریف می‌کنیم: مدعی هستیم که ϕ_a کراندار است. زیرا، از نامساویهای

$$d(x,\ a) \leqslant d(x,\ x_\circ)+d(a,\ x_\circ)$$

$$d(x,\ x_\circ) \leqslant d(x,\ a)+d(a,\ x_\circ)$$

نتیجه می‌شود که $|\phi_a(x)| \leqslant d(a,\ x_\circ)$.

نگاشت $\Phi: X \to \mathcal{B}(X,\ R)$ را با ضابطهٔ

$$\Phi(a)=\phi_a$$

تعریف می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که Φ یك نشانندهٔ ایزومتری از $(X\ ,\ d)$ بتوی فضای متری تمام $(\mathcal{B}(X,\ R),\ \rho)$ است. یعنی، ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر زوج از نقاط X مانند a و b، داریم

$$\rho(\phi_a,\ \phi_b)=d(a,\ b).$$

بنا بر تعریف،

$$\rho(\phi_a,\ \phi_b)=\operatorname{lub}\{\,|\,\phi_a(x)-\phi_b(x)\,|\ ;\, x\in X\}$$
$$=\operatorname{lub}\{|d(x,\ a)-d(x,\ b)\,|\ ;\, x\in X\}.$$

بنا بر نامساوی مثلثی،

$$|\,d(x,\ a)-d(x,\ b)\,| \leqslant d(a,\ b),$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\rho(\phi_a,\ \phi_b) \leqslant d(a,\ b)$$

از طرف دیگر، این‌نامساوی نمی‌تواند اکید باشد، زیرا وقتی که $x=a$،

$$|\,d(x,\ a)-d(x,\ b)\,|=d(a,\ d)\,.\ \square$$

تعریف. فرض‌کنیم X یك فضای متری باشد. اگر $h: X \to Y$ یك نشانندهٔ ایزومتری از X بتوی فضای متری تمام Y باشدآنگاه زیرفضای $\overline{h(X)}$ از Y یك فضای متری تمام است. این‌فضا را **تمام‌ساز** X می‌خوانند.

تمام‌ساز X باتقریب یك ایزومتری به‌طور یکتا مشخص می‌شود. تمرین ۹ را ببینید.

تمرینها

۱. فرض‌کنید X یك‌فضای متری باشد.

(الف) فرض‌کنید به‌ازای عدد ε، هر ε- گوی در X دارای بستار فشرده باشد. ثابت‌کنید که X تمام است.

(ب) فرض‌کنید به‌ازای هر x از X، ε مثبتی موجود باشد به‌طوری‌که گوی $B(x, \varepsilon)$ بستار فشرده داشته‌باشد. با یك‌مثال ثابت‌کنید‌که لازم نیست X تمام‌باشد.

۲. فرض‌کنید (X, d_X) و (Y, d_Y) فضاهای متری باشند و Y فضایی تمام باشد، و فرض‌کنید $A \subset X$. ثابت‌کنید که اگر تابع $f:A \rightarrow Y$ پیوستهٔ یکنواخت باشد آنگاه f را می‌توان به‌طور یکتا به‌تابع پیوسته‌ای مانند $g:\bar{A} \rightarrow Y$ گسترش داد به‌طوری‌که g پیوستهٔ یکنواخت باشد.

۳. زیرمجموعه R^∞ از R^ω را‌که از همهٔ دنباله‌هایی که سرانجام صفر هستند تشکیل شده است درنظرمی‌گیریم. آیا R^∞، بامتریك یکنواخت، تمام است؟

۴. ثابت کنید که فضای متری (X, d) تمام است اگر و تنها اگر به‌ازای هردنبالهٔ تودرتو از مجموعه‌های بستهٔ ناتهی X مانند $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ که قطر A_n به‌صفر میل کند،

$$\bigcap_{n \in Z_+} A_n \neq \varnothing \cdot$$

۵. فرض‌کنید (X, d) یك‌فضای متری تمام باشد. یادآوری می‌کنیم که نگاشت پیوستهٔ $f: X \rightarrow Y$ را یك‌انقباض می‌گویند درصورتی‌که عددی مانند α، که $\alpha < 1$، وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر x و y از X،

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\, d(x, y).$$

ثابت‌کنید‌که اگر f یك‌انقباض باشدآنگاه نقطه‌ای یکتا مانند x از X وجوددارد به‌طوری‌که $f(x) = x$.

۶. فضای X را **تمام توپولوژیکی** خوانیم هرگاه متریکی برای توپولوژی X وجود داشته‌باشد‌که X نسبت به‌آن تمام باشد.

(الف) ثابت کنید‌که هرزیرفضای بستهٔ یك فضای تمام توپولوژیکی فضایی است تمام توپولوژیکی.

(ب) ثابت‌کنید‌که هرحاصل‌ضرب شمارای فضاهای تمام توپولوژیکی (در توپولوژی حاصل‌ضربی) تمام توپولوژیکی‌است.

(پ) ثابت‌کنید‌که هرزیرمجموعهٔ باز یك‌فضای تمام توپولوژیکی فضایی است تمام توپولوژیکی. [راهنمایی: اگر $U \subset X$ و X تحت متریك d تمام باشد، تابع $\phi: U \rightarrow R$ را باضابطهٔ

$$\phi(x) = \frac{1}{d(x, X-U)}$$

تعریف کنید، که درآن $d(x, A) = \text{glb}\{d(x, a) \mid a \in A\}$. سپس، تابع

$f:U \to X\times R$ را باضابطهٔ

$$f(x)=x\times\phi(x)$$

تعریف کنید.]

(ت) ثابت کنید که اگر A دریك فضای تمام‌توپولوژیکی مجموعه‌ای G_δ باشد آنگاه A تمام توپولوژیکی است. [راهنمایی: فرض کنید A مقطع مجموعه‌های باز U_n باشد، که $n\in Z_+$. نشانندهٔ قطری $f(a)=(a, a, \ldots)$ از A بتوی ΠU_n را درنظر بگیرید.]

(ث) ثابت کنید که مجموعهٔ اعداد اصم یك‌فضای تمام توپولوژیکی است.

۷. ثابت کنید که فضای I^2 در I^2 متریك تمام‌است. (به‌تمرین ۹ دربخش ۲ـ۹ مراجعه کنید.)

۸. فرض کنید (X, d) یك‌فضای متری باشد. ثابت کنید که نشانده‌ای ایزومتری مانند h از X بتوی یك‌فضای متری تمام (Y, D)، به‌قرار ذیل، وجود دارد: فرض کنید $\tilde{X}$ مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های کوشی

$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots)$$

ازنقاط X باشد. بنابرتعریف، گوییم $\mathbf{x}\sim\mathbf{y}$ هرگاه

$$d(x_n, y_n) \longrightarrow 0.$$

فرض کنید که $[\mathbf{x}]$ نمایش‌دهندهٔ ردهٔ هم‌ارزی $\mathbf{x}$ باشد؛ و Y نمایش‌دهندهٔ مجموعهٔ این رده‌های هم‌ارزی. متریك D را بر Y باضابطهٔ

$$D([\mathbf{x}], [\mathbf{y}])=\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

تعریف کنید.

(الف) ثابت کنید که $\sim$ یك‌رابطهٔ هم‌ارزی است، و ثابت کنید که D یك متریك خوشتعریف است.

(ب) تابع $h:X \to Y$ را چنین تعریف کنید که $h(x)$ همان‌ردهٔ هم‌ارزی دنبالهٔ ثابت $(x, x, \ldots)$ باشد؛

$$h(x)=[(x, x, \ldots)]$$

ثابت کنید که h یك‌نشانندهٔ ایزومتری است.

(پ) ثابت کنید که $h(X)$ در Y چگال است؛ درواقع به‌ازای $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots)$ متعلق به $\tilde{X}$، ثابت کنید که دنبالهٔ $h(x_n)$ ازنقاط Y به‌نقطهٔ $[\mathbf{x}]$ از y همگراست.

(ت) ثابت کنید که اگر A زیرمجموعهٔ چگالی ازفضای متری (Z, ρ) باشد، و

اگر هردنبالهٔ کوشی در A، در Z همگرا باشدآنگاه Z تمام است.

(ث) ثابت کنیدکه (Y, D) تمام است.

۹. قضیه (یکتایی تمام‌ساز). فرض کنید $h: X \to Y$ و $h': X \to Y'$ نشانندههای ایزومتری ازفضای متری (X, d)، بترتیب، بتوی فضاهای متری تمام (Y, D) و (Y', D') باشند. در اینصورت، بین $(\overline{h(X)}, D)$ و $(\overline{h'(X)}, D')$ یك ایزومتری وجود دارد که بر زیرفضای $h(X)$ مساوی با $h'h^{-1}$ است.

۷ـ۲ یك منحنی فضا پرکن

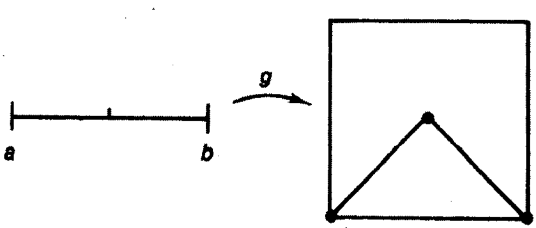
یکی ازموارد استعمال تمامیت فضای متری $\mathcal{C}(X, Y)$ درمتریك یکنواخت وقتی‌است که Y تمام است، اینك به‌ساختن «منحنی فضا پرکن پئانو» می‌پردازیم.

۲. ۱. قضیه فرض‌کنیم $I = [0, 1]$. نگاشت پیوسته‌ای مانند $f: I \to I^2$ موجود است‌که تصویرآن سراسرمربع I^2 را پرمی‌کند.

وجود این راه، مانند وجود توابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتق‌پذیر (بعداً این‌تابع را بررسی می‌کنیم)، باشهود هندسی ناسازگار است.

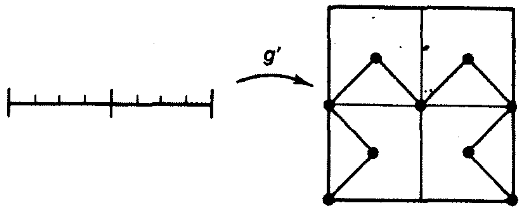
برهان. مرحلهٔ ۱. نگاشت f را به‌عنوان حد دنباله‌ای از توابع پیوسته، مانند f_n، می‌سازیم. نخست، به‌توصیف عمل خاصی برراهها می‌پردازیم که درتولید f_nها به‌کار خواهد رفت.

کار را با بازهٔ بستهٔ دلخواهی ازخط حقیقی مانند $[a, b]$ ومربعی دلخواه درصفحه که اضلاع آن موازی محورهای مختصات‌اند شروع می‌کنیم، و راه مثلثی g را، که در شکل ۱ نموده شده است، در نظر می‌گیریم. این‌راه نگاشتی پیوسته از $[a, b]$ بتوی مربع است. عملی راکه می‌خواهیم توصیف کنیم‌راه g' را،که درشکل ۲ رسم شده‌است، جایگزین راه g می کند. این راه از چهار راه مثلثی تشکیل شده است، کـه طول هریك



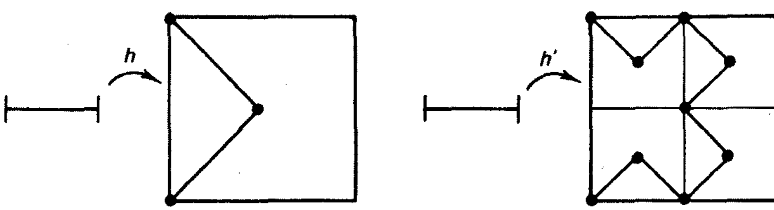
شکل ۱

نصف طول g است. ملاحظه کنید که g و g' نقطه‌های آغازی و انجامی مشترك دارند. درصورت تمایل می‌توانید معادله‌های g و g' را بنویسید.



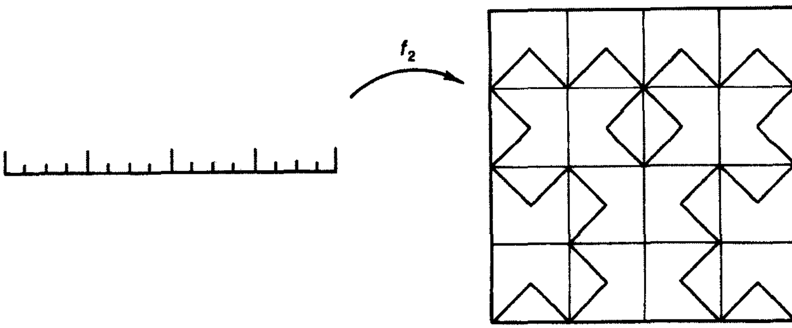
شکل ۲

همین عمل را می‌توان برهر راه مثلثی، که دو گوشهٔ مجاور مربعهای کوچکتر را بهم‌مرتبط می‌سازد، انجام‌داد. مثلاً، وقتی آن‌را درمورد راه h که درشکل ۳ رسم شده است انجام دهیم، راه h' حاصل می‌شود.

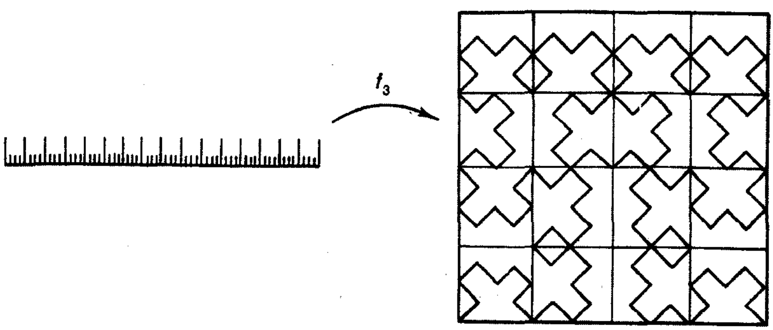


شکل ۳

مرحلهٔ ۲. حال دنباله‌ای از توابع مانند $f_n : I \to I^2$ تعریف می‌کنیم. اولین تابع، که آن‌را با f_0 نشان می‌دهیم، راه مثلثی است که درشکل ۱ رسم شده است، به‌طوری که $a = 0$ و $b = 1$. تابع‌بعدی f_1 است که با انجام عمل توصیف‌شده در مرحلهٔ ۱ برتابع f_0 به‌دست می‌آید؛ تابع f_1 را در شکل ۲ رسم کرده‌ایم. تابع‌بعدی، f_2، تابعی است که با انجام همین عمل برهریك از چهار راه مثلثی تشکیل‌دهندهٔ f_1 به‌دست می‌آید. تابع f_2 را درشکل ۴ رسم کرده‌ایم. تابع بعدی، f_3، باانجام عمل مذکور برهریك از ۱۶ راه مثلثی تشکیل‌دهندهٔ f_2 به‌دست می‌آید؛ تابع f_3 را در شکل ۵ رسم کرده‌ایم. وبه‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم. در حالت کلی، f_n راهی است متشکل از



شکل ۴



شکل ۵

4^n راه مثلثی از آن نوع که در مرحلهٔ ۱ درنظر گرفتیم به‌طوری که هریك از این‌راهها در مربعی باضلع به‌طول $1/2^n$ واقع است. تابع f_{n+1} با انجام عملی که در مرحلهٔ ۱ بیان شد بر این راههای مثلثی به‌دست می‌آید، که این عمل عبارت است از قراردادن چهار راه مثلثی کوچکتر به‌جای هریك از آنها که ذکر شد.

مرحلهٔ ۳. برای سهولت برهان، فرض کنیم $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ نمایش متریك مربعی بر R^2 باشد؛ یعنی،

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$$

دراین‌صورت، می‌توان متریك سوپرمومی متناظر با آن بر$\mathcal{C}(I, I^2)$ ، را با ρ نمایش‌داد؛

$$\rho(f, g) = lub\{d(f(t), g(t)) | t \varepsilon I\}.$$

چونI^2درR^2 بسته‌است، بامتریك‌مربعی،تمام‌است؛درنتیجه،$\mathcal{C}(I,I^2)$، بامتریكρ،تمام‌است.

مدعی هستیم که دنبالهٔ توابع (f_n) ، که درمرحلهٔ ۲ تعریف‌شد، تحت ρ یك‌دنبالهٔ کوشی است. برای اثبات این امر ، اجازه دهید وضعی راکه در گذار از f_n به f_{n+1} پدید می‌آید بررسی‌کنیم. هرزاه مثلثی کوچك در f_n در مربعی بـا ضلع به‌طول $1/2^n$ واقع است. عملی که توسط‌آن f_{n+1} را به‌دست می‌آوریم این‌راه مثلثی را با چهار راه مثلثی دیگر که در همان مربع واقع‌اند عوض می‌کند. بنابراین، درمتریك مربعی بر I^2 ، فاصلهٔ بین $f_n(t)$ و $f_{n+1}(t)$ حداکثر $1/2^n$ است. درنتیجه، $\rho(f_n, f_{n+1}) < 1/2^n$. پس، (f_n) یك‌دنبالهٔ‌کوشی است. زیرا، به‌ازای هر n و m،

$$\rho(f_n, f_{n+m}) \leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+m-1}} < \frac{2}{2^n}.$$

مرحلهٔ ۴. چون $\mathcal{C}(I, I^2)$ تمام است ، دنبـالهٔ (f_n) به‌تـابعی پیوسته مـانند $f: I \to I^2$ همگراست. ثابت می‌کنیم که f تابعی است پوشا.

فرض‌کنیم $\mathbf{x}$ نقطه‌ای از I^2 باشد؛ ثابت می‌کنیم که $\mathbf{x}$ به$f(I)$ تعلق‌دارد. نخست، ملاحظه‌می‌کنیم که، به‌ازای هر n، فاصلهٔ راه f_n تانقطهٔ $\mathbf{x}$ حداکثر $1/2^n$ است. زیرا، راه f_n از هریك از مربعهای کوچك بـا ضلع $1/2^n$ که I^2 را باآنها افرازکرده‌ایم عبور می‌کند.

با استفاده از این حقیقت، ثابت خواهیم کردکه به‌ازای هرعدد ε ، که مثبت باشد، εـ همسایگی $\mathbf{x}$ مجموعهٔ $f(I)$ را قطع می‌کند. عدد طبیعی N را به‌قدر کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم که

$$\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ و } \rho(f_N, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

بنابر نتیجهٔ حـاصل در بند فوق ، نقطه‌ای مـانند t_0 در I وجود دارد بـه طوری که $d(\mathbf{x}, f_N(t_0)) \leqslant 1/2^N$. چون به‌ازای جمیع مقادیر t ، $d(f_N(t), f(t)) < \varepsilon/2$ ، ازاینجا نتیجه می‌شودکه

$$d(\mathbf{x}, f(t_0)) < \varepsilon.$$

بنابراین، εـ همسایگی $\mathbf{x}$ مجموعهٔ $f(I)$ را قطع می‌کند.

از اینجا نتیجه می‌شودکه $\mathbf{x}$ متعلق است به‌بستار $f(I)$. امـا I فشرده است، پس $f(I)$ نیز فشرده، ودرنتیجه بسته است . بدین‌ترتیب، $\mathbf{x} \in f(I)$ ، واین همان است که می‌خواستیم. □

تمرینها

۱. ثابت‌کنید که به‌ازای هر n ، نگاشت پوشای پیوسته‌ای مـانند $g: I \to I^n$ وجود

دارد. [راهنمایی: نگاشت $f \times f: I \times I \to I^2 \times I^2$ را درنظر بگیرید.]

۲. آیا نگاشت پوشای پیوسته‌ای مانند $f: I \to R^2$ وجود دارد؟

۳. ثابت کنید که نگاشت پوشای پیوسته‌ای مانند $f: R \to R^n$ وجود دارد.

۴. فرض کنید X زیرفضای R^∞ از R^ω باشد که متشکل است از همهٔ دنباله‌هایی که سرانجام صفرند؛ آیا نگاشت پوشای پیوسته‌ای مانند $f: R \to X$ وجود دارد؟ در حالت $X = R^\omega$ چه می‌توان گفت؟

*۵. (الف) فرض کنید X یک فضای هاوسدورف باشد. ثابت کنید که اگر نگاشت پوشای پیوسته‌ای مانند $f: I \to X$ وجود داشته باشد آنگاه X فشرده، همبند، موضعاً همبند، و متریک‌پذیر است.

(ب) عکس حکم بالا نیز برقرار است؛ این قضیهٔ مشهوری در توپولوژی مجموعهٔ نقاط است که به قضیهٔ هان ـ مازورکیه‌ویچ[1] موسوم است (به $[H\text{-}Y]$ صفحهٔ ۱۲۹ مراجعه کنید). با فرض این قضیه، ثابت کنید که نگاشت پوشای پیوسته‌ای مانند $f: I \to I^\omega$ وجود دارد.

فضای هاوسدورفی که تصویر پیوستهٔ بازهٔ بستهٔ به‌طول یک باشد اغلب یک **فضای پئانو** نامیده می‌شود.

۷-۳ فشردگی درفضاهای متری

چنانکه قبلاً ثابت کردیم فشردگی، فشردگی برحسب نقطهٔ حدی، و فشردگی دنباله‌ای برای فضاهای متری معادل‌اند. با این وجود، فرمولبندی دیگری برای مفهوم فشردگی در فضاهای متری وجود دارد که متضمن مفهوم تمامیت است. در این بخش به مطالعهٔ آن می‌پردازیم. به‌عنوان یک مورد استعمال، قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که زیرمجموعه‌هایی از $\mathcal{C}(X, R^n)$ را که در متریک یکنواخت فشرده هستند مشخص می‌کند؛ این قضیه صورت کلاسیک قضیهٔ آسکولی است.

چگونه فشردگی یک فضای متری X به‌تمامیت آن مربوط می‌شود؟ از لم ۱۰۱، نتیجه می‌شود که هر فضای متری فشرده الزاماً تمام است. عکس این حکم برقرار نیست ـ یک فضای متری تمام لازم نیست فشرده باشد. این سؤال بجاست که چه‌شرطی باید بریک فضای متری مانند X نهاد تا فشردگی آن محقق گردد؟ شرط موردنظر همان است که کرانداری‌کلی نامیده می‌شود.

تعریف. فضای متری (X, d) را **کراندارکلی** گوییم در صورتی‌که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، یک‌پوشش متناهی از ε- گویها برای X موجود باشد.

---

1. Hahn-Mazurkiewicz

روشن است که کرانداری کلی یک‌فضای متری مستلزم کرانداری آن است. اما عکس این‌حکم برقرار نیست.

مثال ۱. تحت متریک $d(x,y)=|x-y|$، خط‌حقیقی نه‌کراندار است و نه کراندارکلی. تحت متریک $\bar{d}(x,y)=\min\{|x-y|,1\}$، خط حقیقی کراندار است ولی کراندار کلی نیست.

مثال ۲. زیر فضای $(-1,1)$ از R تحت متریک $|x-y|$ کراندارکلی‌است،زیرفضای $Q\cap[-1,1]$ نیز چنین است. لیکن، هیچیك از این دوفضا تمام نیستند. زیرفضای $[-1,1]$ هم تمام است وهم کراندار کلی.

۳.۱۰ قضیه فضای‌متری (X, d) فشرده است اگر و تنها اگر تمام و کراندارکلی باشد.

برهان. چنانکه در بالا ملاحظه شد، اگر X یك‌فضای متری فشرده باشد آنگاه خود به‌خود تمام است. کرانداری کلی X نتیجهٔ این‌حقیقت است که پوششی از X متشکل از همهٔ ε-گویهای باز باید یك‌زیرپوشش متناهی داشته‌باشد.

بعکس، فرض‌کنیم X تمام وکراندارکلی باشد. ثابت می‌کنیم که X فشردهٔ دنباله‌ای است، واین برای اثبات‌کافی است.

فرض‌کنیم (x_n) دنباله‌ای از نقاط X باشد. زیردنباله‌ای از (x_n) می‌سازیم که یك‌دنبالهٔ کوشی باشد، و در نتیجه، الزاماً همگراست. نخست X را با تعدادی متناهی از گویهای به‌شعاع ۱ می‌پوشانیم. دست‌کم یکی از این گویها، مثلاً B_1، به‌ازای تعدادی نامتناهی از مقادیر n، شامل x_n است. فرض‌کنیم که J_1 زیرمجموعه‌ای از Z_+ باشد که عبارت است از اندیسهایی مانند n که به‌ازای‌آنها $x_n\in B_1$.

باردیگر، X را باتعدادی متناهی ازگویهای به شعاع ۱/۲ می‌پوشانیم. چون J_1 نامتناهی است، دست‌کم یکی از این گویها، مثلاً B_2، باید به‌ازای تعدادی نامتناهی از مقادیر n در J_1 شامل x_nها باشد. J_2 را مجموعهٔ اندیسهایی مانند n انتخاب می‌کنیم که به‌ازای آنها $n\in J_1$ و $x_n\in B_2$. در حالت کلی، به‌ازای مجموعهٔ نامتناهی مفروض J_k از اعداد صحیح مثبت، J_{k+1} را زیرمجموعه‌ای نامتناهی از J_k می‌گیریم به‌طوری‌که یك گوی مانند B_{k+1} به‌شعاع $1/(k+1)$ موجود باشد که به‌ازای هر n که $n\in J_{k+1}$، x_n در B_{k+1} باشد.

n_1 را از J_1 انتخاب می‌کنیم. به‌ازای n_kی مفروض، n_{k+1} را از J_{k+1} چنان انتخاب می‌کنیم که $n_{k+1}>n_k$؛ این‌کار ممکن است، زیرا J_{k+1} مجموعه‌ای نامتناهی است. اما به‌ازای $i\geqslant k$ و $j\geqslant k$، اندیسهای n_i و n_j هردو متعلق به J_k هستند (زیرا، $J_1\supset J_2\supset\ldots$ دنباله‌ای تو در تو از مجموعه‌هاست). بنابراین، به‌ازای هر i و j که $i\geqslant k$ و $j\geqslant k$، نقاط x_{n_i} و x_{n_j} درگویی مانند B_k به شعاع $1/k$

واقع می‌شوند. از اینجا نتیجه می‌شود که دنبالهٔ (x_{n_i}) یک دنبالهٔ کوشی است و این همان است که می‌خواستیم. □

اینک، این قضیه را در مورد فضای تابعی $\mathcal{C}(X, R^n)$، با توپولوژی یکنواخت، به‌کار می‌گیریم. می‌خواهیم فقط حالتی را درنظر بگیریم که X فشرده است، بدین‌دلیل در سراسر این‌قسمت از متریک

$$\rho(f, g) = \max\{d(f(x), g(x))\}$$

استفاده می‌کنیم. [در اینجا d را می‌توان متریک اقلیدسی یا متریک مربعی بر R^n گرفت.]

سابقاً ثابت کردیم که یک زیرمجموعهٔ (R^n, d) فشرده است اگر وتنها اگر بسته و کراندار باشد. ممکن است بعضی تصور کنند که قضیه‌ای نظیر این در مورد $(\mathcal{C}(X, R^n), \rho)$ نیز صادق است. ولی این‌طور نیست. برای این منظور لازم است یک شرط اضافی برزیرمجموعه‌های $\mathcal{C}(X, R^n)$ نهاده شود، که به **همپیوستگی** موسوم است. تعریف آن بدین‌قرار است:

تعریف. فرض کنیم (Y, d) یک فضای متری باشد، و $\mathcal{F}$ را زیرمجموعه‌ای از فضای تابعی $\mathcal{C}(X, Y)$ می‌گیریم. اگر $x_0 \in X$، مجموعهٔ $\mathcal{F}$ از توابع را وقتی **در x_0 همپیوسته** خوانیم که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، همسایگیی از x_0 مانند U یافت شود که به‌ازای هر $x \in U$ وهر $f \in \mathcal{F}$،

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

اگرمجموعهٔ $\mathcal{F}$ به‌ازای هر x_0 از X، در x_0 همپیوسته باشد، مختصراً آن‌را **همپیوسته** می‌نامیم.

پیوستگی تابع f در x_0 بدین‌معنی است که به‌ازای f مفروض و $\varepsilon > 0$ مفروض، همسایگیی مانند U از x_0 هست به‌طوری که به‌ازای $x \in U$ داریم

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

همپیوستگی $\mathcal{F}$ بدین‌معنی است که برای همهٔ توابع f درگردایهٔ $\mathcal{F}$ می‌توان تنها یک همسایگی مانند U را چنان انتخاب کرد که در شرط پیوستگی برای هریک از f ها صدق کند.

وقتی X و Y هردو فشرده باشند، همپیوستگی دارای تعبیر جالب ذیل است:

۲.۳ لم فرض‌کنیم X یک فضای فشرده و (Y, d) یک فضای متری فشرده باشد، وفرض‌کنیم $\mathcal{F}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{C}(X, Y)$ باشد، در این‌صورت، $\mathcal{F}$ همپیوسته است اگرو تنها اگر در متریک سوپرمومی ρ کرانداركلی باشد.

برهان. فرض‌کنیم $\mathcal{F}$ تحت ρ کراندار کلی باشد. به‌ازای نقطهٔ مفروض x_0، ثابت می‌کنیم که $\mathcal{F}$ در x_0 همپیوسته است. فرض‌کنیم $\varepsilon > 0$ مفروض باشد. اعداد مثبت ε_1 و ε_2 را چنان اختیار می‌کنیم که $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon$. $\mathcal{F}$ را با تعدادی متناهی از ε_1-گویهای باز مانند

$$B_\rho(f_1, \varepsilon_1), \ldots, B_\rho(f_n, \varepsilon_1)$$

می‌پوشانیم. هر تابع f_i پیوسته است؛ بنابراین، می‌توان همسایگی U از x_0 را چنان برگزید که به‌ازای $x \in U$ و $i = 1, \ldots, n$،

$$d(f_i(x), f_i(x_0)) < \varepsilon_2.$$

مدعی هستیم که اگر $x \in U$ و $f \in \mathcal{F}$ آنگاه $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$؛ و این اثبات همپیوستگی است.

فرض‌کنیم f عضو دلخواهی از $\mathcal{F}$ باشد. در این صورت، f دست‌کم به‌یکی‌از ε_1-گویهای فوق، مثلاً به $B_\rho(f_i, \varepsilon_1)$، متعلق است. درنتیجه،

$$d(f(x), f_i(x)) < \varepsilon_1,$$
$$d(f_i(x), f_i(x_0)) < \varepsilon_2,$$
$$d(f_i(x_0), f(x_0)) < \varepsilon_1.$$

نامساویهای اول وسوم ناشی ازتعلق f به $B_\rho(f_i, \varepsilon_1)$ می‌باشند، نامساوی دوم، به‌دلیل آنکه $x \in U$، برقرار است. از اینجا، بنابرنامساوی مثلثی، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $x \in U$ داریم $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$، واین همان است که می‌خواستیم.

بعکس، فرض‌کنیم $\mathcal{F}$ همپیوسته و ε عدد مثبت مفروضی باشد. می‌خواهیم $\mathcal{F}$ را با تعدادی متناهی از ε-گویهای باز بپوشانیم. ε_1 و ε_2 را چنان اختیار می‌کنیم که $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon$. با استفاده ازهمپیوستگی $\mathcal{F}$ و فشردگی X، فضای X را با تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز مانند U_1، ...، U_k که، بترتیب، شامل نقاط x_1، ...، x_k هستند می‌پوشانیم به‌طوری که به‌ازای هر x متعلق به U_i وهر f متعلق به $\mathcal{F}$،

$$d(f(x), f(x_i)) < \varepsilon_1.$$

Y را نیز با تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز مانند V_1، ...، V_m که قطر هریك از ε_2 کمتر است می‌پوشانیم.

فرض‌کنیم J گردایهٔ همهٔ توابع به‌صورت $\alpha : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, m\}$ باشد. به‌ازای عضو مفروضی از J مانند α، اگر تابعی مانند f از $\mathcal{F}$ وجود داشت به‌طوری که به‌ازای هر i که $i = 1, \ldots, k$، $f(x_i) \in V_{\alpha(i)}$ آنگاه یکی از این توابع را انتخاب می‌کنیم و آن را f_α می‌نامیم. گردایهٔ $\{f_\alpha\}$ با زیرمجموعه‌ای مانند

J' از J اندیسگذاری شده است، بنابراین متناهی است. مدعی هستیم که گویهای باز به‌صورت $B_\rho(f_\alpha, \varepsilon)$، وقتی که $\alpha \in J'$، $\mathcal{F}$ را می‌پوشانند.

فرض کنیم f عضوی از $\mathcal{F}$ باشد. به‌ازای هر i که $i = 1, \ldots, k$، عددصحیح $\alpha(i)$ را چنان اختیار می کنیم که $f(x_i) \in V_{\alpha(i)}$. در این‌صورت، تابع α در J' قرار می‌گیرد. ادعا می کنیم که f به گوی $B_\rho(f_\alpha, \varepsilon)$ تعلق دارد.

فرض کنیم x نقطه‌ای از X باشد. i را چنان انتخاب می کنیم که $x \in U_i$. در این‌صورت،

$$d(f(x), f(x_i)) < \varepsilon_1,$$

$$d(f(x_i), f_\alpha(x_i)) < \varepsilon_2,$$

$$d(f_\alpha(x_i), f_\alpha(x)) < \varepsilon_1.$$

چون $x \in U_i$، نامساویهای اول وسوم برقرارند، و نامساوی دوم به‌دلیل آنکه $f(x_i)$ و $f_\alpha(x_i)$ در $V_{\alpha(i)}$ هستند، برقرار است. از اینجا نتیجه می گیریم که

$$d(f(x), f_\alpha(x)) < \varepsilon.$$

چون این‌نامساوی به‌ازای هر x متعلق به X برقرار است،

$$\rho(f, f_\alpha) = \max\{d(f(x), f_\alpha(x))\} < \varepsilon.$$

بنابراین، f متعلق است به $B_\rho(f_\alpha, \varepsilon)$ واین همان است که می‌خواستیم. □

اینك، صورت کلاسیك قضیهٔ آسکولی را اثبات می‌کنیم. صورت کلیتری از این قضیه، که اثباتش به‌این قضیه بستگی ندارد، دربخش ۷ ــ ۶ می‌آید.

۳.۴. قضیه (قضیهٔ آسکولی، صورت کلاسیك) فرض‌کنیم X یك‌فضای فشرده‌باشد؛ $\mathcal{C}(X, R^n)$ را در متریك سوپرمومی ρ در نظر می‌گیریم. زیرمجموعهٔ $\mathcal{F}$ از $\mathcal{C}(X, R^n)$ فشرده است اگر وتنها‌اگر بسته،کراندار، وهمپیوسته باشد.

برهان. مرحلهٔ ۱. نخست ثابت می کنیم که اگر $\mathcal{F}$ تحت ρ کراندار باشد آنگاه زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از R^n مانند Y موجود است بااین خاصیت که: به‌ازای هر $x \in X$ وهر $f \in \mathcal{F}$ داریم $f(x) \in Y$. ازاینجا نتیجه می‌شودکه $\mathcal{F}$ جزء زیرمجموعهٔ $\mathcal{C}(X, Y)$ از $\mathcal{C}(X, R^n)$ است.

عضوی مانند f_0 از $\mathcal{F}$ انتخاب می‌کنیم. چون $\mathcal{F}$ تحت ρ کراندار است، عددی مانند M وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $f \in \mathcal{F}$، $\rho(f_0, f) < M$. چون X فشرده است، $f_0(X)$ نیز فشرده است. بنابراین، می‌توان عدد N را طوری انتخاب کرد که $f_0(X)$ درگوی $B_d(0, N)$ از R^n قرار گیرد. دراین‌صورت، به‌ازای هر $f \in \mathcal{F}$، $f(X)$

در گوی $B_d(0, M+N)$ واقع می‌شود. Y را بستار این گوی اختیار می‌کنیم؛ در این‌صورت، به‌ازای هر x از X و هر f از $\mathcal{F}$، خواهیم داشت $f(x) \in Y$.

مرحلهٔ ۲. فرض‌کنیم $\mathcal{F}$ فشرده باشد. در این صورت، $\mathcal{F}$ تحت ρ بسته و کراندار است. بنا بر مرحلهٔ ۱، $\mathcal{F}$ جزء زیرفضایی از $\mathcal{C}(X, R^n)$ مانند $\mathcal{C}(X, Y)$ است، که درآن Y فشرده است. چون $\mathcal{F}$ فشرده است، بنا برقضیهٔ ۱.۳، $\mathcal{F}$ تحت ρ کراندارکلی است. اما، چون X و Y هردو فشرده‌اند، با استفاده از لم ۲.۳، می‌توان نتیجه گرفت که $\mathcal{F}$ همپیوسته است.

مرحلهٔ ۳. فرض کنیم $\mathcal{F}$ تحت ρ بسته، کراندار و همپیوسته باشد. چون $\mathcal{F}$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای ازفضای متری تمام $(\mathcal{C}(X, R^n), \rho)$ است، الزاماً تمام است. چون $\mathcal{F}$ کراندار است، به‌موجب مرحلهٔ ۱، جزء زیرفضایی از $\mathcal{C}(X, R^n)$ مانند $\mathcal{C}(X, Y)$ است، که درآن Y فشرده است. چون $\mathcal{F}$ همپیوسته است و X و Y فشرده هستند، بنا برلم ۲.۳، $\mathcal{F}$ کراندارکلی است. پس، ازقضیهٔ ۱.۳، فشرده بودن $\mathcal{F}$ نتیجه می‌شود. □

تمرینها

۱. فرض‌کنید (X, d) یک‌فضای متری باشد.
(الف) ثابت‌کنید که اگر X کراندارکلی باشد آنگاه X کراندار است.
(ب) ثابت کنید که X تحت d کراندار کلی است اگر و تنها اگر تحت متریک $\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ کراندارکلی باشد.

۲. فرض‌کنید A زیرمجموعه‌ای ازفضای متری تمام X باشد. ثابت‌کنید که A کراندار کلی است اگر وتنها اگر $\bar{A}$ فشرده باشد.

۳. حاصلضرب شمارای $X = \prod X_n$ از فضاهای متریک‌پذیر را درنظر بگیرید. بر X متریک D راکه توپولوژی حاصلضربی را القا می‌کند به‌کار ببرید. (به‌تمرین ۳ ازبخش ۲ ـ ۱۰ مراجعه‌کنید.) ثابت کنید که اگر هرفضای X_n کراندارکلی باشد، X نیز چنین است. بدون استفاده ازقضیهٔ تیخونوف، نتیجه بگیرید که هر حاصلضرب شمارا از فضاهای متریک‌پذیر فشرده فضایی‌است فشرده.

۴. (الف) ثابت‌کنید که هرمجموعهٔ متناهی از توابع پیوسته، همپیوسته است.
(ب) فرض کنید $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از توابع مشتق‌پذیر مانند $f : [0, 1] \to R$ باشد که مشتقهای آنها کراندار یکنواخت‌اند. [یعنی، عددی مانند M وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $f \in \mathcal{F}$ و هر x داریم $|f'(x)| \leqslant M$.] ثابت کنید‌که $\mathcal{F}$ همپیوسته است.
(پ) فرض‌کنید تابع $f_n : [0, 1] \to R$ با ضابطهٔ $f_n(x) = x^n$ تعریف شده

باشد؛ فرض کنید $\mathcal{F}$ گردایهٔ $\{f_n\}$ باشد. ثابت کنید $\mathcal{F}$ بسته و کراندار است اما در $\mathcal{C}(I, R)$ هیچ نقطهٔ حدی ندارد. در چه نقطه یا نقاطی $\mathcal{F}$ همپیوسته نیست؟

۵. فرض کنید X فشرده باشد؛ $\mathcal{C}(X, R^n)$ را با متریك سوپرمومی ρ مجهز می کنیم. زیرمجموعهٔ $\mathcal{F}$ از $\mathcal{C}(X, R^n)$ را **کراندار یکنواخت** خوانیم در صورتی که تحت ρ کراندار باشد. آن‌را **کراندار نقطه به‌نقطه** خوانیم درصورتی که به‌ازای هر x از X، مجموعهٔ

$$\mathcal{F}_x=\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

زیرمجموعهٔ کرانداری از R^n باشد.

(الف) ثابت کنید که اگر $\mathcal{F}$ همپیوسته وکراندار نقطه به‌نقطه باشد،آنگاه کراندار یکنواخت نیز هست.

(ب) ثابت کنید که اگر $\mathcal{F}$ همپیوسته باشدآنگاه بستارآن نیز چنین است.

(پ) قضیه. فرض‌کنید X فشرده باشد؛ $\mathcal{C}(X, R^n)$ را با متریك ρ درنظرمی‌گیریم. زیرمجموعهٔ $\mathcal{F}$ از $\mathcal{C}(X, R^n)$ دارای بستار فشرده است اگر و تنها اگر همپیوسته و کراندار نقطه به نقطه باشد.

(ت) قضیه(قضیهٔ آرزلا[1]). فرض‌کنید X فشرده باشد، و $f_n \in \mathcal{C}(X, R^k)$. اگرگردایهٔ $\{f_n\}$ کراندار نقطه‌به‌نقطه و همپیوسته باشدآنگاه دنبالهٔ (f_n) زیردنباله‌ای دارد که همگرای یکنواخت است.

۶. فرض کنید X هاوسدورف موضعاً فشرده باشد. گوییم زیرمجموعهٔ $\mathcal{F}$ از $\mathcal{C}(X, R)$ **دربینهایت به‌طور یکنواخت صفر می‌شود** هر گاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، زیرمجموعهٔ فشرده‌ای مانند C از X موجود باشد به‌طوری که به‌ازای $x \in X-C$ و $f \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $|f(x)| < \varepsilon$. اگر $\mathcal{F}$ تنها از یك تابع f تشکیل شده باشد، فقط می گوییم f **در بینهایت صفر می‌شود**. فرض کنیم $\mathcal{C}_0(X, R)$ نمایش مجموعهٔ توابع پیوسته‌ای مانند $f: X \to R$ باشد که در بینهایت صفر می‌شوند. متریك سوپرمومی ρ را بر $\mathcal{C}_0(X, R)$ تعریف می‌کنیم.

قضیه. زیرمجموعهٔ $\mathcal{F}$ از $(\mathcal{C}_0(X, R), \rho)$ فشرده‌است اگر وتنها اگربسته،کراندار وهمپیوسته باشد ودر بینهایت به‌طور یکنواخت صفر شود.

[راهنمایی: فرض‌کنید Y فشرده شدهٔ تك نقطه‌ای X باشد. ثابت کنید که $\mathcal{C}_0(X, R)$ با زیرفضایی از $\mathcal{C}(Y, R)$ ایزومتریك است.]

۷*. فرض کنید (X, d) یك فضای متری باشد. اگر $A \subset X$ و $\varepsilon > 0$، مجموعهٔ $U(A, \varepsilon)$ را چنین تعریف کنید:

---

1. Arzela

$$U(A, \varepsilon)=U_{a\in A}\, B_d(a, \varepsilon)\,.$$

فرض کنید $\mathscr{H}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های (ناتهی) بسته و کراندار X باشد. اگر $A, B\in\mathscr{H}$، قراردهید

$$D(A, B)=\operatorname{glb}\{\varepsilon\mid A\subset U(B, \varepsilon),\ B\subset U(A, \varepsilon)\}.$$

(الف) ثابت کنید که D یك متریك بر $\mathscr{H}$ است. آن را **متریك هاوسدورف** می‌گوییم.

(ب) ثابت کنید که اگر (X, d) تمام باشد، $(\mathscr{H}, D)$ نیز چنین است. [راهنمایی: فرض کنید A_n دنباله‌ای کوشی در $\mathscr{H}$ باشد؛ با انتخاب زیردنباله‌ای مناسب، می‌توان فرض کرد $D(A_n, A_{n+1})<1/2^n$. A را مجموعهٔ همهٔ نقاطی مانند x تعریف کنید که هریك حد دنباله‌ای مانند x_1، x_2، ... است، به‌طوری که به‌ازای هر i، $x_i\in A_i$ و $d(x_i, x_{i+1})<1/2^i$. ثابت کنید که $A_n\to\bar{A}$.]

(پ) ثابت کنید که اگر (X, d) کراندار کلی باشد، $(\mathscr{H}, D)$ نیز چنین است. [راهنمایی: به‌ازای ε مفروض، δ ای کوچکتر از ε انتخاب کنید و فرض کنید که S زیرمجموعه‌ای متناهی از X باشد به‌طوری که گردایهٔ $\{B_d(x, \delta)\mid x\in S\}$ مجموعهٔ X را بپوشاند. فرض کنید که $\mathscr{A}$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی S باشد؛ ثابت کنید که $\{B_D(A, \varepsilon)\mid A\in\mathscr{A}\}$ مجموعهٔ $\mathscr{H}$ را می‌پوشاند.]

(ت) قضیه. اگر X در متریك d فشرده باشد آنگاه فضای $\mathscr{H}$، متشکل از همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی و بسته وکراندار X، درمتریك هاوسدورف D، فشرده است.

۸. درکدام نیمهٔ برهان لم ۲.۳ ازفشردگی Y استفاده می‌شود؟

۷-۴ همگرایی فشرده وهمگرایی نقطه‌به‌نقطه

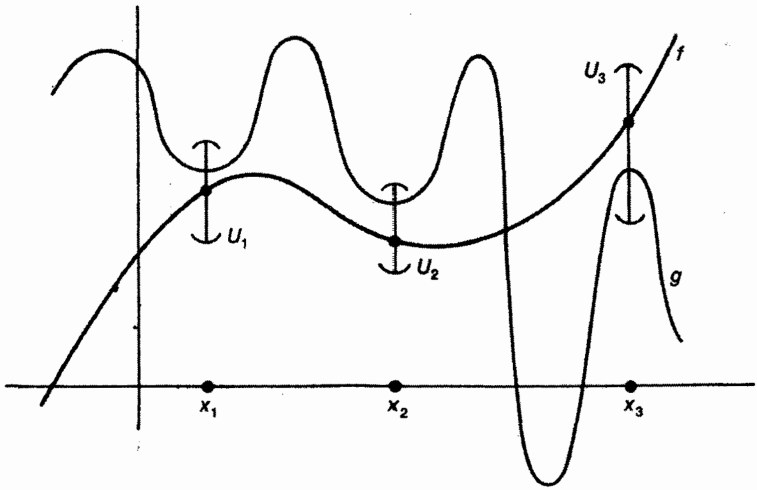
علاوه برتوپولوژی یکنوا، برفضاهای Y^X و $\mathscr{C}(X, Y)$ توپولوژیهای مفید دیگری نیز وجود دارند. دوتای آنها را در اینجا درنظر می‌گیریم؛ **توپولوژی همگرایی نقطه به‌نقطه و توپولوژی همگرایی فشرده**.

تعریف. نقطه‌ای مانند x از مجموعهٔ X ومجموعهٔ بازی مانند U در فضای Y داده شده‌اند، قرار می‌دهیم

$$S(x, U)=\{f\mid f\in Y^X,\ f(x)\in U\}.$$

مجموعه‌های به‌صورت $S(x, U)$ تشکیل زیرپایه‌ای برای توپولوژی بر Y^X می‌دهند. این توپولوژی را **توپولوژی همگرایی نقطه‌به‌نقطه** (یا **توپولوژی نقطه ـ باز**) می‌نامند.

یك عضو پایهٔ نوعی این توپولوژی به‌صورت یك مقطع متناهی از اعضای زیرپایهٔ $S(x, U)$ است. بدین گونه یك‌عضو نوعی پایه در حول تابع f عبارت است از همهٔ توابعی مانند g که در تعدادی متناهی ازنقاط به f «نزدیك»اند. یك همسایگی از این نوع را درشکل ۶ نشان داده‌ایم؛ این همسایگی ازهمهٔ توابعی مانند g تشکیل شده است که نمودارآنها سه‌بازهٔ قائم تصویر شده درشکل ۶ را قطع می‌کند.



شکل ۶

توپولوژی همگرایی نقطه‌به‌نقطه بر Y^X چیز تازه‌ای نیست. این توپولوژی همان توپولوژی‌حاصل‌ضربی‌است که قبلاً مطالعه کرده‌ایم. اگر J را جایگزین X کنیم و، برای یکنواختی‌علامتگذاری، عضو نوعی Jرا با α نمایش‌دهیم، آنگاه مجموعهٔ $S(\alpha,U)$، متشکل ازهمهٔ توابع $\mathbf{x}: J \to Y$ به‌طوری‌که $\mathbf{x}(\alpha) \in U$، درست همان زیرمجموعهٔ $\pi_\alpha^{-1}(U)$ از Y^J است که همان عضو زیرپایه‌ای استانده برای توپولوژی حاصل‌ضربی است.

دلیل اینکه آن را توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه نامیدیم از قضیهٔ ذیل ناشی می‌شود.

۴.۱۰ قضیه دنبالهٔ f_n از توابع درتوپولوژی همگرایی نقطه به نقطه به تابع f همگراست اگر وتنها اگر به‌ازای هر x از X، دنبالهٔ $\mathrm{f}_n(\mathrm{x})$ از نقاط Y به‌نقطهٔ $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ همگرا باشد.

برهان. این‌قضیه، مطلب استانده‌ای درمورد توپولوژی حاصل‌ضربی است؛ ما در اینجا آن‌را با استفاده از علاماتگذاری تابعی ثابت می‌کنیم. فرض‌کنیم f_n در توپولوژی همگرایی نقطه به‌نقطه همگرا باشد. به‌ازای x مفروضی از X و مجموعهٔ باز مفروضی

مانند U حول $f(x)$، مجموعهٔ $S(x, U)$ یك همسایگی f است. بنابراین، عدد صحیحی مانند N موجود است به‌طوری که به‌ازای هر $n \geqslant N$، $f_n \in S(x, U)$. در این‌صورت، به‌ازای همهٔ مقادیر n که $n \geqslant N$، $f_n(x) \in U$.

بعکس، فرض کنیم به‌ازای هر x، $f_n(x)$ به $f(x)$ همگرا باشد. برای اینکه ثابت کنیم که f_n در توپولوژی همگرایی نقطه‌به‌نقطه به f همگراست، کافی است ثابت کنیم که اگر $S(x, U)$ عضو زیرپایهٔ دلخواهی حول f باشدآنگاه به‌ازای همهٔ nهایی که به‌قدرکافی بزرگ باشند، $S(x, U)$ شامل f_n است. (چرا؟) اما چون $f_n(x)$ به $f(x)$ همگراست و $f(x) \in U$، باید عدد صحیحی مانند N باشد که به‌ازای $n \geqslant N$، داشته‌باشیم $f_n(x) \in U$. دراین‌صورت، به‌ازای $n \geqslant N$، داریم $f_n \in S(x, U)$. □

مثال ۱. فضای R^I را، که در آن $I = [0, 1]$، در نظر می‌گیریم. دنبالهٔ (f_n) از توابع پیوسته‌که باضابطهٔ $f_n(x) = x^n$ تعریف می‌شود، درتوپولوژی همگرایی نقطه‌به‌نقطه، به‌تابع f با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{به‌ازای } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{به‌ازای } x = 1, \end{cases}$$

همگراست. این مثال ثابت می‌کندکه زیرفضای $\mathscr{C}(I, R)$ از توابع پیوسته، در توپولوژی همگرایی نقطه به‌نقطه، در R^I بسته نیست.

می‌دانیم که دنباله‌ای مانند (f_n) از توابع پیوسته، که در توپولوژی یکنواخت، همگرا باشد، دارای حدی پیوسته است ومثال پیش ثابت می‌کند که دنباله‌ای که تنها در توپولوژی همگرایی نقطه‌به‌نقطه همگرا باشد لازم نیست حد پیوسته داشته باشد. در اینجا می‌توان این سؤال را مطرح کردکه‌آیا توپولوژیی میان این دو وجود دارد که پیوستگی حد یك‌دنبالهٔ همگرا ازتوابع پیوسته را تضمین‌کند؟ جواب «مثبت» است؛ کافی است قید (نسبتاً ملایم) به‌طورفشرده تولید شده را بر X بنهیم. در این صورت، اگر f_n به f در توپولوژی همگرایی فشرده همگرا باشد، f پیوسته خواهد بود. این توپولوژی را هم‌اکنون تعریف می‌کنیم.

تعریف. فرض‌کنیم (Y, d) یك فضای متری و X یك فضای توپولوژیك باشد. عضوی مانند f از Y^X، زیرمجموعهٔ فشرده‌ای مانند C در X، وعدد مثبتی مانند ε مفروض‌اند. فرض‌کنیم $B_C(f, \varepsilon)$ نمایش همهٔاعضایی مانند g از Y^X باشدکه به‌ازای آنها

$$\text{lub}\{d(f(x), g(x)) \mid x \in C\} < \varepsilon.$$

مجموعه‌های $B_C(f, \varepsilon)$ تشکیل پایه‌ای برای یك توپولوژی بر Y^X می‌دهند. این

توپولوژی را توپولوژی همگرایی فشرده (یا بعضی اوقات، «توپولوژی همگرایی یکنواخت برمجموعه‌های فشرده») می‌نامند.

تفاوت این توپولوژی با توپولوژی همگرایی نقطه به‌نقطه در این است که عضو پایهٔ نوعی شامل f عبارت است ازهمهٔ توابعی‌که «نزدیکی» آنها به f تنها در تعدادی متناهی ازنقاط نیست، بلکه، درهمهٔ نقاط مجموعه‌ای فشرده است.

ملاحظه کنید که اگر $g \in B_C(f, \varepsilon)$ آنگاه δ یی مثبت وجود دارد به‌طوری‌که $B_C(g, \delta) \subset B_C(f, \varepsilon)$؛ کافی است فرض کنیم

$$\delta = \varepsilon - \mathrm{lub}\{d(f(x), g(x)) \mid x \in C\}.$$

در این‌صورت، می‌توانید به‌آسانی تحقیق کنید که این‌مجموعه‌ها تشکیل یك‌پایه می‌دهند.

توجیه انتخاب اصطلاح«همگرایی‌فشرده» درقضیهٔ ذیل می‌آید که اثباتش سرراست است.

۲۰۴ قضیه دنباله‌ای از توابع مانند $f_n : X \to Y$ در توپولوژی همگرایی فشرده به‌تابع f همگراست اگر و تنها اگر به‌ازای زیرمجموعهٔ فشردهٔ X، مانند C، دنبالهٔ $f_n \mid C$ همگرای یکنواخت به $f \mid C$ باشد.

تعریف . گوییم فضای X **به‌طور فشرده تولید شده** است هرگاه واجد شرط ذیل باشد: زیرمجموعهٔ A از X در X باز است اگر وتنها اگر به‌ازای هرزیرمجموعهٔ فشردهٔ X، مانند C، مجموعهٔ $A \cap C$ در C باز باشد.

شرط بالا معادل آن است که زیرمجموعه‌ای، مانند B از X در X بسته‌است اگر وتنها اگر به‌ازای‌هرزیرمجموعهٔ فشردهٔ X، مانند C، مجموعهٔ $B \cap C$ در C بسته باشد. این شرط نسبتاً ملایمی بریك فضاست؛ بسیاری از فضاهایی‌که می‌شناسیم به‌طور فشرده تولید شده‌اند. مثلاً:

۳۰۴ لم اگر X موضعاً فشرده باشد، یا X در اولین اصل موضوع شمارایی صدق کند، آنگاه X به‌طور فشرده تولید شده است.

برهان . فرض کنیم X موضعاً فشرده باشد، و $A \cap C$، به‌ازای هرزیرمجموعهٔ فشردهٔ X، مانند C، در C باز باشد. ثابت می‌کنیم‌که A باز است. به‌ازای نقطهٔ مفروض x از A، یك همسایگی x مانند U انتخاب می‌کنیم‌که در مجموعهٔ فشرده‌ای مانند C واقع باشد. چون، بنابرفرض $A \cap C$ در C باز است، $A \cap U$ در U باز است، ودر نتیجه، در X نیز باز خواهد بود. دراین‌صورت، $A \cap U$ یك همسایگی x است‌که زیرمجموعهٔ A است. بنابراین، A در X باز است.

فرض‌کنیم X در اولین اصل موضوع شمارایی صدق‌کند. اگر $B \cap C$ به‌ازای هرزیرمجموعهٔ فشردهٔ X مانند C، در C بسته باشد، ثابت می‌کنیم‌که B در X بسته

است. فرض‌کنیم x نقطه‌ای از $\bar{B}$ باشد؛ ثابت می کنیم که $x \in B$. چون X در نقطهٔ x پایه‌ای شمارا دارد، دنباله‌ای ازنقاط B مانند (x_n) همگرا به x موجود است. مجموعهٔ

$$C = \{x\} \cup \{x_n\} \mid n \in Z_+\}$$

فشرده است . در نتیجه ، بنابرفرض ، $B \cap C$ در C بسته است. چون به‌ازای هر n ، مجموعهٔ $B \cap C$ شامل x_n است، شامل x نیز هست . بنابراین $x \in B$ ، واین همان است که می‌خواستیم.□

۴. ۴ قضیه فرض‌کنیم X فضایی باشدکه به‌طور فشرده تولید شده است. فرض‌کنیم که (Y, d) یک‌فضای متری باشد. دراین‌صورت $\mathcal{C}(X, Y)$ در توپولوژی همگرایی فشرده در Y^X بسته است.

برهان. فرض‌کنیم f متعلق به Y^X ویک نقطهٔ حدی $\mathcal{C}(X, Y)$ باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که f پیوسته است.

نخست، ثابت می کنیم که به‌ازای هرمجموعهٔ فشردهٔ X مانند C، تابع $f|C$ پیوسته است. به‌ازای هر n ، همسایگی $B_C(f, 1/n)$ از f را درنظر می گیریم. این‌همسایگی، $\mathcal{C}(X, Y)$ را قطع می کند. پس می‌توان تابعی مانند f_n در این همسایگی انتخاب کرد به‌طوری که $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$. دنبـالهٔ توابع $f_n | C : C \to Y$ همگرای یکنواخت به‌تابع $f | C$ است. در نتیجه، بنابر قضیهٔ حد یکنواخت، $f | C$ پیوسته است.

ازآنچه گذشت نتیجه می‌شود که f پیوسته‌است. فرض‌کنیم V زیرمجموعهٔ بازی از Y باشد؛ ثابت می کنیم که $f^{-1}(V)$ در X باز است. اگر C زیرمجموعهٔ دلخواهی از X باشد، داریم

$$f^{-1}(V) \cap C = (f|C)^{-1}(V).$$

اگر C فشرده بـاشد ، این‌مجموعه در C باز است. زیرا، $f | C$ پیوسته است. چون X به‌طور فشرده تولید شده است، نتیجه می‌شود که $f^{-1}(V)$ در X باز است.□

۴. ۵ نتیجه فرض‌کنیم X فضایی بـاشد کـه به‌طور فشرده تولید شده است ، و (Y, d) یک‌فضای متری باشد . اگر دنباله‌ای از توابع پیوسته مانند $f_n : X \to Y$ ، در توپولوژی همگرایی فشرده، به f همگرا باشدآنگاه f پیوسته است.

حال به‌ازای فضای متری Y ، سه‌توپولوژی برای فضای‌تابعی Y^X دردست است. رابطهٔ بین‌آنها درقضیهٔ ذیل، که اثباتش سرراست است، بیان شده است.

۴. ۶ قضیه فرض‌کنیم X یک‌فضای دلخواه و (Y, d) فضایی متری بـاشد . در این‌صورت، جزئیتهای زیر برای توپولوژیهای Y^X موجود است:

(همگرایی نقطه به‌نقطه) $\subset$ همگرایی فشرده $\subset$ (یکنواخت).

اگر X فشرده باشد، دوتای اول باهم برابر می‌شوند. واگر X گسسته باشد، دوتای دوم باهم برابر می‌شوند.

تمرینها

۱. ثابت کنید که مجموعه‌های $B_C(f, \varepsilon)$ تشکیل پایه‌ای برای یك‌توپولوژی بر Y^X می‌دهند.

۲. قضیه ۲.۴ را ثابت کنید.

۳. قضیهٔ ۶.۴ را ثابت کنید.

۴. Y^X را با توپولوژی همگرایی فشرده درنظر بگیرید.
(الف) ثابت‌کنیدکه Y^X منتظم است. آیا نرمال هم‌هست؟
(ب) ثابت‌کنید که اگر X مساوی اجتماع شمارایی از مجموعه‌های باز با بستار فشرده باشدآنگاه Y^X در اولین اصل موضوع شمارایی صدق می‌کند.

۵. ثابت کنید که به‌طور کلی مجموعهٔ توابع کراندار $f:X \to R$ در R^X، با توپولوژی همگرایی فشرده، بسته نیست.

۶. دنبالهٔ توابع $f_n:R_+ \to R$ را باضابطهٔ

$$f_n(x)=\frac{1}{nx}$$

درنظر می‌گیریم. درکدامیك از سه توپولوژی قضیهٔ ۶.۴ این دنباله همگراست؟ در مورد دنباله‌ای که در تمرین ۹ ازبخش ۲ ـ ۱۰ تعریف شد چه می‌توان گفت؟

۷. دنبالهٔ توابع $f_n:(-1, 1) \to R$ را باضابطهٔ

$$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} kx^k$$

درنظر بگیرید.
(الف) ثابت‌کنیدکه (f_n) درتوپولوژی همگرایی فشرده همگراست؛ نتیجه بگیرید که تابع حدی پیوسته است. (این مطلب استانده‌ای درباب سریهای توانی است.)
(ب) ثابت‌کنید که (f_n)، در توپولوژی یکنواخت، همگرا نیست.

۸. تابع $f:X \to R$ را دارای محمل فشرده خوانیم هرگاه f در خارج مجموعه‌ای فشرده صفر شود. فرض کنید $\mathcal{C}_c(R,R)$ مجموعهٔ همهٔ توابع پیوسته‌ای مانند $f:R \to R$ باشدکه محمل فشرده دارند. متریکی براین مجموعه باضابطهٔ

$$D(f, g)=\left[\int_{-\infty}^{\infty}(f(x)-g(x))^{۲}\,dx\right]^{۱/۲}$$

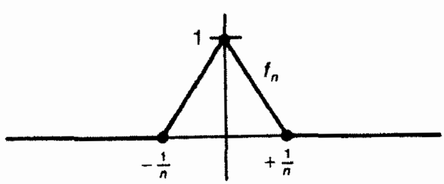
تعریف می کنیم.

(الف) ثابت کنید که D یک‌متریك است. توپولوژی حاصل از این متریك را **توپولوژی همگرایی درمیانگین** می گویند. [راهنمایی: یك «ضرب اسکالری» با ضابطهٔ

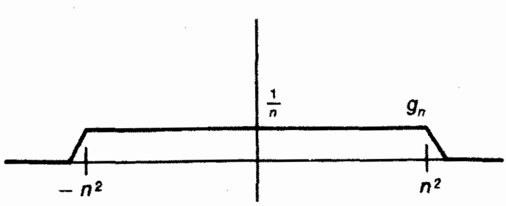
$$f\cdot g=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)dx$$

تعریف کنید؛ سپس، از برهان داده شده درتمرین۸ از بخش ۲ ــ ۹ برای متریك اقلیدسی تقلید کنید.]

(ب) درکدامیك از چهار توپولوژیی که برای $\mathcal{C}_C(X, Y)$ داریم دنبالهٔ f_n که درشکل ۷ نموده شده همگراست؟ درمورد دنبالهٔ g_n که درشکل ۸ نموده شده‌است چه می‌توان گفت؟



شکل ۷



شکل ۸

(پ) ثابت کنید که توپولوژی همگرایی در میانگین با سه توپولوژی دیگر قابل مقایسه نیست.

۹. فرض‌کنید (Y, d) یك فضای متری باشد، و X یك فضای دلخواه. بر $\mathcal{C}(X, Y)$ یك توپولوژی به‌قرارذیل تعریف‌کنید: به‌ازای عضودلخواهی از $\mathcal{C}(X, Y)$، مانند f، وتابع پیوسته مثبتی مانند $\delta : X \to R_+$، $B(f, \delta)$ را چنین تعریف کنید:

$$B(f, \delta)=\{g \mid d(f(x), g(x))<\delta(x) \text{ ،} X \text{ از } x \text{ به‌ازای هر}\}$$

(الف) ثابت‌کنید که مجموعه‌های به‌صورت $B(f, \delta)$ تشکیل پایه‌ای برای یك توپولوژی بر $\mathcal{C}(X, Y)$ می‌دهند. این‌توپولوژی را **توپولوژی ظریف** می‌نامیم.

(ب) ثابت‌کنید که توپولوژی ظریف حاوی توپولوژی یکنواخت است.

(پ) ثابت‌کنید که اگر X فشرده باشد، توپولوژیهای یکنواخت و ظریف با هم برابر می‌شوند.

(ت) ثابت‌کنید که اگر X گسسته باشدآنگاه $\mathcal{C}(X, Y)=Y^X$ و توپولوژیهای ظریف وجعبه‌ای باهم برابر می‌شوند.

۱۰. دراینجا قضیه‌ای دربارهٔ فضاهای تولید شده ارائه شده است. نگاشت $f:X \to Y$ را وقتی یك نگاشت سره خوانیم که به‌ازای هرمجموعهٔ فشرده در Y، مانند D، مجموعهٔ $f^{-1}(D)$ در X فشرده باشد.

قضیه. فرض‌کنید X یك‌فضای دلخواه و Y فضای هاوسدورفی باشدکه به‌طور فشرده تولید شده است. اگر $f : X \to Y$ تابعی پیوسته، یك به‌یك، و سره باشد آنگاه f یك‌نشاننده است و $f(X)$ در Y بسته است.

۷-۵ توپولوژی فشرده ـ باز

در تعریف توپولوژی یکنواخت و توپولوژی همگرایی فشرده درفضای تابعی Y^X، در نظر گرفتن متریکی برای فضای Y ضروری بود؛ این متریك در هردو تعریف شرکت داشت. (درتعریف توپولوژی همگرایی نقطه‌به‌نقطه برفضای تابعی Y^X به چنین متریکی بر Y نیاز نداشتیم.)

به‌طور کلی، علمای توپولوژی بدواً با موضوعاتی سروکار دارند که به‌توپولوژی بریك فضا مربوطند نه به‌متریك‌آن. بنابراین، طبیعی است که سؤال شود که آیا هیچ‌یك از این دو توپولوژی، به‌جای متریك خاص Y، فقط به‌توپولوژی Y وابسته است؟

در مورد فضای Y^X، متشکل از همهٔ توابع از X بتوی Y، هیچ جواب رضایتبخشی بدین پرسش وجود ندارد. اما در مورد فضای $\mathcal{C}(X, Y)$ متشکل از همهٔ توابع پیوسته، می‌توان مطلبی را ثابت‌کرد؛ برای این فضا، توپولوژی همگرایی فشرده مستقل از متریك خاصی است که برای Y انتخاب می‌شود.

برای اثبات این‌حکم، توپولوژی خاصی بر $\mathcal{C}(X, Y)$ تعریف می‌کنیم موسوم به توپولوژی فشرده ـ باز،در تعریف این توپولوژی هیچ متریکی بر Y دخالت ندارد.

سپس ثابت می‌کنیم که اگر متریکی مانند d برای Y پیدا شد، آنوقت این توپولوژی با توپولوژی همگرایی فشرده یکی می‌شود. بنابراین، توپولوژی همگرایی فشرده بر $\mathcal{C}(X, Y)$ تنها به‌فضای Y وابسته است، ونه به‌متریك آن.

توپولوژی فشرده ـ باز، به‌نوبهٔ خود، دارای اهمیت بسیاری است. این توپولوژی خواص بسیار سودمندی دارد. دربخش آتیه، از آن در اثبات تعمیمی از قضیهٔ آسکولی بهره خواهیم گرفت. همچنین، این توپولوژی با مفهوم «هموتوپی»، که از مفاهیم بنیادی توپولوژی جبری است، رابطهٔ نزدیکی دارد.

تعریف. فرض‌کنیم X و Y دو فضای توپولوژیك باشند. اگر C زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از X و U زیرمجموعهٔ بازی از Y باشد، $S(C, U)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S(C, U)=\{f \mid f \in \mathcal{C}(X, Y),\ f(C)\subset U\}.$$

مجموعه‌های $S(C, U)$ تشکیل زیرپایه‌ای برای یك توپولوژی بر $\mathcal{C}(X, Y)$ می‌دهند، که به **توپولوژی‌فشرده ـ باز** موسوم است.

توجه کنید که هم توپولوژی نقطه ـ باز وهم توپولوژی فشرده ـ باز بدون فرض وجود متریکی بر Y تعریف شده‌اند. بنابر تعریف، واضح‌است که درحالت کلی توپولوژی فشرده ـ باز از توپولوژی نقطه ـ باز ظریفتر است.

۵. ۱. قضیه فرض‌کنیم X فضایی دلخواه و (Y, d) فضایی متری باشد. برای فضای $\mathcal{C}(X, Y)$ توپولوژی فشرده ـ باز و توپولوژی همگرایی فشرده‌یکی هستند.

برهان. مرحلهٔ ۱. اگر A زیرمجموعه‌ای از Y باشد و $\varepsilon > 0$ آنگاه $U(A, \varepsilon)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$U(A, \varepsilon)= \bigcup_{a\in A} B_d(a, \varepsilon).$$

این مجموعه را «ε ـ همسایگی» A می‌نامیم. اگر A فشرده و V مجموعهٔ بازی حاوی A باشد، ثابت می‌کنیم که عدد مثبتی مانند ε وجود دارد به‌طوری که $U(A, \varepsilon)\subset V$.

این حکم را قبلاً به‌عنوان تمرینی آوردیم (تمرین ۴ دربخش ۳ ـ ۶)؛ دراینجا آن‌را ثابت می‌کنیم. به‌ازای هر a از A عدد مثبت $\delta(a)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $B_d(a, \delta(a))\subset V$. مجموعهٔ A را باتعدادی متناهی ازمجموعه‌های باز به‌صورت

$$B_d\left(a_1, \tfrac{1}{2}\delta\left(a_1\right)\right), \ \dots, \ B_d\left(a_n, \tfrac{1}{2}\delta\left(a_n\right)\right)$$

می‌پوشانیم. فرض‌کنیم $\varepsilon=\min\{\delta(a_i)/2\}$. در این‌صورت، اگر $a\in A$، نقطهٔ a دست‌کم به یکی از مجموعه‌های $B_d(a_i, \delta(a_i)/2)$ تعلق دارد؛ از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$B_d(a, \varepsilon) \subset B_d(a_i, \delta(a_i)).$$

چون این رابطه به‌ازای هر a از A برقرار است ، از آنجا نتیجه می‌شود که $U(A, \varepsilon) \subset V$، واین همان است که می‌خواستیم.

مرحلهٔ ۲. ثابت می‌کنیم که توپولوژی همگرایی فشرده از توپولوژی فشرده ـ باز ظریفتر است. فرض کنیم $S(C, U)$ یك‌عضو زیرپایه‌ای برای توپولوژی فشرده ـ باز بر $\mathcal{C}(X, Y)$ و f عضوی از $S(C, U)$ باشد. چون f پیوسته است، $f(C)$ زیرمجموعهٔ فشرده‌ای ازمجموعهٔ‌باز U است. بنابرمرحلهٔ ۱، می‌توان ε را چنان برگزید که εـ‌همسایگی $f(C)$ در U قرار گیرد. بنابراین ،

$$B_C(f, \varepsilon) \subset S(C, U).$$

مرحلهٔ ۳. ثابت می‌کنیم که توپولوژی فشرده ـ باز از توپولوژی همگرایی فشرده ظریفتر است . به‌ازای مجموعهٔ باز مفروضی حول f در توپولوژی همگرایی فشرده، این مجموعه حاوی یك‌عضو پایه به‌صورت $B_C(f, \varepsilon)$ است. باید عضو پایه‌ای برای توپولوژی فشرده ـ باز بیابیم که شامل f و زیرمجموعهٔ $B_C(f, \varepsilon)$ باشد.

هرنقطهٔ C مانند x همسایگیی مانند V_x دارد به‌طوری که $f(\bar{V}_x)$ درمجموعهٔ بازی از Y مانند U_x قرار دارد که قطرآن از ε کمتر است. [مثلاً، V_x را می‌توان چنان انتخاب کرد که $f(V_x)$ در $\varepsilon/4$ـ همسایگی $f(x)$ قرار گیرد. در این صورت، $f(\bar{V}_x)$ در $\varepsilon/3$ـ‌همسایگی $f(x)$ قرار می‌گیرد ،که قطرآن حداکثر $2\varepsilon/3$ است.] C را با تعدادی متناهی ازمجموعه‌های باز ازنوع V_x، مثلاً، به‌ازای $x = x_1, \dots, x_n$ می‌پوشانیم. فرض کنیم $C_x = \bar{V}_x \cap C$. در این‌صورت، C_x فشرده است، وعضو پایه‌ای

$$S(C_{x_1}, U_{x_1}) \cap \dots \cap S(C_{x_n}, U_{x_n})$$

شامل f است ودر $B_C(f, \varepsilon)$ قرار دارد، واین همان است که می‌خواستیم. □

۲.۵ نتیجه فرض کنیم Y یك فضای متری باشد. توپولوژی همگرایی فشرده بر زیرفضای $\mathcal{C}(X, Y)$ از Y^X به‌متریك Y بستگی ندارد.

این امر که در تعریف توپولوژی فشرده ـ باز هیچ متریکی بر Y دخالت ندارد تنها یکی از جنبه‌های سودمند آن است. جنبهٔ دیگر آن این است که این توپولوژی در شرط «پیوستگی توأم» صدق کند . به‌بیانی نه‌چندان دقیق ، منظور این است که عبارت $f(x)$ نه‌تنها نسبت به«متغیر» x پیوسته است، بلکه همچنین توأماً نسبت به‌هردو «متغیر» x و f پیوسته است. به‌بیان دقیقتر، قضیهٔ ذیل موجود است:

۳.۵ قضیه فرض‌کنیم X هاوسدورف موضعاً فشرده باشد ؛ فرض‌کنیم $\mathcal{C}(X, Y)$ به‌توپولوژی فشرده ـ باز مجهز باشد. در این‌صورت، نگاشت

$$e: X\times\mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow Y$$

با ضابطهٔ

$$e(x, f)=f(x)$$

پیوسته است.

نگاشت e را **نگاشت ارزه** می‌نامند.

برهان. نقطهٔ مفروض (x, f) از $X\times\mathcal{C}(X, Y)$ و مجموعهٔ باز مفروضی مانند V حول نقطهٔ تصویری $e(x, f)=f(x)$ در Y داده شده‌اند، می‌خواهیم مجموعه‌ای باز حول (x, f) بیابیم که به‌وسیلهٔ e در V نگاشته شود. نخست، بااستفاده ازپیوستگی f و این امر که X هاوسدورف موضعاً فشرده است، می‌توان مجموعهٔ بازی مانند U حول x چنان برگزید که دارای بستار فشردهٔ $\bar{U}$ باشد، و f مجموعهٔ $\bar{U}$ را بتوی V بنگارد. سپس، مجموعهٔ باز

$$U\times S(\bar{U}, V)$$

در $X\times\mathcal{C}(X, Y)$ را درنظر می گیریم که مجموعهٔ بازی شامل (x, f) است. اگر (x', f') به‌این مجموعه متعلق باشد آنگاه $e(x', f')=f'(x')$ به V تعلق خواهد داشت، و این همان است که می‌خواستیم. □

قضیهٔ ذیل نتیجه‌ای ازقضیهٔ فوق است. باوجود اینکه درآتیه احتیاجی به‌کاربردهای آن نخواهیم داشت، ولی، نظر به‌اهمیت‌آن درتوپولوژی جبری، آن‌را دراینجا می‌آوریم.

۵۰۴ **نتیجه** فرض‌کنیم X یك‌فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باشد؛ و $\mathcal{C}(X, Y)$ دارای توپولوژی فشرده - باز باشد. Z را یك‌فضای توپولوژیك دلخواه می‌گیریم. در این صورت، هرنگاشت $F: X\times Z \to Y$ پیوسته است اگر وتنها اگر نگاشت القایی

$$\widehat{F}: Z \longrightarrow \mathcal{C}(X, Y)$$

پیوسته‌باشد،که درآن $\widehat{F}$ با ضابطهٔ

$$(\widehat{F}(z))(x)=F(x, z)$$

تعریف می‌شود.

برهان. فرض کنیم $\widehat{F}$ پیوسته باشد. چون F مساوی است باتابع مرکب

$$X\times Z \xrightarrow{i_x\times\widehat{F}} X\times\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{e} Y$$

از اینجا نتیجه می‌شود که F پیوسته است.

فرض کنیم F پیوسته باشد؛ ثابت می‌کنیم که

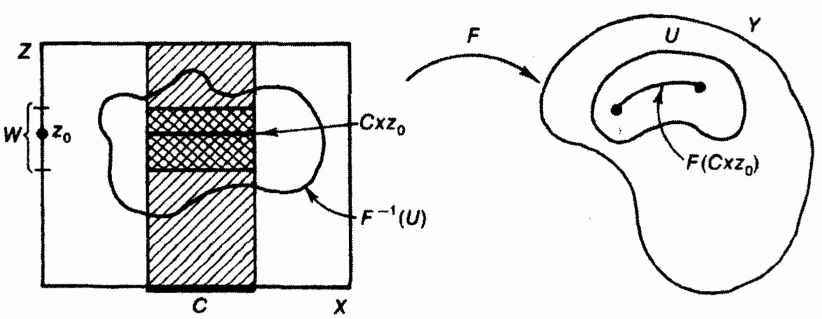
$$\hat{F} : Z \longrightarrow \mathcal{C}(X, Y)$$

پیوسته است. (در این‌قسمت برهان از فشردگی موضعی X استفاده می‌کنیم.) برای‌اثبات پیوستگی، نقطه‌ای از Z مانند $z_\circ$ وعضو زیرپایه‌ای مانند $S(C, U)$ از $\mathcal{C}(X, Y)$ که شامل $\hat{F}(z_\circ)$ باشد می‌گیریم، و همسایگیی از $z_\circ$ مانند W می‌یابیم که به‌وسیلهٔ $\hat{F}$ بتوی $S(C, U)$ نگاشته شود. این وافی به‌مقصود خواهد بود.

این حکم که $\hat{F}(z_\circ)$ در $S(C, U)$ قرار دارد، بدین‌معنی است که به‌ازای هر x از C، $(\hat{F}(z_\circ))(x) = F(x, z_\circ)$ در U قرار دارد. یعنی، $F(C \times z_\circ) \subset U$. پیوستگی F مستلزم آن است که $F^{-1}(U)$ مجموعهٔ بازی در $X \times Z$ و حاوی قاچ $C \times z_\circ$ باشد. دراین‌صورت،

$$F^{-1}(U) \cap (C \times Z)$$

مجموعهٔ بازی در $C \times Z$ حول قاچ $C \times z_\circ$ خواهد بود؛ لم لوله در بخش ۳-۵ ثابت می‌کند که همسایگیی از $z_\circ$ در Z مانند W وجود دارد به‌طوری که همهٔ لولهٔ $C \times W$ در $F^{-1}(U)$ قرار می‌گیرد. به‌شکل ۹ نگاه‌کنید. پس به‌ازای هر z از W وهر x از C، داریم $F(x, z) \in U$. در نتیجه، $\hat{F}(W) \subset S(C, U)$، و این همان است که می‌خواستیم. □



شکل ۹

در اینجا چندکلمه به‌اختصار در باب بستگی میان توپولوژی فشرده ـ باز و مفهوم هموتوپی می‌آوریم.

اگر f و g نگاشتهای پیوسته‌ای از X بتوی Y باشند، f و g را **هموتوپیك** خوانیم درصورتی که نگاشت پیوسته‌ای مانند

$$F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر x از X، $F(x, 0)=f(x)$ و $F(x, 1)=g(x)$
نگاشت F را یك **هموتوپی** بین f و g می‌نامند.

به‌بیانی نه‌چندان دقیق، یك هموتوپی عبارت‌است ازیك «خانوادهٔ یك‌پارامتری پیوسته» متشکل ازنگاشتهایی از X به Y. دقیقتر آنکه، یك‌هموتوپی مانند F نگاشت دیگری مانند

$$\widehat{F} : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{C}(X, Y)$$

به‌دست می‌دهد که به‌هرمقدارپارامتر t در $[0, 1]$، نگاشت پیوستهٔ متناظر آن از X به Y را نظیر می‌کند. بافرض اینکه X موضعاًفشرده و هاوسدورف است، می‌بینیم که F پیوسته است اگر وتنها اگر $\widehat{F}$ پیوسته باشد. این بدین معنی است که یك‌هموتوپی مانند F بین دونگاشت پیوستهٔ $f, g : X \longrightarrow Y$ دقیقاً متناظر است با راهی مانند $\widehat{F}$ در فضای تابعی $\mathcal{C}(X, Y)$ که نقطهٔ f از $\mathcal{C}(X, Y)$ را به‌نقطهٔ g وصل می‌کند.

درفصل آتیه به‌مطالعهٔ مفصلتری ازهموتوپی باز می‌گردیم.

تمرینها

۱. فرض کنید که C زیرفضایی از X باشد. ثابت کنید که تابع تحدیدی $r : \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{C}(C, Y)$، در صورتی که هردو فضا دارای توپولوژی نقطه ـ باز یا فشرده ـ باز باشند، پیوسته است.

۲. ثابت کنید که در توپولوژی فشرده ـ باز، $\mathcal{C}(X, Y)$ هاوسدورف است هرگاه Y هاوسدورف باشد، ومنتظم است هرگاه Y منتظم باشد. [راهنمایی: اگر $\bar{U} \subset V$ آنگاه $\overline{S(C, U)} \subset S(C, V)$.]

۳. فرض کنید Y یك‌فضای متری باشد. ثابت کنید که اگر X فشرده باشد، توپولوژی یکنواخت بر $\mathcal{C}(X, Y)$ به‌متریك انتخاب شده برای Y بستگی ندارد.

۴. ثابت کنید که اگر X و Y هاوسدورف موضعاً فشرده باشندآنگاه نگاشت مرکب

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \longrightarrow \mathcal{C}(X, Z)$$

پیوسته است به‌شرطی که در سراسر کار از تـوپولوژی فشرده ـ بـاز استفـاده شود. [راهنمـایی : ثـابت کنید که نگاشت القایی $X \times \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to Z$ پیوسته است.]

۵. فرض کنید $\mathcal{C}'(X, Y)$ نمایش مجموعهٔ $\mathcal{C}(X, Y)$ بـا توپولوژیی مانند $\mathcal{T}$ باشد. ثابت کنید که اگر نگاشت ارزهٔ

$$e: X \times \mathcal{C}'(X, Y) \longrightarrow Y$$

پیوسته باشد آنگاه $\mathcal{T}$ حـاوی توپولوژی فشرده ـ بـاز است. [راهنمایی : نگاشت $\hat{e} : \mathcal{C}'(X, Y) \to \mathcal{C}(X, Y)$ را در نظر بگیرید. ملاحظه کنید کـه به فشردگی موضعی X نیازی نیست.]

۶. در اینجـا کاربردی (غیرمنتظره) از نتیجهٔ ۴.۵ را در بارهٔ نگاشتهای خـارج قسمتی مطرح می کنیم : ثـابت کنید که اگر $p : A \to B$ یك نگاشت خارج قسمتی و X هـاوسدورف موضعاً فشرده بـاشد آنگاه $i_X \times p: X \times A \to X \times B$ یك نگاشت خـارج قسمتی است . این مطلب را بـا تمرین ۱۱ در بخش ۳ ــ ۸ مقایسه کنید . [راهنمایی: فرض کنید $(X \times B)'$ نمایش مجموعهٔ $X \times B$ با توپولوژی خارج قسمتی القاشده به‌وسیلهٔ $i_X \times p$ باشد، و $\pi: X \times A \to (X \times B)'$ یك نگاشت خارج قسمتی باشد. اگر $g : X \times B \to (X \times B)'$ نگاشت همـانی بـاشد ، ثـابت کنید که $\hat{g} \circ p = \hat{\pi}$؛ نتیجه بگیرید که $\hat{g}$ پیوسته است.]

۷ـ۶ قضیهٔ آسکولی

اینك صورتی تعمیم‌یافته از قضیهٔ آسکولی را ثابت می کنیم. صورت دیگری از آن‌را که قبلاً ثابت کردیم، حالت خاصی از قضیهٔ این‌فصل است. در جریـان این‌برهـان از قضیهٔ تیخونوف استفاده خواهیم کرد.

۶. ۱. قضیه (قضیهٔ آسکولی) فرض‌کنیم X هـاوسدورف موضعاً فشرده و (Y, d) یك‌فضای متری باشد. $\mathcal{C}(X, Y)$ را باتوپولوژی فشرده ـ باز درنظر می‌گیریم. زیرمجموعهٔ $\mathcal{F}$ از $\mathcal{C}(X, Y)$ بستـار فشرده دارد اگر و تنهـا اگر همپیوسته بـاشد و به‌ازای هر x زیرمجموعهٔ

$$\mathcal{F}_x = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

از Y دارای بستار فشرده باشد

برهان. مرحلهٔ ۱. نخست ، ثـابت می کنیم که اگر زیرمجموعه‌ای مـانند $\mathcal{F}$ از

$\mathcal{C}(X, Y)$ همپیوسته باشد آنگاه توپولوژیهایی که $\mathcal{F}$ از توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه و توپولوژی همگرایی فشرده بر Y^X القا می‌شود یکی هستند.

به‌طور کلی، توپولوژی همگرایی فشرده ظریفتر از توپولوژی همگرایی نقطه‌به‌نقطه است؛ می‌خواهیم ثابت کنیم که در مورد $\mathcal{F}$ عکس این جزئیت نیز برقرار است. به‌ازای عضو مفروض f از زیرفضای $\mathcal{F}$ عضو پایهٔ $B_C(f, \varepsilon)$ برای توپولوژی همگرایی فشرده را درنظر می گیریم. این عضو پایه عبارت است ازهمهٔ توابعی مانند g که به‌ازای آنها

$$\operatorname{lub}\{d(g(x), f(x)) \mid x \in C\} < \varepsilon.$$

عضو پایه‌ای مانند B برای توپولوژی همگرایی نقطه به‌نقطه می‌یابیم به‌طوری که

$$f \in B \cap \mathcal{F} \subset B_C(f, \varepsilon) \cap \mathcal{F}.$$

ε_1 و ε_2 را چنـان برمی گزینیم که $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon$. بـا به‌کار بستن همپیوستگی $\mathcal{F}$ و فشردگی C، مجموعهٔ C را با تعدادی متناهی ازمجموعه‌های باز X مانند U_1، . . .، U_n می‌پوشانیم به‌طوری که تغییرات هریك از توابع عضو $\mathcal{F}$ برهریك از U_iهـا حداکثر به‌اندازهٔ ε_1 باشد. به‌ازای هر i عضوی از U_i مانند x_i انتخاب می کنیم. زیرمجموعهٔ B از Y^X راکه باتساوی زیر معرفی می‌شود درنظر می گیریم

$$B = \{g \mid d(g(x_i), f(x_i)) < \varepsilon_2 \text{ ،} i = 1, \ldots, n \text{ که } i \text{ به‌ازای}\}.$$

مدعی هستیم که B همان عضو پایهٔ مطلوب برای توپولوژی همگرایی نقطه به‌نقطه است.

فرض کنیم g عضوی از $B \cap \mathcal{F}$ باشد. به‌ازای عضو مفروضی از C مانند x ، i را چنان انتخاب می کنیم که x متعلق به U_i باشد. دراین‌صورت،

$$d(g(x), g(x_i)) \leqslant \varepsilon_1,$$

$$d(g(x_i), f(x_i)) < \varepsilon_2,$$

$$d(f(x_i), f(x)) \leqslant \varepsilon_1.$$

در نتیجه، $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$. این نامساوی به‌ازای هر x از C برقرار است. بنابراین،

$$\max\{d(g(x), f(x)) \mid x \in C\} < \varepsilon$$

در نتیجه، $g \in B_C(f, \varepsilon)$ ، واین همان است که می‌خواستیم.

مرحله ۲. اکنون ثابت می کنیم که اگر زیرمجموعه‌ای از Y^X مانند $\mathcal{F}$ همپیوسته باشد آنگاه بستارآن $\mathcal{G}$ نیز در Y^X نسبت به توپولوژی همگرایی نقطه به‌نقطه همپیوسته است.

اثبات این حکم آسان است. به‌ازای عضو مفروض x_0 از X و $\varepsilon > 0$، همسایگی U از x_0 را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$(*) \qquad d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{به‌ازای هر } f \in \mathcal{F} \text{ و هر } x \in U،$$

مدعی هستیم که اگر $g \in \mathcal{G}$ آنگاه به‌ازای همهٔ مقادیر x در U، $d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$.
از اینجا نتیجه می‌شود که $\mathcal{G}$ همپیوسته است.

برای اثبات این مدعا، فرض می‌کنیم که x نقطه‌ای از U باشد. V_x را زیرمجموعه‌ای از Y^X می‌گیریم که در توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه باز است و عبارت است از همهٔ اعضایی از Y^X مانند h که

$$(**) \qquad d(h(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ و } d(h(x_0), g(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

چون g به‌بستار $\mathcal{F}$، در این توپولوژی، تعلق دارد، همسایگی V_x از g باید شامل عضوی مانند f از $\mathcal{F}$ باشد. با به‌کاربستن نامساوی مثلثی در مورد (*) و (**)، ملاحظه می‌کنیم که،

$$d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon,$$

و این همان است که می‌خواستیم.

مرحلهٔ ۳. اینك به‌اثبات قضیه می‌پردازیم. نخست، فرض می کنیم $\mathcal{F}$ همپیوسته باشد، و به‌ازای هر x از X، $\mathcal{F}_x$ در Y دارای بستار فشرده باشد.

فرض کنیم $\mathcal{G}$ بستار $\mathcal{F}$ در Y^X نسبت به‌توپولوژی همگرایی نقطه به‌نقطه باشد. $\mathcal{G}'$ را بستار $\mathcal{F}$ در Y^X نسبت به‌توپولوژی همگرایی فشرده در نظر می‌گیریم. در این صورت، $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$.

چون $\mathcal{F}$ همپیوسته است، از مرحلهٔ ۲ نتیجه می‌شود که $\mathcal{G}$ نیز همپیوسته است. پس بنابرمرحلهٔ ۱، توپولوژیهایی که در $\mathcal{G}$ از توپولوژیهای همگرایی نقطه به‌نقطه و همگرایی فشرده بر Y^X القا می‌شوند یکی هستند. حاصل اینکه $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$.

تا بدین‌جا، تنها ازهمپیوستگی $\mathcal{F}$ استفاده کرده‌ایم. حال فرض کنیم C_x نشان‌دهندهٔ بستار $\mathcal{F}_x$ در Y باشد. حاصل‌ضرب $\Pi_{x \in X} C_x$ را در نظر می‌گیریم؛ در این صورت، بنابرنظریهٔ مقدماتی مجموعه‌ها، داریم

$$\mathcal{F} \subset \Pi_{x \in X} C_x \subset Y^X.$$

توپولوژی همگرایی نقطه به‌نقطه بر Y^X همان توپولوژی حاصل‌ضربی است. در این توپولوژی، بنابرقضیهٔ تیخونوف، مجموعهٔ ΠC_x فشرده است. چون در این توپولوژی

$\mathcal{G}$ زیرمجموعه‌ای بسته از $\prod C_x$ است، پس در این توپولوژی فشرده است. در نتیجه، $\mathcal{G}$ در توپولوژی همگرایی فشرده نیز فشرده است.

اما $\mathcal{G}$ همپیوسته است، پس هرتابع در $\mathcal{G}$ پیوسته است. درنتیجه، $\mathcal{G}$ زیرمجموعهٔ $\mathcal{C}(X, Y)$ است؛ و می‌دانیم که بر $\mathcal{C}(X, Y)$ توپولوژی همگرایی فشرده و توپولوژی فشرده ـ باز برابرند. بنابراین، بستار $\mathcal{F}$ در $\mathcal{C}(X, Y)$، نسبت به‌توپولوژی فشرده ـ باز، همان مجموعهٔ فشردهٔ $\mathcal{G}$ است، واین همان است که می‌خواستیم.

مرحلهٔ ۴. مجموعه $\mathcal{C}(X, Y)$ را با توپولوژی فشرده ـ باز مجهز می کنیم، وفرض می کنیم $\mathcal{F}$ در $\mathcal{C}(X, Y)$ دارای بستار فشردهٔ $\overline{\mathcal{F}}$ باشد. ثابت می کنیم که $\mathcal{F}$ همپیوسته و بستار $\mathcal{F}_x$ فشرده است. دربرهان این‌حکم از این امرکه نگاشت ارزهٔ

$$e : X \times \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow Y$$

پیوسته است بهره می گیریم؛ در اینجا برای نخستین‌بار فشردگی موضعی X را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

نخست به‌ازای عضو مفروضی از X مانند x، ثابت می کنیم که بستار $\mathcal{F}_x$ فشرده است. اثبات این‌حکم آسان است. مجموعهٔ $x \times \overline{\mathcal{F}}$ در $X \times \mathcal{C}(X, Y)$ فشرده است؛ در نتیجه، $e(x \times \overline{\mathcal{F}})$ در Y مجموعه‌ای‌فشرده‌است، و $e(x \times \overline{\mathcal{F}})$ حاوی $e(x \times \mathcal{F}) = \mathcal{F}_x$ است.

ثانیاً، ثابت می کنیم که $\mathcal{F}$ در x_0 همپیوسته است. در واقع، ثابت می کنیم که $\overline{\mathcal{F}}$ در x_0 همپیوسته است. مجموعهٔ فشرده‌ای مانند C انتخاب می کنیم که حاوی یك همسایگی x_0 باشد. کافی است ثابت‌کنیم که گردایهٔ توابع

$$\mathcal{R} = \{f \mid C ; f \in \overline{\mathcal{F}}\}$$

همپیوسته است، چه C حاوی یك‌همسایگی x_0 است.

نگاشت تحدیدی

$$r : \mathcal{C}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{C}(C, Y)$$

را با ضابطهٔ $r(f) = f \mid C$ درنظر می گیریم. در این‌صورت، $\mathcal{R} = r(\overline{\mathcal{F}})$. اگربه هردو فضا توپولوژی فشرده ـ باز بدهیم، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که r پیوسته است. بنابراین، $\mathcal{R}$ در توپولوژی فشرده ـ باز زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $\mathcal{C}(C, Y)$ خواهد بود.

برفضای $\mathcal{C}(C, Y)$، توپولوژی فشرده ـ باز با توپولوژی یکنواخت برابر است (زیرا، C فشرده است). بنابراین، $\mathcal{R}$ در توپولوژی یکنواخت فشرده است؛ و بنابرقضیهٔ ۱.۳، $\mathcal{R}$ در متریك ρ کراندارکلی است. مدعی هستیم‌که زیرمجموعه‌ای فشرده مانند Y_0 از Y وجود دارد به‌طوری که $\mathcal{R}$ در زیرفضای $\mathcal{C}(C, Y_0)$ از $\mathcal{C}(C, Y)$ قرار می‌گیرد. درآن‌صورت، قضیه بلافاصله از لم ۲.۳ نتیجه می‌شود. زیرا، ازآنجاکه C و Y_0 فشرده

هستند، کرانداری کلی $\mathcal{R}$ مستلزم همپیوستگی $\mathcal{R}$ است.

یافتن Y_0 آسان است. مجموعهٔ $C \times \overline{\mathcal{F}}$ در $X \times \mathcal{C}(X, Y)$ فشرده است؛ فرض کنیم Y_0 تصویر آن تحت e باشد. چون e پیوسته است، Y_0 زیرمجموعهٔ فشرده‌ای است از Y؛ این مجموعه، به‌ازای هر x از C و هر f از $\overline{\mathcal{F}}$، شامل $f(x)$ است. در نتیجه، $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}(C, Y_0)$. $\square$

صورتی باز هم کلیتر از قضیهٔ آسکولی را می‌توانید در [K] یا در [Wd] بیابید. درآنجا فرض متریک‌بودن را برای Y قائل نمی‌شوند، بلکه Y دارای ساختاری است موسوم به‌ساختار یکنواخت، که تعمیمی است ازمفهوم متریک.

تمرینها

۱. (الف) در کدام مرحلهٔ برهان قضیهٔ آسکولی، فشردگی موضعی X به‌کار می‌رود؟ در کدام مرحله قضیهٔ تیخونوف فشردگی موضعی به‌کار می‌رود؟
(ب) ثابت کنید که صورت کلاسیک قضیهٔ آسکولی حالت خاصی است از صورت کلی آن، وهمچنین است قسمت (پ) تمرین ۵ در بخش ۷-۳.

۲. صورت تعمیم‌یافتهٔ زیر ازقضیهٔ آرزلا را ثابت کنید:

قضیه. فرض‌کنید X یك‌فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باپایه‌ای شماراباشد، و $f_n : X \to R^k$ اگرگردایهٔ $\{f_n\}$ کراندار نقطه‌به‌نقطه وهمپیوسته باشدآنگاه دنبالهٔ (f_n) زیردنباله‌ای داردکه در توپولوژی همگرایی فشرده، همگراست.

۳. کدامیك از زیرمجموعه‌های ذیل از $\mathcal{C}(R, R)$ کراندار نقطه به‌نقطه است؟کدامیك نسبت به‌توپولوژی همگرایی فشرده دارای بستار فشرده است؟
(الف) گردایهٔ $\{f_n\}$، که درآن $f_n(x) = x + \sin nx$.
(ب) گردایهٔ $\{g_n\}$، که درآن $g_n(x) = x^n$.
(پ) گردایهٔ $\{h_n\}$، که درآن $h_n(x) = |x|^{1/n}$.
(ت) گردایهٔ تمام بسجمله‌های از درجهٔ حداکثر ۱۰ که قدرمطلق هریك ازضرایب آنها از ۱ کمتر است.

۴. فرض کنید Y یك‌فضای متری و $f_n : X \to Y$ دنباله‌ای ازتوابع پیوسته باشد؛ و $f : X \to Y$ را تابعی (که الزاماً پیوسته نیست) درنظر بگیرید.
(الف) ثابت کنیدکه اگر $\{f_n\}$ همپیوسته باشد ودرتوپولوژی همگرایی نقطه‌به‌نقطه $f_n \to f$، آنگاه درتوپولوژی همگرایی فشرده نیز $f_n \to f$.
(ب) در حالتی که X هاوسدورف موضعاً فشرده است، عکس حکم (الف) را ثابت کنید.
(پ) ثابت کنیدکه، درهرحالت، f پیوسته است.

۷-۷ فضاهای بئر

شرطی که فضای بئر باآن تعریف می‌شود شاید همچون شرطهای دیگری که تاکنون در این کتاب معرفی شده‌اند «ظاهری غیرطبیعی» داشته باشد. بااین همه ، قدری شکیبایی همه‌چیز را درست می کند.

در این بخش فضاهای بئر را تعریف می کنیم و ثابت می کنیم که دو ردهٔ مهم از فضاها ـ فضاهای متری‌تمام‌وفضاهای‌هاوسدورف فشرده ـ در ردهٔ فضاهای بئرجای‌دارند. بعد چندکاربردی از این فضاها را خواهیم‌آورد، که اگرچه ممکن‌است این‌کاربردها طبیعی بودن شرط بئر را آشکار نسازند، اما دست‌کم ثابت می کنند که فضاهای بئر می‌توانند ابزار مفیدی باشند. در واقع، چنانکه معلوم خواهد شد، فضاهای بئر ابزاری بسیار مفید ونسبتاً پیچیده وپرمغزی برای توپولوژی وآنالیز هستند.

تعریف. یادآوری می کنیم که اگر A زیرمجموعه‌ای‌ازفضای X باشد،بنابرتعریف، درون A مساوی است با اجتماع همهٔ مجموعه‌های باز X که زیرمجموعهٔ A هستند. بنابراین، هرگاه بگوییم که A دارای **درون‌تهی** است، مرادآن است که A حاوی هیچ مجموعهٔ بازی از X ، غیرازمجموعهٔ تهی، نیست.

مثال ۱. مجموعهٔ Q متشکل از اعدادگویا به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از R دارای‌درون تهی است، اما بازهٔ $[0, 1]$ درون ناتهی دارد. بازهٔ $[0, 1]\times 0$ به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از صفحهٔ R^2 دارای درون‌تهی است، و زیرمجموعهٔ $Q\times R$ نیز چنین است.

تعریف. فضای X را یك **فضای بئر** خوانیم درصورتی‌که درشرط ذیل صدق کند: به‌ازای هرگردایهٔ شمارا ازمجموعه‌های بستهٔ X مانند $\{A_n\}$ که هریك در X دارای درون تهی باشد، اجتماع آنها، یعنی $\bigcup A_n$، نیز در X دارای درون‌تهی باشد.

مثال ۲. مجموعهٔ Q ، متشکل از اعدادگویا ، یك فضای بئر نیست. زیرا هرمجموعهٔ تك‌عضوی در Q بسته استودر Q دارای‌درون‌تهی‌است؛ و Q اجتماع شمارای‌زیرمجموعه‌های تك‌عضوی خود است.

اما مجموعهٔ Z_+ تشکیل یك‌فضای بئر می‌دهد. هرزیرمجموعهٔ Z_+ باز است، درنتیجه، هیچ زیرمجموعه‌ای از Z_+ ، بجز مجموعهٔ تهی، درون‌تهی‌ندارد. بنابراین، Z_+، به‌انتفای مقدم، در شرط بئر صدق می کند.

درحالت‌کلی ، هرزیرمجموعهٔ بستهٔ R ، ازآنجاکه یك‌فضای متری تمام است، یك‌فضای بئر است. شگفت آنکه ، مجموعهٔ اعداد اصم نیز در R تشکیل یك فضای بئر می‌دهد؛ به‌تمرین ۷ نگاه‌کنید.

اصطلاحی کــه بدواً به‌وسیلهٔ ر. بئربرای این‌مفهوم به‌کاربرده شد واژهٔ «مقوله» را

دربرداشت. فضای X را درصورتی از مقولهٔ یکم می‌گفتند که مساوی اجتماع گردایه‌ای شمارا از زیرمجموعه‌های بستهٔ X باشد که هریك ازآنها در X دارای درون‌تهی است؛ درغیر این‌صورت، X را از مقولهٔ دوم می‌خواندند. بااستفاده ازاین اصطلاحات، می‌توان چنین گفت:

فضای X یك‌فضای بئر است اگر وتنها اگر هرمجموعهٔ باز X ازمقولهٔ دوم باشد.

ما در این کتاب ازاصطلاحات «مقولهٔ یکم» و«مقولهٔ دوم» استفاده نخواهیم کرد.

تعریفی که ما برای فضای بئرآوردیم «تعریف برحسب مجموعه‌های بسته» بود. فرمولبندی دیگری ازاین تعریف برحسب مجموعه‌های باز موجود است که بسیار سودمند است وما آن‌را درلم ذیل می‌آوریم.

۷ . ۱ . لم X یك فضای بئر است. اگر و تنها اگر به‌ازای هرگردایهٔ شمارا از مجموعه‌های باز X مانند $\{U_n\}$، که هریك ازآنها در X چگال است، مقطع‌آنها، $\bigcap U_n$، نیز در X چگال باشد.

برهان. یادآوری می‌کنیم که مجموعهٔ C را وقتی در X چگال‌خوانیم که $\bar{C}=X$. اینك این‌قضیه ازدوحکم ذیل نتیجه می‌شود:

(۱) مجموعهٔ A در X بسته است اگر وتنها اگر $X-A$ در X باز باشد.

(۲) مجموعهٔ B دارای درون‌تهی است اگر و تنها اگر $X-B$ در X چگال باشد. □

قضایایی وجود دارد که بیان می‌کنند که یك فضا تحت چه‌شرایطی یك‌فضای بئر است، که مهمترین‌آنها به‌قرار ذیل‌اند:

۷ . ۲ . قضیه اگر X یك‌فضای هاوسدورف فشرده، یا یك‌فضای متری تمام، باشد آنگاه X یك‌فضای بئر است.

برهان. به‌ازای گردایهٔ مفروض شمارایی از مجموعه‌های بستهٔ X مانند $\{A_n\}$ که درون هریك از آنها تهی است درنظر می‌گیریم؛ می‌خواهیم ثابت کنیم که درون اجتماع آنها، یعنی درون $\bigcup A_n$، نیز تهی است. بنابراین، به‌ازای مجموعهٔ باز مفروضی از X مانند U_0 باید نقطه‌ای‌مانند x از U_0 بیابیم که متعلق به‌هیچ‌یك ازمجموعه‌های A_n نباشد.

اولین مجموعه، یعنی، مجموعهٔ A_1 را در نظر می‌گیریم. بنابرفرض، A_1 حاوی U_0 نیست. بنابراین، می‌توان نقطه‌ای مانند y از U_0 یافت که در A_1 نباشد. منتظم‌بودن X، همراه با این امرکه A_1 بسته است، امکان انتخاب یك‌همسایگی از y مانند U_1 را می‌دهد به‌طوری که

$$\bar{U}_1 \cap A_1 = \varnothing ,$$

$$\bar{U}_1 \subset U_0.$$

اگر X متری باشد، U_1 را آن‌قدر کوچك انتخاب می کنیم که قطر آن از ۱ کمتر باشد.
درحالت کلی، به‌ازای مجموعهٔ باز ناتهی U_{n-1}، نقطه‌ای از U_{n-1} را که در مجموعهٔ بستهٔ A_n نیست انتخاب می کنیم، سپس، همسایگی U_n از این نقطه را چنان برمی گزینیم که

$$\bar{U}_n \cap A_n = \varnothing,$$

$$\bar{U}_n \subset U_{n-1};$$

درصورت متری‌بودن X، $\operatorname{diam} U_n < 1/n$.

مدعی هستیم که $\bigcap \bar{U}_n$ ناتهی است، واین برای اثبات قضیه کافی خواهد بود. زیرا ازآنجا که $\bar{U}_1 \subset U_0$، اگر x نقطه‌ای از $\bigcap \bar{U}_n$ باشدآنگاه x در U_0 است. از طرف دیگر، به‌ازای هر n، نقطهٔ x در A_n نیست، زیرا $\bar{U}_n$ از A_n جداست.

برهان اینکه $\bigcap \bar{U}_n$ ناتهی است، برحسب آنکه X هاوسدورف فشرده‌باشد یا متری تمام، به دوبخش تقسیم می‌شود. اگر X هاوسدورف فشرده باشد، دنبالهٔ تو درتوی $\bar{U}_1 \supset \bar{U}_2 \supset \ldots$ از زیرمجموعه‌های ناتهی X را درنظر می گیریم. گردایهٔ $\{\bar{U}_n\}$ در شرط مقطع متناهی صدق می کند؛ و چون X فشرده است، مقطع $\bigcap \bar{U}_n$ باید ناتهی باشد.

اگر X متری تمام باشد، لم ذیل را به‌کار می‌بریم. □

۷.۳۰ لم فرض کنیم $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ دنباله‌ای تو درتو از مجموعه‌های ناتهی بسته درفضای متری تمام X باشد. اگر $\operatorname{diam} C_n \to 0$ آنگاه $\bigcap C_n \neq \varnothing$.

برهان. این‌حکم را به‌عنوان تمرینی در بخش ۷ــ۱ آورده بودیم. در اینجا آن را ثابت می‌کنیم. به‌ازای هر n، x_nی از C_n انتخاب می‌کنیم. چون

به‌ازای $n \geqslant N$ و $m \geqslant N$، $x_n, x_m \in C_N$،

و چون با انتخاب N ی به‌قدرکافی بزرگ می‌توان $\operatorname{diam} C_N$ را از هر ε مفروضی کوچکتر کرد، دنبالهٔ (x_n) یك‌دنبالهٔ کوشی است. فرض‌کنیم این دنباله همگرا به x باشد. در این صورت، به‌ازای هر k، زیردنبالهٔ x_k، x_{k+1}، ... از آن نیز به x همگراست. بدین ترتیب، x الزاماً متعلق است به $\bar{C}_k = C_k$. وازآنجا نتیجه می‌شودکه $x \in \bigcap C_k$، واین همان است که می‌خواستیم. □

قضیه‌ای که هم‌اکنون در بارهٔ فضاهای بئر ثابت شد قضیه‌ای است که بسیار به‌کار می‌رود. اما، قویترین قضیه‌ای نیست که می‌توان ثابت کرد. مثلاً، می‌توان ثابت کردکه در یك‌فضای هاوسدورف فشرده، یا یك‌فضای متری تمام، هرمجموعهٔ G_δ یك‌فضای بئر

است. این‌مطلب وتعمیمهای دیگر ازآن درتمرینها آمده‌اند.

مثال ۳. مجموعهٔ اعدادگویا، Q، در اعداد حقیقی یک‌مجموعهٔ G_δ نیست.
فرض‌کنیم Q مساوی مقطع گردایهٔ شمارای $\{W_n\}$ از مجموعه‌های باز R باشد. به‌ازای هر q از Q، V_q را مجموعهٔ باز $R-\{q\}$ درنظر می‌گیریم. در این‌صورت، گردایهٔ

$$\mathcal{A}=\{W_n \mid n\in Z_+\}\cup\{V_q \mid q\in Q\}$$

گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌های باز R است. هر W_n در R چگال است، زیرا $Q\subset W_n$. همچنین، هرمجموعهٔ V_q در R چگال‌است، زیرا، متمم یک‌مجموعهٔ تک‌عضوی است. ازآنجا که R یک فضای بئر است، مقطع اعضای گردایهٔ شمارای $\mathcal{A}$، که آن‌را با A نشان می‌دهیم، باید در R چگال باشد. اما، هر نقطه‌ای که متعلق به همهٔ مجموعه‌های W_n باشد گویاست، وهر نقطه‌ای که متعلق به همهٔ مجموعه‌های V_q باشد اصم است. پس، A تهی است.

مثال ۴. در دومین کاربردآن، که بیشتر سرگرم‌کننده است تا عمیق، این مثال ناشی ازپرسشی است که می‌توان آن‌را در یک کلاس درس حسابان مقدماتی مطرح کرد، آیا تابعی مانند $f:R \to R$ وجود دارد که فقط درنقاط‌گویای R پیوسته باشد؟ پاسخ منفی‌است، وبرهان به‌قرار ذیل است، فرض‌کنیم $f:R \to R$ تابعی دلخواه باشد. به‌ازای هرعدد صحیح مثبتی مانند n، فرض‌کنیم U_n اجتماع اعضای گردایهٔ ذیل باشد:

$$\left\{U \mid \operatorname{diam} f(U) < \frac{1}{n} \text{ و } \text{باز است } R \text{ در } U.\right\}$$

در این‌صورت، U_n در R باز است. به‌علاوه، مجموعهٔ

$$C=\bigcap_{n\in Z_+} U_n$$

دقیقاً مجموعهٔ همهٔ نقاطی است که درآنها تابع f پیوسته است. صحت این‌حکم را می‌توانید به‌آسانی تحقیق کنید. بنابراین، مجموعهٔ نقاطی که f درآنها پیوسته است یک‌مجموعهٔ G_δ در R است. مجموعهٔ اعدادگویا در R یک‌مجموعهٔ G_δ نیست؛ بنابراین، هیچ‌تابعی مانند $f: R \to R$ نمی‌توان یافت که فقط در همهٔ نقاط‌گویا پیوسته باشد.

باکمال شگفتی، تابعی مانند h وجود دارد که فقط در نقاط اصم پیوسته است. تابعی دوسویی مانند $f: Z_+ \to Q$ اختیار می‌کنیم، فرض‌کنیم $q_n=f(n)$. سپس، $h: R \to R$ را با ضابطهٔ ذیل تعریف می‌کنیم:

$$h(q_n)=\frac{1}{n} \text{ ،} Z_+ \text{ متعلق به } n \text{ به‌ازای}$$

$$h(x)=0 \qquad \text{به‌ازای } x \text{ اصم،}$$

بررسی این امر که h تابع مطلوب است به‌عهدهٔ خواننده است.

تمرینها

۱. فرض کنید X مساوی اجتماع شمارای $\bigcup B_n$ باشد. ثابت کنید که اگر X یك فضای بئر باشد آنگاه دست کم یکی از مجموعه‌های $\bar{B}_n$ دارای درون ناتهی است.

۲. قضیهٔ بئر مستلزم این حقیقت است که R را نمی‌توان به‌صورت اجتماع شمارایی از زیرمجموعه‌های بازی که درون تهی‌دارند نوشت. ثابت کنید که اگر شرط بسته‌بودن را حذف کنیم، حکم برقرار نیست.

۳. ثابت کنید که هر زیرمجموعهٔ باز یك‌فضای بئر فضایی است بئر.

۴. ثابت کنید که هر فضای هاوسدورف موضعاً فشرده یك‌فضای بئر است.

۵. ثابت کنید که اگر هر نقطهٔ x از X همسایگیی داشته‌باشد که یك‌فضای بئر باشد آنگاه X یك‌فضای بئر است. [راهنمایی: از فرمولبندی شرط بئر برحسب مجموعه‌های باز استفاده کنید.]

۶. ثابت کنید که اگر Y یك‌مجموعهٔ G_δ در X باشد، و اگر X هاوسدورف فشرده یا متری تمام باشد، آنگاه Y در توپولوژی زیرفضایی یك‌فضای بئر است. [راهنمایی: فرض کنید $Y=\bigcap W_n$، که W_n در X باز است. وفرض کنید B_n در Y بسته و دارای درون تهی در Y است. به ازای مجموعهٔ باز مفروض U_0 به‌طوری که $U_0 \cap Y \neq \varnothing$، دنباله‌ای از مجموعه‌های باز مانند U_n در X بیابید به‌طوری که $U_n \cap Y$ ناتهی باشد، و

$$\bar{U}_n \subset U_{n-1},$$

$$\bar{U}_n \cap \bar{B}_n = \varnothing,$$

در حالت متری بودن X، $\operatorname{diam} U_n < \frac{1}{n}$،

$$\bar{U}_n \subset W_n.]$$

۷. ثابت کنید که مجموعهٔ اعداد اصم تشکیل یك‌فضای بئر می‌دهد.

۸. ثابت کنید که هر مجموعهٔ G_δ در یك فضای هاوسدورف موضعاً فشرده یك فضای بئر است.

۹. صحت احکامی را که در مثال ۴ دربارهٔ C و h بیان شدند بررسی کنید.

۱۰. قضیه (اصل کرانداری یکنواخت). فرض کنید X یک فضای متری تمام و $\mathscr{F}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{C}(X, R)$ باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر x از X، مجموعهٔ

$$\mathscr{F}_x = \{f(x) \mid f \in \mathscr{F}\}$$

کراندار باشد. دراین‌صورت، مجموعه‌ای ناتهی بازمانند U در X وجود دارد که برآن توابع در $\mathscr{F}$ کراندار یکنواخت‌اند؛ یعنی، مجموعه‌ای مانند U وعددی مانند M موجود است به‌طوری‌که اگر $x \in U$ و $f \in \mathscr{F}$ آنگاه $|f(x)| \leqslant M$.
[راهنمایی: مجموعه‌های $A_N = \{x ; |f(x)| \leqslant N$ ، $f \in \mathscr{F}$ که f به‌ازای هر$\}$ را درنظر بگیرید.]

۱۱. تعیین کنید که R_l یک فضای بئر هست یا نه.

۱۲. ثابت کنید که R^J در توپولوژیهای جعبه‌ای، حاصل‌ضربی، و یکنواخت یک فضای بئر است.

۱۳*. ثابت کنید که اگر A مجموعهٔ G_δ ی دلخواهی در R باشد، تابعی‌مانند $f: R \to R$ وجود دارد که درتمام نقاط A پیوسته است ودرتمام نقاط دیگر ناپیوسته.

۱۴*. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد؛ Y را یک فضای متری تمام بگیرید. ثابت کنید که، درتوپولوژی ظریف، $\mathcal{C}(X, Y)$ یک فضای بئراست. (به تمرین ۹ در بخش ۷ ــ ۴ مراجعه کنید). [راهنمایی: به‌ازای اعضای پایه‌ای مفروض $B(f_i, \delta_i)$ که $\delta_1 \leqslant 1$ و $\delta_{i+1} \leqslant \delta_i/3$ و $f_{i+1} \in B(f_i, \delta_i/3)$، ثابت کنید که

$$\bigcap B(f_i, \delta_i) \neq \varnothing .]$$

۷ ــ ۸ یک تابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر

قضیهٔ آنالیزی زیرین را اثبات می‌کنیم:

۸ ۰ ۱ قضیه **فرض‌کنیم** $h: [0, 1] \to R$ تابعی پیوسته باشد. به‌ازای عددمثبت ε، تابعی‌مانند $g: [0, 1] \to R$ بااین‌شرط وجود داردکه به‌ازای هرx، $|h(x) - g(x)| < \varepsilon$؛ وبعلاوه، g پیوسته است وهیچ‌جا مشتق‌پذیر.

برهان. فرض می‌کنیم $I = [0, 1]$. فضای $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, R)$ از همهٔ نگاشتهای پیوسته از I به R را با متریک

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)|\}$$

در نظر می گیریم. این فضا یك‌فضای متری تمـام است، و در نتیجه، یك‌فضای بئر است. به‌ازای هر n، زیرمجموعهٔ معینی مانند U_n از $\mathcal{C}$ تعریف می کنیم به‌طوری که U_n در $\mathcal{C}$ باز و چگال باشد، وتوابع متعلق به

$$\bigcap_{n\in Z_+} U_n$$

هیچ‌جا مشتق‌پذیر باشند. چون $\mathcal{C}$ یك‌فضای بئراست، بنابرلم ۱.۷، این‌مقطع در $\mathcal{C}$ چگال است. بنابراین، به‌ازای h و ε مفروض، این مقطع بـاید شامل تابعی باشد مانند g که $\rho(h, g) < \varepsilon$. وبدین گونه، قضیه اثبات می‌شود.

بخش ابتکاری برهان تعریف درست U_n هـاست. نخست، تابعی مانند f اختیار می‌کنیم و خـارج‌قسمتهای تفاضلی آن‌را درنظر می گیریم. به‌ازای نقطهٔ مفروضی از I مانند x، و $0 < h \leqslant 1/2$، عبارتهای

$$\left|\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right| \quad \text{و} \quad \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$$

را درنظر می گیریم. چون $h \leqslant 1/2$، دست‌کم یکی از اعداد $x+h$ و $x-h$ به I تعلق دارد، در نتیجه، دست‌کم یکی از این عبارتها تعریف شده است. اگر هردوعبارت تعریف شده‌باشند، فرض می کنیم که $\Delta f(x, h)$ بزرگترین این‌دو عبارت باشد؛ در غیر این‌صورت، $\Delta f(x, h)$ راآن‌عبارتی اختیار می کنیم که تعریف شده‌است. اگر $f'(x)$، مشتق f در x، موجود باشد مساوی است با حد این‌خارج‌قسمتهای تفاضلی، درنتیجه

$$|f'(x)| = \lim_{h\to 0} \Delta f(x, h).$$

ما به‌دنبال تابع پیوسته‌ای هستیم که برای‌آن این‌حد موجود نباشد.

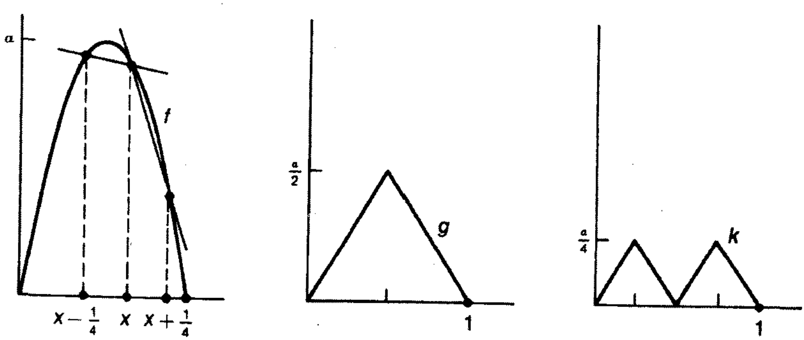
آنچه گذشت راه تعریف مجموعهٔ U_n را به‌دست می‌دهد. اجمـالاً می توان گفت که U_n عبارت است ازآن توابعی که به‌ازای مقادیر کوچك h (یعنی کوچکتر از $1/n$) مقدار $\Delta f(x, h)$ بزرگ‌است (یعنی،کران پایین‌آن بزرگتر از n است). به‌بیان‌دقیقتر، به‌ازای‌اعداد مثبت مفروض α و h که $h \leqslant 1/2$، مجموعهٔ $U(\alpha, h)$ راکه زیرمجموعهٔ $\mathcal{C}(I, R)$ است باضابطهٔ

$$U(\alpha, h) = \{f \,|\, \Delta f(x, h) \geqslant \alpha \text{ ،} I \text{ از } x \text{ به‌ازای هر}\}$$

تعریف می کنیم. سپس، U_n را اجتماع همهٔ مجموعه‌های $U(\alpha, h)$ می گیریم که درآنها $\alpha > n$ و $h < 1/n$. ملاحظه کنید که $\ldots \subset U_{n+1} \subset U_n$.

مثال ۱. فرض‌کنیم α عدد مفروضی باشد. تابع $f(x) = 4\alpha x(1-x)$، که نمودارآن یك‌سهمی است، به‌ازای $h = 1/4$ به $U(\alpha, h)$ تعلق دارد. به‌زبان هندسی، این‌بدان معنی است که به‌ازای هر x، دست‌کم یکی ازخطوط قاطع سهمی، که در شکل ۱۵ نشان داده‌شده

است، دارای شیبی است که قدرمطلق آن از α ناکمتر است. تابع g که درشکل ۱۰ تصویر شده است، به‌ازای هر h که $h \leqslant ۱/۴$ به $U(\alpha, h)$ تعلق دارد؛ و تابع k به‌ازای هر h که $h \leqslant ۱/۸$، به $U(\alpha, h)$ تعلق دارد.



شکل ۱۰

اینك احکام ذیل را درمورد مجموعهٔ U_n ثابت می‌کنیم:

(۱) U_n در $\mathcal{C}$ بـاز است . فرض‌کنیم $f \in U_n$. در این صورت ، به‌ازای α یی بزرگتر از n و h ی کوچکتر از $۱/n$ ، $f \in U(\alpha, h)$. فرض‌کنیم

$$\delta = \frac{h(\alpha - n)}{۴} .$$

مدعی هستیم.که اگر g تابع دلخواهی بـاشد که $\rho(f, g) < \delta$ آنگاه g متعلق است به $U(\alpha', h)$، که درآن، $\alpha' = (\alpha + n)/۲$. چون $\alpha' > n$، این بدان معنی است که g متعلق است به U_n. پس δ- همسایگی f در U_n است، ودرنتیجه، U_n در $\mathcal{C}$ باز است.

برای اثبات این‌مدعا ، فرض می‌کنیم $\Delta f(x, h) = |f(x+h) - f(x)|/h$. محاسبهٔ زیر را داریم:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right|$$

$$= \left| \frac{[f(x+h) - g(x+h)] - [f(x) - g(x)]}{h} \right| \leqslant \frac{۲\delta}{h} = \frac{\alpha - n}{۲}$$

اگر قدر مطلق خارج‌قسمت تفاضلی اول ناکمتر از α باشد آنگاه قدرمطلق دومی ناکمتر از $\alpha-(\alpha-n)/۲=\alpha'$ خواهد بود. وقتی که $\Delta f(x, h)$ مساوی با خارج‌قسمت تفاضلی دیگر باشد، محاسبه‌ای مشابه به‌کار می‌رود.

(۲) U_n در $\mathscr{C}$ چگال است. باید ثابت کنیم که اگر f از $\mathscr{C}$، $\varepsilon>۰$، و n مفروض باشند، آنگاه می‌توان عضوی از U_n مانند g به‌فاصلهٔ ε از f پیدا کرد.

α را بزرگتر از n اختیار می‌کنیم. g را به‌صورت تابعی «خطی قطعه به‌قطعه» می‌سازیم، یعنی به‌صورت تابعی که نمودار آن یك قطعه خط شکسته باشد؛ وطوری که قدرمطلق شیب هرقطعه خط از نمودار g از α ناکمتر باشد. به‌سهولت نتیجه می‌شود که چنین تابعی مانند g به U_n تعلق دارد. زیرا، فرض کنیم

$$۰=x_۰<x_۱<x_۲<\cdots<x_k=۱$$

افرازی از بازهٔ $[۰, ۱]$ باشد که تحدید g به‌هر زیربازهٔ $I_i=[x_{i-۱}, x_i]$ یك تابع خطی است. حال h را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$h<\frac{۱}{n},$$

$$h\leqslant\frac{۱}{۲}\min\{|x_i-x_{i-۱}|\,;\,i=۱,\ldots,k\}.$$

اگر x در $[۰, ۱]$ باشد آنگاه x به زیربازه‌ای مانند I_i تعلق دارد. اگر x در نیمهٔ اول زیربازهٔ I_i باشد آنگاه $x+h$ متعلق است به I_i و $(g(x+h)-g(x))/h$ مساوی است با شیب تابع خطی $g|I_i$. به‌همین قیاس، اگر x به‌نیمهٔ دوم I_i تعلق داشته‌باشد آنگاه $x-h$ متعلق به I_i خواهد بود و $(g(x-h)-g(x))/(-h)$ مساوی است با شیب $g|I_i$. در هرحالت، $\Delta g(x, h)\geqslant\alpha$، در نتیجه، $g\in U(\alpha, h)\subset U_n$، و این همان است که می‌خواستیم.

حال به‌ازای f، ε، و αی مفروض، باید ثابت کنیم که چگونه تابع خطی قطعه به‌قطعه g راکه مورد نظر است می‌توان ساخت. نخست، بااستفاده از پیوستگی یکنواخت f افراز

$$۰=t_۰<t_۱<\cdots<t_m=۱$$

را چنان انتخاب می‌کنیم که f برهر زیربازهٔ $[t_{i-۱}, t_i]$ از این افراز حداکثر به‌اندازهٔ $\varepsilon/۴$ تغییر کند. به‌ازای هر i که $i=۱,\ldots,m$، نقطه‌ای مانند a_i از $(t_{i-۱}, t_i)$ انتخاب می‌کنیم. سپس، تابع خطی قطعه به‌قطعهٔ $g_۱$ را باضابطهٔ

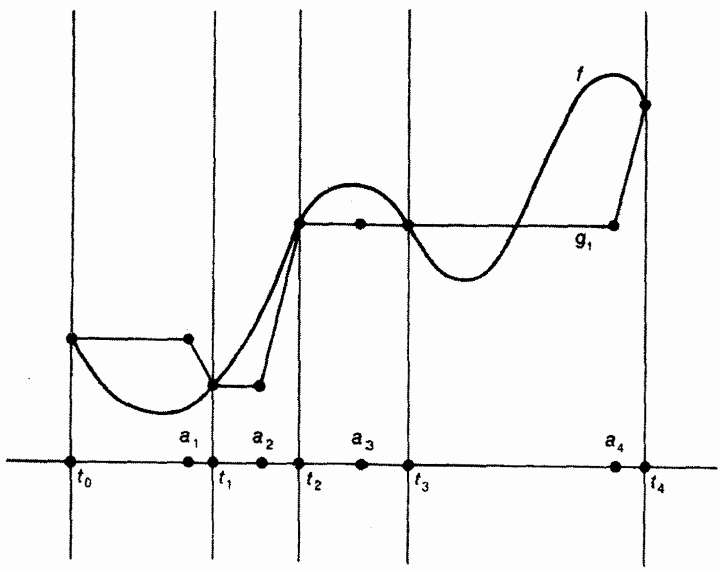
$$g_۱(x)=\begin{cases}f(t_{i-۱}) & x\in[t_{i-۱}, a_i]\\[2ex] f(t_{i-۱})+\dfrac{f(t_i)-f(t_{i-۱})}{t_i-a_i}(x-a_i) & x\in[a_i, t_i]\end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. نمودارهای f و g_1 درشکل ۱۱ تصویر شده‌اند.

ما درانتخاب نقاط a_i قدری آزاد هستیم. اگر $f(t_i)\neq f(t_{i-1})$، a_i را آن‌قدر نزدیك به t_i می گیریم که

$$t_i - a_i < \frac{|f(t_i)-f(t_{i-1})|}{\alpha}.$$

دراین‌صورت، نمودار g_1 ازقطعه‌خطهایی باشیب صفر و قطعه‌خطهایی‌که قدر مطلق شیب آنها از α ناکمتر است تشکیل خواهد شد.



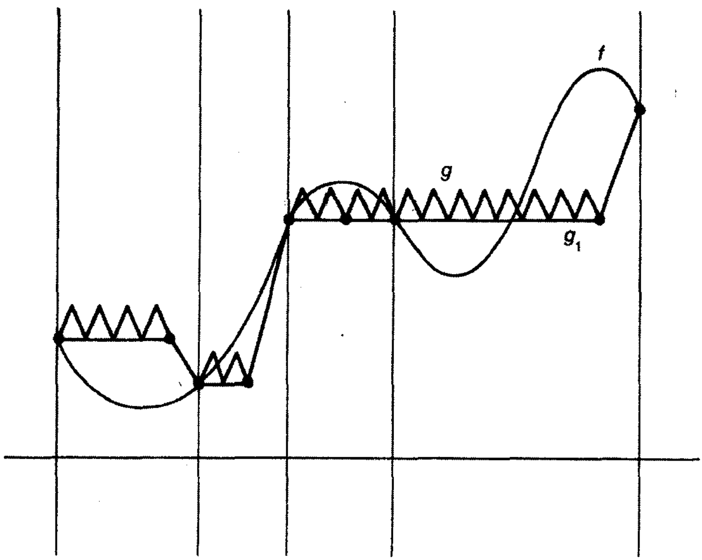
شکل ۱۱

بعلاوه، مدعی هستیم‌که $\rho(g_1, f) < \varepsilon/2$: بربازهٔ I_i، تغییرات هریك از توابع $g_1(x)$ و $f(x)$ از $f(t_{i-1})$ حداکثر $\varepsilon/4$ است؛ بنابراین، فاصلهٔ آنها ازیکدیگر $\varepsilon/2$ است. درنتیجه،

$$\rho(g_1, f) = \max\{|g_1(x) - f(x)|\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

تابع g_1 هنوز تابع مطلوب ما نیست. اکنون به‌جای قطعه‌خط افقی درنمودار g_1،

نموداری «دندانه‌دار»، که در فاصلهٔ $\varepsilon/2$ از نمودار g_1 واقع است، قرار می‌دهیم به‌طوری‌که قدرمطلق شیب هرضلع هر دندانه تاکمتر از α باشد. ساختن این‌تابع راکه کار ساده‌ای است به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم. حاصل تابع خطی قطعه به‌قطعه مطلوب g خواهد بود. شکل ۱۲ را نگاه کنید



شکل ۱۲

(۳) $\bigcap U_n$ عبارت است از توابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر. فرض‌کنیم $f \in \bigcap U_n$. ثابت می‌کنیم‌که اگر x نقطهٔ دلخواهی از $[0, 1]$ باشدآنگاه حد

$$\lim_{h\to 0}\Delta f(x, h)$$

موجود نیست: به‌ازای n مفروض، این‌امر که f به U_n تعلق دارد به‌این معنی است‌که می‌توان عددی مانند h_n باشرط $0 < h_n < 1/n$ یافت به‌طوری‌که

$$\Delta f(x, h_n) > n$$

دراین‌صورت، دنبالهٔ (h_n) به‌صفر همگراست، درحالی‌که دنبالهٔ $(\Delta f(x, h_n))$ همگرا

نیست. درنتیجه f در x مشتق‌پذیر نیست. □

شاید این‌برهان، از این‌لحاظ که بسیار مجرد و غیرساختنی به‌نظر می‌آید، بی‌فایده جلوه کند. اما، باید توجه‌داشت که، درضمن برهان روشی آمده‌است که به کمك آن می‌توان دنبالهٔ مشخصی از توابع خطی قطعه بدقطعه مانند f_n را ساخت که همگرای یکنواخت به‌تابع هیچ‌جا مشتق‌پذیر f باشد. و تعریف تابع f بدین‌طریق همان‌قدر ساختنی است که، مثلاً، تعریف معمولی تابع سینوسی به‌عنوان حد یك‌سری نامتناهی.

تمرینها

۱. خواص مذکور درمثال ۱ برای توابع f، g، و k را ثابت‌کنید.

۲. به‌ازای n و ε مفروض، تابع پیوسته‌ای مانند $f:I \rightarrow R$ تعریف‌کنید به‌طوری‌که $f \in U_n$ وبه‌ازای هر x، $\varepsilon \geqslant |f(x)|$.

۳. ساختن تابع g، دربرهان قضیهٔ ۱.۸، را تکمیل‌کنید.

۷-۹ مقدمه‌ای برنظریهٔ ابعاد

دربخش ۴-۵ ثابت‌کردیم که اگر X یك‌بسلای فشرده باشد آنگاه به‌ازای عدد صحیحی مانند N می‌توان X را در R^N نشاند. در این‌بخش، این‌قضیه را در مورد فضاهای متریك‌پذیر فشردهٔ دلخواه تعمیم می‌دهیم، و همچنین تعیین می‌کنیم که بزرگی مقدار N چقدر باید باشد.

برای یك‌فضای‌توپولوژیك‌دلخواه X مفهومی ازبعدتوپولوژیك‌را تعریف می‌کنیم. این تعریف همان «بعد پوششی» خواهد بود که ابتدا بوسیلهٔ لبگ تعریف شده است. ثابت خواهیم‌کرد که بعد توپولوژیك هرزیرمجموعهٔ فشردهٔ R^m حداکثر m است. و نیز ثابت می‌کنیم که بعد توپولوژیك هربسلای m بعدی فشرده حداکثر m است. (درواقع، بعدآن دقیقاً برابر m است، اما این‌مطلب را ثابت نمی‌کنیم.)

قضیهٔ اصلی این بخش این است که هرفضای فشردهٔ متریك‌پذیر با بعد توپولوژیك m را می‌توان در R^N، که درآن، $N = 2m+1$ نشاند. درحالت کلی، این‌مقدار N بهترین مقدار ممکن است. برهان آن کاربردی ازقضیهٔ بئر است. سپس، نتیجه می‌گیریم که‌هربسلای m بعدی فشرده‌را می‌توان در R^{2m+1} نشاند. همچنین، ازآن نتیجه می‌شود که به‌ازای یك‌فضای متریك‌پذیر فشرده، Nی وجود داردکه آن‌فضا را می‌توان در R^N نشاند اگر وتنها اگرآن‌فضا دارای بعد توپولوژیك متناهی باشد.

بیشتراحکامی که ثابت‌خواهیم‌کرد بدون‌فرض فشردگی فضای موردبحث نیز برقرار هستند. لیکن هرجا که فشردگی اثبات را راحتترکند ماآن‌را به‌کار خواهیم‌برد. تعمیمهایی

برای حالت فضاهای نافشرده در تمرینها آمده است.

تعریف. گوییم گردایهٔ $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های فضای X دارای **مرتبهٔ** $m+1$ است هرگاه نقطه‌ای از X در $m+1$ عضو $\mathcal{A}$ واقع شود، وهیچ نقطهٔ X در بیشتر از $m+1$ عضو $\mathcal{A}$ واقع نباشد.

اینك مقصود از بعد توپولوژیك یك فضای X را تعریف می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که اگر $\mathcal{A}$ گردایهٔ مفروضی اززیرمجموعه‌های X باشد، می‌گوییم گردایه‌ای مانند $\mathcal{B}$ گردایه‌ی $\mathcal{A}$ را ظریف می‌کند، یاتظریفی از $\mathcal{A}$ است، درصورتی که هرعضو $\mathcal{B}$ مانند B دست‌کم دریك عضو $\mathcal{A}$ قرار گیرد.

تعریف. فضای X را با **بعد متناهی** خوانیم هرگاه عددی صحیح مانند m وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هرپوشش باز X مانند $\mathcal{A}$ پوششی باز برای X مانند $\mathcal{B}$ موجود باشد که $\mathcal{A}$ را ظریف کند و مرتبهٔ آن حداکثر $m+1$ باشد. بنا برتعریف، **بعد توپولوژیك** X کوچکترین مقداری از m است که به‌ازای آن حکم بالا برقرار است.

درقضایای ذیل، برخی ازنکات اساسی پیرامون بعد توپولوژیك ارائه شده‌اند:

۹.۱. قضیه اگر X دارای بعد متناهی و Y زیرمجموعهٔ بسته‌ای ازآن باشدآنگاه Y نیز چنین است؛ و $\dim Y \leqslant \dim X$.

برهان. فرض کنیم $\dim X = m$، و $\mathcal{A}$ پوششی برای Y به‌وسیلهٔ مجموعه‌های باز Y باشد. به‌ازای هرعضو $\mathcal{A}$ مانند A، مجموعهٔ باز A' را در X چنان برمی‌گزینیم که $A = A' \cap Y$. X را با مجموعه‌های باز A' همراه با مجموعهٔ باز $X - Y$ می‌پوشانیم. فرض کنیم $\mathcal{B}$ تظریفی ازاین پوشش باشدکه یك پوشش باز X ومرتبهٔ آن حداکثر $m+1$ باشد. دراین‌صورت، گردایهٔ

$$\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

پوششی برای Y به‌وسیلهٔ مجموعهٔ باز Y است، مرتبهٔ آن حداکثر $m+1$ است، و $\mathcal{A}$ را ظریف می‌کند. $\square$

۹.۲. قضیه فرض‌کنیم $X = Y \cup Z$ که Y و Z مجموعه‌های بسته‌ای در X هستندکه دارای بعد توپولوژیك متناهی هستند. دراین صورت،

$$\dim X = \max\{\dim Y, \dim Z\}.$$

برهان. فرض کنیم $m = \max\{\dim Y, \dim Z\}$. بنا برقضیهٔ قبل، می‌دانیم که اگر X با بعد متناهی باشد آنگاه $m \leqslant \dim X$؛ پس تنها کافی است ثابت کنیم که $\dim X$ موجود و حداکثر مساوی m است.

مرحلهٔ ۱. نخست، حکم ذیل را ثابت می‌کنیم: فرض کنیم Y یك زیرفضای بستهٔ X

باشد، و $\dim Y\leqslant m$. اگر $\mathcal{A}$ پوشش‌بازی برای X باشدآنگاه پوشش بازی مانند $\mathcal{C}$ از X وجود داردکه $\mathcal{A}$ را ظریف می‌کند، به‌طوری‌که مرتبهٔ گردایهٔ

$$\{C\cap Y|C\in\mathcal{C}\}$$

حداکثر مساوی $m+1$ است. [این گردایه را **تحدید** $\mathcal{C}$ به Y خوانیم.]

برای اثبات این‌حکم، گردایهٔ

$$\{A\cap Y|A\in\mathcal{A}\}$$

را در نظر می‌گیریم. این‌گردایه یك‌پوشش باز Y است، پس تظریفی مانند $\mathcal{B}$ داردکه پوششی باز برای Y است و مرتبهٔ آن حداکثر $m+1$ است. به‌ازای عضو مفروضی از $\mathcal{B}$ مانند B، مجموعهٔ باز U_B از X را طوری انتخاب می‌کنیم که $U_B\cap Y=B$. همچنین، عضو A_B از $\mathcal{A}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $B\subset A_B$. فرض‌کنیم $\mathcal{C}$ گردایه‌ای متشکل‌از همهٔ‌مجموعه‌هایی به‌صورت $U_B\cap A_B$ باشد، که $B\in\mathcal{B}$، بعلاوه همهٔ‌مجموعه‌هایی به‌صورت $A-Y$، که $A\in\mathcal{A}$. دراین‌صورت، $\mathcal{C}$ پوشش‌باز مطلوب برای X است.

مرحلهٔ۲. حال فرض‌کنیم $\mathcal{A}$ یك‌پوشش باز X باشد. همچنین، فرض‌کنیم $\mathcal{B}$ پوشش بازی برای X باشدکه $\mathcal{A}$ را ظریف‌می‌کند ومرتبهٔ‌تحدیدآن به Y دارای‌مرتبه‌ای‌حداکثر مساوی $m+1$ است. سپس، $\mathcal{C}$ را پوشش‌بازی از X می‌گیریم که $\mathcal{B}$ را ظریف می‌کندو مرتبهٔ تحدیدآن به Z حداکثر مساوی $m+1$ است.

به‌قرار ذیل پوشش جدید $\mathcal{D}$ را برای X تشکیل می‌دهیم: تابع $f:\mathcal{C}\rightarrow\mathcal{B}$ را به‌این صورت تعریف می‌کنیم که به‌ازای هر C از $\mathcal{C}$ عضو $f(C)$ از $\mathcal{B}$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $C\subset f(C)$. به‌ازای عضو مفروضی‌از $\mathcal{B}$ مانند B، $D(B)$ را اجتماع همهٔ‌آن اعضایی از $\mathcal{C}$ مانند C تعریف می‌کنیم که به‌ازای آنها $f(C)=B$. (البته اگر B درتصویر f نباشد، $D(B)$ تهی‌است.) فرض‌کنیم $\mathcal{D}$ گردایهٔ همهٔ‌مجموعه‌های به‌صورت $D(B)$ باشد، که $B\in\mathcal{B}$.

حال $\mathcal{D}$ مجموعهٔ $\mathcal{B}$ را ظریف می‌کند. زیرا، به‌ازای‌هر B، $D(B)\subset B$؛ بنابراین، $\mathcal{D}$ گردایهٔ $\mathcal{A}$ را ظریف می‌کند. همچنین، $\mathcal{D}$ مجموعهٔ X را می‌پوشاند،چون $\mathcal{C}$ یك‌پوشش X است و به‌ازای هر C از $\mathcal{C}$، $C\subset D(f(C))$. ثابت می‌کنیم مرتبهٔ $\mathcal{D}$ حداکثر مساوی $m+1$ است؛ درنتیجه، اثبات قضید تمام می‌شود.

فرض‌کنیم $x\in D(B_1)\cap\cdots\cap D(B_k)$، که درآن،مجموعه‌های $D(B_i)$ متمایزند. می‌خواهیم ثابت‌کنیم که $k\leqslant m+1$. توجه کنیدکه مجموعه‌های B_1، ...، B_k بایسد متمایز باشند. زیراکه مجموعه‌های $D(B_i)$ چنین‌اند. چون $x\in D(B_i)$، می‌توان، به‌ازای هر i، مجموعهٔ C_i از $\mathcal{C}$ را طوری برگزیدکه $x\in C_i$ و $f(C_i)=B_i$. مجموعه‌های C_i متمایزند. زیرا، مجموعه‌های B_i چنین‌اند. بعلاوه،

$$x\in[C_1\cap\cdots\cap C_k]\subset[D(B_1)\cap\cdots\cap D(B_k)]\subset[B_1\cap\cdots\cap B_k].$$

اگر x در Y واقع باشد آنگاه $k \leqslant m+1$. زیرا تحدید $\mathscr{B}$ به Y دارای مرتبه‌ای حداکثر مساوی $m+1$ است؛ و اگر x در Z باشد آنگاه $k \leqslant m+1$. زیرا تحدید $\mathscr{C}$ به Z دارای مرتبه‌ای حداکثر مساوی $m+1$ است. □

۳۰۹. نتیجه فرض‌کنیم $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_k$، که درآن، هر Y_i در X بسته و با بعد متناهی است. دراین صورت،

$$\dim X = \max\{\dim Y_1, \cdots, \dim Y_k\}.$$

روشن است که بعد X (درصورت وجود) یك ناوردای توپولوژیك است. درحالتی که X فشرده یا متری باشد، تعریف‌را می‌توان چنان فرمولبندی کرد که متضمن متریك نیز باشد:

۴۰۹. لم فرض‌کنیم X یك فضای متری فشرده باشد. دراین‌صورت، $\dim X \leqslant m$ اگر وتنها اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، یك‌پوشش‌باز مُتناهی‌از X مانند $\mathscr{B}$ به‌وسیلهٔ‌مجموعه‌های با قطر کمتراز ε وجود داشته باشد به‌طوری‌که مرتبهٔ $\mathscr{B}$ حداکثر مساوی $m+1$ باشد.

برهان. فرض‌کنیم $\dim X \leqslant m$. پوششی مانند $\mathscr{A}$ از X به وسیلهٔ $\varepsilon/3$-گویهای باز انتخاب می‌کنیم، و $\mathscr{B}'$ را تظریفی از $\mathscr{A}$ می‌گیریم که یك پوشش باز X باشد به‌طوری‌که مرتبهٔ‌آن حداکثر مساوی $m+1$ باشد. فرض‌کنیم $\mathscr{B}$ یك زیرگردایهٔ متناهی از $\mathscr{B}'$ باشدکه X را می‌پوشاند. دراین صورت، مرتبهٔ $\mathscr{B}$ حداکثر $m+1$ است، و قطر اعضای $\mathscr{B}$ کمتر از ε است.

برای اثبات عکس‌قضیه، فرض‌کنیم که $\mathscr{A}$ پوشش باز دلخواهی‌از X باشد، وفرض کنیم $\varepsilon > 0$ یك عدد لبگ برای $\mathscr{A}$ باشد، ویك پوشش باز متناهی‌از X مانند $\mathscr{B}$ انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که قطر هرعضوآن کمتر از ε باشد، و مرتبهٔ آن حداکثر مساوی $m+1$ باشد. دراین صورت، $\mathscr{B}$ تظریف مطلوب برای $\mathscr{A}$ خواهد بود. □

مثال ۱. بازهٔ $[a, b]$ دارای بعد توپولوژیك ۱ است. به‌ازای عددمثبت مفروض ε، می‌توان افرازی مانند

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

انتخاب‌کرد به‌طوری‌که به‌ازای هر i، $t_i - t_{i-1} < \varepsilon/2$. دراین صورت، گردایهٔ

$$\mathscr{B} = \{[a, t_1), (t_0, t_2), (t_1, t_3), (t_2, t_4), \ldots, (t_{n-2}, t_n), (t_{n-1}, b]\}$$

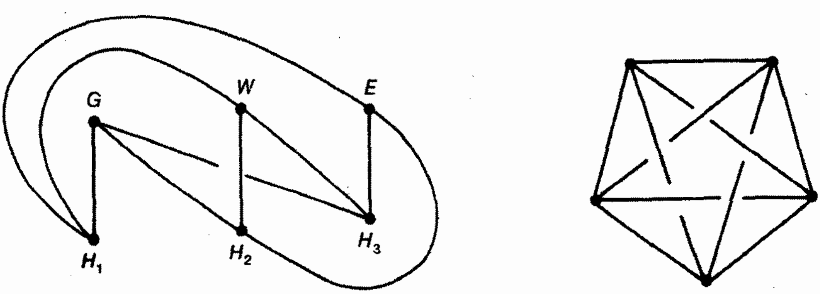
پوشش بازی به‌وسیلهٔ مجموعه‌های با قطر کمتر از ε است، و مرتبهٔ $\mathscr{B}$ مساوی ۲ است. در نتیجه،

$$\dim [a, b] \leqslant 1.$$

ازطرفی دیگر، به‌ازای $\varepsilon \leqslant b-a$ ، فرض کنیم که $\mathscr{B}$ پوشش بـاز دلخواهی از $[a, b]$ به وسیلهٔ مجموعه‌های با قطر کمتر از ε باشد. مدعی هستیم که مرتبهٔ $\mathscr{B}$ حـداقل مساوی ۲ است. فرض کنیم که مرتبهٔ $\mathscr{B}$ برابر با ۱ باشد؛ دراین صورت، هیچ دوعضو $\mathscr{B}$ مقطع مشترك نخواهند داشت. چون قطر اعضای $\mathscr{B}$ کمتر از ε است، گردایهٔ $\mathscr{B}$ باید بیش از یك عضو داشته باشد؛ فرض کنیم U یك عضو $\mathscr{B}$ باشد، و V اجتماع بقیهٔ اعضای $\mathscr{B}$. دراین‌صورت، U و V تشکیل یك جـداسازی بـرای $[a, b]$ می‌دهند و این بـا همبندی بـازهٔ $[a, b]$ متناقض است.

مثال ۲. **یك گراف خطی** (متناهی) G فضایی است هومئومورف بـا اجتماع تعدادی متناهی از قطعه خطهایی که هـر زوج از آنها یکدیگر را حـداکثر در یك نقطهٔ انتهایی مشترك قطع می کنند. نقاط انتهایی قطعه خطها را **رأسهای** گراف خطی می گویند. دومثال ازگرافهای خطی در شکل ۱۳ ترسیم شده‌اند. اولی نموداری از مسألهٔ معروف «توزیع گاز ـ آب ـ برق» است[1]؛ دومی را «گراف تمام پنج رأسی» می‌خوانند. هیچ کـدام ازآنها را نمی‌توان درصفحه نشاند. این مطلبی است که اثبات آن به‌هیچ وجه پیش‌پـا افتاده نیست و مبتنی برقضیهٔ منحنی ژوردان است. [به تمرینهای بخش ۸ــ۱۳ مراجعه کنید.]

هر گراف خطی دارای بعد توپولوژیك ۱ است. البته فضاهای بسیاری موجودند که گراف خطی نیستند، ولی، بعد آنها ۱ است. (به تمرین ۳ مراجعه کنید.)



شکل ۱۳

مثال ۳. هـر زیرمجموعهٔ فشردهٔ C از $\mathbb{R}^2$ دارای بعد توپولوژیك حـداکثر مساوی ۲ است.

---

۱. مسألهٔ «توزیع گاز ـ آب ـ برق» چنین است: می‌خواهیم از ایستگاههای گاز، آب، و برق (بترتیب G، W، و E) به هریك از خانه‌های H_1، H_2، و H_3 لوله‌هایی بکشیم که یکدیگر را قطع نکنند. ـم.

برای اثبات این حکم، پوشش باز معینی از $R^۲$، مانند $\mathcal{A}$، می‌سازیم که مرتبهٔ ۳ داشته باشد. کار را با تعریف $\mathcal{A}_۲$ شروع می‌کنیم که عبارت است از گردایهٔ همهٔ مربعهای واحد باز در $R^۲$ به صورت

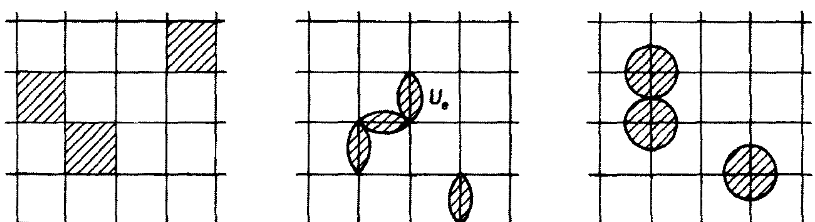
$$\mathcal{A}_۲=\{(n,\ n+۱)\times(m,\ m+۱)|\text{اعداد صحیح هستند } n,\ m\}.$$

توجه کنید که اعضای $\mathcal{A}_۲$ ازهم جدا هستند. دراین صورت، گردایه‌ای مانند $\mathcal{A}_۱$ ازمجموعه‌های باز می‌سازیم. بدین منظور، هرضلع (باز) e ازیکی ازمربعهای $\mathcal{A}_۲$ را اختیار می‌کنیم

$$e=(n,\ n+۱)\times\{m\} \quad \text{یا} \quad e=\{n\}\times(m,\ m+۱)$$

و کمی آن را بسط می‌دهیم تا مجموعهٔ بازی مانند U_e از $R^۲$ به دست آید، با این ملاحظه که اگر $e\neq e'$ ، مجموعه‌های U_e و $U_{e'}$ ازهم جدا باشند.

همچنین، هر U_e را چنان انتخاب می‌کنیم که قطر آن حداکثر مساوی ۲ باشد. سرانجام، $\mathcal{A}_۰$ را گردایهٔ همهٔ گویهای باز به‌شعاع ۱/۲ حول نقاط $n\times m$ تعریف می‌کنیم. شکل ۱۴ را نگاه کنید.



a_2 a_1 a_0

شکل ۱۴

گردایهٔ $\mathcal{A}=\mathcal{A}_۲\cup\mathcal{A}_۱\cup\mathcal{A}_۰$ ازمجموعه‌های باز، $R^۲$ را می‌پوشاند. قطر هرعضو آن حداکثر مساوی ۲ است. و مرتبهٔ آن ۳ است، زیرا هیچ نقطه‌ای از $R^۲$ نمی‌تواند در بیش از یك مجموعه از هر $\mathcal{A}_i$ قرار گیرد.

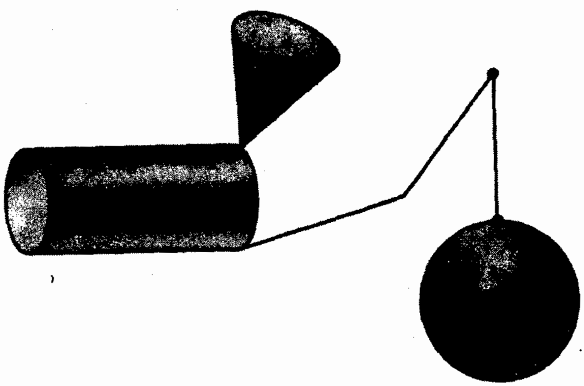
اکنون ثابت می‌کنیم که هر مجموعهٔ فشردهٔ C در $R^۲$ دارای بعد توپولوژیك حداکثر مساوی ۲ است. به ازای $\varepsilon>۰$ مفروض، هومئومورفیسم $f: R^۲\to R^۲$ را با ضابطهٔ $f(x)=(\varepsilon/۳)x$ درنظر می‌گیریم. تصویرهای مجموعه‌های بازگردایهٔ $\mathcal{A}$ را تحت f در نظر می‌گیریم. گردایهٔ حاصل پوشش بازی برای $R^۲$ است که قطر مجموعه‌های آن کمتر از ε است. تعدادی متناهی از آنها که C را می‌پوشانند درنظر می‌گیریم؛ واین پوشش بازمطلوب برای C خواهد بود.

البته، چنین نیست که هرزیرمجموعه فشردهٔ $R^۲$ ، دقیقاً دارای بعد ۲ باشد. مثلاً، بعد

یك مجموعه تك عضوی برابر ۰ است، و بعد یك بازهٔ بسته برمحور xها یك است. درواقع، باید دانست که اثبات اینکه بعضی از زیرمجموعه‌های R^2 دارای بعد توپولوژیك ۲ هستند به‌طرز شگفت‌انگیزی دشوار است؛ برای این کار تکنیکهای توپولوژی جبری لازم است. به مثال ۶ زیرین مراجعه کنید.

مثال ۴. بعد توپولوژیك هر بسلای ۲ بعدی فشردهٔ X حداکثرمساوی ۲ است. زیرا، X را می‌توان به‌صورت اجتماع متناهی از زیرفضاهای هومئومورف با گوی واحد بسته در R^2 نوشت. بنابراین، نتیجهٔ ۳.۹ درمورد X صدق می‌کند. کرهٔ ۲ بعدی، چنبره، و بطری کلاین[1] مثالهای نوعی بسلای ۲ بعدی هستند. به‌شکل ۲۷ دربخش ۸ـ۱۰، مراجعه کنید.

مثال ۵. مقصود از **همبافت ۲ بعدی سادگی متناهی** (مختصراً موسوم به **همبافت ۲ بعدی**) فضایی‌است مانند X که هومئومورف با اجتماع تعدادی متناهی‌از مثلثهای بسته وقطعه خطهاست به‌طوری که هرزوج‌ازآنها یکدیگر را حداکثر دریك‌رأس‌مشترك یا (درمورد مثلثها) دریك ضلع مشترك قطع می‌کنند. بنابر نتیجهٔ ۳.۹، بعد توپولوژیك هر همبافت ۲ بعدی حداکثرمساوی ۲ است. درشکل ۱۵، همبافتی ۲ بعدی تصویرشده‌است که بسلا نیست.



شکل ۱۵

به‌بیان درست یك همبافت ۲ بعدی باید دست‌کم حاوی یك‌مثلث باشد؛ وگرنه، یك‌گراف خطی خواهد بود.

مثال ۶. با دانسته‌گرفتن قضیه‌ای‌که در فصل بعد (دربخش ۸ـ۸) ثابت خواهیم کرد، اکنون ثابت می‌کنیم هر ناحیهٔ مثلثی بستهٔ T در R^2 دارای بعد توپولوژیك ۲ است. از

1. Klein

اینجا نتیجه می‌شود که هر بسلای ۲ بعدی فشرده، و هر همبافت ۲ بعدی، دارای بعد توپولوژیك ۲ است :

قضیه مورد نظر این است :

فرض‌کنیم $Bd\,T$ نمایش اجتماع اضلاع ناحیهٔ مثلثی بستهٔ T باشد. دراین‌صورت، هیچ نگاشت پیوسته‌ای مانند $f : T \to B\,dT$ وجود ندارد که هرضلع T را بتوی خودش ببرد.

می‌دانیم که بعد T حداکثر ۲ است. برای اثبات اینکه بعد T حداقل۲ است، ε مثبتی می‌یابیم به‌طوری که‌مرتبهٔ‌هرپوشش باز T، به‌وسیلهٔ مجموعه‌هایی باقطر کمتر از ε، حداقل۳ باشد. $0 < \varepsilon$ را آن‌قدر کوچك اختیارمی‌کنیم که هر زیرمجموعهٔ R^2 که هر سه ضلع T را قطع کند قطرش حداقل ε باشد. فرض‌کنیم

$$\mathcal{A} = \{U_1 , \ldots , U_n\}$$

یك پوشش باز T به‌وسیلهٔ مجموعه‌هایی با قطر کمتر از ε باشد. همچنین فرض‌کنیم مرتبهٔ $\mathcal{A}$ کمتر از ۳ باشد. به‌ازای هر i $(i = 1, \ldots , n)$ رأسی‌از T مانند v_i به‌قرار ذیل انتخاب می‌کنیم : اگر U_i دوضلع T را قطع‌کرد ، v_i را رأس مشترك بین این دو ضلع می‌گیریم. اگر U_i تنها یك‌ضلع T را قطع‌کرد، v_i را یکی‌از رأسهای این‌ضلع قرار می‌دهیم. اگر U_i هیچ ضلع T را قطع نکرد، v_i را رأس دلخواهی از T می‌گیریم.

حال فرض‌کنیم $\{\phi_i\}$ یك افراز واحد مغلوب به‌وسیلهٔ $\{U_1, \ldots , U_n\}$ باشد. (به‌بخش ۴ـ۵ مراجعه‌کنید.) تابع $g : T \to R^2$ را باضابطهٔ

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) v_i$$

تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت، g پیوسته است. اما، هر نقطهٔ T حداکثردر دوعضو $\mathcal{A}$ قرار دارد. بنابراین، به ازای هر x از T ، حداکثر دو تابع از میان توابـع $\phi_i(x)$ ناصفـر هستند. پس

$$g(x) = v_i$$

درصورتی‌که x تنها دریك مجموعه‌ی باز U_i واقع باشد؛ و اگر x در دومجموعهٔ باز U_i و U_j واقع باشد آنگاه عددی مانند t در $[0, 1]$ هست‌که

$$g(x) = t v_i + (1 - t) v_j$$

[دراینجا از این مطلب‌که $\sum \phi_i(x) = 1$ استفاده می‌کنیم.] بدین‌ترتیب، g همهٔ T را بر اجتماع اضلاع T می‌نگارد.

علاوه بر این، مدعی هستیم که g هرضلع T را بتـوی خودش می‌نگارد. فرض‌کنیم x متعلق‌به ضلع vw از T باشد. دراین صورت، هر مجموعهٔ باز U_i که شامل x باشد الزاماً

این ضلع را قطع می‌کند. درنتیجه، رأس v_i باید v یا w باشد. به همین‌سان، اگر $x\in U_j$ آنگاه v_j مساوی‌است با v یا w. دراین‌صورت، تساویهای بالا ثابت می‌کنندکه $g(x)$ به vw تعلق دارد.

وجود نگاشت g خلاف قضیهٔ مذکور دربالاست.

اینك قضیهٔ نشاندن راکه‌قبلا ذکر کردیم‌ثابت می‌کنیم، این‌قضیه بدین مضمون است که هر فضای فشردهٔ متریك‌پذیر با بعد توپولوژیك m را می‌توان در R^{2m+1} نشاند. این قضیه یکی‌دیگراز قضایای «عمیق» است؛ مثلاً، به‌هیچ‌وجه واضح نیست، که چرا باید بعد $2m+1$ حلال مسئله باشد. پیش از اینکه قضیه‌را ثابت‌کنیم چندحالت خاص‌آن را مورد بحث قرار می‌دهیم؛ این بحث روشن می‌کند که چرا باید بعد $2m+1$ را در نظر گرفت.

نخست، ساده‌ترین حالت ممکن، یعنی گراف خطی G، را درنظر می‌گیریم. دراین حالت، قضیهٔ نشاندن می‌گوید هرگراف خطی متناهـی را می‌توان در R^3 نشاند. اقامـهٔ برهانی برای این حالت خاص دشوار نیست. ولی ترجیح می‌دهیم برهـانی بیاوریم کـه به بعدهای بالاتر نیز تعمیم یابد، برهانی‌که متضمن مفهوم وضع عمومی باشد.

مجموعهٔ A ازنقاط R^3 را در **وضع عمومی** در R^3 خوانیم هرگاه هیچ دونقطهٔ‌آن برابر نباشند، هیچ سه نقطهٔ‌آن همخط نباشند، و هیچ چهار نقطهٔ‌آن همصفحه نباشند. یافتن مجموعه‌های نقاطی‌که در R^3 در وضع عمومی باشند آسان است. مثلاً، می‌توان ثابت‌کرد که مجموعهٔ متشکل‌از همهٔ نقاط منحنی

$$\{(t,\, t^2,\, t^3) \mid t\in R\}$$

در R^3 در وضع عمومی است.

حال، به‌ازای گراف خطـی متناهی مفروض G با رأسهای v_1، . . .، v_n مجموعهٔ $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n\}$ ازنقاط R^3 راکه در R^3 در وضع‌عمومی است انتخاب می‌کنیم. سپس، نگاشت پیوستهٔ $f:G\to R^3$ را چنین تعریف می‌کنیم: f رأس v_i را به $\mathbf{z}_i$ می‌نگارد، و نقطهٔ $tv_i+(1-t)v_j$ از قطعـه خط واصل بین v_i و v_j در G (درصورت وجود) را به‌نقطهٔ $t\mathbf{z}_i+(1-t)\mathbf{z}_j$ از قطعه خط واصل بین $\mathbf{z}_i$ و $\mathbf{z}_j$ در R^3 می‌نگارد. واضح است که f پیوسته است. همچنین، f یك به یك است: فرض‌کنیم $e=v_iv_j$ و $e'=v_kv_l$ دو قطعه خط از G باشند. اگر e و e' هیچ رأس‌مشترك نداشته باشند آنگاه $f(e)$ و $f(e')$ از هم جـدا خواهند بود، زیرا، اگـر چنین نباشند، نقاط $\mathbf{z}_i$، $\mathbf{z}_j$، $\mathbf{z}_k$، و $\mathbf{z}_l$ همصفحه خواهند شد. و اگر e و e' دارای رأس مشترکی باشند، مثلا اگر $i=k$، آنگاه $f(e)$ و $f(e')$ تنها درنقطهٔ $\mathbf{z}_i$ می‌توانند یکدیگر را قطع کنند؛ چه درغیراین‌صورت، $\mathbf{z}_i$، $\mathbf{z}_j$، و $\mathbf{z}_l$ همخط خواهندشد.

حال ساده‌ترین حالت دیگر، یعنی، همبافت ۲ بعدی را درنظر می‌گیریم. برای‌تعمیم برهان پیش، نخست بایدکمی از هندسهٔ تحلیلی R^N بگوییم. مـا به‌هرحال بعداً، به‌هنگام اثبات قضیهٔ کلی نشاندن، بدین‌مطالب نیاز خواهیم داشت.

هندسهٔ تحلیلی در R^N واقعاً چیزی نیست جز جبرخطی فضاهای برداری که به‌زبانی اندك متفاوت برگردانده شده‌است. نخست، تعریف ذیل‌را می‌آوریم:

تعریف. مجموعهٔ $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ از نقاط R^N را **مستقل هندسی** خوانیم در صورتی که

اگر $\sum_{i=0}^{k} a_i\mathbf{x}_i = 0$ و $\sum_{i=0}^{k} a_i = 0$ آنگاه به‌ازای هر i، $a_i = 0$.

واضح‌است که هرمجموعه‌ای که تنها یك نقطه داشته‌باشد مستقل‌هندسی‌است. استقلال هندسی درحالتی‌که $k > 0$ چه‌معنایی دارد؟ با چند عمل سادهٔ جبری می‌توان ثابت‌کردکه مجموعهٔ نقاط $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ مستقل هندسی است اگر وتنها اگر مجموعهٔ بردارهای

$$\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\}$$

به‌معنای معمولی درجبرخطی مستقل خطی باشد. این‌مطلب به‌ما کمك می‌کند تا تصوری از موضوع به‌دست‌آوریم: هر دونقطهٔ متمایز تشکیل یك مجموعهٔ مستقل هندسی می‌دهند. سه نقطه درصورتی تشکیل یك مجموعهٔ مستقل‌هندسی می‌دهندکه همخط نباشند. چهارنقطه در R^3 درصورتی تشکیل یك مجموعهٔ مستقل‌هندسی می‌دهندکه همصفحه نباشند، و الی آخر.

از این توضیحات معلوم می‌شودکه نقاط

$$0 = (0, 0, \ldots, 0),$$
$$\epsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$
$$\ldots$$
$$\epsilon_N = (0, 0, \ldots, 1),$$

در R^N مستقل هندسی هستند. همچنین معلوم می‌شودکه R^N بیش از $N+1$ نقطهٔ مستقل هندسی ندارد.

تعریف. فرض‌کنیم‌که $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ مجموعه‌ای از نقاط R^N باشدکه مستقل هندسی است. **صفحهٔ P معین‌شده به‌وسیلهٔ این نقاط** چنین تعریف می‌شود: مجموعهٔ همهٔ نقاطی از R^N مانند $\mathbf{x}$ که

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{k} t_i\mathbf{x}_i \quad \text{که درآن} \quad \sum_{i=0}^{k} t_i = 1.$$

به وسیلهٔ محاسبات سادهٔ جبری ثابت می‌شودکه اسکالرهایی مانند a_1، ...، a_k وجود دارندکه می‌توان P را به‌صورت مجموعهٔ نقاطی مانند $\mathbf{x}$ به‌صورت

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \qquad (*)$$

بیان‌کرد. بنابراین، P را نه تنها می‌توان به‌عنوان «صفحهٔ معین شده به وسیلهٔ نقاط

«$\mathbf{x}_0$، ...، $\mathbf{x}_k$» بیان کرد، بلکه می‌توان آن‌را به‌عنوان «صفحهٔ گذرنده بر نقطهٔ $\mathbf{x}_0$ وموازی با بردارهای $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0$، ...، $\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_0$» نیز توصیف کرد.

حال هومئومورفیسم $T: R^N \to R^N$ را باضابطهٔ $T(\mathbf{x})=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ درنظرمی‌گیریم. این هومئومورفیسم را یك **انتقال** R^N می‌نامیم. عبارت (*) ثابت می‌کند که این نگاشت صفحهٔ P را بروی زیرفضای برداری V^k از R^N، که بردارهای $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0$،...،$\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_0$ یك پایهٔ آن هستند، می‌نگارد. بدین‌دلیل، اغلب P را یك **صفحهٔ** k **بعدی** در R^N می‌خوانیم.

ازاینجا، بلافاصله دومطلب نتیجه‌می‌شود: نخست، اینکه‌اگر $k<N$، صفحهٔ k بعدی P الزاماً در R^N درون تهی دارد (چه V^k چنین‌است). دوم، اینکه اگر $\mathbf{y}$ نقطهٔ دلخواهی از R^N باشد که در P نباشد آنگاه مجموعهٔ

$$\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}\}$$

مستقل هندسی است. زیرا، اگر $\mathbf{y}\notin P$ آنگاه $T(\mathbf{y})=\mathbf{y}-\mathbf{x}_0$ در V^k نخواهد بود. و بنابریك قضیه‌ای استانده از جبرخطی، بردارهای $\{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0,\ldots, \mathbf{x}_k-\mathbf{x}_0, \mathbf{y}-\mathbf{x}_0\}$ مستقل خطی هستند، و ازاینجا حکم مطلوب ما حاصل می‌شود.

تعریف. مجموعهٔ A از نقاط R^N را در **وضع عمومی در** R^N خوانیم هرگاه هر زیرمجموعهٔ A که شامل $N+1$ نقطه یاکمتر باشد مستقل هندسی باشد.

درحالت R^3، می‌توان تحقیق کرد که این‌تعریف باآنچه قبلاً گفته شد یکی‌است.

۵.۹ لم به‌ازای مجموعهٔ متناهی‌مفروض $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ ازنقاط R^N و عدد مثبت مفروض δ، مجموعه‌ای در وضع عمومی در R^N مانند $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ هست به طوری که به‌ازای همه مقادیر i، $|\mathbf{x}_i-\mathbf{y}_i|<\delta$.

برهان. اثبات به‌استقراست. $\mathbf{y}_1$ را مساوی $\mathbf{x}_1$ می‌گیریم. فرض‌کنیم $\mathbf{y}_1$،...،$\mathbf{y}_p$ نقاط‌مفروضی در وضع عمومی در R^N باشند. مجموعهٔ همهٔ صفحه‌های R^N، که به‌وسیلهٔ زیرمجموعه‌های $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p\}$ مشخص می‌شوند وشامل N عضو یاکمتر دارند، درنظر می‌گیریم. هر زیرمجموعه‌ای ازاین نوع مستقل‌هندسی است، یك صفحه kبعدی را درR^N معین می‌کنیم، به‌طوری که $k\leqslant N-1$. هریك ازاین صفحه‌ها در R^N دارای درون تهی است. از آنجاکه تعداد آنها متناهی است، اجتماع آنها نیز در R^N دارای درون تهی است. (توجه داشته‌باشید که R^N یك فضای بئر است.) $\mathbf{y}_{p+1}$ را نقطه‌ای از R^N انتخاب می‌کنیم که در فاصلهٔ δ از $\mathbf{x}_{p+1}$ باشد و در هیچ یك از این صفحه‌ها نیز واقع نباشد. بلافاصله نتیجه می‌شود که مجموعهٔ

$$C=\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p, \mathbf{y}_{p+1}\}$$

در وضع‌عمومی در R^N است. زیرا فرض‌کنیم D زیرمجموعهٔ دلخواهی از C باشد که شامل $N+1$ عضو یاکمتر است. دراین صورت، اگر D شامل $\mathbf{y}_{p+1}$ نباشد، بنابر فرض

استقرا D مستقل هندسی است. و اگر D شامل $\mathbf{y}_{p+1}$ باشد آنگاه $D-\{\mathbf{y}_{p+1}\}$ شامل N نقطه یا کمتر است و بنابر ساختمان برهان، $\mathbf{y}_{p+1}$ درصفحهٔ معین شده به‌وسیلهٔ این نقاط واقع نیست. بدین‌ترتیب، چنانکه دربالا ملاحظه شد، D مستقل هندسی است. □

اینك می‌توانیم چگونگی‌نشاندن هرهمبافت ۲ بعدی مانند X را در R^5 ثابت کنیم. فرض کنیم X همبافتی۲ بعدی با رأسهای v_1، . . .، v_n باشد ومجموعهٔ نقاط $\mathbf{z}_1$، . . .، $\mathbf{z}_n$ را، که در R^5 در وضع عمومی هستند، انتخاب می کنیم. تابع پیوستهٔ $f: X \to R^5$ را به‌قرار ذیل تعریف می کنیم: نقطهٔ عمومی متعلق به مثلث با رأسهای v_i، v_j، v_k را می‌توان به صورت

$$sv_i+tv_j+(1-s-t)v_k$$

نوشت که s، t، و $1-s-t$ همه نامنفی هستند. (اثبات این حکم را به عهدهٔ خواننده می گذاریم.) فرض کنیم f نگاشتی باشدکه‌ این‌نقطه را به‌نقطهٔ $s\mathbf{z}_i+t\mathbf{z}_j+(1-s-t)\mathbf{z}_k$ در مثلثی از R^5 با رأسهای $\mathbf{z}_i$، $\mathbf{z}_j$، $\mathbf{z}_k$ بنگارد. اگر v_iv_j قطعه‌خطی باشدکه ضلع مثلثی نباشد، مانند سابق فرض می کنیم f آن را بروی قطعه‌خط $\mathbf{z}_i\mathbf{z}_j$ بنگارد.

چون نقاط $\mathbf{z}_i$ در وضع عمومی هستند، نگاشت f یك‌به‌یك است. چندین حالت‌باید بررسی شود. مثلاً، اگر v_1، v_2، v_3، و v_4، v_5، v_6، بترتیب، رأسهای دومثلث جدا ازهم σ و σ' از X باشند آنگاه $f(\sigma)$ و $f(\sigma')$ نمی‌توانند یکدیگر را قطع کنند، چه درآن صورت نتیجه می‌شود که نقاط $\mathbf{z}_i$، به‌ازای i که $i=1,\ldots,6$، مستقل نیستند. [اگر $\mathbf{x}_0$ نقطه‌ای متعلق به مقطع می‌بود آنگاه

$$\sum_{i=1}^{3} s_i\mathbf{z}_i=\mathbf{x}_0=\sum_{i=4}^{6} t_i\mathbf{z}_i$$

که در آن، $\sum s_i=\sum t_i=1$ یا

$$\sum_{i=1}^{3} s_i\mathbf{z}_i+\sum_{i=4}^{6}(-t_i)\mathbf{z}_i=0$$

که در آن مجموع ضرایب صفر است.] در بقیهٔ حالات به‌همین ترتیب استدلال می کنیم.

با درنظر گرفتن حالات خاص فوق به‌عنوان زمینه‌ای برای پرداختن به حالت‌کلی، قضیهٔ نشاندن‌کلی ذیل را ثابت می کنیم.

۶.۹. قضیه (قضیهٔ نشاندن) هرفضای متریك‌پذیر فشردهٔ X با بعد توپولوژیك m را می‌توان در R^{2m+1} نشاند.

برهان. فرض‌کنیم $N=2m+1$. متریك مربعی بر R^N را با ضابطهٔ

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=\max\{|x_i-y_i|\,;\, i=1,\ldots,N\}$$

تعریف می کنیم. در این صورت، می‌توانیم ρ را برای نمایش متریك سوپرمسومی نظیر

آن برفضای $\mathcal{C}(X, R^N)$ به کار ببریم؛

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| ; x \in X\}.$$

فضای $\mathcal{C}(X, R^N)$ در متریك ρ تمام است، زیرا R^N در متریك مربعی تمام است.

متریك d را برای فضای X اختیار می کنیم؛ چـون X فشرده است، d کراندار است. به‌ازای نگاشت پیوستهٔ مفروض $f: X \to R^N$ عدد $\Delta(f)$ را چنین تعریف می کنیم:

$$\Delta(f) = \operatorname{lub}[\operatorname{diam} f^{-1}(\{z\}) | z \in R^N\} .$$

عدد $\Delta(f)$ اندازهٔ «انحراف» f از یك به یك بودن را نشان می‌دهد؛ اگـر $\Delta(f) = 0$، هرمجموعهٔ $f^{-1}(\{z\})$ حداکثر از یك نقطه تشکیل شده‌است، درنتیجه، f یك به یك است.

حال، به‌ازای $\varepsilon > 0$، مجموعهٔ U_ε را مجموعهٔ همهٔ نگاشتهای پیوستهٔ $f: X \to R^N$ تعریف می کنیم به‌طوری که به‌ازای $\Delta(f) < \varepsilon$؛ این مجموعه از همهٔ توابعی تشکیل شده است که میزان «انحراف» آنها از یك به یك بودن از ε کمتراست. ثابت می کنیم که U_ε در $\mathcal{C}(X, R^N)$ هم بازاست و هم چگال. از آنجا نتیجه می‌شود که مجموعهٔ

$$\bigcap_{n \in Z_+} U_{1/n}$$

در $\mathcal{C}(X, R^N)$ چگال است و بویژه ناتهی است.

اگر f عضوی از این مقطع باشد آنگاه به ازای هر n، $\Delta(f) < 1/n$. درنتیجه، $\Delta(f) = 0$ و f یك به یك است. اماچون X فشرده است، f یك نشاننده است. بدین ترتیب، قضیهٔ نشاندن ثابت می‌شود.

(۱) U_ε در $\mathcal{C}(X, R^N)$ بازاست. به‌ازای عضو مفروضی از U_ε مانند f، می‌خواهیم یك گوی مانند $B_\rho(f, \delta)$ حول f بیابیم که زیرمجموعهٔ U_ε باشد. نخست، عددی مانند b انتخاب می کنیم که $\Delta(f) < b < \varepsilon$. توجه کنیدکه اگر $f(x) = f(y) = z$ آنگاه x و y متعلق‌اند به مجموعهٔ $f^{-1}(\{z\})$، درنتیجه، $d(x, y)$ باید کوچکتر از b باشد. ازاینجا نتیجه می‌شود که اگر فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از $X \times X$ باشد که به‌صورت ذیل تعریف شده است

$$A = \{x \times y | d(x, y) \geqslant b\} ,$$

آنگاه تابع $|f(x) - f(y)|$ بر A مثبت است. اما، A در $X \times X$ بسته و در نتیجه فشرده است؛ بنابراین، تابع $|f(x) - f(y)|$ بـر A دارای یك مینیموم مثبت است، فرض کنیم

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{|f(x) - f(y)| ; x \times y \in A\} .$$

مدعی هستیم که این‌مقدار δ برای اثبات حکم موردنظر کافی‌است.

فرض کنیم g نگاشتی باشد به‌طوری که $\rho(f, g) < \delta$. اگر $x \times y \in A$ آنگاه، بنا بر تعریف، $|f(x) - f(y)| \geqslant ۲\delta$؛ چون $g(x)$ و $g(y)$، بترتیب، از $f(x)$ و $f(y)$ درفاصلهٔ δ قرار دارند، باید $|g(x) - g(y)| > ۰$. بنا براین، تابع $|g(x) - g(y)|$ بر A مثبت است. درنتیجه اگر x و y دونقطه باشند به‌طوری که $g(x) = g(y)$ آنگاه الزاماً $d(x, y) < b$. ازاینجا نتیجه می گیریم که $\Delta g \leqslant b < \varepsilon$، و این همان است که می‌خواستیم.

(۲) U_ε در $\mathcal{C}(X, R^N)$ چگال است. بخش دشوار برهان همین است. لازم است هندسهٔ تحلیلی R^N را که در بالا مورد بحث قرار دادیم به‌کار ببریم. فرض کنیم $f \in \mathcal{C}(X, R^N)$. به‌ازای $\varepsilon > ۰$ و $\delta > ۰$، می‌خواهیم تابعی مانند g از $\mathcal{C}(X, R^N)$ بیابیم به‌طوری که $g \in U_\varepsilon$ و $\rho(f, g) < \delta$.

X را با تعدادی متناهی از مجموعه‌های باز مانند $\{U_۱, \ldots, U_n\}$ می‌پوشانیم به‌طوری که

(۱) در X، $\operatorname{diam} U_i < \varepsilon/۲$.

(۲) در R^N، $\operatorname{diam} f(U_i) < \delta/۲$.

(۳) مرتبهٔ $\{U_۱, \ldots, U_n\}$ نابیشتر از $m+۱$ باشد.

(دراینجا بحث به‌عدد لبگ کشیده می‌شود.) فرض کنیم $\{\phi_i\}$ افراز واحد مغلوب به‌وسیلهٔ $\{U_i\}$ باشد (به بخش ۴ـ۵ مراجعه کنید). به‌ازای هر i، نقطه‌ای مانند x_i در U_i انتخاب می‌کنیم. سپس، به ازای هر i، نقطهٔ $\mathbf{z}_i$ از R^N را چنان انتخاب می کنیم که $\mathbf{z}_i$ درفاصلهٔ $\delta/۲$ از نقطهٔ $f(x_i)$ واقع‌شود به‌طوری که مجموعهٔ

$$\{\mathbf{z}_۱, \ldots, \mathbf{z}_n\}$$

در R^N در وضع عمومی باشد. سرانجام، $g : X \to R^N$ را با ضابطهٔ

$$g(x) = \sum_{i=۱}^{n} \phi_i(x)\mathbf{z}_i$$

تعریف می کنیم. مدعی هستیم که g تابع مطلوب است.

نخست، ثابت می کنیم که $\rho(f, g) < \delta$. توجه کنید که

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=۱}^{n} \phi_i(x)\mathbf{z}_i - \sum_{i=۱}^{n} \phi_i(x) f(x) \; ;$$

دراینجا ازاین امرکه $\sum \phi_i(x) = ۱$ استفاده می کنیم. دراین‌صورت،

$$g(x) - f(x) = \sum \phi_i(x)(\mathbf{z}_i - f(x_i)) + \sum \phi_i(x)(f(x_i) - f(x)) .$$

حال، به‌ازای هر i، بنابر انتخاب نقاط $\mathbf{z}_i$، $|\mathbf{z}_i - f(x_i)| < \delta/۲$. اگر i اندیس باشد

که به ازای آن $\phi_i(x) \neq 0$ آنگاه $x \in U_i$؛ چون $\operatorname{diam} f(U_i) < \delta/2$، نتیجه می‌شود که $|f(x_i) - f(x)| < \delta/2$. از آنجا که، $\sum \phi_i(x) = 1$، نتیجه می گیریم که $|g(x) - f(x)| < \delta$. بنابراین، $\rho(g, f) < \delta$، و این همان است که می‌خواستیم.

دوم، ثابت می کنیم که $g \in U_\varepsilon$. ثابت خواهیم کرد که اگر x و y در X باشند و $g(x) = g(y)$ آنگاه x و y به‌یکی‌از مجموعه‌های باز U_i تعلق‌دارند، و درنتیجه‌الزاماً $d(x, y) < \varepsilon/2$ (زیرا $\operatorname{diam} U_i < \varepsilon/2$). درنتیجه، $\Delta(g) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ واین‌همان است که می‌خواستیم.

پس فرض کنیم $g(x) = g(y)$. دراین صورت،

$$\sum_{i=1}^{n} [\phi_i(x) - \phi_i(y)]\mathbf{z}_i = 0 .$$

چون مرتبهٔ پوشش $\{U_i\}$ حداکثر مساوی $m+1$ است، پس حداکثر $m+1$ تا از اعداد $\phi_i(x)$ ناصفرند، وحداکثر $m+1$ تا ازاعداد $\phi_i(y)$ ناصفرند. بنابراین، مجموع $\sum [\phi_i(x) - \phi_i(y)]\mathbf{z}_i$ حداکثر $2m+2$ جملهٔ ناصفردارد. ملاحظه کنید که مجموع ضرایب‌صفراست. زیرا،

$$\sum [\phi_i(x) - \phi_i(y)] = 1 - 1 = 0 .$$

نقاط $\mathbf{z}_i$ در R^N در وضع‌عمومی هستند، درنتیجه هر زیرمجموعهٔ آنهاکه $N+1$ یاکمتر عضو داشته باشد مستقل هندسی است. و بنا بر فرض، $N+1 = 2m+2$. بنابراین، نتیجه می گیریم که، به‌ازای همهٔ مقادیر i،

$$\phi_i(x) - \phi_i(y) = 0 .$$

حال، i یی وجود دارد که $\phi_i(x) > 0$، و در نتیجه $x \in U_i$: از آنجا که $\phi_i(y) = \phi_i(x)$، خواهیم داشت $y \in U_i$، و این همان‌است که می‌خواستیم. □

برای اینکه قضیهٔ نشاندن قانع کننده‌تر باشد، به‌مثالهای بیشتری از فضاهای با بعد متناهی نیازمندیم. قضیهٔ ذیل‌را ثابت می کنیم :

۹.۷. قضیه بعد توپولوژیك هر زیرمجموعهٔ فشردهٔ R^N حداکثر N است.

برهان. این برهان تعمیمی است به‌برهانی که درمثال ۳ برای R^2 آورده شد. فرض کنیم که ρ متریك مربعی بر R^N باشد.

مرحلهٔ ۱. کار را با تجزیهٔ R^N به «مکعبهای واحد» آغاز می کنیم. گردایهٔ $\mathscr{J}$ از بازه‌های باز R را چنین تعریف می کنیم :

$$\mathscr{J} = \{(n, n+1) | n \in Z\} ,$$

و $\mathcal{K}$ را گردایهٔ ذیل از زیرمجموعه‌های تک‌عضوی R تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{K}=\{\{n\}|n\in Z\}.$$

اگر M عدد صحیحی باشد به‌طوری که $0\leqslant M\leqslant N$ ، گردایهٔ $\mathcal{C}_M$ را نمایش مجموعهٔ همهٔ حاصل‌ضربهای

$$C=A_1\times A_2\times\cdots\times A_N$$

می‌گیریم به‌طوری که تنها M تا از مجموعه‌های A_i متعلق‌به $\mathcal{J}$ باشند، و بقیه متعلق به $\mathcal{K}$ باشند. اگر $M>0$ آنگاه C با حاصل‌ضرب $(0, 1)^M$ هومئومورف است، و یك **مکعب M بعدی** نامیده می‌شود. اگر $M=0$ آنگاه C تنها ازیك‌نقطه تشکیل خواهد شد؛ و یك **مکعب ۰ بعدی** نامیده می‌شود.

فرض‌کنیم $\mathcal{C}=\mathcal{C}_0\cup\mathcal{C}_1\cup\cdots\cup\mathcal{C}_N$. ملاحظه‌کنیدکه هر نقطهٔ R^N مانند $\mathbf{x}$ در یك وتنها یك عضو $\mathcal{C}$ واقع است، زیرا هرعدد حقیقی x_i در یك و تنها یك عضو از $\mathcal{K}\cup\mathcal{J}$ قرار دارد. هرعضو $\mathcal{C}$ مانند C را اندکی بسط می‌دهیم تا به مجموعهٔ بازی مانند $U(C)$ از R^N که قطر آن حداکثر مساوی ۲ است برسیم، به طوری که اگر C و C' دو مکعب M بعدی متفاوت باشند آنگاه $U(C)$ و $U(C')$ از هم جدا باشند.

نخست، ملاحظه می‌کنیم که اگر C و C' دومکعب M بعدی متفاوت باشند آنگاه $\bar{C}\cap C'=\phi$. بررسی صحت این حکم آسان است؛ فرض‌کنیم $C=A_1\times\cdots\times A_N$ و $C'=A'_1\times\cdots\times A'_N$. اندیس i را چنان انتخاب می‌کنیم که $A_i\neq A'_i$. اگر $\bar{A}_i$ و A'_i ازهم جدا باشند آنگاه $\bar{C}$ و C' نیز چنین‌اند. درغیر این‌صورت، A_i باید بازه‌ای مانند $(n, n+1)$ و A'_i باید مساوی با $\{n\}$ یا $\{n+1\}$ باشد. در این حالت، چون C و C' هر دو مکعب M بعدی هستند، باید اندیس دیگری مانند j موجود باشدکه به‌ازای آن A_j مجموعه‌ای تك عضوی مانند $\{k\}$ باشد و A'_j بازه‌ای مانند $(l, l+1)$. پس $\bar{A}_j$ و A'_j ازهم جدا هستند، درنتیجه $\bar{C}$ و C' ازهم جدا می‌باشند.

دوم، ملاحظه می‌کنیم که گردایهٔ $\mathcal{C}_M$ از همهٔ مکعبهای M بعدی که موضعاً متناهی هستند تشکیل شده است. درواقع، اگر $\mathbf{a}$ نقطه‌ای با مختصات صحیح باشد، آنگاه‌مجموعهٔ باز $B_\rho(\mathbf{a}, 1)$ تنها 3^N مکعب مختلف از همهٔ ابعاد را قطع می‌کند.

فرض‌کنیم $\mathbf{x}\in C$ و C یك مکعب M بعدی باشد. یك همسایگی از $\mathbf{x}$ وجود داردکه تنها تعدادی متناهی از مکعبهای M بعدی، مانند C' ، متمایز از C را قطع می‌کند. چون‌به‌ازای‌هر C' ازاین‌نوع ، $C\cap C'=\varnothing$، می‌توانیم $\varepsilon(\mathbf{x})$ را چنان انتخاب کنیم‌که $\varepsilon(\mathbf{x})$-همسایگی $\mathbf{x}$ هیچ مکعب M بعدی C' غیراز C را قطع نکند. همچنین، فرض‌کنیم $\varepsilon(\mathbf{x})<1$. دراین صورت، $U(C)$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$U(C)=\bigcup_{\mathbf{x}\in C}B_\rho\left(\mathbf{x},\tfrac{1}{2}\varepsilon(\mathbf{x})\right).$$

با یك بررسی ساده معلوم می‌شود که اگر C و C' مکعبهای M بعدی متفاوتی باشند آنگاه $U(C)$ و $U(C')$ جدا ازهم هستند.

مرحلهٔ ۲. به‌ازای عدد مفروض M که $0 \leqslant M \leqslant N$، گردایهٔ $\mathcal{A}_M$ را گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های $U(C)$ به قسمی که $C \in \mathcal{C}_M$ تعریف می‌کنیم. اعضای $\mathcal{A}_M$ ازهم جدا هستند، و قطر هریك حداکثر مساوی ۲ است. (زیرا، قطر C برابربا ۱ است، و هر نقطهٔ $U(C)$ در فاصلهٔ $\varepsilon(\mathbf{x})/2$ (که $\varepsilon(\mathbf{x})/2 < 1/2$) از نقطه‌ای مانند $\mathbf{x}$ از C قرار دارد.)

بقیهٔ این برهان مشابه برهانی است که درمثال ۳ برای R^2 آورده شد.$\square$

۸۰۹. نتیجه هربسلای m بعدی‌فشرده دارای بعدتوپولوژیك حداکثرمساوی m است.

۹۰۹. نتیجه هر بسلای m بعدی فشرده را می‌توان در $\mathrm{R}^{2\mathrm{m}+1}$ نشاند.

۱۰۰۹. نتیجه اگر X یك فضای متریك‌پذیر فشرده باشد آنگاه X را می‌توان دریك فضای اقلیدسی مانند R^{N} نشاند اگر و تنها اگر بعد توپولوژیك X متناهی باشد.

چنانکه سابقاً اشاره شد، بسیاری‌از مطالبی که ما ثابت کرده‌ایم بدون‌فرض فشردگی نیز برقرار می‌مانند. اثبات تعمیمهای مناسب درتمرینهای بعدی آمده است که بررسی آنها را به‌خواننده وا گذار می‌کنیم.

مطلبی که اثباتش‌را ازخواننده نمی‌خواهیم آن‌است که بعد توپولوژیك هر بسلای m بعدی دقیقاً m است. و این‌کار دلیلی دارد؛ برهان آن نیازمند ابزاری از توپولوژی جبری است، که در برنامهٔ کار ما نیست.

مطلب دیگری که اثبات آن‌را نمی‌خواهیم این‌است که $N = 2m+1$ کوچکترین مقداری برای N است که می‌توان هر فضای متریك‌پذیر فشرده با بعد توپولوژیك m را در R^N نشاند، دلیل این امر همان دلیلی است که در فوق آمد. حتی درمورد یك گراف خطی، که $m = 1$، همان‌طور که درمثال ۲ فوق اشاره شد، برهان آن پیش‌پاافتاده نیست.

برای‌اطلاعات بیشتر درمورد نظریهٔ ابعاد، خواننده را به کتاب کلاسیك هورویچ[1] و والمن[2] $[H\text{-}W]$ ارجاع می‌دهیم.

تمرینها

۱. ثابت کنید که بعد مجموعهٔ کانتور ۰ است.

---

1. Hurewicz 2. Wallman

۲. ثابت کنید که بعد هر فضای هاوسدورف همبند که بیش از یك نقطه داشته باشد حداقل ۱ است.

۳. ثابت کنید که بعد فضای شانه‌ای و بعد منحنی سینوسی توپولوژی‌دانان ۱ است.

۴. ثابت کنید که زیرفضای

$$([0, 1]\times 0)\cup\{x\times y \mid y=x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ و } 0<x\leqslant 1\}$$

در R^2 دارای بعد ۱ است.

۵. ثابت کنید که نقاط ۰، ε_1، ε_2، ε_3، و (۱, ۱, ۱) در R^3 در وضع عمومی هستند. درمورد گراف تمام پنج‌رأسی فوق نشاندن متناظر با آنرا در R^3 رسم کنید.

۶. (الف) تحقیق کنید که $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ مستقل هندسی است اگر و تنها اگر بردارهای $\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0$، ...، $\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_0$ مستقل خطی باشند.

(ب) تحقیق کنید که صفحهٔ P کـه به وسیلهٔ $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ معین می‌شود عبارت است ازمجموعهٔ همهٔ $\mathbf{x}$ هایی که بصورت $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\sum a_i(x_i-x_0)$ هستند.

(پ) ثابت کنید که اگر $k<N$ آنگاه هر زیرفضای k بعدی مانـنـد V^k از R^N دارای درون تهی است.

۷. اثبات این حکم را که هر همبافت ۲ بعدی را می‌توان در R^5 نشاند کامل کنید.

۸. ثابت کنید که نقاط منحنی $x=t$، $y=t^2$، $z=t^3$ در R^3 در وضع عمومی هستند. این حکم را به R^n تعمیم دهید. [راهنمایی: از دترمینان واندرموند[1] استفاده کنید.]

*۹. (الف) حکم ذیل را ثابت کنید:

قضیه. فرض کنید X یك فضای هاوسدورف موضعاً فشرده بـاشد که دارای پایهٔ شماراست. همچنین فرض کنید هر نقطهٔ X یك همسایگی دارد که بستار آن دارای بعد توپولوژیك حداکثر m است. در این صورت، X دارای بعد توپولوژیك حداکثر m است.

[راهنمایی: فرض کنید $X=\bigcup C_n$، که در آن C_n فشرده‌است و $C_n\subset \operatorname{Int} C_{n+1}$. برهان قضیهٔ ۲.۹ را تعمیم دهید تا ثابت شود که $\dim X\leqslant m$.]

(ب) ثابت کنید:

نتیجه. بعد توپولوژیك هربسلای m بعدی حداکثر m است.

---

1. Vandermonde

(پ) ثابت کنید:

نتیجه. بعد توپولوژیک هر زیرمجموعهٔ بستهٔ R^N حداکثر N است.

*۱۰. قضیه. فرض کنید X یک فضای هاوسدورف موضعاً فشرده با یک پایهٔ شمارا باشد به‌طوری که بعد توپولوژیک‌آن m باشد. در این صورت، X را می‌توان در R^{2m+1} به‌عنوان زیرمجموعهٔ بسته‌ای از آن نشاند.

برهان.

(الف) فرض کنید $N=2m+1$ و d متریکی بر X باشد. و فرض کنید که C زیرمجموعهٔ فشردهٔ مفروضی از X و ε عددی مثبت مفروضی باشد، $U_\varepsilon(C)$ را چنین تعریف کنید:

$$U_\varepsilon(C)=\{f \mid f\in \mathcal{C}(X,\ R^N)\ \text{و}\ \Delta(f|C)<\varepsilon\}\cdot$$

ثابت کنید که $U_\varepsilon(C)$ در $(\mathcal{C}(X,\ R^N),\ \bar{\rho})$، که $\bar{\rho}$ متریک یکنواخت است، باز و چگال است. [راهنمایی: از قضیهٔ گسترش تیتزه استفاده کنید.]

(ب) ثابت کنید اگر f عضو مفروضی‌از $\mathcal{C}(X,\ R^N)$ و δ عدد مثبت مفروضی باشد آنگاه نگاشت پیوستهٔ یک به یکی مانند $g: X\to R^N$ وجود دارد به طوری که $\bar{\rho}(f,\ g)<\delta$. [راهنمایی: فرض کنید که $X=\cup C_n$ به‌طوری که به‌ازای هر n، C_n فشرده است و $C_n\subset C_{n+1}$. مقطع $\cap U_{1/n}(C_n)$ را درنظر بگیرید.]

(پ) فرض کنید $f: X\to R^N$ نگاشت f را سره خوانیم هرگاه به‌ازای هرمجموعهٔ فشرده مانند D در R^N، مجموعهٔ $f^{-1}(D)$ فشرده‌باشد. فرض کنید X^* و $(R^N)^*$ فشرده شدهٔ تک نقطه‌ای این دو فضا باشند؛ با قرارداد $F(\infty)=\infty$، f را به نگاشتی مانند $F: X^*\to (R^N)^*$ گسترش دهید. ثابت کنید که f سرهٔ پیوسته است اگر و تنها اگر F پیوسته باشد.

(ت) ثابت کنید‌که اگر f سره باشد و $\bar{\rho}(f,\ g)<1$ آنگاه g سره است.

(ث) نگاشت‌پیوستهٔ سره‌ای مانند $f: X\to R$ بسازید؛ برهان این‌قضیه‌را کامل کنید.

۱۱. دو تمرین پیش را دانسته فرض کنید.

(الف) ثابت کنید:

قضیه. هربسلای m بعدی را می‌توان در R^{2m+1} به عنوان زیر مجموعهٔ بسته‌ای ازآن نشاند.

(ب) ثابت کنید:

قضیه. عدد صحیحی مانند N وجود داردکه فضای X را می‌توان به عنوان زیر-مجموعهٔ بسته‌ای از R^N در R^N نشاند اگرو تنها اگر X موضعاً فشرده، هاوسدورف، با یک پایهٔ شمارا، و دارای بعد توپولوژیک متناهی باشد.

۸

گروه بنیادی و فضاهای پوششی

یکی‌ازمسائل‌اساسی‌توپولوژی تشخیص هومئومورف بودن یا نبودن دوفضای توپولوژیك مفروض‌است. درحالت کلی، روش‌معینی برای حل این‌مسئله وجودندارد، ولی، تکنیکهایی وجود دارندکه درمواردی خاص به‌کار می‌روند.

اثبات هومئومورف بودن دوفضا منجر به‌ساختن نگاشتی پیوسته از یکی به‌دیگری است که عکس‌آن نیز پیوسته باشد، وساختن توابع پیوسته مسئله‌ای است که برای حل‌آن فنون پیشرفته‌ای لازم است.

اثبات هومئومورف نبودن دوفضا موضوع دیگری است. برای این‌مورد باید ثابت کرد تابعی پیوسته که عکس آن هم پیوسته باشد وجود ندارد. یا اگر بتوان خاصیتی توپولوژیك یافت به‌طوری‌که برای یك‌فضا برقرار ولی برای دیگری برقرار نباشدآنگاه مشکل حل‌شده است. دراین‌حالت، دوفضا نمی‌توانند هومئومورف باشند. برای‌نمونه، بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ نمی‌تواند با بازهٔ باز $(0, 1)$ هومئومورف باشد، زیرا فضای اولی فشرده است ولی دومی چنین نیست. خط حقیقی R نمی‌تواند با «خط طویل» L هومئومورف باشد، زیرا R دارای پایه‌ای شماراست و L چنین نیست. همین‌طور خط حقیقی R با صفحهٔ R^2 نیز هومئومورف نیست؛ با حذف یك نقطه از R^2 فضایی حاصل می‌شودکه همبند است، درصورتی‌که R این خاصیت را ندارد.

اما آن عده‌از خواص توپولوژیك راکه تاکنون شناخته‌ایم پهنه چندان فراخی برای حل این‌مسئله عرضه نمی‌دارند. برای نمونه، چگونه می‌توان هومئومورف نبودن صفحهٔ R^2 و فضای سه بعدی R^3 را ثابت‌کرد؟ اگر در فهرست خواص توپولوژیك مروری‌کنیم (فشردگی، همبندی، همبندی موضعی، متریك‌پذیری، وغیره) آنگاه ملاحظه می‌کنیم که هیچیك از این خواص در تمیز این دو فضا از یکدیگر به ما کمك نمی‌کنند. به‌عنوان مثالی

دیگر، سطوحی نظیر کرهٔ ۲ بعدی S^2 ، چنبرهٔ T (سطح لاستیك تویی اتومبیل، بخش ۸-۳ مثال ۲) و چنبرهٔ مضاعف T_2 (بخش ۸-۷ قضیهٔ ۶.۷) را درنظر می گیریم. هیچیك از خواص توپولوژیك راکه تاکنون مطالعه کرده‌ایم .قادربه تمیز اینها از یکدیگر نیست.

بنابراین، باید خواص و تکنیکهای جدیدی معرفی کنیم. یکی از طبیعیترین این خواص، خاصیت همبندی ساده است. احتمالاً، در گذشته هنگام مطالعهٔ انتگرالهای روی خط درصفحه با این مفهوم آشنا شده‌اید. به بیانی نه‌چندان دقیق، فضای X را همبند ساده گویند درصورتی که بتوان هر منحنی بسته در آن‌را در نقطه‌ای از X جمع کرد. (تعریف دقیقتر را بعداً خواهیم آورد.) ثابت می کنیم که خاصیت همبندی ساده موجب تمیز فضای R^2 از R^3 خواهد شد؛ با حذف یك نقطه از R^3 ، فضای همبند ساده‌ای حاصل می‌شود، درصورتی که با برداشتن یك نقطه از R^2 خاصیت همبندی سادهٔ آن نیز از بین می رود. همچنین، این مفهوم وسیله‌ای است برای تمیز S^2 (که همبند ساده است) ازچنبرهٔ T (که همبند ساده نیست). ولی هنوز به ما کمکی برای تمیز T از T_2 نمی کند؛ چه هیچیك از آنها همبند ساده نیستند.

مفهومی کلیتر از مفهوم همبندی ساده موجود است که مفهوم همبندی ساده حالت خاصی از آن است. این مفهوم مستلزم گروهی است موسوم به گروه بنیادی فضا. دو فضا که هومئومورف‌اند دارای گروههای بنیادی ایزومورف بایکدیگرند. و شرط همبندی‌ساده دقیقاً عبارت است از اینکه گروه بنیادی X گروه بدیهی (تك عضوی) باشد. بنابراین، برهان هومئومورف نبودن S^2 و T را می‌توان با بیان اینکه، گروه بنیادی S^2 بدیهی است ولی گروه بنیادی T چنین نیست، بازگو کرد. گروه بنیادی موجب تمیز فضاهای بیشتری خواهدشد تا شرط همبندی ساده. برای مثال می‌توان از آن در اثبات هومئومورف نبودن T و T_2 استفاده کرد؛ و از آن نتیجه می‌شود که T دارای یك گروه بنیادی آبلی است و حال‌آنکه T_2 چنین نیست.

دراین فصل به‌تعریف گروه بنیادی و مطالعهٔ خواص آن می پردازیم. سپس، از آن برای حل تعدادی از مسائل استفاده می کنیم؛ از آن جمله است، مسئلهٔ اثبات هومئومورف نبودن فضاهای مختلفی، نظیر آنچه قبلاً متذکر شدیم.

کاربردهای دیگر، شامل موارد استعمالی از این مفهوم درمیدانهای برداری، نقاط ثابت، نگاشتهای حافظ نقاط متقاطر کره است، همچنین، موارد استعمالی در قضیهٔ معروفی به نام قضیهٔ اساسی جبر داردکه حکم می کند هرمعادلهٔ بسجمله‌ای با ضرایب حقیقی یا مختلط دارای یك ریشه است، و سرانجام قضیهٔ مشهور منحنی ژوردان است، با این محتوا که هرمنحنی بستهٔ ساده درصفحه، مانند C ، صفحه‌را به‌دو مؤلفه جدا می سازد به‌طوری که C مرز مشترك آنهاست.

تعدادی از بخشهای این‌فصل مستقل از یکدیگرند. بستگی بین آنها در نمودار ذیل نشان داده شده‌است :

در طول این فصل، فرض براین است که خواننده با مؤلفه‌ها و همبندی موضعی (بخش ۳-۳ و بخش ۳-۴) آشنایی دارد. همچنین، فرض می کنیم خواننده با مقدمات

بخش ۸ـ۱ هموتوپی راهها

بخش ۸ـ۲ گروه بنیادی

بخش ۸ـ۳ فضاهای پوششی

بخش ۸ـ۴ گروه بنیادی دایره

بخش ۸ـ۵ گروه بنیادی صفحهٔ سفته

بخش ۸ـ۶ گروه بنیادی S^n

بخش ۸ـ۷ گروه بنیادی سطوح

بخش ۸ـ۸ نگاشتهای اساسی و غیراساسی

بخش ۸ـ۹ قضیهٔ اساسی جبر

بخش ۸ـ۱۰ میدانهای برداری و نقاط ثابت

بخش ۸ـ۱۱ نوع هموتوپی

بخش ۸ـ۱۲ قضیهٔ جداسازی ژوردان

بخش ۸ـ۱۳ قضیهٔ منحنی ژوردان

بخش ۸ـ۱۴ رده‌بندی فضاهای پوششی

نظریـهٔ گروهها آشناست. در بخش ۸ـ۱۲، فشردگی موضعی (بخش ۳ـ۸) و در بخش ۸ـ۱۳ فضاهای خارج قسمتی را (بخش ۲ـ۱۱) دانسته می گیریم.

۸ـ۱ هموتوپی راهها

قبل‌از تعریف گروه بنیادی فضای X ، راههایی بر X و یك رابطهٔ هم‌ارزی بین‌آنهاموسوم به هموتوپی راهی را مورد ملاحظه قرارمی‌دهیم. سپس، عمل‌معینی در گردایهٔ این رده‌های هم‌ارزی طوری‌تعریف می کنیم که این گردایه را به‌همان چیزی که درجبر گروهوار می‌نامند تبدیل کند.

تعریف. فرض کنیم f و f' نگاشتهای پیوسته‌ای ازفضای X بتوی فضای Y باشند. f را با f' **هموتوپ** خوانیم درصورتی که نگاشت پیوسته‌ای مانند $F: X\times I \to Y$ موجود باشد به‌طوری که به ازای هر x از X،

$$F(x, 0)=f(x)\ ,\quad F(x, 1)=f'(x).$$

(دراینجا $I=[0, 1]$.) نگاشت F رایك **هموتوپی** بین f و f' می‌نامیم. اگر f با f' هموتوپ باشد آنگاه می‌نویسیم $f\simeq f'$

يك هموتوپی را به‌عنوان خانوادهٔ تك پارامتری پیوسته از نگاشتهای فضای X به‌فضای Y درنظر می گیریم. اگر پارامتر t را معرف زمان تصور کنیم، دراین‌صورت هموتوپی F، هنگامی که t از 0 به 1 تغییر می کند، نمایشگر يك «دگردیسی» پیوستهٔ f به f' خواهد بود.

اکنون حالتی خاص را که f يك‌راه در X است درنظر می گیریم. برای یادآوری متذکر می‌شویم: اگر $f:[0, 1]\to X$ نگاشت پیوسته‌ای باشد به‌طوری که $f(0)=x_0$ و $f(1)=x_1$، گوییم f راهی است در X از x_0 به x_1. همچنین x_0 را **نقطهٔ آغازی** و x_1 را **نقطهٔ انجامی** راه f می‌نامیم. دراین فصل، برای سهولت، بازهٔ $I=[0, 1]$ را به‌عنوان حوزهٔ تعریف تمام راهها به کار خواهیم برد.

بین راههایی در X رابطه‌ای قویتراز هموتوپی صرف برقرار است که به‌شرح‌ذیل تعریف می‌شود:

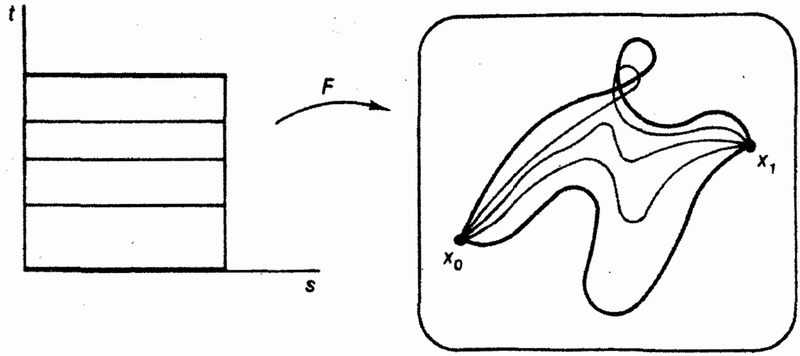
تعریف. راههای f و f' را که بازهٔ $I=[0, 1]$ را بتوی X می‌نگارند، **هموتوپ راهی** خوانیم درصورتی که هردو دارای نقطهٔ‌آغازی x_0 و نقطهٔ انجامی x_1 باشند، ونگاشت پیوسته‌ای مانند $F: I\times I\to X$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر s و t از I داشته باشیم

$$F(s, 0)=f(s)\ ,\quad F(s, 1)=f'(s)\ ,$$

$$F(0, t)=x_0\ ,\quad F(1, t)=x_1\ ,$$

F را يك **هموتوپی راهی** بین f و f' می‌نامیم. شکل ۱ را ملاحظه کنید. اگر f با f' هموتوپ راهی باشد آنگاه می‌نویسیم $f\simeq_p f'$.

شرط اول، درواقع، هموتوپی بودن F بین f و f' را بیان می کند، و شرط دوم می گوید به‌ازای هر t نگاشت $s\to F(s,t)$ راهی است از x_0 به x_1. به‌عبارت دیگر، شرط اول حاکی از این است که F نمایشگر يك دگردیسی پیوسته است که راه f به‌راه f' می‌نگارد، و شرط دوم بیانگر ثابت‌ماندن نقاط انتهایی راه دراین دگردیسی است.



شکل ۱

۱.۰۱ لم رابطه‌های $\simeq$ و $\simeq_p$ رابطه‌های هم‌ارزی‌اند.

اگر f راه دلخواهی باشد، ردهٔ هم‌ارزی هموتوپی راهی f را به $[f]$ نمایش می‌دهیم.

برهان. خواص یك رابطهٔ هم‌ارزی را بررسی می‌کنیم.

به‌ازای تابع مفروض f، بدیهی‌است که $f \simeq f$؛ زیرا، نگاشت $F(x,t)=f(x)$ همان هموتوپی مطلوب‌است. درحالتی‌که f یك راه باشد، F هموتوپی‌راهی خواهدشد.

با فرض $f \simeq f'$ ثابت می‌کنیم که $f' \simeq f$. F را یك هموتوپی بین f و f' می‌گیریم. دراین‌صورت، نگاشت $G(x, t)=F(x, ۱-t)$ یك هموتوپی بین f' و f خواهد بود. درحالتی‌که F هموتوپی راهی باشد، G نیز چنین است.

بالاخره با فرض $f \simeq f'$ و $f' \simeq f''$، ثابت می‌کنیم‌که $f \simeq f''$. F رایك هموتوپی بین fوf'، وF' رایك‌هموتوپی بین f'وf'' فرض می‌کنیم. $G: X \times I \to Y$ را چنین تعریف می‌کنیم:

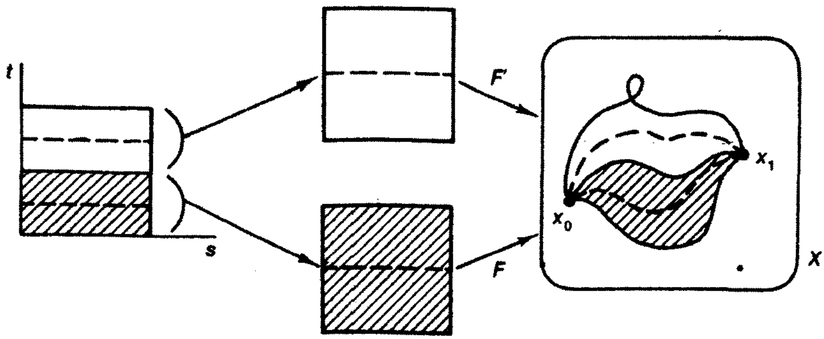
$$G(x, t)=\begin{cases} F(x, ۲t) & \text{،} \ t\in\left[۰, \frac{۱}{۲}\right] \ \text{به‌ازای} \\ F'(x, ۲t-۱) & \text{،} \ t\in\left[\frac{۱}{۲}, ۱\right] \ \text{به‌ازای} \end{cases}$$

نگاشت G خوش‌تعریف است. زیرا، به‌ازای $t=۱/۲$ داریم،

$$F(x, ۲t)=F(x, ۱)=f'(x)=F'(x, ۰)=F'(x, ۲t-۱).$$

بنابر لم چسب، چون G بر دو زیرمجموعهٔ بستهٔ $X\times[۰, ۱/۲]$ و $X\times[۱/۲, ۱]$ از $X\times I$ پیوسته است، درنتیجه، بر همهٔ $X\times I$ پیوسته خواهد شد. بنابراین، G همان هموتوپی مطلوب بین f و f'' است.

می‌توانید به‌آسانی بیازمایید که اگر F و F' هموتوپی راهی باشند، آنگاه G نیز هموتوپی راهی است. این وضعیت درشکل ۲ نمایانده شده است. □



شکل ۲

مثال ۱. فرض‌کنیم f و g دونگاشت دلخواه ازفضای X بتوی R^2 باشند. بسهولت می‌توان هموتوپ بودن f و g را بررسی‌کرد؛ نگاشت

$$F(x, t)=(1-t)f(x)+tg(x)$$

یك هموتوپی بین f و g است موسوم به **هموتوپی مستقیم‌الخط**. زیرا، به‌ازای هر x ثابت، درواقع، F درطول یك قطعه خط مستقیم ازنقطهٔ $f(x)$ به $g(x)$ می‌رود.

می‌توانید بررسی‌کنید که اگر f و g دو راه از x_0 به x_1 باشند، آنگاه F یك هموتوپی راهی خواهد بود. این وضعیت درشکل ۳ نمایانده شده است.

مثال ۲. فرض‌کنیم X **صفحهٔ سفتهٔ** $R^2-\{0\}$ باشد، که برای اختصار آنرا به R^2-0 نمایش خواهیم داد. راههای

$$f(s)=(\cos \pi s,\ \sin \pi s),$$

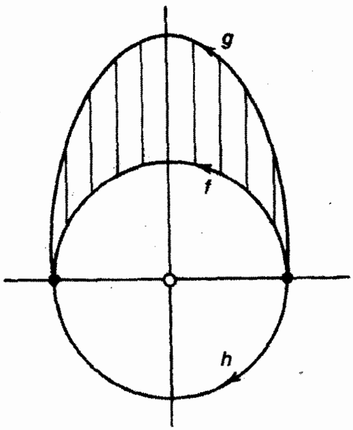
$$g(s)=(\cos \pi s,\ 2\sin \pi s)$$

در X هموتوپ‌اند. هموتوپی مستقیم‌الخط بین آنها یك هموتوپی راهی قابل قبول است. ولی هموتوپی مستقیم‌الخط بین f و راه

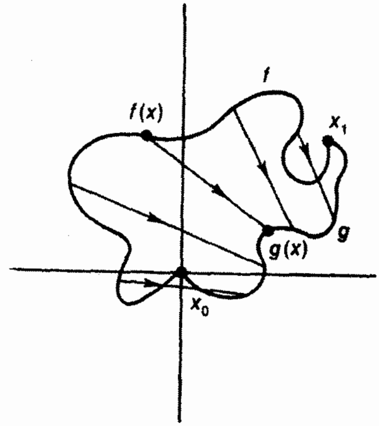
$$h(s)=(\cos \pi s,\ -\sin \pi s)$$

قابل قبول نیست؛ زیرا، حوزهٔ مقادیرآن جزء فضای $X=R^2-0$ نیست. شکل ۴ را ملاحظه کنید.

درواقع، **هیچ** هموتوپی راهی بین f و h در X وجود ندارد. این موضوع جای



شکل ۴



شکل ۳

شگفتی ندارد؛ از لحاظ شهودی بدیهی است که به‌طور پیوسته نمی‌توان «f را از سوراخ ۰ عبور داد». اما اثبات آن مستلزم کارهای زیادی است. و ما بعدها به این مثال بازخواهیم گشت.

مثال فوق، نمایشگر این واقعیت است که قبل ازحکم به هموتوپی راهی بودن یا نبودن دو راه باید از چگونگی فضای حوزهٔ مقادیر آگاه بود. اگر f و h را به عنوان راههایی در R^2 درنظر می‌گرفتیم آنگاه هموتوپی راهی می‌شدند.

اینك نوعی ساختار جبری درمورد این مفاهیم هندسی معرفی می کنیم. برای این منظور، ذیلاً عمل معینی بین رده‌های هموتوپی راهی تعریف می کنیم:

تعریف. اگر f راهی در X از x_0 به x_1 و g راهی دیگر در X از x_1 به x_2 باشد، آنگاه $f * g$ ترکیب f و g را به‌عنوان راهی مانند h باتساوی ذیل تعریف می‌کنیم

$$h(s)=\begin{cases} f(2s) & \text{،} s\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right] \text{ به‌ازای} \\ g(2s-1) & \text{،} s\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right] \text{ به‌ازای} \end{cases}$$

تابع h خوشتعریف است، و بنابر لم چسب پیوسته است؛ درضمن h راهی است از x_0 به x_2. h را به‌عنوان راهی درنظر می گیریم که نیمهٔ اول‌آن راه f و نیمهٔ دوم‌آن راه g است.

ثابت می‌کنیم که عمل ترکیب راهها، عمل خوشتعریفی را بین رده‌های هموتوپی

راهی القا می‌کند، که درنتیجهٔ آن می‌توان ترکیب دو رده را چنین تعریف کنیم:

$$[f]*[g]=[f*g]$$

بعلاوه، معلوم می‌شود که عمل $*$ در رده‌های هموتوپی راهی واجد خواصی‌است موسوم‌به خواص گردهواری $*$، که شباهت بسیاری به‌اصول موضوع یك گروه دارند. تنها اختلاف آنها باخواص یك گروه آن است که $[f]*[g]$ برای هرزوج‌از رده‌ها تعریف‌نمی‌شود، و فقط برای زوجهایی مانند $[f]$ و $[g]$ تعریف می‌شود که در شرط $f(۱)=g(۰)$ صدق می‌کنند.

۲۰۱. قضیه عمل $*$ در رده‌های هموتوپی‌راهی خوشتعریف و واجد خواص‌ذیل‌است:

(۱) (شرکت‌پذیری) اگر $[f]*([g]*[h])$ تعریف‌شده‌باشد، $([f]*[g])*[h]$ نیز تعریف شده است و باهم‌برابرند.

(۲) (عضو خنثای چپ و راست) به‌ازای عضو مفروض x از X، فرض کنیم e_x نمایش راه ثابت $e_x: I\to X$ باشد که تمام I را به x می‌برد. حال اگر f راهی در X از $x_۰$ به $x_۱$ باشد، آنگاه

$$[f]*[e_{x_۱}]=[f],\quad [e_{x_۰}]*[f]=[f].$$

(۳) (وارون) به‌ازای راه مفروضی در X از $x_۰$ به $x_۱$ مانند f، فرض کنیم $\bar{f}$ راهی باشد با ضابطهٔ $\bar{f}(s)=f(۱-s)$. $\bar{f}$ را **وارونهٔ** f می‌نامند. دراین صورت،

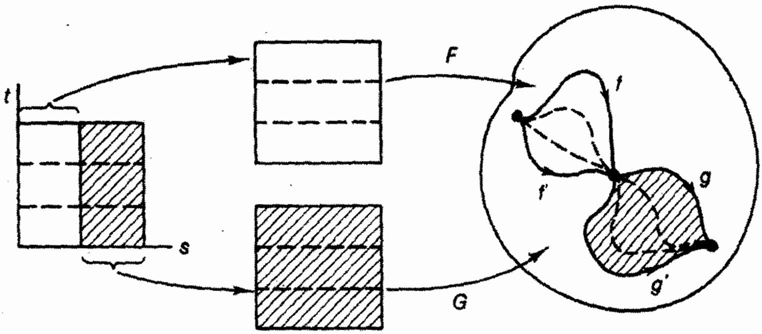
$$[f]*[\bar{f}]=[e_{x_۰}],\quad [\bar{f}]*[f]=[e_{x_۱}].$$

برهان. هریك‌از احکام فوق را می‌توان با یك برهان هندسی‌مقدماتی مدلل‌ساخت. برای اثبات خوشتعریفی عمل، فرض کنیم F یك هموتوپی راهی بین f و f'، و G یك هموتوپی راهی بین g و g' باشد. $H(s,t)$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$H(s,t)=\begin{cases} F(۲s,\ t) & \text{به‌ازای } s\in\left[۰,\ \frac{۱}{۲}\right] \\ G(۲s-۱,\ t) & \text{به‌ازای } s\in\left[\frac{۱}{۲},\ ۱\right] \end{cases}$$

چون به‌ازای هر t، $F(۱,t)=x_۱=G(۰,t)$ تابع H خوشتعریف است؛ بنا بر لم چسب H پیوسته نیز هست. H، که درشکل ۵ تصویرشده است، هموتوپی‌راهی مطلوب بین $f*g$ و $f'*g'$ است. اثبات به‌عهدهٔ خواننده است.

(۱) برای اثبات شرکت‌پذیری، باید ثابت کنیم که $f*(g*h)\simeq_p (f*g)*h$. راههای $(f*g)*h$ و $f*(g*h)$، دقیقاً چه‌هستند؟ تصویر نقطهٔ s تحت $f*(g*h)$،



شکل ۵

چنانکه s از ۰ تا ۱/۲ تغییر می‌کند، حوزهٔ مقادیر f را رسم می‌کند، و هنگام تغییر s از ۱/۲ به ۳/۴ حوزهٔ مقادیر g، وبالاخره، وقتی s از ۳/۴ به ۱ می‌رود، حوزهٔمقادیر h را رسم می‌کند. تحت $h*(f*g)$، نقاط درست همان تصویر را رسم می‌کنند، منتها با نسبت دیگری. هنگامی‌که s از ۰ تا ۱/۴ تغییر می‌کند، حوزهٔ مقادیر f رسم می‌شود، همین عمل در مورد g وقتی s از ۱/۴ به ۱/۲، و h وقتی s از ۱/۲ به ۱ می‌رود انجام می‌شود.

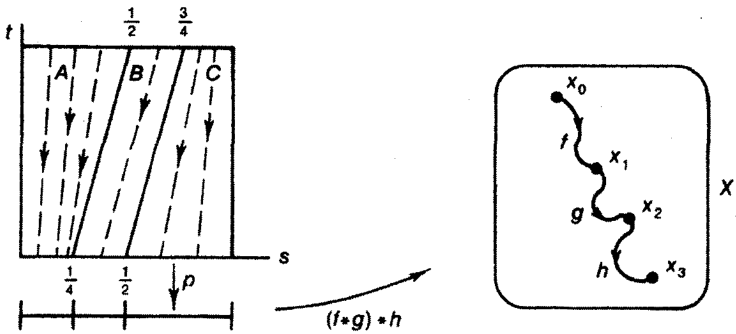
هموتوپی F رابه شرح ذیل تعریف می کنیم : نخست ،مربع واحد $I^۲$ را به‌نگاشت پیوستهٔ p، برروی I می‌نگاریم، به‌این‌ترتیب هریك ازچهارضلعی‌های A، B، و C در شکل ۶ را روی قاعدهٔ خودش تصویر می‌کنیم. سپس، نگاشت $h*(f*g)$ را به دنبال p بر $[۰, ۱]$ اثر می‌دهیم. نتیجه، همان‌طور که می‌توان ذهنی بررسی کرد، هموتوپی‌راهی مطلوب F خواهد بود.

به‌بیان صوری‌تر، چنین تعریف می کنیم

$$F(s, t)=\begin{cases} f\left(\dfrac{۴s}{t+۱}\right) & ،s\in\left[۰,\ \dfrac{t+۱}{۴}\right] \quad \text{به‌ازای} \\[2ex] g(۴s-t-۱) & ،s\in\left[\dfrac{t+۱}{۴},\ \dfrac{t+۲}{۴}\right] \quad \text{به‌ازای} \\[2ex] h\left(\dfrac{۴s-t-۲}{۲-t}\right) & ،s\in\left[\dfrac{t+۲}{۴},\ ۱\right] \quad \text{به‌ازای} \end{cases}$$

می‌توان ثابت کرد که $۴s/(t+۱)$، $۴s-t-۱$، و $(۴s-t-۲)/(۲-t)$ درمواردی که

لازم است در حوزهٔ تعریف f، g، و h یعنی بازهٔ $[\circ, 1]$ هستند، لهـذا، ضوابطی با معنی هستند، همچنین F خوشتعریف است و بنابر لـم چسب پیوسته می‌باشند. سرانجام بسهولت می‌توان نشان داد که F هموتوپی راهی مطلوب است.



شکل ۶

مثلاً،

$$(f*(g*h))(s)=\begin{cases} f(2s) & \text{به‌ازای } s\in\left[\circ, \frac{1}{2}\right] \\ (g*h)(2s-1) & \text{به‌ازای } [\circ,1] \in 2s-1 \text{ یا } s\in\left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

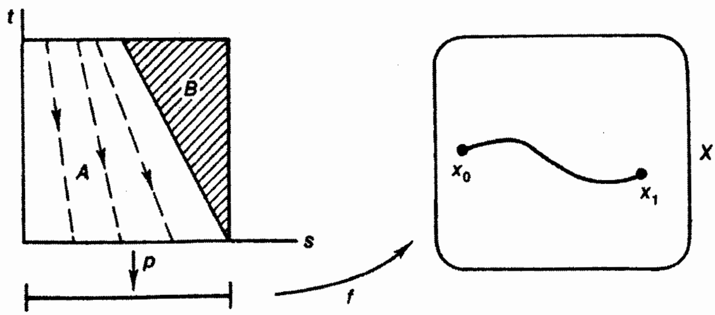
بنابراین،

$$(f*(g*h))(s)=\begin{cases} f(2s) & \text{به‌ازای } s\in\left[\circ, \frac{1}{2}\right] \\ g(2(2s-1)) & 2s-1\in\left[\circ, \frac{1}{2}\right] \text{ یا } s\in\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ h(2(2s-1)-1) & 2s-1\in\left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ یا } s\in\left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

و این تابع، همان‌طور که می‌توانید بررسی کنید، درست $F(s, 1)$ است. به‌طریقی مشابه $((f*g)*h)(s)=F(s, \circ)$.

(۲) ثابت می‌کنیم که $f*e_{x_1} \simeq_p f$. هموتوپی راهی‌مطلوب به‌شرح ذیل ساخته

می‌شود : نخست، مربع $I^۲$ را با نگاشت پیوستهٔ p ، که چهارضلعی A درشکل ۷ را بـر قاعدهٔ خودش، و مثلث B را بر رأس پایینـی آن می‌نگارد ، بر I تصویر می کنیم. سپس نگاشت f را به‌دنبال p بر $[۰ ,۱]$ اثر می‌دهیم. نتیجه ، همان‌طور که می‌توان ذهنـی بررسی کرد ، هموتوپی مطلوب G خواهد بود.



شکل ۷

به بیان صوری ، چنین تعریف می کنیم :

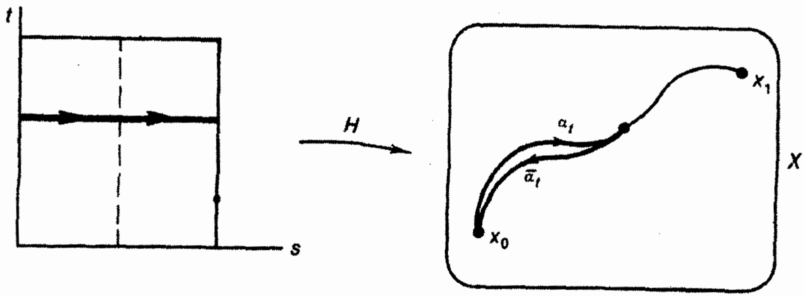
$$G(s,\ t)=\begin{cases} f\left(\frac{۲s}{۲-t}\right) & \text{به‌ازای } s\in\left[۰,\ \frac{۲-t}{۲}\right]، \\ x_۱ & \text{به‌ازای } s\in\left[\frac{۲-t}{۲},\ ۱\right]، \end{cases}$$

بررسی اینکه G خوشتعریف ، پیوسته ، وهموتوپی مطلوب است را به خواننده واگـذار می کنیم .

برهان $e_{x_۰} * f \simeq_p f$ مشابه همان چیزی است که گذشت .

(۳) اکنون ثـابت می‌کنیم که $f * \bar{f} \simeq_p e_{x_۰}$. ایدهٔ شهودی برهـان بسیار ساده است. $f * \bar{f}$ راهی است که از $x_۰$ به $x_۱$ می‌رود و مجدداً درطـول همان مسیر به $x_۰$ مراجعت می کند. اکنون به‌ازای مقدار پارامتر t ، فرض‌کنیم α_t راهی بـاشدکه از $x_۰$ قسمتی ازطول مسیر f را تا $f(t)$ طی‌کند. دراین صورت ، هموتوپی مورد نظر ، همان راه $\alpha_t * \bar{\alpha}_t$ است ،که البته ، يك هموتوپی راهی‌قابل قبولی‌است ،زیرا هردونقطهٔ انتهایی را در $x_۰$ قرار می‌دهد. شکل ۸ ملاحظه شود.

به بیان صوری ، چنین تعریف می کنیم



شکل ۸

$$H(s,\, t)=\begin{cases} f(\text{۲}ts) & \text{به‌ازای } s\in\left[\circ,\ \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right]،\\ f(\text{۲}t(\text{۱}-s)) & \text{به‌ازای } s\in\left[\frac{\text{۱}}{\text{۲}},\ \text{۱}\right]، \end{cases}$$

به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که $\text{۲}ts$ و $\text{۲}t(\text{۱}-s)$ در مواردی که لازم است درحوزهٔ تعریف f قرارمی گیرند، و لهذا، ضوابط فوق با معنی هستند، همچنین H خوشتعریف است (و بنابر لم چسب، پیوسته است)، و بالاخره H هموتوپی مورد نیاز بین $e_{x_\circ}$ و $f*\bar{f}$ است.

استدلال مشابهی را می‌توان برای اثبات $\bar{f}*f\simeq_p e_{x_\text{۱}}$ به‌کار بست. ولی بدنیست به این نکته توجه شود: ثابت کردیم که به ازای هر راه g با نقطهٔ آغازی x داریم $g*\bar{g}\simeq_p e_x$. بالاخص، $\bar{f}*\bar{\bar{f}}\simeq_p e_{x_\text{۱}}$، که در اینجا $\bar{\bar{f}}$ وارونهٔ $\bar{f}$ است. ولی وارونهٔ $\bar{\bar{f}}$ همان f است. بنابراین، $\bar{f}*f\simeq_p e_{x_\text{۱}}$.

تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر $h\,,\ h'\ :\ X\to Y$، و همچنین، $k\,,\ k'\ :\ Y\to Z$ هموتوپ باشند، آنگاه $k\circ h$ و $k'\circ h'$ نیز هموتوپ خواهند شد.

۲. فرض کنید X یك **مجموعهٔ محدب** در R^n باشد. یعنی، به‌ازای هرزوج از نقاط X مانند x و y، قطعه خط واصل بین آنها در X قرار گیرد. ثابت کنید که هر دو راه در X که نقاط انتهایی آنها یکی است هموتوپ راهی‌اند.

۳. برهان قضیهٔ ۲.۱ را درنظر بگیرید.

(الف) درستی روابط $F(s,\,\circ)=((f*g)*h)(s)$ و $F(\circ,\,t)=x_\circ$ و

$F(1, t)=x_3$ را بیازمایید.

(ب) احکام مشابه را درمورد نگاشتهای G و H قسمتهای (۲) و (۳) بررسی کنید.

۴. به‌ازای فضاهای X و Y، فرض کنید $[X, Y]$ مجموعهٔ همهٔ رده‌های هموتوپی باشد که X را بتوی Y می‌نگارند.

(الف) با فرض $I=[0, 1]$، ثابت کنید که به‌ازای هر X، مجموعهٔ $[X, I]$ تنها یك عضو دارد.

(ب) نشان دهید که اگر Y همبند راهی باشد، مجموعهٔ $[I, Y]$ تنها یك عضو دارد.

۵. فضای X را وقتی **انقباض‌پذیر** خوانیم که نگاشت همانی $i_x : X \to X$ با یك نگاشت ثابت هموتوپ باشد.

(الف) ثابت کنید I و R انقباض پذیرند.

(ب) نشان دهید که یك فضای انقباض پذیر همبند راهی است.

(پ) نشان دهید که اگر Y انقباض‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر X، مجموعهٔ $[X, Y]$ تنها یك عضو خواهد داشت.

(ت) نشان دهید که اگر X انقباض‌پذیر و Y همبند راهی باشد، آنگاه $[X, Y]$ تنها یك عضو خواهد داشت.

۸-۲ گروه بنیادی

مجموعهٔ رده‌های هموتوپی راهی از راههای فضای X باعمل * تشکیل یك گروه نمی‌دهد، بلکه تنها یك گروهوار است. اما، فرض کنیم نقطه‌ای مانند x_0 از X را به‌عنوان «نقطهٔ پایه» انتخاب کنیم و خود را فقط به راههایی مقید سازیم که از x_0 شروع و به x_0 منتهی می‌شوند. مجموعهٔ رده‌های هموتوپی راهی این راهها با عمل * حتماً یك گروه می‌شود، که به گروه بنیادی X موسوم است.

در این بخش خواصی چند از گروه بنیادی را ثابت خواهیم کرد. بویژه، ثابت می کنیم که گروه بنیادی، با تقریب ایزومورفیسم، (به‌شرط اینکه X همبند راهی باشد) مستقل از انتخاب نقطهٔ پایه است. همچنین نشان می‌دهیم که گروه یك ناوردای توپولوژیك فضای X است، واین حقیقتی است که کاربرد قاطع ومهمی درمطالعهٔ مسائل هومئومورفیسم دارد.

تعریف. فرض کنیم X یك فضا و x_0 نقطه‌ای از آن باشد. راهی در X که از x_0 شروع و به x_0 منتهی شود یك **کمند** بر پایهٔ x_0 نامیده می‌شود. مجموعهٔ رده‌های هموتوپی راهی کمندهای برپایهٔ x_0، با عمل *، **گروه بنیادی X نسبت به نقطهٔ پایهٔ** x_0 نامیده می‌شود. این گروه را به $\pi_1(X, x_0)$ نمایش می‌دهیم.

از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود که عمل $*$، وقتی به این مجموعــه مقید شود، در اصول گروه صدق می‌کند. به‌ازای دو کمند مفروض بر پایهٔ $x_\circ$، مانند f و g، ترکیب $f * g$ همواره تعریف می‌شود، و کمندی است بر پایهٔ $x_\circ$. خاصیت شرکت‌پذیری $*$، وجود یك عضوخنثی $[e_{x_\circ}]$، و وجود وارونهٔ $[\bar{f}]$ برای $[f]$ بلافاصله نتیجه می‌شوند.

گاه این گروه را **اولین گروه هموتوپی** X می‌نامند، که عبارت اخیر مستلزم وجود دومین گروه هموتوپی است. درواقع، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، گروهی به‌صورت $\pi_n(X, x_\circ)$ موجود است، ولی ما در این کتاب آنها را مطالعه نخواهیم کرد. آنها قسمتی از یك مبحث کلی موسوم به نظریهٔ هموتوپی هستند.

مثال ۱. فرض کنیم R^n فضای اقلیدسی n بعدی باشد. $\pi_1(R^n, x_\circ)$ گروه بدیهی است (گروهی که فقط شامل عضو خنثاست). زیرا، اگر f در R^n کمندی بر پایهٔ $x_\circ$ باشد، هموتوپی مستقیم الخط

$$F(s, t) = t x_\circ + (1-t) f(s)$$

یك هموتوپی راهی بین f و کمند ثابت $e_{x_\circ}$ است.

مثال ۲. درحالت کلی، اگر X زیرمجموعهٔ محدب دلخواهی از R^n باشد، $\pi_1(X, x_\circ)$ گروه بدیهی است. هموتوپی مستقیم‌الخط باردیگر کارساز خواهد بود. زیرا، تحدب X بدین معنی است که به‌ازای هر دونقطهٔ X، مانند x و y، قطعه خط مستقیم واصل بین آنها

$$\{tx + (1-t)y \mid \circ \leqslant t \leqslant 1\}$$

در X قرار می‌گیرد. بالاخص، **گوی واحد** B^n در R^n،

$$B^n = \{x \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}$$

دارای گروه بنیادی بدیهی است.

یافتن فضایی با یك گروه بنیادی نابدیهی دشوارتر است؛ این کار را دربخش ۸ـ۴ انجام می‌دهیم.

سؤالی که بلافاصله مطرح می‌شود مربوط به حدود بستگی گروه بنیادی به نقطهٔ پایه است، و جواب آن، در ذیل، در نتیجهٔ ۲.۲ داده شده است.

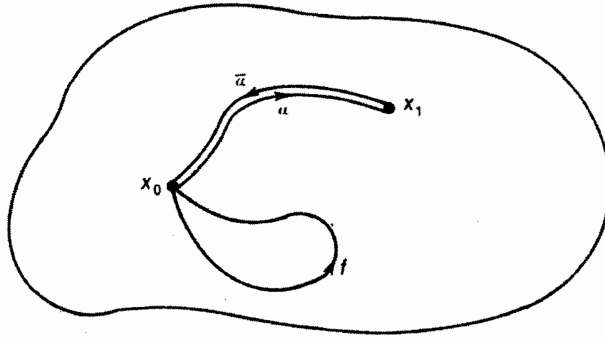
تعریف. فرض کنیم که α راهی باشد در X از $x_\circ$ به x_1. نگاشت

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_\circ) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

را چنین تعریف می‌کنیم

$$\hat{\alpha}([f]) = [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha].$$

نگاشت $\widehat{\alpha}$ در شکل ۹ ترسیم شده است. خوشتعریفی $\widehat{\alpha}$ نتیجهٔ خوشتعریفی * است. اگر f کمندی برپایهٔ x_0 باشد آنگاه $\overline{\alpha} * (f * \alpha)$ کمندی‌است برپایهٔ x_1. بنابراین، $\widehat{\alpha}$ گروه $\pi_1(X, x_0)$ را، همان‌طور که می‌خواستیم، بتوی $\pi_1(X, x_1)$ می‌نگارد.



شکل ۹

۱.۰۲ قضیه نگاشت $\widehat{\alpha}$ یك ایزومورفیسم‌گروهی است.

برهان. برای اثبات همومورفیسم بودن $\widehat{\alpha}$، ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}([f]) * \widehat{\alpha}([g]) &= ([\overline{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\overline{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\overline{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \widehat{\alpha}([f] * [g]).\end{aligned}$$

دراین برهان از خواص گروهواری *، که درقضیهٔ ۲.۰۱ ثابت کردیم، استفاده می‌شود.

برای‌اثبات‌ایزومورفیسم بودن $\widehat{\alpha}$، ثابت می‌کنیم که اگر β نمایش راه $\overline{\alpha}$، که وارونهٔ α است، باشد آنگاه $\widehat{\beta}$ معکوس $\widehat{\alpha}$ است. به‌ازای هرعضو $\pi_1(X, x_1)$ مانند $[h]$، $\widehat{\beta}([h])$ را محاسبه می‌کنیم

$$\widehat{\beta}([h]) = [\overline{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\overline{\alpha}],$$

$$\widehat{\alpha}(\widehat{\beta}([h])) = [\overline{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\overline{\alpha}]) * [\alpha] = [h].$$

محاسبهٔ مشابهی نشان می‌دهد که به‌ازای هر $[f]$ از $\pi_1(X, x_0)$، داریم

$$\widehat{\beta}(\widehat{\alpha}([f])) = [f]. \square$$

۲۰۲. نتیجه اگر X همبند راهی و x_0 و x_1 دو نقطهٔ آن باشند آنگاه $\pi_1(X, x_0)$ با $\pi_1(X, x_1)$ ایزومورف است.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و C یک مؤلفهٔ راهی X که شامل x_0 است. بسهولت ملاحظه می‌شود که $\pi_1(C, x_0) = \pi_1(X, x_0)$. زیرا، تمام کمندها و هموتوپیهای در X که بر پایهٔ x_0 هستند باید در زیرفضای C قرار گیرند. بنابراین، $\pi_1(X, x_0)$ تنها به مؤلفهٔ راهی شامل x_0 بستگی دارد، و اطلاع دیگری در مورد بقیهٔ X به ما نمی‌دهد. به‌همین دلیل، هنگام مطالعهٔ گروه بنیادی معمولاً فقط با فضاهای همبند راهی سر و کار داریم.

اگر X همبند راهی باشد، تمام گروههای $\pi_1(X, x)$ ایزومورف‌اند. لهذا، این وسوسه هست که همهٔ این گروهها را با یکدیگر «یکی» بگیریم و بدون اشاره به‌نقطهٔ پایه، فقط از گروه بنیادی X صحبت کنیم. مشکل اجرای این‌تمایل این‌است که شیوه‌ای طبیعی جهت یکی شمردن $\pi_1(X, x_0)$ و $\pi_1(X, x_1)$ وجود ندارد؛ راههای متفاوت α و β از x_0 به x_1 ممکن‌است ایزومورفیسمهای متفاوتی را بین‌این گروهها موجب گردند. بدین جهت، حذف نقطهٔ پایه می‌تواند منجر به خطا شود.

ثابت می‌شود که‌ایزومورفیسم $\pi_1(X, x_0)$ با $\pi_1(X, x_1)$ مستقل از راه است اگر و تنها اگر گروه بنیادی آنها آبلی باشد. (تمرین ۲ ملاحظه شود.) این شرطی قوی بر فضای X است.

تعریف. فضای X را **همبند ساده** گویند هرگاه فضایی همبند راهی باشد و به‌ازای عضوی از X، مانند x_0 (و در نتیجه به‌ازای هر عضو $x_0 \in X$)، گروه $\pi_1(X, x_0)$ بدیهی (تک عضوی) باشد. اغلب بدیهی بودن گروه $\pi_1(X, x_0)$ را با تساوی $\pi_1(X, x_0) = 0$ بیان می کنیم.

۳۰۲. لم دریک فضای همبند سادهٔ X، هر دو راهی که نقاط آغازی و انجامی آنها یکی باشند هموتوپ راهی‌اند.

برهان. اگر f و g دو راه‌از x_0 به x_1 باشند آنگاه $f * \bar{g}$ تعریف می‌شود و آن کمندی است در X بر پایهٔ x_0. چون X همبند ساده است، $f * \bar{g} \simeq_p e_{x_0}$. با به کار بردن خواص گروهواری، ملاحظه می‌شود که

$$[(f * \bar{g}) * g] = [e_{x_0} * g] = [g].$$

اما،

$$[(f * \bar{g}) * g] = [f * (\bar{g} * g)] = [f * e_{x_1}] = [f].$$

بنابراین، f و g هموتوپ راهی‌اند. □

از نظر شهودی واضح است که گــروه بنیادی یك ناوردای توپولوژیك فضای X است. یك طریقهٔ مناسب برای اثبات رسمی این امر معرفی مفهــوم «هومومورفیسم القاشده به‌وسیلهٔ یك نگاشت پیوسته» است.

فرض کنیم $h: X \to Y$ نگاشتی پیوسته باشد که نقطهٔ x_0 از X را به نقطه y_0 از Y می‌برد. مطلب اخیر را اغلب با نوشتن

$$h:(X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

نشان می‌دهیم. اگر f کمندی در X برپایهٔ x_0 باشد آنگاه تابع مرکب $h\circ f: I \to Y$ کمندی است در Y برپایهٔ y_0. بنابراین، تناظر $f \to h\circ f$ نگاشتی از $\pi_1(X, x_0)$ بتوی $\pi_1(Y, y_0)$ را به‌دست می‌دهد. تعریف رسمی آن به‌قرار ذیل است:

تعریف. فرض کنیم $h:(X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ نگاشتی پیوسته باشــد. نگاشت

$$h_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

را با ضابطهٔ

$$h_*([f]) = [h\circ f],$$

تعریف می‌کنیم. نگاشت h_* **هومومورفیسم القاشده به وسیلهٔ** h نسبت به نقطهٔ پایــهٔ x_0 موسوم است.

بسهولت ملاحظه می‌شود که h_* خوشتعریف است. اگر f و f' هموتوپ راهی باشند، $F: I\times I \to X$ را هموتوپی راهی بین آنها فرض می‌کنیم. دراین صورت، $h\circ F$ یك هموتوپی راهی بین کمندهای $h\circ f$ و $h\circ f'$ است. همچنین، بررسی هومومورفیسم بودن h_* نیز آسان است. زیرا

$$(f*g)(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{به‌ازای } s\in\left[0, \frac{1}{2}\right]، \\ g(2s-1) & \text{به‌ازای } s\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]، \end{cases}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$h((f*g)(s)) = \begin{cases} h(f(s)) & \text{به‌ازای } s\in\left[0, \frac{1}{2}\right]، \\ h(g(2s-1)) & \text{به‌ازای } s\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]، \end{cases}$$

بنابراین، $h \circ (f * g)$ مساوی است با ترکیب $(h \circ f) * (h \circ g)$. نتیجه اینکه

$$h_*([f] * [g]) = h_*([f]) * h_*([g]),$$

پس، h_* یك هomomorفیسم است.

هomomorفیسم القایی h_* نه‌تنها به‌نگاشت $h : X \to Y$ بلکه به‌انتخاب نقطهٔ پایهٔ $x_\circ$ نیز بستگی دارد. (پس از انتخاب $x_\circ$، نقطهٔ $y_\circ$ با h مشخص می‌شود.) بنابراین، اگــر بخواهیم چندین نقطــهٔ متفاوت برای X درنظــر بگیریم، مشکلاتی در علامتگذاری پیش خواهــد آمد. اگر $x_\circ$ و x_1 دونقطه پایهٔ‌متفاوت برای X باشند، دیگر نمی‌توان نماد h_* را برای نمایش دو هomomorفیسم مختلف به کار بــرد به طوری کــه حــوزهٔ تعریف یکــی $\pi_1(X, x_\circ)$ وحوزهٔ تعریف دیگری $\pi_1(X, x_1)$ باشد. حتی درصورت همبند راهی‌بودن X (که دراین حالت این گروهها ایزومورف‌اند) باز این دو گروه مساوی نیستند. در یك چنین موردی، علامت

$$(h_{x_\circ})_* : \pi_1(X, x_\circ) \longrightarrow \pi_1(Y, y_\circ)$$

را برای هomomorفیسم اولی، و $(h_{x_1})_*$ را برای دومی به‌کار می‌بریم. اگر فقط یك نقطهٔ پایه درنظر داشته باشیم، از ذکر نقطهٔ پایــه خودداری می‌کنیم و هomomorفیسم القایــی را صرفاً با h_* نمایش می‌دهیم.

هomomorفیسم القایی‌دارای دو خاصیت است‌که درکاربردهای‌این‌نظریه نقش قاطعی دارند. آنهارا، که درقضیهٔ ذیل‌آمده‌اند، «خواص تابعگونی» هomomorفیسم‌القایی می‌نامند:

۴۰۲ قضیه اگر $\mathrm{h} : (\mathrm{X}, \mathrm{x}_\circ) \longrightarrow (\mathrm{Y}, \mathrm{y}_\circ)$ و $\mathrm{k} : (\mathrm{Y}, \mathrm{y}_\circ) \longrightarrow (\mathrm{Z}, \mathrm{z}_\circ)$ آنگــاه $(\mathrm{k} \circ \mathrm{h})_* = \mathrm{k}_* \circ \mathrm{h}_*$. اگر $\mathrm{i} : (\mathrm{X}, \mathrm{x}_\circ) \longrightarrow (\mathrm{X}, \mathrm{x}_\circ)$ نگاشت همانی باشد آنگاه i_* هomomorفیسم همانی است.

برهان. اثبات واضح است. بنابر تعریف،

$$(k \circ h)_*([f]) = [(k \circ h) \circ f],$$

$$(k_* \circ h_*)([f]) = k_*(h_*([f])) = k_*([h \circ f]) = [k \circ (h \circ f)].$$

به‌طریقی مشابه، $i_*([f]) = [i \circ f] = [f]$. $\square$

۵۰۲ نتیجه اگر $\mathrm{h} : (\mathrm{X}, \mathrm{x}_\circ) \to (\mathrm{Y}, \mathrm{y}_\circ)$ یك هomeomorفیسم باشد آنگاه h_* یك ایزومورفیسم بین $\pi_1(\mathrm{X}, \mathrm{x}_\circ)$ و $\pi_1(\mathrm{Y}, \mathrm{y}_\circ)$ است.

برهان. فرض‌کنیم $k : (Y, y_\circ) \to (X, x_\circ)$ معکوس h باشــد. در این صورت، $k_* \circ h_* = (k \circ h)_* = i_*$، که در آن، i نگاشت همانی $(X, x_\circ)$ است؛ و

$$h_* \circ k_* = (h \circ k)_* = j_*,$$

که درآن، j نگاشت همانی $(Y, y_\circ)$ است. چون i_* و j_*، بترتیب، هومومورفیسمهای همانی گروههای $\pi_1(X, x_\circ)$ و $\pi_1(Y, y_\circ)$ هستند، k_* معکوس h_* است. □

تمرینها

۱. زیرمجموعهٔ A از R^n را محدب ستاره‌ای گوییم هر گاه به‌ازای عضوی از A مانند $a_\circ$، همهٔ قطعه خطهایی که $a_\circ$ را به نقاط دیگر A وصل می‌کنند در A قرار گیرند.
(الف) یك زیرمجموعهٔ محدب ستاره‌ای بیابید که محدب نباشد.
(ب) ثابت کنید که اگر A محدب ستاره‌ای باشد، همبند ساده است.
(پ) ثابت کنید که اگر A محدب ستاره‌ای باشد، هر دو راه در A که نقاط آغازی و انجامی آنها یکی باشند هموتوپ راهی‌اند.

۲. فرض کنید $x_\circ$ و x_1 دو نقطهٔ مفروض فضای همبند راهی X باشند. ثابت کنید که $\pi_1(X, x_\circ)$ آبلی است اگر و تنهـا اگر به‌ازای هرزوج α و β از راههای از $x_\circ$ به x_1، داشته باشیم $\widehat{\alpha}=\widehat{\beta}$.

۳. فرض کنید $A \subset X$ و $r: X \to A$ یك توکشنده باشد (تمریـن ۷ از بخش ۲ـ۳ دیده شود). به‌ازای عضو مفروض $a_\circ$ از A، ثابت کنید که

$$r_*:\pi_1(X, a_\circ) \longrightarrow \pi_1(A, a_\circ)$$

پوشاست. [راهنمایی: تابع احتوای $j:(A, a_\circ) \to (X, a_\circ)$ را درنظربگیرید.]

۴. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از R^n باشد و $h:(A, a_\circ) \to (Y, y_\circ)$. ثابت کنید که اگر h به یك نگاشت پیوستـه از R^n بتـوی Y گسترش‌پذیر باشد آنگاه h_* هومومورفیسم صفر می‌شود (هومومورفیسمی که هرچیز را به عضو خنثی می‌نگارد).

۵. فرض کنید $h: X \to Y$ پیوسته باشد. ثابت کنید که اگـر X همبند راهـی باشد، هومومورفیسم القاشده به‌وسیلهٔ h، باتقریب ایزومورفیسم، مستقل از نقطهٔ پایه‌است. دقیقتر آنکه، اگر $h(x_\circ) = y_\circ$ و $h(x_1) = y_1$ ثابت کنید که ایزومورفیسمهایی مانند ϕ و ψ موجودند به‌طوری که نمودار ذیل از نگاشتها «جابه‌جا» می‌شوند:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_\circ) & \xrightarrow{(h_{x_\circ})_*} & \pi_1(Y, y_\circ) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow{(h_{x_1})_*} & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

یعنی، به‌طوری که $\psi \circ (h_{x_0})_* = (h_{x_1})_* \circ \phi$. نتیجه بگیرید که اگر $(h_{x_0})_*$ هومومرفیسم صفر (یا یك به‌یك یا پوشا) باشد آنگاه $(h_{x_1})_*$ نیز چنین است.

۶. فرض کنید G یك گروه توپولوژیك باشد با عمل $\cdot$ و عضو خنثای x_0. (تمرینهای تکمیلی فصل ۲ ملاحظه شود). $\Omega(G, x_0)$ را مجموعه همهٔ کمندهای در G بر پایهٔ x_0 بگیرید. اگر $f, g \in \Omega(G, x_0)$، کمند $f \circledast g$ را با ضابطهٔ ذیل تعریف می‌کنیم

$$(f \circledast g)(s) = f(s) \cdot g(s).$$

(الف) ثابت کنید که این عمل از مجموعهٔ $\Omega(G, x_0)$ یك گروه می‌سازد.

(ب) ثابت کنید که این عمل یك‌عمل گروهی مانند $\circledast$ بر $\pi_1(G, x_0)$ القا می‌کند.

(پ) ثابت کنید که دوعمل گروه $*$ و $\circledast$ بر $\pi_1(G, x_0)$ یکی هستند. [راهنمایی: عبارت $(f * e_{x_0}) \circledast (e_{x_0} * g)$ را محاسبه کنید.]

(ت) ثابت کنید که $\pi_1(G, x_0)$ آبلی است.

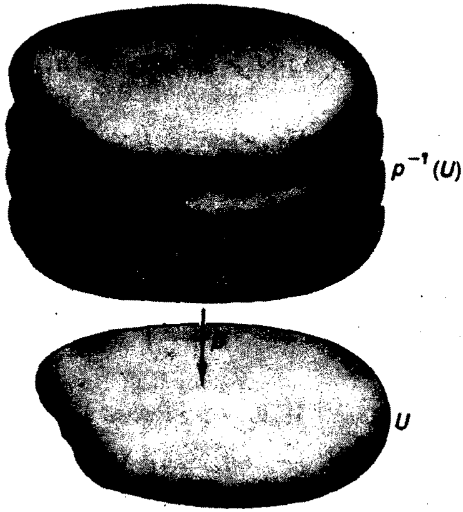
۸-۳ فضاهای پوششی

تاکنون حتی یك گروه بنیادی نابدیهی را محاسبه نکرده‌ایم. این نقیصه را در بخش بعدی، هنگام محاسبهٔ گروه بنیادی دایرهٔ S^1، جبران می‌کنیم. ابتدا به معرفی مفهوم یك فضای پوششی نیازمندیم. برای ما، فضاهای پوششی تنها ابزاری درخدمت محاسبهٔ گروههای بنیادی خواهند بود. اما آنها به نوبهٔ خود اهمیت زیادی دارند، بویژه درمطالعهٔ سطوح ریمانی و بسلاهای همبافت. ([A–S] ملاحظه شود.)

تعریف. فرض کنیم $p: E \to B$ یك نگاشت پیوستهٔ پوشا باشد. گوییم مجموعهٔ باز U از B به‌وسیلهٔ p **به‌طور هموار پوشانده می‌شود** هرگاه تصویر عکس $p^{-1}(U)$ را بتوان در E به‌صورت اجتماعی از مجموعه‌های باز جدا ازهم V_α نوشت به‌طوری که به‌ازای هر α، تحدید p به V_α هومئومورفیسمی از V_α بروی U باشد. هر یك از مجموعه‌های V_α را یك **قاچ** $p^{-1}(U)$ می‌نامیم.

وقتی که مجموعهٔ باز U به‌وسیلهٔ p به‌طور هموار پوشانده می‌شود، اغلب مجموعهٔ $p^{-1}(U)$ را به‌صورت «ردیفی از کلوچه‌ها» تجسم می‌کنیم، که هریك‌از آنها همشکل وهم اندازهٔ U است، و دربالای سر U معلق‌اند؛ نگاشت p از بالا همهٔ آنها را بروی U فشار می‌دهد. شکل ۱۰ دیده شود.

تعریف. فرض کنیم که $p: E \to B$ پیوسته و پوشا باشد. اگر هر نقطهٔ b از B دارای همسایگیی مانند U باشد که به‌وسیلهٔ p به‌طور هموارپوشانده شود آنگاه p رایك **نگاشت پوششی**، و E را یك **فضای پوششی** B می‌نامیم.



شکل ۱۰

توجه کنید که اگر $p : E \rightarrow B$ یك نگاشت پوششی باشد آنگـاه به ازای هر b از B توپولوژی زیرمجموعهٔ $p^{-1}(b)$ از E الزاماً گسسته است. زیرا هرقاچ V_α در E بـاز است و مجموعـهٔ $p^{-1}(b)$ را تنها دریك نقطه قطع می‌کند؛ بنابراین، این نقطه در توپولوژی زیرفضای $p^{-1}(b)$ باز است.

مثال ۱. فرض‌کنیم X یك فضـای دلخواه باشد و i ، $X \rightarrow X$ نگاشت همانـی. دراین‌صورت، i یك نگاشت پوششی (از بیمایه‌ترین نوع آن) است. به‌طور کلی، فرض‌کنیم E فضـای $X \times \{1, \ldots, n\}$ متشکل از n نسخهٔ جدا از هم X باشد. نگاشت p ، $E \rightarrow X$ با ضابطهٔ

$$p(x, i) = x \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

نیز یك نگاشت پوششی (قدری بیمایه) است. دراین مورد، تمام فضای E را می‌توان به‌صورت ردیفی ازکلوچه‌ها دربالای X تجسم کرد.

برای حذف پوششهای بیمایه از نـوع ردیف کلوچه‌هـا ، اغلب همبندی فضای E ضرورت پیدا می‌کند. درقضیهٔ ذیل مثال مفیدی از یك فضای پوششی ارائه شده است.

۲.۱۰ قضیه نگاشت $p : R \rightarrow S^1$ با ضابطهٔ

$$p(x) = (\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x)$$

یك نگاشت پوششی است.

می‌توان p را به‌صورت تابعی تجسم کرد که ضمن پیچاندن خط حقیقی R دور دایرهٔ S^1، هر بازهٔ $[n, n+1]$ را بروی S^1 می‌نگارد.

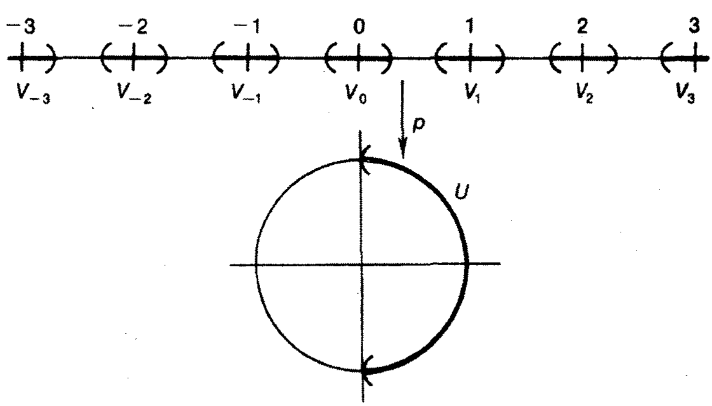
برهان. پوششی بودن نگاشت p از خواص مقدماتی توابع $\sin$ و $\cos$ ناشی می‌شود. مثلاً، زیرمجموعهٔ U از S^1 متشکل از همهٔ نقاط با مختص اول مثبت را درنظر می‌گیریم. مجموعهٔ $p^{-1}(U)$ ازنقاطی مانند x تشکیل می‌شود که به‌ازای آنها $\cos 2\pi x$ مثبت است؛ یعنی، $p^{-1}(U)$ برابر است با اجتماع مجموعه‌های

$$V_n = \left(n - \frac{1}{4},\quad n + \frac{1}{4}\right), \qquad (n \in Z).$$

شکل ۱۱ ملاحظه شود. اکنون، با تحدید p به‌هریك از بازه‌های بستهٔ $\bar{V}_n$، p نگاشتی یك به یك به‌دست می‌آید. زیرا، $\sin 2\pi x$ بر یك چنین بازه‌ای اکیداً یکنواست. بعلاوه، بنا برقضیهٔ مقدار میانی، p مجموعهٔ $\bar{V}_n$ را بروی $\bar{U}$ و V_n را بروی U تصویر می‌کند. چون $\bar{V}_n$ فشرده است، $p|\bar{V}_n$ یك هومئومورفیسم بین $\bar{V}_n$ و $\bar{U}$ می‌باشد. بالاخص، $p|V_n$ هومئومورفیسمی است از V_n به U.

استدلال مشابهی را می‌توان درمورد مقطع S^1 با نیمصفحه‌های باز بالایی وپایینی، و نیمصفحهٔ باز سمت چپ اعمال کرد. این مجموعه‌های باز S^1 را می‌پوشانند، وهریك ازآنهابه‌وسیلهٔ p به‌طورهموار پوشانده می‌شوند. بنابراین، $p: R \to S^1$ یك‌نگاشت پوششی است. □

مثال ۲. فضای $T = S^1 \times S^1$ را درنظر می‌گیریم؛ این فضا به چنبره موسوم است.

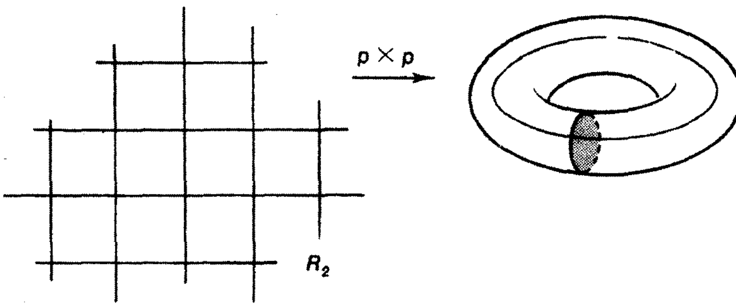


شکل ۱۱

این مطلب درحالت کلی‌درست‌است که حاصل‌ضرب دو نگاشت پوششی خود یك نگاشت پوششی است. (تمرین۲ملاحظه شود.) بنابراین، همچنانکه درشکل ۱۲ تصویرشده است،حاصل‌ضرب

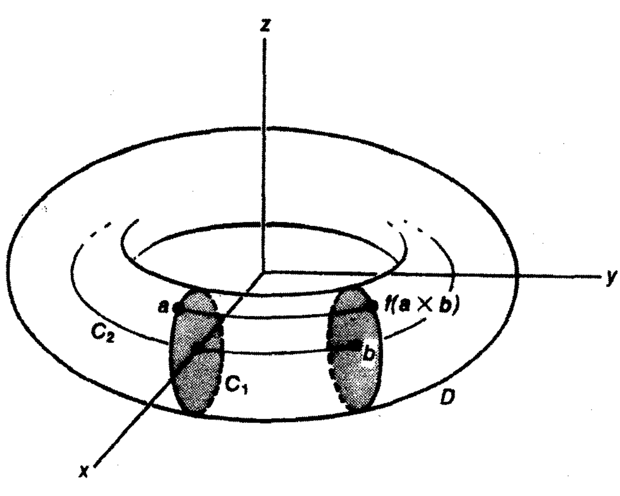
$$p\times p : R\times R \longrightarrow S^1\times S^1$$

یك پوشش چنبره است به‌وسیلهٔ صفحهٔ R^2، که در اینجا p همان نگاشت پوششی قضیهٔ ۱.۳ است. هریك از مربعهای واحد $[n, n+1]\times[m, m+1]$ به وسیلهٔ $p\times p$ دور چنبره پیچیده می‌شود.



شکل ۱۲

در این شکل چنبره را به‌صورت حاصل‌ضرب $S^1\times S^1$، که زیرمجموعه‌ای است از فضای R^4 و درنتیجه تجسمی دشوار دارد، ترسیم نکرده‌ایم، بلکه به‌صورت سطحی مانند D



شکل ۱۳

از $R^۳$ ترسیم کرده‌ایم که از دوران دایرهٔ $C_۱$ ، به مرکز $(۰ , ۰ , ۱)$ و شعاع $۱/۳$ واقع در صفحهٔ xz حول محور z ها ، حاصل می‌شود. اثبات هومئومورف بودن D با $S^۱\times S^۱$ دشوار نیست. فرض کنیم $C_۲$ دایره‌ای باشد به‌شعاع ۱ به مرکز مبدأ درصفحهٔ xy . دراین صورت، $C_۱\times C_۲$ را به‌وسیلهٔ تابع‌زیر بتوی D می‌نگاریم، نقطهٔ a راروی دایرهٔ $C_۱$ درنظرمی گیریم، این دایره را حول محور z ها دوران می‌دهیم تا مرکز آن درنقطهٔ b واقـع شود، سپس، $f(a\times b)$ رامساوی محل جدید نقطهٔ a قرارمی‌دهیم (شکل۱۳). نگاشت f، همان‌طوری که می‌توان ذهنی بررسی کـرد ، هومئومورفیسمی از $C_۱\times C_۲$ به D است. درصورت تمایل ، می‌توانید معادلات f را بنویسید و مستقیماً پیوستگی، یك‌به‌یك بودن، و پوشا بودن آن را بیازمایید. (پیوستگی $f^{-۱}$ از فشردگی $C_۱\times C_۲$ نتیجه می‌شود.)

مثال ۳. نگاشت پوششی

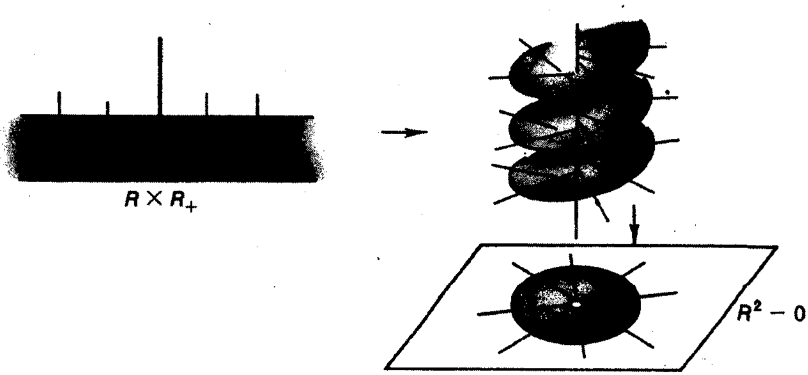
$$p\times i ، R\times R_+ \longrightarrow S^۱\times R_+$$

را درنظر می‌گیریم، کـه درآن i نگاشت همانی R_+ و p نگاشت قضیهٔ ۱.۳ است. اگـر هومئومورفیسم استاندهٔ $S^۱\times R_+$ با $R^۲-۰$ را طوری اختیار کنیم کـه $x\times t$ را بـه tx بفرستد، تابع مرکب این‌دو یك نگاشت پوششی

$$R\times R_+ \longrightarrow R^۲-۰$$

درصفحهٔ سفته به‌وسیلهٔ نیمصفحهٔ بازبالایی ارائه می‌دهد. شکل۱۴ ملاحظه شود. این نگاشت پوششی در مطالعهٔ متغیرهای‌مختلط به‌عنوان سطح ریمانی متناظر با تابع‌مختلط لگاریتمی ظاهر می‌شود.

اگر $p : E\to B$ نگاشتی پوششی باشد آنگاه p هومئومورفیسم موضعی بین E و B است. یعنی، هر نقطهٔ e از E همسایگیی دارد که به وسیلهٔ p به طور هومئومورفیك بروی زیر مجموعهٔ بازی از B نگاشته می‌شود. ولی ، همانطوری که درمثال بعدی



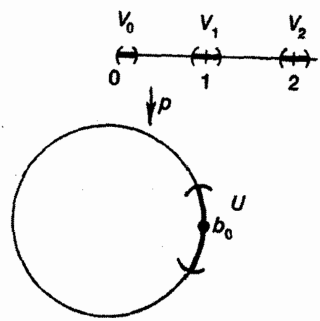
شکل ۱۴

می‌بینیم، این شرط که p هومئومورفیسم موضعی باشد، در به دست آوردن اینکه p یك نگاشت پوششی باشد کافی نیست.

مثال ۴. نگاشت $p: R_+ \longrightarrow S^1$ با ضابطهٔ

$$p(x)=(\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x)$$

پوشا و هومئومورفیسم موضعی است. شکل ۱۵ ملاحظه شود. ولی p یك نگاشت پوششی نیست، زیرا، نقطهٔ $b_0=(1, 0)$ همسایگیی مانند U نداردکه به‌وسیلهٔ p به‌طور هموار پوشانده شود. تصویر عکس یك همسایگی نوعی b_0 مانند U شامل همسایگیهای کوچك V_n $(n \in Z_+)$ است توأم‌با یك بازهٔ‌کوچك به‌صورت $V_0=(0, \varepsilon)$. به‌ازای هر n از Z_+، بازهٔ V_n به‌وسیلهٔ p به‌طور هومئومورفیك بر روی U نگاشته می‌شود، حال‌آنکه بازهٔ V_0 تنها به‌وسیلهٔ p در U نشانده می‌شود.



شکل ۱۵

مثال ۵. مثال قبل ممکن‌است شما را به این فکر بیندازدکه خط حقیقی R تنها فضای پوششی همبند دایرهٔ S^1 است، که البته چنین نیست. مثلاً، نگاشت $p: S^1 \longrightarrow S^1$ را با ضابطهٔ

$$p(z)=z^2$$

درنظر می‌گیریم. [دراینجا S^1 را به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از صفحهٔ مختلط C متشکل‌از اعداد مختلطی، مانند z، که $|z|=1$ درنظرگرفته‌ایم.] بررسی اینکه p نگاشتی پوششی است به‌خواننده واگذار می‌شود.

تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر $p: E \longrightarrow B$ یك نگاشت پوششی باشد آنگاه p یك نگاشت باز است.

۲. ثابت کنید که اگر $p : E \to B$ و $p' : E' \to B'$ نگاشتهایی پوششی باشند آنگاه $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ یك نگاشت پوششی است.

۳. فرض کنید توپولوژی Y گسسته باشد. ثابت کنید که اگر $p : X \times Y \to X$ تصویر بروی مختص اول باشد آنگاه p یك نگاشت پوششی است.

۴. ثابت کنید که نگاشت p درمثال ۵ پوششی است. این مثال را به‌نگاشت $p(z) = z^n$ تعمیم دهید.

۵. فرض کنید $p : E \to B$ یك نگاشت پوششی، و B همبند باشد. ثابت کنید که اگر به‌ازای عضوی از B مانند b_0، $p^{-1}(b_0)$ دارای k عضو باشد آنگاه به ازای هر b از B، مجموعهٔ $p^{-1}(b)$ دارای k عضو است. در چنین موردی، E را یك پوشش kلایی B می‌نامند.

۶. فرض کنید $p : X \to Y$ و $q : Y \to Z$ نگاشتهایی پوششی باشند.
(الف) ثابت کنید که اگر به‌ازای هر z از Z، مجموعهٔ $q^{-1}(z)$ متناهی باشد آنگاه $q \circ p : X \to Z$ یك نگاشت پوششی است.
*(ب) ثابت کنید که اگر $q^{-1}(z)$ متناهی نباشد حکم (الف) برقرار نیست.

۷. فرض کنید $p : E \to B$ یك نگاشت پوششی و B همبند و همبند موضعی باشد. ثابت کنید که اگر C مؤلفه‌ای از E باشد آنگاه $p | C : C \to B$ یك نگاشت پوششی است.

۸. معادلاتی برای نگاشت $f : C_1 \times C_2 \to D$ در مثال ۲ بنویسید و هومئومورفیسم بودن آن را بررسی کنید.

۸-۴ گروه بنیادی دایره

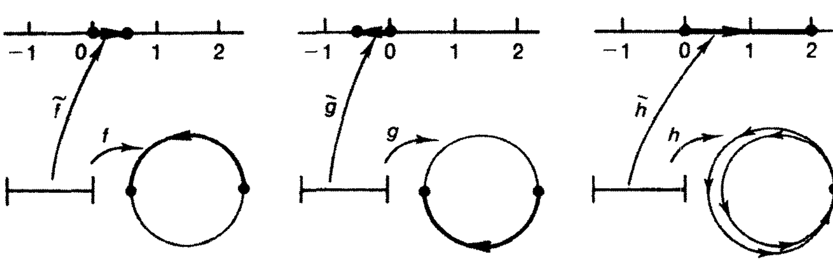
مطالعهٔ فضاهای پوششی فضای X بستگی نزدیکی به مطالعهٔ گروه بنیادی آن دارد. در این بخش، پیوندهای مشترك بین این دو مفهوم را نشان می‌دهیم و گروه بنیادی دایره را محاسبه می‌کنیم.

تعریف. نگاشت $p : E \to B$ را درنظر می‌گیریم. اگر f یك نگاشت پیوسته از فضایی مانند X بتوی B باشد نگاشت $\tilde{f} : X \to E$ رایك **بالابر** f گوییم درصورتی که $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

وجود بالابرها، زمانی که p نگاشتی پوششی باشد، ابزار مهمی درمطالعهٔ فضاهای پوششی و گروه بنیادی است. ابتدا، نشان می‌دهیم که برای یك فضای پوششی، می‌توان راهها را بالابرد؛ سپس، ثابت می‌کنیم که هموتوپیهای راهی را نیز می‌توان بالابرد. ابتدا، یك مثال:

مثال ۱. نگاشت پوششی $p: R \to S^1$ در قضیهٔ ۱.۳ را درنظر می‌گیریم. راه $f: [0, 1] \to S^1$ با ضابطهٔ $f(s)=(\cos \pi s, \sin \pi s)$ که از $b_0=(1, 0)$ شروع می‌شود، به راه $\tilde{f}(s)=s/2$، که از ۰ شروع و به ۱/۲ ختم می‌شود، بالا برده می‌شود. راه $g(s)=(\cos \pi s, -\sin \pi s)$ به راه $\tilde{g}(s)=-s/2$ که از ۰ شروع و به ۱/۲ − ختم می‌شود، بالابرده می‌شود. راه $h(s)=(\cos 4\pi s, \sin 4\pi s)$ به راه $\tilde{h}(s)=2s$ که از ۰ شروع و به ۲ ختم می‌شود، بالا برده می‌شود. از نظر شهودی h بازهٔ $[0, 1]$ را دو بار به دور دایره می‌پیچاند؛ نکتهٔ اخیر در این واقعیت که راه بالابر $\tilde{h}$ از ۰ شروع و به ۲ ختم می‌شود، منعکس است. این راهها درشکل ۱۶ ترسیم شده‌اند.



شکل ۱۶

۴.۱۰ لم فرض‌کنیم $p: E \to B$ یك نگاشت پوششی باشد و $p(e_0)=b_0$. هر راه در B با نقطهٔ آغاز b_0، مانند $f: [0, 1] \to B$، دارای بالابر یکتایی است به راه $\tilde{f}$ در E با نقطهٔ آغازی e_0.

برهان. B را با مجموعه‌های بازی مانند U بپوشانید به طوری که هریك به‌وسیلهٔ p به‌طور هموار پوشانده شوند. یك زیر تقسیم بازهٔ $[0, 1]$ را، مانند $s_0, \ldots, s_n$ چنان بیابید که به‌ازای هر i مجموعهٔ $f([s_i, s_{i+1}])$ در یکی از مجموعه‌های باز U قرار گیرد. (در اینجا از لم عدد لبگ استفاده می‌کنیم.) اکنون $\tilde{f}$ را مرحله به مرحله تعریف می‌کنیم.

ابتدا چنین تعریف می‌کنیم $\tilde{f}(0)=e_0$. سپس فرض می‌کنیم که به ازای هر s که $0 \leqslant s \leqslant s_i$، $\tilde{f}(s)$ تعریف شده باشد، حال $\tilde{f}$ را بر $[s_i, s_{i+1}]$ چنین‌تعریف می‌کنیم: مجموعهٔ $f([s_i, s_{i+1}])$ در مجموعهٔ بازی مانند U قرار دارد که به‌وسیلهٔ p به‌طور

هموار پوشانده می‌شود. $\{V_\alpha\}$ را گردایهٔ قاچهای $p^{-1}(U)$ می گیریم؛ هر یك از V_α ها به‌وسیلهٔ p به‌طور هومئومورفیك بروی U نگاشته می‌شوند. اکنون $\tilde{f}(s_i)$ دریکی ازاین مجموعه‌ها، مثلاً، $V_\circ$ قرار می گیرد. به‌ازای هر s از $[s_i, s_{i+1}]$، $\tilde{f}(s)$ را چنین تعریف می کنیم:

$$f(\tilde{s})=(p|V_\circ)^{-1}(f(s)).$$

چون $p|V_\circ : V_\circ \to U$ یك هومئومورفیسم است، $\tilde{f}$ بر $[s_i, s_{i+1}]$ پیوسته است.

با ادامه این طریقه، $\tilde{f}$ بر همهٔ $[\circ, 1]$ تعریف می‌شود. پیوستگی f از لم چسب بخش ۲ـ۷ نتیجه می‌شود، و تساوی $f=p\circ\tilde{f}$ بلافاصله از تعریف $\tilde{f}$ حاصل می گردد.

یکتایی $\tilde{f}$ نیز مرحله به مرحله ثابت می‌شود. فرض کنیم $\tilde{\tilde{f}}$ بالابردیگری از f با نقطهٔ‌آغازی $e_\circ$ باشد. دراین صورت $\tilde{\tilde{f}}(\circ)=e_\circ=\tilde{f}(\circ)$. فرض کنیم به‌ازای هر s که $\circ \leqslant s \leqslant s_i$، داشته باشیم $\tilde{\tilde{f}}(s)=\tilde{f}(s)$. اگر $V_\circ$ را همان مجموعهٔ بند سابق بگیریم آنگاه به‌ازای هر s از $[s_i, s_{i+1}]$، $\tilde{f}(s)$ را به‌صورت $(p|V_\circ)^{-1}(f(s))$ تعریف می‌شود. حال ببینیم $\tilde{\tilde{f}}(s)$ برابر چه چیزی می‌تواند باشد؟ چون $\tilde{\tilde{f}}$ یك بالابر f است، باید بازهٔ $[s_i, s_{i+1}]$ را بتوی $p^{-1}(U)=\bigcup V_\alpha$ ببرد. قاچهای V_α باز و جدا از هم می‌باشند؛ چون مجموعهٔ $\tilde{\tilde{f}}([s_i, s_{i+1}])$ همبند است، بایدکاملاً دریکی از مجموعه‌های V_α قرار گیرد. ازطرفی چون $\tilde{\tilde{f}}(s_i)=\tilde{f}(s_i)$ که خود عضو $V_\circ$ است، $\tilde{\tilde{f}}$ باید همهٔ $[s_i, s_{i+1}]$ را بتوی $V_\circ$ ببرد. بنابراین، به ازای هرعضو $[s_i, s_{i+1}]$ مانند s، $\tilde{\tilde{f}}(s)$ برابر نقطه‌ای است از $V_\circ$، مانند y، که در $p^{-1}(f(s))$ قرار دارد. اما تنها یك نقطهٔ y وجود داردکه واجد این خاصیت است و آن هم $(p|V_\circ)^{-1}(f(s))$است. بنابراین به‌ازای هر s از $[s_i, s_{i+1}]$ داریم $\tilde{\tilde{f}}(s)=\tilde{f}(s)$. □

۲۰۴ـ لم فرض‌کنیم $p : E \to B$ یك نگاشت پوششی باشد و $p(e_\circ)=b_\circ$. همچنین، فرض‌کنیم نگاشت $F : I\times I \to B$ پیوسته باشد و $F(\circ, \circ)=b_\circ$. دراین صورت، F بالابر پیوسته‌ای مانند نگاشت

$$\tilde{F}: I\times I \longrightarrow E$$

داردکه $\tilde{F}(\circ, \circ)=e_\circ$. اگر F هموتوپی راهی باشد آنگاه $\tilde{F}$ نیزهموتوپی راهی است.

$\tilde{F}$ (بالابر F)، در واقع، یکتاست؛ ولی، این را ثابت نخواهیم کرد.

برهان. به‌ازای نگاشت مفروض F، ابتدا $\tilde{F}(\circ, \circ)$ را مساوی $e_\circ$ می گیریم. بعد، لم قبل را جهت گسترش $\tilde{F}$ به‌ضلع سمت چپ $I\times\circ$ و به ضلع پایینی $\circ\times I$ از $I\times I$ به‌کار می‌بریم. بالاخره، $\tilde{F}$ را به همهٔ $I\times I$ به شرح ذیل گسترش می‌دهیم: زیر قسمتهای

$$s_\circ < s_1 < \cdots < s_m\,,$$
$$t_\circ < t_1 < \cdots < t_n$$

از I را چنان انتخاب می‌کنیم که F هرمستطیل

$$I_i \times I_j = [s_{i-1},\ s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$$

را بتوی یك مجموعهٔ باز B ، که به وسیلهٔ p به طور هموار پوشانده می‌شود ، بنگارد . (از لم عدد لبگ استفاده می کنیم .) بالا بر $\widetilde{F}$ را مرحله به مرحله تعریف می کنیم . این کار را از مستطیل $I_1 \times J_1$ شروع می کنیم و با مستطیلهای $I_i \times J_1$ واقع در «ردیف تحتانی» ، کار را ادامه می دهیم ؛ سپس ، نوبت به مستطیلهای $I_i \times J_2$ ردیف بعدی می‌رسد ، و الی آخر .

به‌طور کلی، به ازای i_0 و j_0 مفروض، فرض کنیم که $\widetilde{F}$ برمجموعهٔ A که برابراست با اجتماع $I \times 0$ و $0 \times I$ و همهٔ مستطیلهای «ماقبل» $I_{i_0} \times J_{j_0}$ (یعنی مستطیلهایی مانند $I_i \times J_j$ که $j < j_0$ یا آنهاکه $j = j_0$ و $i < i_0$) تعریف شده باشد . همچنین فرض کنیم که $\widetilde{F}$ یك بالابر پیوستهٔ $F|A$ باشد. اکنون $\widetilde{F}$ را بر $I_{i_0} \times J_{j_0}$ تعریف می کنیم . مجموعهٔ باز U از B را چنان انتخاب می‌کنیم کــه به وسیلهٔ p به طور هموار پوشانده شود وشامل $F(I_{i_0} \times J_{j_0})$ نیز باشد. $\{V_\alpha\}$ را افراز قاچهای $p^{-1}(U)$ می گیریم؛ هرمجموعهٔ V_α به‌وسیلهٔ p به‌طور هومئومورفیك بروی U نگاشته می‌شود. دراین‌صورت، $\widetilde{F}$ قبلاً برمجموعهٔ $C = A \cap (I_{i_0} \times J_{j_0})$ تعریف شده‌است. این مجموعه اجتماع اضلاع چپ‌وپایین‌مستطیل $I_{i_0} \times J_{j_0}$ است، ودرنتیجه، همبند است. بنابراین، $\widetilde{F}(C)$ همبنداست وباید کاملاً دریکی ازمجموعه‌های V_α، مثلاً V_0، قرار گیرد. دراین حال ، موقعیت همان طوری‌است که در شکل ۱۷ تصویرشده است.

فرض کنیم $p_0 : V_0 \to U$ نمایش تحدید p به V_0 باشد. چون $\widetilde{F}$ یك بالابر $F|A$ است، می‌دانیم که به‌ازای هر x از C؛

$$p_0(\widetilde{F}(x)) = p(\widetilde{F}(x)) = F(x),$$

که درنتیجه $\widetilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$. بنابراین،میتوان گسترش $\widetilde{F}$ از F راچنین‌تعریف کرد: به‌ازای هر x از $I_{i_0} \times J_{j_0}$،

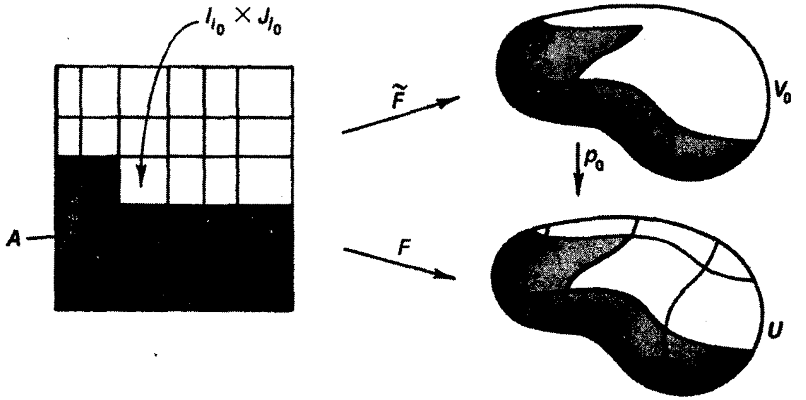
$$\widetilde{F}(x) = p_0^{-1}(F(x))$$

بنابرلم چسب، این نگاشت گسترش یافتهٔ پیوسته است.

با ادامهٔ این طریقه، $\widetilde{F}$ برهمهٔ I^2 تعریف می‌شود.

اکنون فرض کنیم F یك هموتوپی راهی باشد. می‌خواهیم ثابت‌کنیم که $\widetilde{F}$ نیز یك هموتوپی راهی است. نگاشت F همهٔ $0 \times I$ (ضلع چپ I^2) را بتوی یك نقطهٔ منفرد از B ، یعنی b_0، می‌نگارد. ازآنجاکه $\widetilde{F}$ یك بالابر F است، $\widetilde{F}$ این ضلع را بتوی مجموعهٔ $p^{-1}(b_0)$ می برد. ولی این مجموعه، به‌عنوان یك زیرفضای E، دارای توپولوژی گسسته است. چون $0 \times I$ همبند و $\widetilde{F}$ پیوسته است ، $\widetilde{F}(0 \times I)$ همبند می‌شود و لهــذا باید برابر یك مجموعهٔ تك عضوی باشد. به‌طریقی مشابه، $\widetilde{F}(1 \times I)$ الزاماً مجموعه‌ای تك

عضوی است، ولهذا، $\widetilde{F}$ یك هموتوپی راهی‌است.□



شکل ۱۷

قضیه ذیل بستگی مهمی بین فضاهای پوششی و گروه بنیادی برقرار می‌کند:

۳.۴. قضیه فرض‌کنیم $p : E \to B$ یك نگاشت پوششی باشد و $p(e_0) = b_0$. همچنین، فرض‌کنیم f و g دو راه در B از b_0 به b_1 باشند؛ $\tilde{f}$ و $\tilde{g}$ را، بترتیب، بالابرآنها به راههایی در E با نقطهٔ آغازی e_0 می‌گیریم. اگر f و g هموتوپ راهی باشند آنگاه نقاط انجامی $\tilde{f}$ و $\tilde{g}$ در E یکی هستند و $\tilde{f}$ و $\tilde{g}$ هموتوپ راهی‌اند.

برهان. فرض کنیم $F{:}I \times I \to B$ هموتوپی راهی بین f و g باشد. در این صورت، $F(0, 0) = b_0$ فرض کنیم $\widetilde{F}{:}I \times I \to E$ بالابری از F به E باشد به‌طوری که $\widetilde{F}(0, 0) = e_0$. بنابرلم قبل،$\widetilde{F}$ هموتوپی راهی‌است، که درنتیجه $\widetilde{F}(0 \times I) = \{e_0\}$ و $\widetilde{F}(1 \times I)$ مجموعهٔ تك عضوی $\{e_1\}$ است.

تحدید $\widetilde{F}|I \times 0$ از $\widetilde{F}$ به ضلع پایینی $I \times I$ راهی در E با نقطهٔ آغازی e_0 است که یك بالابر $F|I \times 0$ است. بنا بریکتایی بالابری راهها، باید$\widetilde{F}(s, 0) = \tilde{f}(s)$. به طریقی مشابه، $\widetilde{F}|I \times 1$ راهی است در E که بالابر $F|I \times 1$ است و از e_0 آغاز می شود. زیرا، $F(0 \times I) = \{e_0\}$. بنابریکتایی بالابری راهها، $\tilde{g}(s) = \widetilde{F}(s, 1)$. بنابراین، نقطهٔ انجامی‌هردوی $\tilde{f}$و $\tilde{g}$ نقطهٔ e_1 است و$\widetilde{F}$ یك هموتوپی راهی بین‌آنهاست. □

اکنون این قضیه را درمورد S^1 اعمال می کنیم.

۴.۴. قضیه گروه بنیادی دایره گروه دوری نامتناهی است.

برهان. فرض کنیم b_0 نقطهٔ $(1, 0)$ از S^1 باشد، هدف ساختن ایزومورفیسم

$\pi_1(S^1, b_0)$ است با گروه اعداد صحیح، یعنی $(Z, +)$.

برای این منظور، نگاشت پوششی $p: R \to S^1$ را با ضابطهٔ

$$p(x) = (\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x)$$

درنظر می‌گیریم. اگر f کمندی در S^1 برپایهٔ b_0 باشد، f را بالابر $\tilde{f}$ به‌راهی در R با آغاز ۰ فرض می‌کنیم. $\tilde{f}(1)$ باید نقطه‌ای ازمجموعهٔ $p^{-1}(b_0)$ باشد؛ یعنی، $\tilde{f}(1)$ مساوی عددی است صحیح مانند n. قضیهٔ قبل می‌گوید که این عدد صحیح تنها به‌ردهٔ هموتوپی راهی f بستگی دارد. بنابراین، تابع

$$\phi: \pi_1(S^1, b_0) \longrightarrow Z$$

را می‌توان با مساوی قرار دادن $\phi([f])$ و این عدد صحیح تعریف کرد. ادعا می‌کنیم که ϕ یك ایزومورفیسم گروهها است.

نگاشت ϕ پوشاست. فرض‌کنیم n نقطه‌ای از $p^{-1}(b_0)$ باشد. چون R همبندراهی است، می‌توان راهی از ۰ به n مانند $\tilde{f}: [0, 1] \to R$ در R انتخاب کرد. فرض کنیم $f = p \circ \tilde{f}$. دراین‌صورت، f کمندی است در S^1 با پایهٔ b_0، و $\tilde{f}$ بالابر آن به راهی در R با آغاز ۰ است. بنابر تعریف، $\phi([f]) = n$.

نگاشت ϕ یك به یك است. فرض‌کنیم که $\phi([f]) = n = \phi([g])$. ثابت می‌کنیم که $[f] = [g]$. $\tilde{f}$ و $\tilde{g}$ را در R بترتیب، بالابرهای f و g به راههایی در R با آغاز ۰ می‌گیریم؛ $\tilde{f}$ و $\tilde{g}$، بنابر فرض، هردو به n ختم می‌شوند. چون R همبند ساده است، $\tilde{f}$ و $\tilde{g}$ هموتوپ راهی‌اند؛ اگر $\tilde{F}$ هموتوپی راهی بین آنها باشد آنگاه نگاشت $F = p \circ \tilde{F}$، همان‌طور که می‌توانیدبیازمائید، هموتوپی راهی‌بین f و g است.

ϕ همومورفیسم است. فرض‌کنیم f و g دو کمند برپایهٔ b_0 در S^1 باشند؛ $\tilde{f}$ و $\tilde{g}$ را در R، بترتیب، بالابرآنها به‌راههایی با آغاز ۰ می‌گیریم. همچنین، فرض‌کنیم که $\tilde{f}(1) = n$ و $\tilde{g}(1) = m$. راه h را در R با ضابطهٔ

$$h(s) = \begin{cases} \tilde{f}(2s) & \text{به‌ازای } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]، \\ n + \tilde{g}(2s - 1) & \text{به‌ازای } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]، \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. دراین صورت، h راهی است در R با آغاز ۰. مدعی هستیم که h یك بالابر $f * g$ است. ابتدا توجه‌کنید که چون توابع $\sin$ و $\cos$ دارای دورهٔ تناوب 2π هستند، به‌ازای هر x، داریم $p(n + x) = p(x)$. پس

$$p(h(s))=\begin{cases} p(\tilde{f}(2s))=\tilde{f}(2s) & s\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right], \\ p(n+\tilde{g}(2s-1))=p(\tilde{g}(2s-1))=g(2s-1)p & s\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right]. \end{cases}$$

بنابراین، $p\circ h=f*g$ ، که درنتیجه، h بالابر $f*g$ با نقطهٔ آغازی ۰ است. بنا بر تعریف، $\phi([f*g])$ همان $h(1)$ است که مساوی $m+n$ می‌باشد. پس،

$$\phi([f*g])=\phi([f])+\phi([g])\cdot\ \square$$

بیشتر برهان قضیهٔ قبل به فضاهای پوششی همبند ساده قابل تعمیم است. تنها قسمتی از برهان که به‌نگاشت پوششی $p:R\to S^1$ وابسته است وجود عمل جمع در R است. عملی که ما را در اثبات همومورفیسم بودن ϕ یاری کرد؛ در مورد یك فضای پوششی دلخواه عمل جمع مناسبی دراختیارنداریم؛ با وجود این، هنوز می‌توان اطلاعات جالبی راجع به‌گروه بنیادی دایره به‌دست آورد.

۵.۴ قضیه فرض‌کنیم $p:(E,e_0)\to(B,b_0)$ یك نگاشت پوششی باشد. اگر E همبند راهی باشد آنگاه تابعی پوشا مانند

$$\phi:\pi_1(B_1,\ b_0)\longrightarrow p^{-1}(b_0)$$

موجود است. اگر E همبند ساده باشد ϕ دوسویی است.

برهان. استدلال تقریباً رونوشتی از برهان قضیهٔ ۴.۴ است؛ که شرح آن را به‌خواننده محلول می کنیم. $\square$

تعریف. اگر E یك فضای همبند ساده و $p:E\to B$ یك نگاشت پوششی باشد آنگاه E را یك **فضای پوششی عمومی** B می‌نامیم.

اگر E یك فضای پوششی عمومی B باشد آنگاه E با تقریب هومئومورفیسم یکتاست. (به‌شرط آنکه B همبند راهی موضعی باشد.) تمرین ۱۲ ملاحظه شود. همچنین، در همین تمرین، دلیل نامگذاری E به‌فضای پوششی عمومی نیز ارائه شده است.

در بخش ۸ـ۱۴ شرایطی را مطالعه می کنیم، که تحت آنها فضای B حتماً یك‌فضای پوششی عمومی دارد.

تمرینها

۱. برای هومئومورفیسم موضعی مثال ۴ در بخش ۸ـ۳، چرا «لم بالابری راه» (لم ۱.۴) برقرار نیست؟

۲. درتعریف نگاشت $\widetilde{F}$ ، دربرهان‌لم ۲.۴، چرا درموردترتیبی که درمستطیلهای کوچك، درنظر گرفتیم آن اندازه دقت به‌خرج می‌دادیم؟

۳. فرض‌کنید که $p: E \to B$ یك‌نگاشت‌پوششی و α و β راههایی در B باشند که $\alpha(1)=\beta(0)$ ؛ $\widetilde{\alpha}$ و $\widetilde{\beta}$ رابالابرهایی از α و β بگیرید که $\widetilde{\alpha}(1)=\widetilde{\beta}(0)$. ثابت کنیدکه $\widetilde{\alpha}*\widetilde{\beta}$ نیز بالابر $\alpha*\beta$ است.

۴. نگاشت‌پوششی $p: R\times R_+ \to R^2 - 0$ را (مثال ۳ ازبخش ۸ــ۳) درنظر بگیرید. بالابرهای راههای ذیل را بیابید:

$$f(t)=(2-t,\ 0),$$

$$g(t)=((1+t)\cos 2\pi t,\ (1+t)\sin 2\pi t),$$

$$h(t)=f*g.$$

این راهها و بالابرهایشان را رسم‌کنید.

۵. فرض‌کنید $n\in Z_+$. نگاشتهای $g, h: S^1 \to S^1$ را با ضوابط $g(z)=z^n$ و $h(z)=1/z^n$ درنظر بگیرید. [در اینجا S^1 نشانگر مجموعهٔ اعداد مختلطی است مانند z که $|z|=1$.] هومومورفیسمهای‌القایی g_* و h_*، ازگروه دوری نامتناهی $\pi_1(S^1, b_0)$ بتوی خودش، را محاسبه کنید.

۶. ثابت‌کنیدکه توکشنده‌ای مانند $r: B^2 \to S^1$ وجود ندارد، که در آن، B^2 گوی واحد در R^2 است.

۷. قضیهٔ ۵.۴ را ثابت‌کنید.

۸. ثابت‌کنیدکه اگر B همبند ساده باشد آنگاه هرنگاشت پوششی $p: E\to B$ که E همبند راهی باشد، یك هومئومورفیسم است.

۹. $p\times p: R\times R \to S^1\times S^1$ درمثال ۲ از بخش ۸ــ۳، و راه

$$f(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\times(\cos 4\pi t,\ \sin 4\pi t)$$

در $S^1\times S^1$ را درنظر بگیرید. وقتی $S^1\times S^1$ را با چنبرهٔ D یکی می‌گیریم، شکل f چگونه به‌نظر می‌رسد؟ بالابری $\widetilde{f}$ از f به $R\times R$ را بیابید، وآن را رسم کنید. حدسی راجع به‌چگونگی گروه بنیادی چنبره بزنید و آن را ثابت‌کنید.

۱۰. تعمیم ذیل از قضیهٔ ۵.۴ را ثابت‌کنید:

قضیه. فرض کنید E همبند راهی و $p: E\to B$ یك نگاشت پوششی باشد، و $p(e_0)=b_0$. دراین صورت،

(الف) $p_*:\pi_1(E,\, e_\circ) \to \pi_1(B,\, b_\circ)$ یك به‌یك است.

(ب) نگاشتی دوسویی مانند

$$\phi : \pi_1(B,\, b_\circ)/H \longrightarrow p^{-1}(b_\circ)\,,$$

موجود است که در آن، $H = p_*(\pi_1(E,\, e_\circ))$ و $\pi_1(B,\, b_\circ)/H$ عبارت است از گردایهٔ همرده‌های راست H در $\pi_1(B,\, b_\circ)$.

۱۱. مفروضات قضیهٔ قبل را فرض کنید. اگر $\pi_1(B,\, b_\circ)$ گروه دوری نامتناهی باشد، راجع به $\pi_1(E,\, e_\circ)$ چه می‌توان گفت؟ اگر $\pi_1(B,\, b_\circ)$ متناهی و p یك پوشش kلایی باشد چطور؟

۱۲*. (الف) لـم (لم بالابری). فرض‌کنید $p : E \to B$ یك نگاشت پوششی باشد، و $p\,(e_\circ) = b_\circ$. همچنین، $f : (Y,\, y_\circ) \to (B,\, b_\circ)$ را نگاشتی پیوسته اختیار کنید. اگر Y همبند راهی موضعی و همبند ساده باشدآنگاه f را می‌توان به صورتی یکتا به نگاشتی مانند $\tilde{f} : Y \to E$ بالا برد که $\tilde{f}(y_\circ) = b_\circ$.

[راهنمایی: به ازای عضوی مفروض از Y مانند y، راه α را از $y_\circ$ به y برگزینید؛ $f \circ \alpha$ را به راهی در E با نقطهٔ آغازی $e_\circ$ بالا ببرید، و $\tilde{f}(y)$ را نقطهٔ انجامی این راه تعریف کنید.]

(ب) قضیه. فرض‌کنید B همبند راهی موضعی باشد، و فرض‌کنید $p : E \to B$ یك فضای پوششی همبند سادهٔ B باشد. اگر $p' : E' \to B$ فضای پوششی همبند راهی دلخواهی برای B باشد آنگاه نگاشتی پوششی مانند $q : E \to E'$ موجود است که $p = p' \circ q$.

[راهنمایی: p را به E' بالا ببرید.] این قضیه دلیل نامگذاری E را به فضای پوششی عمومی نشان می‌دهد؛ در واقع، این فضا هر فضای پوششی همبند راهی دیگر B را نیز می‌پوشاند.

(پ) قضیه (یکتایی فضای پوششی عمومی). اگر B همبند راهی موضعی باشد و $p : E \to B$ و $p' : E' \to B$ دو فضای پوششی همبند سادهٔ B باشند آنگاه هومئومورفیسمی مانند $h : E \to E'$ موجود است که $p' \circ h = p$.

۱۳*. قضیه. فرض‌کنید G یك گروه توپولوژیك با عمل «$\circ$» باشد، و $p : \tilde{G} \to G$ را یك فضای پوششی همبند سادهٔ G درنظر بگیرید. اگر G همبند راهی موضعی باشدآنگاه عمل ضربی مانند $\odot$ بر $\tilde{G}$ موجود است که $\tilde{G}$ نسبت به‌آن یك گروه توپولوژیك است و p یك هومومورفیسم.

[راهنمایی: فرض کنید e عضو خنثای G باشد؛ $\tilde{e}$ را در $p^{-1}(e)$ انتخاب کنید. به ازای دو عضو مفروض $\tilde{G}$ مانند $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ راههای $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ را از $\tilde{e}$، بترتیب، به $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ برگزینید. فرض کنید $\alpha(s) = p\,(\tilde{\alpha}\,(s))$ و $\beta(s) = p\,(\tilde{\beta}(s))$. راه

$\gamma(s)=\alpha(s)\cdot\beta(s)$ را در G اختیار کنید، وآن را به راه $\tilde{\gamma}$ در $\tilde{G}$ با نقطهٔ آغازی $\tilde{e}$ بالا ببرید، $\tilde{y}\odot\tilde{x}$ را نقطهٔ انجامی راه $\tilde{\gamma}$ تعریف کنید.]
گروه $\tilde{G}$ راگروه **پوششی عمومی** G می‌نامند.

۸-۵ گروه بنیادی صفحهٔ سفته

دراین بخش ثابت می‌کنیم که گروه بنیادی صفحهٔ سفته R^2-0 گروه دوری نامتناهی است. این مطلب‌را درموارد متعددی لازم داریم. برهان این موضوع ما را به بحث کوتاهی دربارهٔ توکشیده‌های دگردیسی و روابطشان با گروه بنیادی می‌کشاند.

۱۰.۵ قضیه فرض‌کنیم $x_0\in S^1$. نگاشت احتوای

$$j:(S^1,x_0)\longrightarrow(R^2-0,x_0)$$

یک ایزومورفیسم‌گروههای بنیادی را القا می‌کند.

برهان. فرض کنیم $r:R^2-0\rightarrow S^1$ نگاشتی پیوسته با شد باضابطهٔ $r(x)=x/||x||$ که درآن $||x||$ نمایش‌فاصلهٔ x ازمبدأ 0 است بامتریك اقلیدسی. نگاشت r را می‌توان به‌صورت فروریزی هرپرتوی شعاعی در R^2-0 بروی نقطهٔ تقاطع آن شعاع و S^1 تجسم کرد؛ نگاشت r هرنقطهٔ S^1 را به خودش می‌نگارد.

مدعی هستیم که r_* یك معکوس j_* است. ابتدا نگاشت مرکب

$$(S^1,x_0)\xrightarrow{j}(R^2-0,x_0)\xrightarrow{r}(S^1,x_0),$$

را درنظرمی گیریم، که مساوی نگاشت همانی S^1 است. درنتیجه، بنابرخواص تابعگونی هومورفیسم القایی، $r_*\circ j_*$ ایزومورفیسم همانی $\pi_1(S^1,x_0)$ است.

برای اثبات اینکه $j_*\circ r_*$ ایزومورفیسم همانی $\pi_1(R^2-0,x_0)$ با خودش است، f راکمندی در R^2-0 برپایهٔ x_0 می گیریم. دراین‌صورت، $j_*(r_*[f])$ ردهٔ هموتوپی کمند $g=jorof:I\rightarrow R^2-0$ است که ضابطهٔ تعریف آن عبارت است از

$$g(s)=\frac{f(s)}{||f(s)||}.$$

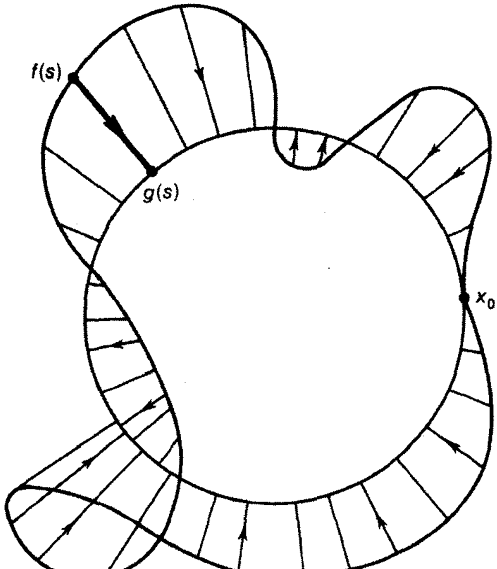
باید ثابت‌کنیم $g\simeq_p f$، که البته‌کار ساده‌ای است. همسان طور که درشکل ۱۸ نشان داده‌شده‌است، نقطهٔ $f(s)$ را بتدریج درطول‌پرتوی شعاعی‌آن‌تاجایی حرکت می‌دهیم که $g(s)$ را قطع کند.

به عبارت دقیقتر، تابع $F:I\times I\rightarrow R^2-0$ را با ضابطهٔ

$$F(s,\ t)=t\frac{f(s)}{||f(s)||}+(۱-t)f(s)$$

تعریف می کنیم. بدیهی است که $F(s,\ t)$ هرگز صفر نمی‌شود. زیرا،

$$\frac{t}{||f(s)||}+(۱-t)\neq ۰,\quad f(s)\neq ۰.$$



شکل ۱۸

همچنین به ازای هر t، $F(۰,t)=F(۱,\ t)=x_۰$. بنابراین، F هموتوپی راهی مطلوب بین f و g است. □

در برهان قبل نکتهٔ خاصی که به دایره و صفحه ارتباط داشته باشد وجود ندارد. همین برهان عیناً برای اثبات قضیهٔ ذیل به‌کارمی‌رود.

۲.۵. قضیه اگر $x_۰\in S^{n-۱}$ آنگاه تابع احتوای

$$j:(S^{n-۱},\ x_۰)\longrightarrow(R^n-۰,\ x_۰)$$

یک ایزومورفیسم گروههای بنیادی را القا می‌کند.

البته، هنوز گروه بنیادی S^{n-1} را محاسبه نکرده‌ایم، درنتیجه قضیهٔ اخیرچیززیادی به ما نمی‌گوید.

چه چیزی سبب شد تا برهان قبلی کارساز باشد؟ به‌بیانی نه‌چندان دقیق،کارسازی آن به دلیل طریقهٔ طبیعی دگردیسی راه f واقع در $R^{2}-0$ بتوی راه $r\circ f$ بود، که در S^{1} قرار دارد. طریقه دیگری که می‌توان به این اثبات نگریست این است که درصورت تمایل، می‌توان‌کل فضای $R^{2}-0$ را، با فروریختن تدریجی هرپرتوی شعاعی به محل تقاطع آن با S^{1}، دگردیس کرد. این یکی‌ازدگرگونیهای راه f بتوی راه $r\circ f$ است‌که به توکشندهٔ دگردیسی قوی $R^{2}-0$ بروی S^{1} موسوم است.

تحلیل‌این گونه برهان منجربه‌تعمیم قضیهٔ ۱.۵ می‌شود. اگرچه، دراین‌کتاب فرصتی برای به‌کاربستن‌آن نخواهیم داشت، بااین حال، قضیهٔ بسیارمفیدی درمحاسبهٔ گروههای هموتوپی است.

یادآوری می‌کنیم که زیرفضای A از X را یک توکشندهٔ X گوییم درصورتی‌که نگاشتی پیوسته مانند $r: X \rightarrow A$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر عضو A مانند a، داشته باشیم $r(a)=a$. نگاشت r را توکشندهٔ X بروی A می‌نامیم.

تعریف . فرض‌کنیم A زیرمجموعه‌ای از X باشد، دراین صورت، A را یک **توکشیدهٔ دگردیسی قوی** X گوییم‌درصورتی‌که نگاشتی‌پیوسته مانند $H: X\times I \rightarrow X$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$H(x, 0) = x \quad \text{به‌ازای } x\in X,$$

$$H(x, 1) \in A \quad \text{به‌ازای } x\in X,$$

$$H(a, t) = a \quad \text{به‌ازای } a\in A \text{ و } t\in I$$

نگاشت H به **توکشندهٔ دگردیسی قوی** موسوم است.

به‌بیانی دیگر، فضای A وقتی توکشیدهٔ دگردیسی‌قوی X است که X را بتوان تدریجاًطوری به A دگردیس کردکه هرنقطهٔ A ضمن این دگردیسی ثابت‌بماند. درانتهای این دگردیسی، یك توکشنده از X بروی A داریم‌که x را بتوی $H(x, 1)$ می‌نگارد.

مثال ۱ . نگاشت $H: (R^{n}-0)\times I \rightarrow R^{n}-0$ با ضابطهٔ

$$H(x, t)=t\frac{x}{\|x\|}+(1-t)x$$

یك توکشندهٔ دگردیسی قوی $R^{2}-0$ بروی S^{n-1} است ; این نگاشت به‌تدریج پرتوهای شعاعی ازهرنقطه را بتوی نقطهٔ تقاطع‌آن خط با S^{n-1} فرومی‌ریزد.

۳.۵. قضیه فرض‌کنیم A یك توکشیدهٔ دگردیسی قوی X باشد و $a_\circ \in A$. دراین صورت نگاشت احتوای

$$j : (A, a_\circ) \longrightarrow (X, a_\circ)$$

یك ایزومورفیسم‌گروههای بنیادی را القا می‌کند.

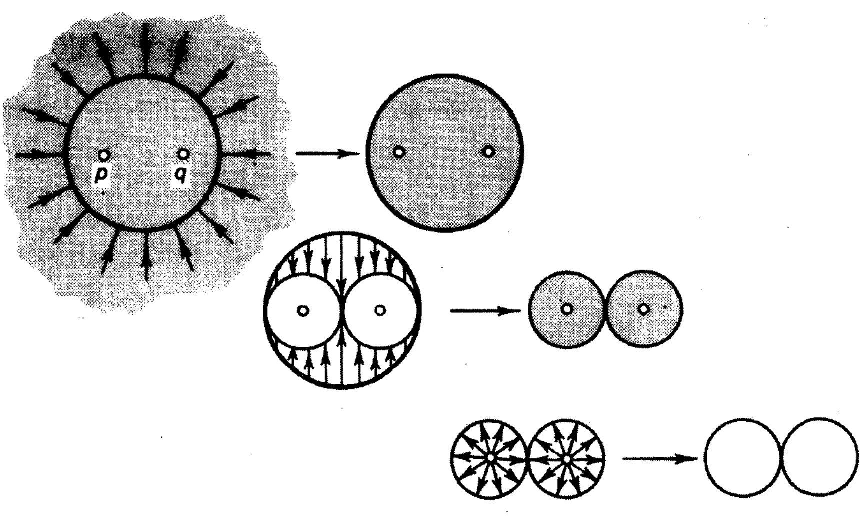
برهان؛ مشابه برهان قضیهٔ ۱.۵ است، و ما بررسی برهان آن را به خواننده محول می‌کنیم. قضیهٔ اخیر، با تبدیل فضاهای مورد بحث به فضاهای آشناتر، می‌تواند در محاسبهٔ گروههای بنیادی تعدادی از فضاها به‌کاررود. یك مثال نوعی عبارت است از :

مثال ۲. فرض‌کنیم B نمایش محور Zهـا در R^3 باشد. فضای R^3-B را در نظر می‌گیریم. $(R^2-\circ)\times\circ$ صفحهٔ سفتهٔ xy، یعنی، $(R-\circ)\times\circ$ یك توکشیدهٔ دگردیسی قوی این فضاست. نگاشت H با ضابطهٔ

$$H(x, y, z, t) = (x, y, tz)$$

یك توکشندهٔ دگردیسی قوی است؛ این نگاشت بتدریج هر خط موازی محور zها را بتوی نقطهٔ تقاطع آن با صفحهٔ xy فرومی‌ریزد. نتیجه می‌گیریم که فضای R^2-B دارای یك گروه بنیادی دوری نامتناهی است.

مثال ۳. صفحهٔ دوبارسفته : R^2-p-q را درنظرمی‌گیریم، ادعا می‌کنیم که فضای «بشکل8» یك توکشیدهٔ دگردیسی قوی این فضاست. به‌جای نوشتن ضوابط آن، به ترسیم توکشندهٔ دگردیسی اکتفا می‌کنیم؛ همان طور که درشکل ۱۹ نشان داده شده است ، حاصل



شکل ۱۹

یك دگردیسی سه مرحله‌ای است.

مثال ۴. «فضای تتا» یك توکشیدهٔ دگردیسی قوی دیگر از $R^{2}-p-q$ است،

$$\theta=S^{1}\cup(0\times[-1,\ 1]).$$

طراحی نگاشتهای مورد بحث را به‌خواننده واگذارمی‌کنیم. به عنوان یك نتیجه، فضای به شکل 8 و فضای تتا (θ) دارای گروههای بنیادی ایزومورف‌اند، اگرچه هیچیك توکشیدهٔ دگردیسی قوی ازدیگری نیستند.

البته، هنوز چیزی راجع به‌گروه بنیادی فضای به شکل 8 نمی‌دانیم، ولی بعداً خواهیم دانست.

تذکر این نکته بجاست که اگرشرط

$$H(a,\ t)=a \quad \text{به‌ازای } a\in A \text{ و } t\in I،$$

را جایگزین هریك ازشرایط ضعیفتر

$$H(a,\ t)\in A \quad \text{به‌ازای } a\in A \text{ و } t\in I،$$

یا

$$H(a,\ 1)=a \quad \text{به‌ازای } a\in A،$$

کنیم، مجدداً قضیهٔ ۳.۵ برقرار است. اما برهان در هریك ازاین حالات دشوارتر است. (تمرین ۵ در بخش ۸ــ۱۱ ملاحظه شود.) به‌هرحال، درعمل معمولاً قضیهٔ مورد استفاده همان قضیهٔ ۳.۵ است.

تمرینها

۱. ثابت کنیدکه اگر A یك توکشیدهٔ دگردیسی قوی X و B یك توکشیدهٔ دگردیسی قوی A باشدآنگاه B یك توکشیدهٔ دگردیسی قوی X است.

۲. ثابت‌کنیدکه راههای f و h در مثال ۲ از بخش ۸ــ۱ هموتوپ راهی نیستند.

۳. قضیهٔ ۲.۵ را ثابت‌کنید.

۴. قضیهٔ ۳.۵ را ثابت کنید.

۵. گروه بنیادی در هریك ازفضاهای ذیل بدیهی، دوری نامتناهی، یا ایزومورف با گروه بنیادی فضای به شکل 8 است. در هر مورد تعیین‌کنید که کدامیك از این سه شق برقرار است.

(الف) «چنبرهٔ جامد» $B^{2}\times S^{1}$.

(ب) فضای حاصل از برداشتن یك نقطه ازچنبرهٔ T.
(پ) استوانهٔ $S^1 \times I$.
(ت) استوانهٔ نامتناهی $S^1 \times R$.
(ث) فضای حاصل ازحذف قسمت نامنفی محورهای x، y، و z از R^3.
زیرفضاهای ذیل از R^2 :
(ج) $\{x \mid \|x\| > 1\}$
(چ) $\{x \mid \|x\| \geqslant 1\}$
(ح) $\{x \mid \|x\| < 1\}$
(خ) $S^1 \cup (R_+ \times 0)$
(د) $S^1 \cup (R_+ \times R)$
(ذ) $S^1 \cup (R \times 0)$
(ر) $R^2 - (R_+ \times 0)$

۶. فرض کنید $\mathbf{C}$ نمایش صفحهٔ مختلط باشد و f کمندی در $\mathbf{C} - 0$ برپایهٔ x_0.
(الف) نگاشت پوششی استاندهٔ $p: R \to S^1$ را اختیارکنید. در S^1 کمند $h(s) = f(s)/\|f(s)\|$ را درنظر بگیرید وآن را به یك راه در R مانند $\tilde{h}$ بالا ببرید. دراین‌صورت، عدد صحیحی مانند n هست که $\tilde{h}(1) = \tilde{h}(0) + n$. نشان دهید که ردهٔ هموتوپی راهی f عدد n را به صورتی یکتا مشخص می‌کند، و بالعکس. عدد صحیح n را **عدد پیچش** f نسبت به 0 می‌نامند.
(ب) قضیه. فرض‌کنید f یك کمند در $\mathbf{C} - 0$ وقطعه‌به‌قطعه مشتق‌پذیرباشد. دراین صورت، عدد پیچش f نسبت‌به 0 برابر است

$$\frac{1}{2\pi i} \int_f \frac{dz}{z}.$$

[راهنمایی: اگر $z = g(s)$ راه قطعه‌به‌قطعه مشتق‌پذیر دلخواهی در $\mathbf{C} - 0$ باشد، راه $s \to g(s)/\|g(s)\|$ را در S^1 درنظربگیرید و فرض‌کنید که θ یك بالابر آن به فضای پوششی R باشد. دراین صورت، $g(s) = \|g(s)\| e^{2\pi i \theta(s)}$. انتگرال $\int_g dz/z$ را محاسبه‌کنید.]
(پ) فرض‌کنید $b_0 = 1 + 0i$. ایزومورفیسمهای استاندهٔ ذیل موجودند،

$$\pi_1(\mathbf{C} - 0, x_0) \to \pi_1(\mathbf{C} - 0, b_0) \to \pi_1(S^1, b_0) \to Z.$$

ثابت‌کنید که عدد پیچش f با تصویر $[f]$ تحت این ایزومورفیسمها برابر است.

۷. (الف) ثابت کنید که $R^3 - 0$ همبند ساده است. [راهنمایی: به‌ازای کمندی مفروض در $R^3 - 0$ بر پایهٔ x_0 مانند f، ابتدا ثابت‌کنید که f هموتوپ راهی با کمندی

است که از تعدادی متناهی از قطعه خطهای مستقیمی که هیچیك از آنهـا با قطعه خط واصل بین x_0 و مبدأ همصفحه نیستند، تشکیل شده است.]
(ب) ثابت کنید S^2 همبند ساده است.

۸-۶ گروه بنیادی S^n

اکنون با اثبات اینکه S^n به‌ازای $n \geqslant 2$ همبند ساده است، گروه بنیادی S^n را محاسبه می‌کنیم. طرح برهانی برای حالت $n = 2$ را در تمرین ۷ بخش قبل خلاصه کرده‌ایم. در اینجا برهان متفاوتی، به کمك قضیه‌ای که به‌هرحال بعداً لازم خواهد شد، می‌آوریم.

۱.۶. قضیه (قضیه ون کمپن[1] در حالت خاص). فرض‌کنیم $X = U \cup V$، که‌در اینجا U و V در X بـازنـد و $U \cap V$ همبند راهی است. x_0 را نقطه‌ای از $U \cap V$ اختیار کنید. اگر هر دوتابع احتوای

$$i : (U, x_0) \longrightarrow (X, x_0), \quad j : (V, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

هومومرفیسمهای صفرگروههای بنیادی را القاکنند آنگاه $\pi_1(X, x_0) = 0$.

توجه کنید که اگر U و V همبند ساده باشند آنگاه i_* و j_* هر دو الزامـاً همو-مورفیسمهای صفرنـد. این همان مطلبی است که درقضیهٔ ذیل به آن نیاز داریم. دراثبات قضیهٔ جداسازی ژوردان (بخش ۸-۱۲) نتیجهٔ کلیتری احتیاج خواهیم داشت.

برهان. فرض‌کنیم $f : I \to X$ کمندی بر پایهٔ x_0 باشد. ثابت می‌کنیم که f با یك کمند ثابت هموتوپ راهی است.

مرحلهٔ ۱. بنابر لم عدد لبگ، زیر تقسیمی بر بازهٔ $[0, 1]$، مانند

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1,$$

موجود است که به‌ازای هر i، مجموعهٔ $f([a_{i-1}, a_i])$ کاملاً در یکی از مجموعه‌های U یـا V قرار می‌گیرد. در میان همهٔ این زیرتقسیمها، آن زیرتقسیمی را بر می‌گزینیم که n، یعنی تعداد زیر بازه‌های آن، مینیمال باشد. در این صورت، نتیجه می‌شود که به‌ازای هر i نقطهٔ $f(a_i)$ در $U \cap V$ قرار دارد.
مثلاً، فـرض‌کنیم $f(a_i) \notin U$. در این صورت، هیچکـدام از مجموعـه‌هـای $f([a_{i-1}, a_i])$ و $f([a_i, a_{i+1}])$ نمی‌توانندکاملاً در U قرارگیرند. بنابراین، هردو باید کاملاً در V باشند. باحذف نقطهٔ a_i از این تقسیمات، زیرتقسیم دیگری برای بـازهٔ $[0, 1]$ با این خاصیت به‌دست می‌آید که تصویر هریك از زیر بازه‌ها، در U یـا در V قرار دارد، و این با مینیمال بودن n تناقض دارد. پس، $f(a^i) \in U$.

1. Van Kampen

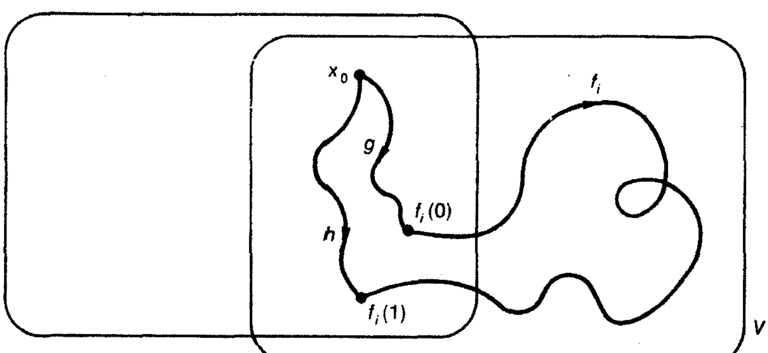
مرحلهٔ ۲ . تحدید f را به بازهٔ $[a_{i-1}, a_i]$ درنظر می‌گیریم. این تحدید را با تعریف

$$f_i(s)=f((1-s)a_{i-1}+sa_i) \qquad \text{به‌ازای } s\in[0, 1]،$$

برپایهٔ بازهٔ $[0, 1]$ پارامتری می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که f_i، باهرراهی که کاملاً در U قرار دارد، هموتوپ راهی است.

البته‌اگر خود f_i در U قراربگیرد انجام هیچ‌کاری ضرورت ندارد. دراین‌حالت، F_i را هموتوپی بدیهی $F_i(s, t)=f_i(s)$ از f_i به‌خودش تعریف می‌کنیم.

اگر f_i در U قرار نداشته باشد آنگاه باید کاملاً در V قرارگیرد. بنا برخاصیت همبندی راهی $U \cap V$، راههای g و h را در $U \cap V$ از نقطهٔ پایه‌ای x_0، بترتیب، به $f_i(0)$ و $f_i(1)$ انتخاب می‌کنیم. (شکل ۲۰ ملاحظه شود.) ترکیب $\bar{h} * (g * f_i)$ را، که کمندی است در V برپایهٔ x_0 درنظر می‌گیریم. این کمند، تحت نگاشت احتوای j، بتوی کمندی در X برپایهٔ x_0 بدل می‌شود. چون j_* هومومورفیسم صفر است، این کمند، در X، باکمند ثابت e_{x_0} هموتوپ راهی است. دراین صورت f_i (در X) با راه $\bar{g} * h$ هموتوپ راهی است (بنابر خواص گروهواری $*$ که در قضیهٔ ۲.۱ ثابت شد). فرض‌کنیم F_i این هموتوپی راهی باشد، دراین‌صورت F_i یك هموتوپی راهی (در X) بین f_i و راهی واقع در $U \cap V$ است.



شکل ۲۰

اینك‌هرهموتوپی‌راهی F_i راطوری‌پارامتری‌می‌کنیم که‌نگاشتی‌از $[a_{i-1}, a_i]\times I$ بتوی X به‌دست آید، سپس، با چسباندن این قطعات به یکدیگر یك هموتوپی راهی بین f وراهی که‌کاملاً در U قرار دارد، به‌دست می‌آوریم. بویژه، نگاشت $F : I\times I \rightarrow X$ را با ضابطهٔ

$$F(s,\ t)=F_i\left(\frac{s-a_{i-1}}{a_i-a_{i-1}}\ ,\ t\right) \quad \text{،}\ s\in[a_{i-1},\ a_i]\ \text{به‌ازای}$$

تعریف می کنیم. چون هرهموتوپی راهی F_i نقاط انجامی را ثابت نگه می‌دارد، F خوشتعریف‌است، ولم‌چسب، پیوستگی آن‌رامحقق می گرداند. فرض کنیم$f'(s)=F(s,1)$.

مرحله۳. ثابت کردیم که f (در X) باکمندی مانند f' که‌کاملاً در U قرار دارد هموتوپ راهی‌است. چون

$$i_*:\pi_1(U,\ x_0)\longrightarrow\pi_1(X,\ x_0)$$

هومورفیسم صفر است، کمند f' باید (در X) باکمند ثابت e_{x_0} هموتوپ راهی باشد. بنابراین به عنوان کمندهایی در X، $f\simeq_p f'\simeq_p e_{x_0}$. این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم. □

این قضیه حالت خاصی‌ازقضیهٔ مشهوری درتوپولوژی‌است موسوم به قضیهٔ ون‌کمپن؛ که درحالت کلی گروه بنیادی فضای X را برحسب گروههای بنیادی U و V و هومور-فیسمهای القایی نگاشتهای احتوای $U\cap V$ بتوی U و V بیان می‌دارد، مشروط برآنکه $U\cap V$ همبند راهی باشد. ([M] ملاحظه شود.)

۲.۶. قضیه به‌ازای $n\geqslant 2$، کرهٔ n بعدی S^n همبند ساده است.

برهان. فرض کنیم $p=(0,\ \ldots,\ 0,\ 1)\in R^{n+1}$ «قطب شمال» S^n باشد، و $q=(0,\ \ldots,\ 0,\ -1)$ «قطب جنوب» آن.

مرحلهٔ ۱. ابتدا ثابت می کنیم که S^n-p با R^n هومئومورف است.
فرض کنیم $x=(x_1,\ \ldots,\ x_{n+1})$ نقطه‌ای از S^n متمایز از p باشد. خط‌مستقیمی راکه در R^{n+1} به‌وسیلهٔ x و p مشخص‌می‌شود درنظرمی گیریم، وآن راباصفحهٔ $x_{n+1}=0$ قطع می‌دهیم. $f(x)$ را نمایش این نقطهٔ تقاطع اختیار می کنیم. نگاشت حاصل $f:S^n-p\to R^n$ را **تصویر گنجنگاری** می نامند.
دقیقتر آنکه، نگاشت f را با ضابطهٔ

$$f(x)=\frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

تعریف می کنیم. پیوستگی f بدیهی است. برای اثبات هومئومورفیسم بودن f، ثابت می کنیم که نگاشت $g:R^n\to S^n-p$ با ضابطهٔ

$$g(y_1,\ldots,\ y_n)=(ty_1,\ ty_2,\ \ldots,\ ty_n,\ 1-t),$$

معکوس f است، که درآن، $t=2/(1+(y_1)^2+\cdots+(y_n)^2)$.

چون S^n-p با S^n-q تحت نگاشت انعکاسی

$$\rho(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})=(x_1, \cdots, x_n, -x_{n+1}),$$

هومئومورف‌اند، S^n-q نیز با R^n هومئومورف می‌شود.

مرحلهٔ ۲. اکنون فرض کنیم $U=S^n-p$ و $V=S^n-q$. فضای S^n برابر اجتماع مجموعه‌های باز U و V است. بعلاوه، U و V همبند ساده‌اند، زیرا با R^n هومئومورف‌اند. اگر ثابت کنیم که $U\cap V$ همبند راهی است آنگاه می‌توانیم همبندساده بودن S^n را از قضیهٔ ۱.۶ نتیجه بگیریم.

مقطع U و V عبارت است از مجموعهٔ S^n-p-q. برای اثبات اینکه این مجموعه همبند است، توجه کنید که مجموعهٔ اخیر تحت تصویر گنجنگاری با R^n-0 هومئومورف است، و به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که R^n-0 همبند راهی است: هر نقطهٔ x از R^n-0 را می‌توان با خطی مستقیم به‌نقطهٔ $x_0=(1, 0, \dots, 0)$ وصل کرد، مگر نقاطی راکه به صورت $(a, 0, \dots, 0)$ هستند و در آن $a<0$. در چنین حالتی می‌توانیم خط مستقیم از x به $x_1=(0, 1, 0, \dots, 0)$ را توأم با خط مستقیم از x_1 به x_0 اختیار کنیم. (البته، دراینجا، ازاین‌امرکه $n>1$ استفاده می‌کنیم.) □

۳.۶ نتیجه اگر $n>2$، R^n-0 همبند ساده است.

برهان. بنابرقضیهٔ ۲.۵ گروههای بنیادی S^{n-1} و R^n-0 ایزومورف هستند. □

۴.۶ نتیجه به‌ازای $n>2$، R^n و R^2 هومئومورف نیستند.

برهان. فضای حاصل‌ازحذف یك‌نقطه از R^n فضایی است همبند ساده، وحال‌آنکه درمورد R^2 چنین نیست. □

این‌نتیجه تعمیمی به‌ابعاد بالاتر دارد؛ اگر $n\neq m$ آنگاه R^n و R^m هومئومورف نیستند. اما برهان به وسایلی بیشتر از آنچه که ما در توپولوژی جبری به دست آورده‌ایم نیاز دارد.

تمرینها

۱. فرض کنید فضای X اجتماع دونسخهٔ از S^2 باشدکه یك نقطهٔ مشترك دارند. گروه بنیادی X چیست؟ درستی‌پاسخ خود را ثابت کنید. [احتیاط کنید! اجتماع دوفضای همبند ساده‌که یك نقطهٔ مشترك دارند الزاماً همبند ساده نیست. صفحهٔ ۷۷ از [S] ملاحظه شود.]

۲. فرض کنید فضای X اجتماع دو مجموعهٔ باز U و V باشد؛ و فرض کنید $U\cap V$ همبند راهی باشد و $x_0\in U\cap V$. مانند قضیهٔ ۱.۶، i و j را نگاشتهای احتوا

بگیرید. اگر بدانید که j_* هوموموررفیسم صفر است راجع به i_* چه می‌توانید بگوئید؟

۳. چه ایرادی به «برهان» ذیل برای اینکه S^2 همبند ساده باشد وارد است. فرض کنید f کمندی در S^2 بر پایهٔ x_0 باشد. نقطهٔ p از S^2 را که در تصویر f قرار ندارد انتخاب کنید. چون $S^2 - p$ با R^2 هومئومورف و R^2 همبند ساده است، کمند f با کمند ثابت هموتوپ راهی است.

۸-۷ گروههای بنیادی سطوح

یادآوری می کنیم که یك سطح فضایی است هاوسدورف با پایه‌ای شمارا، که هر نقطهٔ آن همسایگیی دارد که با زیرمجموعهٔ بازی از R^2 هومئومورف است. سطوح درقسمتهای مختلف ریاضیات مورد توجه هستند، از جمله در هندسه، توپولوژی، وآنالیز مختلط. آنچه که ما در اینجا انجام می‌دهیم، درنظر گرفتن چهار سطح است ــ سطح S^2، سطح تصویری p^2، چنبرهٔ T، و چنبرهٔ مضاعف T_2 ــ و با مقایسهٔ گروههای بنیادی آنها ثابت می کنیم که این سطوح هومئومورف نیستند.

در واقع، گروه بنیادی‌را می‌توان برای رده‌بندی کردن همهٔ سطوح فشرده به‌کاربرد؛ ولی ما در این جهت تلاشی نخواهیم کرد. خوانندگان علاقه‌مند را به فصل چهارم [M] مراجعه می‌دهیم.

ابتدا چنبره را درنظرمی گیریم. برای محاسبهٔ گروه بنیادی‌آن، به قضیه‌ای در مورد گروه بنیادی فضای حاصل‌ضربی نیازداریم.

۷.۱۰ قضیه $\pi_1(X\times Y,\ x_0\times y_0)$ با $\pi_1(X, x_0)\times\pi_1(Y, y_0)$ ایزومورف است.

برهان. یادآوری می کنیم که اگر A و B گروههایی باعمل«$\cdot$»درآن باشند آنگاه حاصل‌ضرب دکارتی‌آنها، یعنی $A\times B$، با عمل

$$(a\times b)\cdot(a'\times b')=(a\cdot a')\times(b\cdot b')$$

یك گروه است. همچنین، اگر $h: C\to A$ و $k: C\to B$ هومومورفیسمهای گروه باشند آنگاه نگاشت $\Phi: C\to A\times B$ باضابطهٔ $\Phi(c)=h(c)\times k(c)$ یك هومومورفیسم گروه است.

حال فرض کنیم که $p: X\times Y\to X$ و $q: X\times Y\to Y$ نگاشتهای تصویری باشند. اگرنقاط پایه راکه درصورت قضیه معین شده است به‌کار ببندیم، هومومورفیسمهای القایی

$$p_*:\pi_1(X\times Y,\ x_0\times y_0)\longrightarrow\pi_1(X,\ x_0),$$

$$q_*:\pi_1(X\times Y,\ x_0\times y_0)\longrightarrow\pi_1(Y,\ y_0),$$

حاصل می‌شوند. هومومورفیسم

$$\Phi : \pi_1(X\times Y,\ x_0\times y_0) \longrightarrow \pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,\ y_0)$$

را با ضابطهٔ

$$\Phi([f]) = p_*([f])\times q_*([f]) = [p\circ f]\times[q\circ f]$$

تعریف می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که Φ یك ایزومورفیسم است.

نگاشت Φ پوشاست. فرض کنیم $g : I \to X$ کمندی بر پایهٔ x_0 و $h : I \to Y$ کمندی بر پایه y_0 باشند. ثابت می‌کنیم که عضو $[g]\times[h]$ درحوزهٔ مقادیر Φ قرار دارد. نگاشت $f : I \to X\times Y$ را با ضابطهٔ

$$f(s) = g(s)\times h(s)$$

تعریف می‌کنیم. دراین صورت f کمندی است در $X\times Y$ بر پایهٔ $x_0\times y_0$، وهمان‌طور که می‌خواستیم

$$\Phi([f]) = [p\circ f]\times[q\circ f] = [g]\times[h].$$

هستهٔ Φ صفراست. فرض کنیم $f : I \to X\times Y$ کمندی باشد در $X\times Y$ بر پایهٔ $x_0 \times y_0$، و $\Phi([f]) = [p\circ f]\times[q\circ f]$ عضوخنثای آن باشد. بدین معنی که $p\circ f \simeq_p e_{x_0}$ و $q\circ f \simeq_p e_{y_0}$؛ G و H را هموتوپیهای راهی مربوطه اختیار می‌کنیم. دراین صورت، نگاشت $F : I\times I \to X\times Y$ با ضابطهٔ

$$F(s,\ t) = G(s,\ t)\times H(s,\ t)$$

هموتوپی مطلوب بین f وکمند ثابت برپایهٔ $x_0\times y_0$ است. □

۲۰۷. نتیجه گروه بنیادی چنبرهٔ $T = S^1\times S^1$ باگروه $Z\times Z$ ایزومورف است.

اکنون صفحهٔ تصویری را تعریف و گروه بنیادی‌آن را محاسبه می‌کنیم.

تعریف . صفحه تصویری p^2 فضایی‌است‌که از S^2 به‌وسیلهٔ یکی گرفتن هر نقطهٔ x با نقطهٔ متقاطرآن، یعنی $-x$، به‌دست می‌آید.

به‌بیان رسمیتر، با قرار دادن $x\sim x$ و $x \sim (-x)$ یك رابطهٔ هم ارزی در S^2 تعریف می‌کنیم؛ دراین صورت، p^2 مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی‌است. فرض کنیم که‌نگاشت $p : S^2 \to p^2$ هرنقطهٔ x را به ردهٔ هم‌ارزی آن بنگارد. توپولوژی p^2 را چنین تعریف می‌کنیم؛ مجموعهٔ V در p^2 باز است اگرو تنها اگر $p^{-1}(V)$ در S^2 باز باشد.
صفحهٔ تصویری موضوع اصلی هندسهٔ تصویری است، درست به گونه‌ای که صفحهٔ

اقلیدسی $R^{۲}$ درهندسهٔ اقلیدسی معمولی است. توپولوژیدانهـا عمدتاً به‌عنوان مثالی از یك سطح به‌آن علاقه‌مند هستند.

۳.۰۷ قضیه صفحهٔ تصویری $P^{۲}$ یك سطح است و $p : S^{۲} \to P^{۲}$ نگاشتی پوششی.

برهان. ابتـدا ثابت می‌کنیم که p نـگاشتی بـاز است. فرض‌کنیم U در $S^{۲}$ باز باشد. نگاشت متقاطر $a : S^{۲} \to S^{۲}$ با ضابطه $a(x) = -x$ یك هومئومورفیسم $S^{۲}$ است؛ بنابراین، $a(U)$ در $S^{۲}$ بازاست. ازآنجا که

$$p^{-۱}(p(U)) = U \cup a(U),$$

این مجموعه نیز در $S^{۲}$ باز است. درنتیجه، بنابرتعریف، $p(U)$ در $P^{۲}$ باز است.

اکنون ثابت می‌کنیم که p یك نگاشت پوششی‌است. به ازای نقطهٔ مفروض y از $P^{۲}$، نقطهٔ x را از $p^{-۱}(y)$ انتخاب می‌کنیم. سپس، با به‌کاربردن d (متری اقلیدسی $R^{۳}$) ε - همسایگیی از x مـانند U در $S^{۲}$ انتخاب مـی‌کنیم به‌طوری‌کـه $\varepsilon < ۱$. در این صورت، U شامل هیچ زوج از نقـاط متقاطر $S^{۲}$ مانند $\{z, a(z)\}$ نیست، زیرا $d(z, a(z)) = ۲$. درنتیجه، نگاشت

$$p : U \longrightarrow p(U)$$

دوسویی است. ازآنجا که p پیوسته وباز است نتیجه می‌شودکه هومئومورفیسم‌است. به طریقی مشابه

$$p : a(U) \to p(a(U)) = p(U)$$

نیز هومئومورفیسم‌است. بنابراین مجموعهٔ $p^{-۱}(p(U))$ برابراجتماع دومجموعهٔ بازجدا از هم U و $a(U)$ است، که هریك به‌وسیلهٔ p به‌طور هومئومورفیك بروی $p(U)$ نگاشته می‌شود.

دراین صورت، $p(U)$ یك همسایـگی نقطهٔ $p(x) = y$ است کـه به‌وسیلهٔ p به‌طور هموار پوشانده می‌شود. بنابراین p یك نگاشت پوششی‌است.

چون $S^{۲}$ پایه‌ای شمارا مانند $\{U_n\}$ دارد، $\{p(U_n)\}$ پایهٔ شمارای فضای $P^{۲}$ است.

ثابت می‌کنیم که $P^{۲}$ هاوسدورف است. فرض‌کنید $y_۱$ و $y_۲$ دو نقطهٔ $P^{۲}$ باشند. مجموعهٔ $p^{-۱}(y_۱) \cup p^{-۱}(y_۲)$ از چهار نقطه تشکیل می‌شود؛ فرض‌کنیم ۲ε مینیموم فواصل بین‌آنها باشد. $U_۱$ را ε- همسایگی یکی‌از نقاط $p^{-۱}(y_۱)$ و $U_۲$ را ε- همسایگی یکی از نقاط $p^{-۱}(y_۲)$ اختیارمی‌کنیم. دراین صورت،

$$U_۲ \cup a(U_۲), \quad U_۱ \cup a(U_۱)$$

جدا از هم هستند. نتیجه اینکه $p(U_۱)$ و $p(U_۲)$ در $P^{۲}$ همسایگیهای جدا از همی بترتیب، برای $y_۱$ و $y_۲$ هستند.

چون S^2 یك سطح است و هر نقطهٔ P^2 همسایگیی هومئومورف با زیرمجموعهٔ بازی از S^2 دارد، فضای P^2 یك سطح است. □

۴.۷. نتیجه $\pi_1(P^2, y)$ یك‌گروه مرتبهٔ ۲ است.

برهان. تصویر $p : S^2 \to P^2$ یك نگاشت پوششی‌است. چون S^2 همبند ساده است، می‌توان قضیهٔ ۵.۴ را به‌کار بست که می‌گوید تناظری دوسویی بین $\pi_1(P^2, y)$ و مجموعهٔ $p^{-1}(y)$ موجود است. ازآنجاکه $p^{-1}(y)$ مجموعه‌ای دو عضوی است، $\pi_1(P^2, y)$ یك‌گروه مرتبهٔ ۲ است.

البته، هرگروه مرتبهٔ ۲ با Z_2، یعنی اعداد صحیح به‌هنگ ۲، ایزومورف است. □

به طریقی مشابه، به ازای هر n از Z_+، می‌توان P^n را به‌صورت فضای حاصل از S^n به وسیلهٔ یکی‌گرفتن هر نقطهٔ x با نقطهٔ متقاطرش، یعنی $-x$، تعریف کرد؛ این فضارا **فضای تصویری n بعدی** می‌نامند. برهان قضیهٔ ۳.۷ بدون تغییری برای اثبات این مطلب‌که نگاشت تصویر $p : S^n \to P^n$ نگاشتی پوششی است می‌آوریم. سپس، چون S^n به ازای $n \geqslant 2$ همبند ساده است، نتیجه می‌شودکه $\pi_1(P^n, y)$ به ازای $n \geqslant 2$ یك گروه دوعضوی است. تشخیص چگونگی وضعیت را درحالت $n = 1$ به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

تاکنون فضایی نیافته‌ایم‌که گروه بنیادی‌آن آبلی نباشد. اینك این‌کاستی را جبران می‌کنیم.

۵.۷. لم گروه بنیادی فضای به‌شکل 8 آبلی نیست.

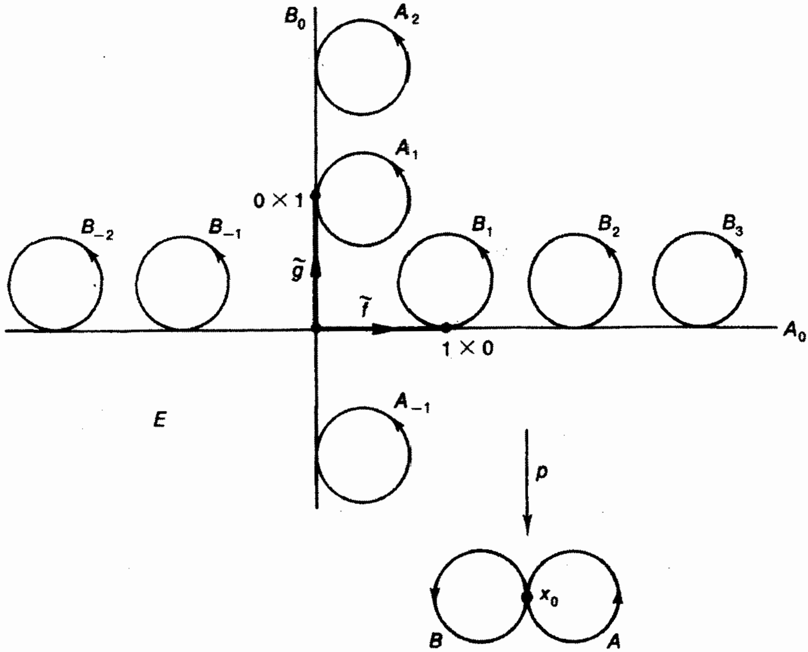
برهان. شکل 8 اجتماع دو دایره A و B است‌که یك‌نقطهٔ مشترك مانند x_0 دارند. اکنون به‌توصیف فضای پوششی خاصی، مانند E، برای فضای به‌شکل 8 می‌پردازیم.

فضای E زیرفضایی‌است از صفحهٔ متشکل از محور x ها و محور y ها توأم با دوایرکوچکی‌که درنقاط صحیح ناصفر به این محورها مماس‌اند. شکل ۲۱ ملاحظه شود.

نگاشت تصویری p محور xها را به دور دایرهٔ A و محور yها را به دور دایره B می‌پیچد؛ در هرمورد نقاط صحیح به وسیلهٔ p به‌نقطهٔ پایه‌ای x_0 نگاشته می‌شوند. هردایرهٔ مماس به‌محور xها دریك نقطهٔ‌صحیح به‌وسیلهٔ p به‌طورهومئومورفیك بروی B و هردایرهٔ مماس به محور y ها دریك نقطهٔ صحیح به‌طور هومئومورفیك بروی A نگاشته می‌شود؛ درهرمورد، نقاط‌تماس به‌وسیلهٔ p به‌نقطهٔ‌پایهٔ x_0 برده می‌شوندو می‌توان با محاسبهٔ ذهنی بررسی‌کردکه p نگاشتی پوششی است، بررسی این امر را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

درصورت تمایل، می‌توانستیم ضوابط این‌نگاشت رابنویسیم، ولی به‌نظر ماپیگیری توصیف غیر رسمی آن آسانتر است.

اینك راه $\tilde{f} : I \to E$ را باضابطهٔ $\tilde{f}(s) = s \times 0$ اختیارمی‌کنیم، که درطول



شکل ۲۱

محور xها از مبدأ به نقطهٔ $\circ \times ۱$ می‌رود. همچنین، راه $\tilde{g} : I \longrightarrow E$ را با ضابطهٔ $\tilde{g}(s) = \circ \times s$ برمی‌گزینیم که درطول محور y ها از مبدأ به‌نقطهٔ $۱ \times \circ$ می‌رود. فرض کنیم $f = p\circ\tilde{f}$ و $g = p\circ\tilde{g}$ ؛ در این صورت f و g کمندهایی هستند در فضای به شکل 8 برپایهٔ $x_\circ$ که، بترتیب، دور دایره‌های A و B می‌گردند. ادعا می‌کنیم که $f * g$ و $g * f$ هموتوپ راهی نیستند، که بنابر آن گروه‌بنیادی فضای به‌شکل 8 آبلی نمی‌شود.

برای اثبات این مدعا، هر یك از اینها را به راهی در E، که نقطهٔ آغازی آن مبدأ است، بالا می‌بریم. راه $f * g$ به‌راهی بالا می‌رود که درطول محور x ها از مبدأ به نقطهٔ $\circ \times ۱$ می‌رود وسپس‌یکبار هم‌دور دایرهٔ مماس برمحور x ها درنقطهٔ $\circ \times ۱$ می گردد. ازطرف دیگر، راه $g * f$ به راهی در E بالا می‌رود که درطول محور y ها ازمبدأ به $۱ \times \circ$ می‌رود و سپس یکبار هم دور دایرهٔ مماس به‌محور y ها در $۱ \times \circ$ می‌گردد. چون نقاط انجامی راههای بالابر یکی نیستند، $f * g$ و $g * f$ نمی‌توانند هموتوپ راهی باشند. □

گروه بنیادی فضای به‌شکل 8، در واقع، گروهی است که جبردانان آن را «گروه آزاد با دو مولد» می‌نامند. ولی، ما این نکته را ثابت نمی‌کنیم.

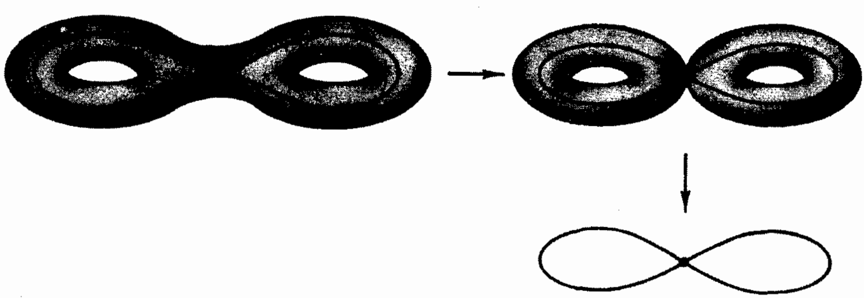
۶.۷. قضیه گروه بنیادی چنبرهٔ مضاعف $T_۲$ آبلی نیست.

برهان. چنبرهٔ مضاعف $T_۲$ سطحی است که چنین به‌دست می‌آید: گردهٔ باز کوچکی را از دو چنبره حذف می‌کنیم و سپس قسمتهای باقیمانده را درمحل لبه‌هایشان به‌هم می‌چسبانیم. ادعا می‌کنیم که فضای به شکل 8 یك توکشیدهٔ $T_۲$ است. این حقیقت مستلزم این است که نگاشت احتوای j همومورفیسم یك به‌یکی مانند

$$j_* : \pi_۱(8, x_۰) \longrightarrow \pi_۱(T_۲, x_۰)$$

القا می‌کند به‌طوری که $\pi_۱(T_۲, x_۰)$ آبلی نیست.

می‌توان معادلات توکشندهٔ $r : T_۲ \rightarrow 8$ را نوشت، ولی آسانتر آن است که آن را به‌نحوی که ما درشکل ۲۲ رسم کرده‌ایم تجسم کرد؛ ابتدا دایرهٔ نقطه چین شده را به‌یك نقطه فرو می‌ریزیم که حاصل آن دوچنبره است با یك نقطهٔ مشترك. سپس هریك ازدوچنبره را بروی «دوایرنصف‌النهاری» آنها فرو می‌ریزیم.



شکل ۲۲

۷.۷. نتیجه سطوح $S^۲$، $P^۲$، T، و $T_۲$ از لحاظ توپولوژیك متمایزند.

تمرینها

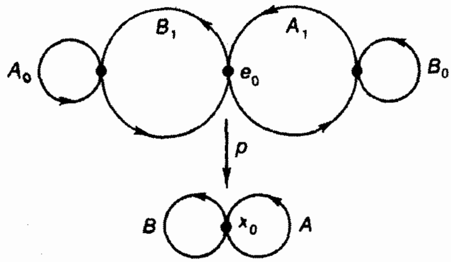
۱. گروه‌بنیادی «چنبرهٔ جامد» $S^۱ \times B^۲$ و فضای حاصل‌ضربی $S^۱ \times S^۲$ رامحاسبه‌کنید.

۲. فرض‌کنید X فضای خارج قسمتی حاصل از $B^۲$ باشد که با یکی گرفتن هرنقطهٔ $S^۱$ مانند x با نقطهٔ متقاطر آن، یعنی $-x$، به‌دست می‌آید. ثابت‌کنید که X با صفحهٔ تصویری $P^۲$ هومئومورف است.

۳. فرض‌کنید $p : E \rightarrow 8$ نگاشتی‌باشد که دربرهان لم ۵.۷ ساخته شد. همچنین‌فرض کنید E' زیرفضای E متشکل از اجتماع محور x ها و محور y ها باشد. ثابت‌کنید

که $p|E'$ یك نگاشت پوششی نیست.

۴. نگاشت پوششی شکل۲۳ را در نظر بگیرید. در آن p دایرهٔ A_1 را دوبار دور A، و دایرهٔ B_1 را دوبار دور B می‌پیچاند؛ p دایره‌های A_0 و B_0 را، بترتیب، به طور هومئومورفیك روی A و B می‌نگارد. با به کارگرفتن این فضای پوششی ثابت کنید که گروه بنیادی فضای به‌شکل 8 آبلی نیست.



شکل ۲۳

۵. به‌ازای گروه مفروض G و فضای X، یك عمل G بر X تابعی است که به هر عضو α از G، نگاشتی پیوسته مانند

$$h_\alpha : X \longrightarrow X$$

به‌طریقی نظیر می‌کند که

(۱) اگر e عضو خنثای G باشد آنگاه h_e نگاشت همانی X است.

(۲) اگر $\alpha = \beta \cdot \gamma$ آنگاه $h_\alpha \doteq h_\beta \circ h_\gamma$.

(الف) ثابت کنید که توابع $h_n : R \to R$ باضابطهٔ $h_n(x) = x + n$ یك عمل‌از اعداد صحیح Z بر R تعریف می‌کنند.

(ب) ثابت کنید که دوران S^2 حول‌محور Z ها یك عمل از گروه S^1 (اعداد مختلط با قدرمطلق ۱) بر کرهٔ S^2 تعریف می‌کند.

(پ) به‌ازای n مفروض،ثابت کنید که دوران S^2 حول محور Z ها به‌اندازهٔ زوایای متفاوتی که مضارب $2\pi/n$ هستند یك عمل Z_n (گروه جمعی‌اعداد صحیح‌به‌پیمانهٔ n) بر S^2 تعریف می‌کند.

(ت) ثابت کنید که نگاشت متقاطر S^2 یك عمل‌گروه Z_2 بر S^2 تعریف می‌کند.

۶. به ازای یك عمل مفروض G بر X، **فضای مداری** (X/G) را این طور تعریف می‌کنیم: X/G فضای خارج قسمتی X است که با رابطهٔ هم ارزی ذیل مشخص

می‌شود: $x \sim x'$ در صورتی که αیی در G وجود داشته باشد که $x' = h_\alpha(x)$. فضاهای مداری حاصل از اعمالی که در قسمتهای (الف) ـ (ت) تمرین ۵ تعریف شدند، با فضاهای مأنوسی هومئومورف‌اند. آنها چه فضاهایی هستند؟

۷. یك عمل G بر X را **بدون نقطهٔ ثابت** گویند درصورتی که تنها نگاشت h_α که دارای نقطهٔ ثابت است نگاشت h_e باشد. کدامیك از اعمالی که در تمرین ۵ تعریف شدند بدون نقطهٔ ثابت هستند؟

۸. قضیه. یك عمل گروه متناهی G برفضای همبندراهی X مفروض است؛ فرض کنید عمل مورد نظربدون نقطهٔ ثابت باشد. اگر X همبند ساده باشدآنگاه $\pi_1(X/G, x_0)$ با G ایزومورف است.

۹. S^3 را فضای همهٔ زوجهای مرتب اعداد مختلط مانند (z_1, z_2) درنظر بگیرید که $|z_1|^2+|z_2|^2=1$. به‌ازای دو عدد صحیح مفروض n و k که نسبت بهم اول‌اند نگاشت $h: S^3 \to S^3$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$h(z_1, z_2)=(z_1e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad z_2e^{\frac{2\pi ik}{n}}).$$

(الف) ثابت کنید که نگاشتهای h و $h^2=h\circ h$ و h^3 و ... می‌توانندبرای تعریف یك عمل Z_n بر S^3 که بدون نقطهٔ ثابت است به‌کار روند. فضای مداری $L(n, k)$ را **فضای عدسی** گویند.

(ب) ثابت کنید که $L(n, k)$ یك بسلای ۳ بعدی‌فشرده است.

(پ) با فرض تمرین ۸، ثابت کنید که اگر $L(n, k)$ و $L(n', k')$ هومئومورف باشند آنگاه $n=n'$. (درواقع، $L(n, k)$ و $L(n', k')$ هومئومورف‌اند اگر وتنها اگر $n=n'$ و حداقل یکی ازدو رابطهٔ $k\equiv k' \pmod n$ یا $kk'\equiv 1 \pmod n$ برقرار باشند). برهان آن چندان آسان نیست.

۸ـ۸ نگاشتهای اساسی و غیراساسی

قبلاً گروه بنیادی رابرای مطالعه درمسئلهٔ تشخیص هومئومورف بودن یا نبودن دوفضا به‌کار گرفته‌ایم. اینك آن‌را برای مطالعه مسئلهٔ‌دیگری در توپولوژی اعمال می‌کنیم؛ یعنی، برای تشخیص اینکه دونگاشت مفروض‌از یك فضا به‌فضای دیگر هموتوپ هستند یا خیر.

ساده‌ترین نوع چنین مسئله‌ای تشخیص هموتوپ بودن یا نبودن نگاشتی مفروض مانند $h: X \to Y$ با نگاشت ثابت‌است. ثابت خواهیم کردکه اگر h با یك نگاشت‌ثابت هموتوپ باشد آنگاه h_*، همومورفیسم‌القایی گروههای بنیادی، همومورفیسم بدیهی‌است. (اگر X دایرهٔ S^1 باشد، عکس این حکم نیز برقرار است؛ تمرین ۲ ملاحظه شود.)

مسئلهٔ کلیتر تشخیص هموتوپ‌بودن دو نگاشت دلخواهی مانند $h, k: X \to Y$ است که به‌بخش بعدی‌موکول می‌کنیم.

تعریف. نگاشتی مانند $h: X \to Y$ را **غیراساسی** گوییم هرگاه h با یك نگاشت ثابت هموتوپ باشد. درغیراین‌صورت، آن‌را **اساسی** گوییم.

۸.۱۰ لم فرض‌کنیم $h: S^1 \to Y$. دراین‌صورت احکام ذیل بایکدیگر معادل‌اند:

(۱) h غیراساسی است.

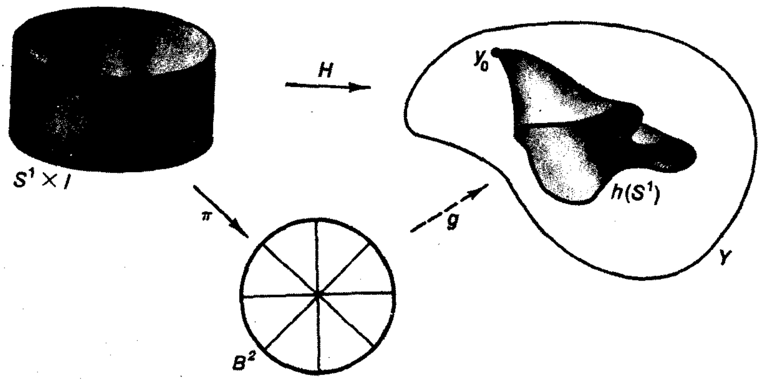
(۲) h می‌تواند به‌نگاشتی پیوسته مانند $g: B^2 \to Y$ گسترش یابد.

برهان. (۲)$\Longleftarrow$(۱) فرض کنیم $H: S^1 \times I \to Y$ هموتوپی بین h و نگاشت ثابت k باشدکه S^1 را به y_0 می‌برد. همچنین نگاشت $\pi: S^1 \times I \to B^2$ را با ضابطهٔ

$$\pi(x, t) = (1-t)x$$

اختیار می‌کنید. دراین‌صورت، π نگاشتی دوسویی بین $S^1 \times [0, 1)$ و $B^2 - 0$ است؛ همچنین، π مجموعهٔ $S^1 \times I$ را به نقطهٔ 0 می‌نگارد. (ثابت‌کنید.) چون $S^1 \times I$ فشرده است و B^2 هاوسدورف، π نگاشتی است بسته؛ یعنی، مجموعه‌های بستهٔ $S^1 \times I$ را به مجموعه‌های بستهٔ B^2 می‌برد.

نگاشت $H: S^1 \times I \to Y$ برمجموعهٔ $S^1 \times 1$ ثابت‌است. بنابراین، H نگاشتی مانند $g: B^2 \to Y$ را القا می‌کند به طوری‌که $g \circ \pi = H$. [g بدین گونه تعریف می‌شود که $g(x) = H(\pi^{-1}(x))$ درصورتی‌که $x \notin S^1$ و اگر $x \in S^1$، $g(x) = y_0$.] نگاشت g پیوسته است؛ و این از این‌امر که π نگاشت خارج قسمتی است نتیجه می‌شود. [یا می‌توان مستقیماً بدین‌گونه ثابت‌کرد که اگر C در Y بسته باشد آنگاه $H^{-1}(C)$ در $S^1 \times I$ بسته است، در نتیجه، $\pi(H^{-1}(C)) = g^{-1}(C)$ در B^2 بسته است.] نگاشت g همان گسترش مطلوب h است؛ زیرا اگر $x \in S^1$ آنگاه



شکل ۲۴

$$g(x)=g(\pi(x,0))=H(x,0)=h(x).$$

شکل ۲۴ ملاحظه شود.

$(1)\Longrightarrow(2)$. فرض کنیم $g:B^2\to Y$ یك گسترش پیوستهٔ h باشد. نگاشت $F:S^1\times I\to Y$ را باضابطهٔ $F(x,t)=g((1-t)x)$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت، F یك هموتوپی است بین h و نگاشتی ثابت. □

۲۰۸. قضیه فرض‌کنیم $h:X\to Y$. اگر h غیراساسی باشد آنگاه h_* هومومورفیسم صفر است.

برهان. ابتدا حالت $X=S^1$ را درنظر می گیریم. لم سابق را بکار می‌بریم. فرض کنیم $g:B^2\to Y$ گسترشی از h و $j:S^1\to B^2$ نگاشت احتوا باشد. دراین‌صورت، $g\circ j=h$. b_1 را نقطه‌ای از S^1 اختیار می کنیم و $y_1=h(b_1)$. هومومورفیسم القایی

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1,b_1) \arrow[rr, "h_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \pi_1(Y,y_1) \\
& \pi_1(B^2,b_1) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

را درنظر می گیریم. بنابر خواص تابعگونی هومومورفیسم القایی، داریم $h_*=g_*\circ j_*$. ولی j_* هومومورفیسم صفر است، زیرا حوزهٔ مقادیرآن گروه بدیهی است. بنابراین، h_* هومومورفیسم صفر است.

اکنون حالت کلی را در نظر می‌گیریم. فرض‌کنیم $f:I\to X$ کمندی در X بر پایهٔ x_0 باشد و $\phi:I\to S^1$ کمند استانده

$$\phi(s)=(\cos 2\pi s,\ \sin 2\pi s).$$

حال f نگاشتی مانند $k:S^1\to X$ را القا می‌کندکه با ضابطهٔ $k(a)=f(\phi^{-1}(a))$ تعریف می‌شود.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\phi"'] & X \arrow[r, "h"] & Y \\
& S^1 \arrow[u, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

بررسی پیوستگی k آسان است. بنابر مفروضات، h با یك نگاشت ثابت هموتوپ است. فرض کنیم $H:X\times I\to Y$ هموتوپی بین آنها باشد. دراین‌صورت، $h\circ k$ نیز با یك

نگاشت ثابت هموتوپ است؛ نگاشت $H'(a,t)=H(k(a)\ ,t)$ هموتوپی مطلوب است. ازبندسابق نتیجه می‌شود که $(h\circ k)_*$ هومومورفیسم صفر است. بویژه، $(h\circ k)_*([\phi])=\circ$. ولی

$$(h\circ k)_*([\phi])=[h\circ k\circ\phi]=[h\circ f]=h_*([f]).\ \square$$

به‌عنوان کاربردی از قضیهٔ فوق، قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که آن‌را در بخش ۷-۹ هنگام محاسبهٔ بعد توپولوژی ناحیه‌ای مثلثی به‌کار بردیم.

۴.۸ نتیجه فرض کنیم T یك ناحیهٔ مثلثی بسته در R^2 باشد؛ اجتماع اضلاع T را به $\mathrm{Bd\,T}$ نمایش می‌دهیم. نگاشتی پیوسته مانند $\mathrm{f:T\to Bd\,T}$ وجود ندارد که هر ضلع T را بتوی خودش بنگارد.

برهان. فرض می کنیم $f:T\to \mathrm{Bd}\,T$ یك چنین نگاشتی باشد و تناقضی استخراج می کنیم.

فرض کنیم $g:\mathrm{Bd}\,T\to\mathrm{Bd}\,T$ تحدید f باشد. چون g هرضلع T را بتوی‌خودش می‌نگارد، با نگاشت همانی هموتوپ است. درواقع، نگاشت

$$G(x,\ t)=tx+(1-t)g(x)$$

$\mathrm{Bd}\,T\times I$ را بتوی $\mathrm{Bd}\,T$ می‌نگارد. زیرا اگر x به $\mathrm{Bd}\,T$ تعلق داشته باشد آنگاه x و $g(x)$ دریك ضلع T قرار می گیرند، درنتیجه قطعه‌خط مستقیم‌واصل بین‌آنها نیز درهمان ضلع قرار می گیرد. بنابراین، G یك هموتوپی بین g و نگاشت همانی است.

اکنون این مطلب را به‌کار می گیریم که $\mathrm{Bd}\,T$ با S^1 هومئومورف است. نگاشت همانی $\mathrm{Bd}\,T$ هومومورفیسم صفر گروه بنیادی را القا می کند، پس بنابر لم سابق می‌تواند با یك نگاشت ثابت هموتوپ باشد. بنابراین، g با یك نگاشت ثابت هموتوپ نیست.

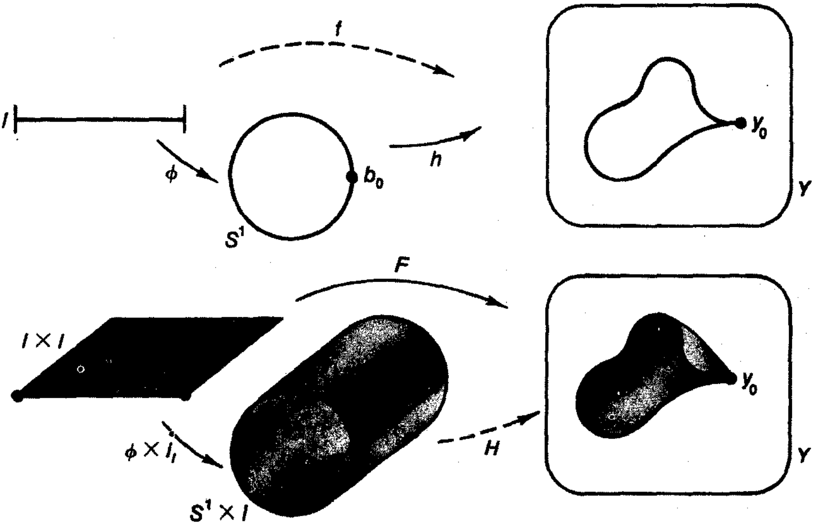
ازطرف دیگر، g به نگاشتی پیوسته از T بتوی $\mathrm{Bd}\,T$ مانند f گسترش‌پذیر است که درنتیجه g با یك نگاشت ثابت هموتوپ است. $\square$

تمرینها

۱. درقسمت ذیل برهان ساده‌ای آورده‌ایم برای آنکه اگر $h:X\to Y$ غیراساسی باشد آنگاه h_* هومومورفیسم صفر است. درکجا سفسطه می‌شود؟ فرض کنید $H:X\times I\to Y$ یك هموتوپی بین h و نگاشتی ثابت باشد. به‌ازای یك‌کمند مفروض در X بر پایهٔ $x_\circ$ مانند f نگاشتی مانند $F:I\times I\to Y$ با ضابطهٔ $F(s,\ t)=H(f(s),\ t)$ تعریف می کنیم. نگاشت F، چنانکه می‌خواستیم، یك‌هموتوپی بین $h\circ f$ و یك راه ثابت است.

۲. فرض کنید $h:S^1\to Y$. ثابت کنید که اگر h_* هومومورفیسم صفر باشد آنگاه h

غیراساسی است. [راهنمایی : فرض کنید که $\phi : I \to S^1$ کمند ثابت باشد، و $\phi \circ h = f$. ثابت کنید که یك هموتوپی راهی مانند F بین f و e_{y_0} وجود دارد، و F نگاشتی مانند $H : S^1 \times I \to Y$ را چنان القا می‌کند که $H \circ (\phi \times i_I) = F$. شکل ۲۵ را ملاحظه کنید.]



شکل ۲۵

۳. فرض کنید Y همبند راهی باشد. ثابت کنید که $\pi_1(Y, y_0) = 0$ اگر و تنها اگر هر نگاشت $h : S^1 \to Y$ غیراساسی باشد.

۴. یادآوری می‌کنیم که فضای Y را انقباض‌پذیر گوییم هر گاه نگاشت همانی $i_Y : Y \to Y$ غیراساسی باشد. ثابت کنید که اگر Y انقباض‌پذیر باشد آنگاه Y همبند ساده است.

۵. نگاشت $h : S^n \to S^m$ را **حافظ نقاط متقاطر** گوییم درصورتی که به‌ازای هر x از S^n، $h(-x) = -h(x)$.

قضیه . اگر $h : S^1 \to S^1$ حافظ نقاط متقاطر باشد آنگاه h اساسی است.

برهان .

(الف) فرض کنید $p : S^1 \to S^1$ نگاشتی باشد با ضابطهٔ $p(z) = z^2$، که در آن z یك عدد مختلط است. ثابت کنید که h نگاشتی پیوسته مانند $g : S^1 \to S^1$ را چنان القا می‌کند که $p \circ h = g \circ p$.

(ب) ثابت کنید که اگر f راهی دلخواه در S^1 از نقطه‌ای مانند x به نقطهٔ متقاطر آن $-x$ باشد آنگاه $p\circ f$ کمندی است در S^1 که بانگاشتی ثابت هموتوپ نیست.

(پ) ثابت کنید که p و g هومورفیسمهایی (هومورفیسمهای یك‌به‌یك) به گروههای بنیادی القا می‌کنند.

(ت) نتیجه بگیرید که h اساسی است.

۶. تمرین ۵ را مفروض بگیرید.

(الف) ثابت کنید که:

قضیه (قضیهٔ بورسوك ـ اولام[1] برای S^2). تابعی پیوسته وحافظ نقاط متقاطر مانند $f: S^2 \to S^1$ وجود ندارد.

[راهنمایی: خط استوای S^2 را درنظر بگیرید.]

درحالت کلی این درست است که اگر $m<n$ آنگاه تابعی پیوسته وحافظ نقاط متقاطر آن مانند $f: S^n \to S^m$ وجود ندارد. ولی برهان به ابزارهایی بیشتر از آنچه ما کسب کرده‌ایم نیازدارد.

(ب) ثابت کنید که:

قضیه. به‌ازای نگاشت پیوستهٔ مفروض $f: S^2 \to R^2$، نقطه‌ای از S^2 مانند x هست که $f(x)=f(-x)$.

[راهنمایی: خارج قسمت $(f(x)-f(-x))/\|f(x)-f(-x)\|$ را درنظر بگیرید.]

(پ) ثابت کنید که:

قضیهٔ (یك «قضیهٔ هواشناسی»). درهر لحظهٔ مفروض از زمان، یك زوج از نقاط متقاطردرسطح کرهٔ زمین وجود دارد که درآنها هم درجهٔ حرارت وهم‌فشارهوا یکی است.

(ت) ثابت کنید که:

قضیه. اگر $g: S^2 \to S^2$ پیوسته باشد و به ازای هر x، $g(x)\neq g(-x)$ آنگاه g پوشاست.

۷*. تمرین ۵ را به طریق ذیل تعمیم‌دهید: فرض کنید $h: S^1 \to S^1$ حافظ نقاط متقاطر باشد و $h(x_0)=x_1$ دراین صورت h_* مولدی از $\pi_1(S^1, x_0)$ را به یك مضرب فرد مولدی از $\pi_1(S^1, x_1)$ می‌نگارد.

۸ـ۹ قضیهٔ اساسی جبر

از میان خواص اساسی اعداد مختلط یکی این است که هرمعادلهٔ بسجمله‌ای ازدرجهٔ n با ضرایب حقیقی یا مختلط مانند

---

1 Borsuk - Ulam

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

n ریشه دارد (درصورتی که ریشه‌ها را برحسب بستایی آنها به حساب آوریم). احتمالاً اولین بار این مطلب را درجبر دبیرستانی به شما گفته‌اند؛ اگرچه بعید به نظر می‌رسد که درآن زمان برایتان ثابت کرده باشند.

در واقع، برهان نسبتاً دشوار است؛ مشکلترین قسمت آن اثبات این حکم است که هر معادلهٔ بسجمله‌ای با درجهٔ مثبت، دست‌کم یك ریشه دارد. راههای مختلفی برای آن وجود دارد. می‌توان فقط از تکنیکهای جبری استفاده کرد؛ این برهان طولانی وملال‌آور است. یا می‌توان نظریهٔ توابع تحلیلی یك متغیرمختلط را تا جایی توسعه داد که برهان یك نتیجه بدیهی قضیهٔ لیویل بشود. یا می‌توان آن را به‌عنوان یك نتیجهٔ نسبتاً سادهٔ گروه بنیادی دایره ثابت کرد؛ دراینجا همین کار را می‌کنیم.

۱.۰۹. قضیه (قضیهٔ اساسی جبر) معادلهٔ بسجمله‌ای از درجهٔ $n>0$ باضرایب حقیقی یا مختلط

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

دست‌کم یك ریشه (حقیقی یا مختلط) دارد.

برهان. مرحله۱ نگاشت $h: S^1 \to S^1$ را با ضابطهٔ $h(z)=z^n$ درنظرمی‌گیریم، که دراینجا z عددی است مختلط. ثابت می‌کنیم که هومومورفیسم القایی

$$h_*: \pi_1(S^1,\ b_0) \to \pi_1(S^1,\ b_0)$$

مولدی از این گروه دوری نامتناهی را به n برابرآن می‌برد.

فرض‌کنیم $\phi: I \to S^1$ کمند استاندهٔ

$$\phi(s)=(\cos 2\pi s,\ \sin 2\pi s)=e^{2\pi is}$$

در S^1 باشد. تصویرآن تحت h_* عبارت است ازکمند

$$h(\phi(s))=(e^{2\pi is})^n=e^{2\pi ins}=(\cos 2\pi ns,\ \sin 2\pi ns).$$

این‌کمند در فضای پوششی R به راه $s \to ns$ بالا می‌رود. بنابراین، کمند $h\circ\phi$، تحت ایزومورفیسم استاندهٔ $\pi_1(S^1,\ b_0)$ با اعداد صحیح که درآن ϕ نظیر عدد ۱ است، و کمند $h\circ\phi$ به عدد صحیح n نظیر می‌شود.

مرحلهٔ۲. اینك حالتی خاص ازاین قضیه‌را ثابت می‌کنیم. به‌ازای معادلهٔ بسجمله‌ای

$$z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0,$$

فرض می‌کنیم

$$|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|<1,$$

و ثابت می‌کنیم که این معادله ریشه‌ای در گوی واحد B^2 دارد.

فرض کنیم این معادلـه ریشه‌ای در B^2 نداشته باشد. دراین صورت می توانـیم نگاشتی مانند $g : B^2 \to R^2 - 0$ با ضابطهٔ

$$g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

تعریف کنیم.

نگاشت $f : S^1 \to R^2 - 0$ را تحدیـد g به S^1 اختیار می کنیم. چون f به نگاشت g از B^2 بتوی $R^2 - 0$ گسترش‌پذیراست، بنابرلم ۱.۸، نگاشت f غیراساسی است.

از طرف دیگر، f با نگاشت $k : S^1 \to R^2 - 0$ باضابطهٔ $k(z) = z^n$ هموتوپ است. زیرا، $F : S^1 \times I \to R^2 - 0$ که به‌صورت

$$F(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)$$

تعریف می‌شود، هموتوپی مطلوب است؛ $F(z, t)$ هیچگاه صفر نمی‌شود چون

$$\begin{aligned} |F(z, t)| &\geqslant |z^n| - |t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0)| \\ &\geqslant 1 - t(|a_{n-1}z^{n-1}| + \dots + |a_0|) \\ &= 1 - t(|a_{n-1}| + \dots + |a_0|) > 0. \end{aligned}$$

بعلاوه، نگاشت k اساسی‌است. زیرا k مساوی است با ترکیب نگاشت $h : S^1 \to S^1$، که در مرحلهٔ ۱ به‌صورت $h(z) = z^n$ تعریف شد، بانگاشت احتوای $j : S^1 \to R - 0$. چون h_* «n بار عمل‌ضرب» است و j_* ایزومورفیسم‌است، k_* همومورفیسم صفرنیست. بنابراین، k باید اساسی باشد.

ازآنجاکه f با k هموتوپ است، نگاشت f نیز باید اساسی باشد. به این‌ترتیب به تناقض می‌رسیم.

مرحلهٔ۳. اینك قضیه‌را درحالت کلی ثابت می کنیم. به‌ازای معادلهٔ بسجمله‌ای مفروض

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

عددی مثبت مانند c اختیار می کنیم و قرار می‌دهیم $x = cy$. حاصل معادلهٔ

$$(cy)^n + a_{n-1}(cy)^{n-1} + \dots + a_1(cy) + a_0 = 0$$

است یا

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{c} y^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{c^{n-1}} y + \frac{a_0}{c^n} = 0.$$

اگر $y = y_0$ ریشهٔ معادلهٔ اخیرباشدآنگاه $x_0 = cy_0$ ریشهٔ معادله اصلی‌است. بنابراین، برای تبدیل قضیه به حالت خاصی که درمرحلهٔ۲ بررسی شد فقط باید c راآن‌قدربزرگ انتخاب کنیم که

$$\left|\frac{a_{n-1}}{c}\right|+\left|\frac{a_{n-2}}{c^2}\right|+\cdots+\left|\frac{a_1}{c^{n-1}}\right|+\left|\frac{a_0}{c^n}\right|<1.$$

تمرینها

۱. به‌ازای معادلهٔ بسجمله‌ای باضرایب حقیقی یا مختلط مفروض

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0\ ,$$

ثابت کنید که اگر $|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|+|a_0|<1$ آنگاه همهٔ ریشه‌های معادله در داخل گوی واحد B^2 قرار می‌گیرند. [راهنمایی: فرض کنید

$$g(x)=1+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+a_0x^n$$

و ثابت کنید که به‌ازای هر x از B^2، $g(x)\neq 0$.]

۲. دایره‌ای به‌مرکز مبدأ بیابید که شامل همهٔ ریشه‌های معادلهٔ بسجمله‌ای $x^7+x^2+1=0$ باشد.

۸–۱۰ میدانهای برداری و نقاط ثابت

دراین بخش گروه بنیادی را در دومسئلهٔ هندسی به‌کار می گیریم. یکی مسئلهٔ مربوط به وجود میدانهای برداری مماس به‌سطوحی مفروض است، و دیگری به «مسئلهٔ نقطهٔ ثابت» مربوط است: به ازای فضای مفروض X، آیا هرنگاشت پیوسته مانند $f:X\to X$ الزاماً نقطهٔ ثابتی دارد؟

ما فقط بعضی از قضایای ساده‌تر را به‌دست خواهیم آورد. قضایای عمیقتر، از جمله آنهایی راکه در تحقیقات جاری مورد توجه‌اند، خیلی بیشتر از آنچه که تا به‌حال مطالعه کرده‌ایم نیازمند ابزارهای توپولوژی جبری‌اند.

۱.۱۰. قضیه به ازای یك میدان برداری ناصفر بر B^2، نقطه‌ای از S^1 هست که میدان برداری در آن مستقیماً بـه طرف داخـل متوجه است، و نقطه‌ای از S^1 که در آن مستقیماً به‌طرف خارج متوجه است.

برهان. **یك میدان برداری** بر B^2 زوج مرتبی‌است مانند $(x,\ v(x))$ که $x\in B^2$ و v نگاشتی است پیوسته از B^2 بتوی R^2. در حسابان اغلب علامت

$$\mathbf{v}(x)=v_1(x)\,\mathbf{i}+v_2(x)\,\mathbf{j}$$

برای تابع v به‌کار می‌رود که $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بردارهای استاندهٔ واحد پایه‌ای در R^2 هستند. ولی

ما به‌علامت تابعی ساده‌ای متوسل خواهیم شد. مقصود ما از یك میدان برداری ناصفر این است که به‌ازای هر x ، $v(x)\neq 0$؛ در چنین موردی v عملاً B^2 را بتوی R^2-0 می‌نگارد.

ابتدا ثابت می‌کنیم که به‌ازای v یی مفروض، باید v درنقطه‌ای از S^1 مستقیماً به طرف داخل متوجه باشد.

نگاشت $w: S^1 \to R^2-0$ را که از تحدید v به S^1 به‌دست می‌آید درنظر می‌گیریم. اگر x ی در S^1 موجود نباشد که در آن میدان برداری مستقیماً به طرف داخل متوجه باشد آنگاه به‌ازای هر x ، $w(x)$ مساوی یك مضرب منفی x نیست. نتیجه می‌شود که w با نگاشت احتوای $j: S^1 \to R^2-0$ هموتوپ است، زیرا، نگاشت $F: S^1\times I \to R^2-0$ با ضابطهٔ

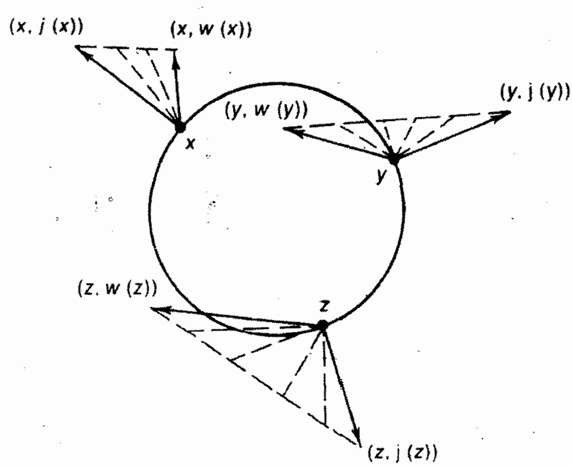
$$F(x,\ t)=tx+(1-t)w(x)$$

هموتوپی مطلوب است؛ آن را در شکل ۲۶ ترسیم کرده‌ایم. بدیهی است که F پیوسته است. برای اثبات اینکه F هرگز صفر نمی‌شود، توجه‌کنید که اگر $F(x,\ t)=0$ آنگاه

$$(1-t)w(x)=-tx\ .$$

این معادله بوضوح به‌ازای $t=0$ یا $t=1$ دروغ است، چون $x\in S^1$ و $w(x)\neq 0$. به‌ازای t هایی که $0<t<1$ معادلهٔ اخیر به صورت $w(x)=-tx/(1-t)$ درمی‌آید، و درنتیجه $w(x)$ مساوی یك مضرب منفی x می‌شود که این نیز غیرممکن است.

چون w با نگاشت احتوای $j: S^1 \to R^2-0$ هموتوپ است، باید اساسی باشد. از طرف دیگر، w به نگاشت پیوستهٔ $v: B^2 \to R^2-0$ گسترش‌پذیر است،



شکل ۲۶

در نتیجه غیراساسی است. پس بـه یك تناقض می‌رسیم. بنابراین، v در نقطه‌ای از S^1 مستقیماً به‌طرف داخل متوجه است.

اکنون میدان برداری ناصفر $(x, -v(x))$ را درنظر می‌گیریم. بنابر نتیجه‌ای که ثابت شد، باید درنقطه‌ای از S^1 مستقیماً به‌طرف داخل متوجه باشد. در این صورت، v در آن نقطه مستقیماً به‌طرف خارج متوجه است. □

قبلاً دیده‌ایم که هر نگاشت پیوسته مانند $f : [0, 1] \to [0, 1]$ الزاماً یك نقطهٔ ثابت دارد (تمرین ۳ دربخش ۳-۲ ملاحظه شود). این حکم درمورد گوی B^2 نیز برقرار است، اگر چه برهان عمیقتر است:

۲۰۱۰. قضیه (قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر[1] برای قرص صفحه) اگر $f : B^2 \to B^2$ پیوسته باشد آنگاه نقطه‌ای از B^2 مانند x هست‌که $f(x) = x$.

برهان. به‌برهان خلف‌عمل می‌کنیم. فرض‌کنیم به‌ازای هرx از B^2، $f(x) \neq x$. دراین صورت $v(x) = f(x) - x$ یك میدان برداری ناصفر $(x, v(x))$ را بر B^2 تعریف می‌کند. ولی درهیچیك از نقاط S^1 مانند x، v نمی‌تواند مستقیماً به‌طرف خارج متوجه باشد، چون در غیراین صورت، به‌ازای عددی حقیقی مثبت مانند a

$$f(x) - x = ax \cdot$$

در نتیجه، $f(x) = (1 + a)x$ خارج گوی واحد B^2 قرار می‌گیرد. پس به تناقض برخوردیم. □

ممکن است تعجب‌آور باشد که چرا در ریاضیات قضایای نقطهٔ‌ثابت موردتوجه‌اند. ثابت می‌شود که بسیاری از مسائل، مانند مسائل مربوط به وجود جوابهای دستگاههای معادلات، می‌توانند به‌صورت مسائل نقطهٔ ثابت تقریر شوند. این هم یك مثال، از یك قضیهٔ کلاسیك فروبنیوس[2]. دراین قسمت بعضی ازمطالب جبرخطی را دانسته‌فرض می‌کنیم.

۳۰۱۰. نتیجه فرض‌کنیم که A یك ماتریس ۳ در ۳ از اعداد حقیقی مثبت باشد. دراین صورت، A یك مقدار ویژه (مقدار مشخصهٔ) حقیقی مثبت دارد.

برهان. فرض‌کنیم $T : R^3 \to R^3$ تبدیلی‌خطی باشد که ماتریس آن (نسبت به‌پایهٔ استاندهٔ R^3) برابر A باشد. همچنین فرض کنیم B مقطع کرهٔ ۲ بعدی S^2 باشد با هشتك

$$\{(x_1, x_2, x_3) | x_3 \geqslant 0 \text{ و } x_2 \geqslant 0 \text{ و } x_1 \geqslant 0\}$$

از R^3. به آسانی می‌توان ثابت کرد که B با گوی B^2 هومئومورف است، بنابراین، قضیهٔ نقطهٔ ثابت برای نگاشتهای پیوسته از B بتوی B نیز برقرار است.

1. Brouwer 2. Frobenius

حال اگر $x=(x_1, x_2, x_3)$ در B باشدآنگاه همهٔ مؤلفه‌های x نامنفی ودست‌کم یکی مثبت است. چون همهٔ درایه‌های A مثبت‌اند، $T(x)$ برداری است که همهٔ مؤلفه‌های آن مثبت‌است. در نتیجه، نگاشت $x \to T(x)/\|T(x)\|$ نگاشتی است پیوسته از B به خودش، درنتیجه، نقطهٔ ثابتی مانند x_0 دارد. پس

$$T(x_0)=\|T(x_0)\|x_0\ .$$

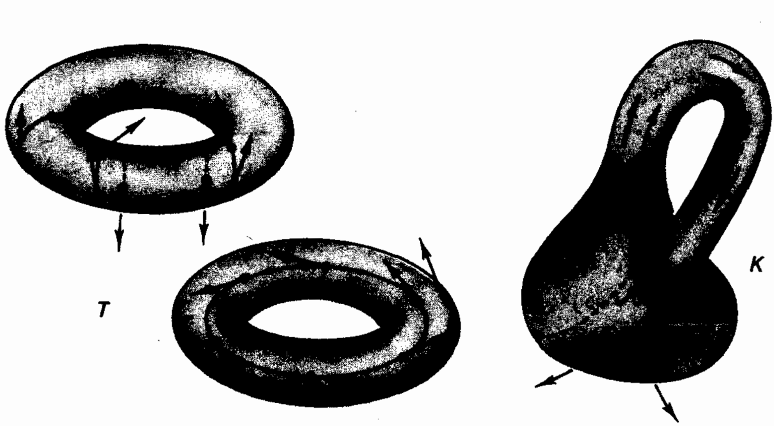
درنتیجه T (و بنابراین ماتریس A) دارای مقدار ویژهٔ حقیقی مثبت است، که این مقدار- ویژه همان $\|T(x_0)\|$ است. □

قبل از اینکه موضوع میدانهای برداری را رها کنیم بد نیست به‌یکی از مهمترین مسائلی که از آنها به‌دست می‌آید اشاره کنیم.

به‌ازای سطح مفروض S، آیا S یك میدان برداری مماس ناصفر دارد؟

ظاهراً سؤال فوق مسئله‌ای از هندسهٔ دیفرانسیل است، درحالی که این مسئله‌ای از توپولوژی است، زیرا جواب آن فقط به نوع توپولوژی S بستگی دارد. ثابت می‌شود که در میان سطوح فشرده، فقط چنبرهٔ T و بطری‌کلاین K (البته در صورتی که بدانید آن چیست) میدانهای برداری مماس ناصفر دارند. درشکل ۲۷ این دوسطح نمایانده شده‌اند. [چنبره، در واقع، دو میدان برداری مستقل خطی دارد.]

برهان این مطلب از چارچوب این کتاب خارج است. (برای دیدن برهان آن به [G-P] مراجعه‌کنید.) ولی،حداقل می‌توانیم با اثبات اینکه کرهٔ S^2 هیچ میدان برداری ناصفر ندارد یك گام درجهت راه حل آن برداریم. به‌جای آنکه با به کار بردن معادلات برهان رسمی را ارائه‌کنیم، فقط به‌طرحی هندسی از آن اکتفا می‌کنیم.



شکل ۲۷

۴.۱۰. قضیه کرهٔ S^2 هیچ میدان برداری مماس ناصفر ندارد.

برهان. فرض کنیم $(x, v(x))$ یك میدان برداری ناصفر S^2 باشد. $p=(0, 0, 1)$، قطب شمال S^2 را درنظر می گیریم؛ برای سهولت فرض خواهیم کرد که میدان برداری در p موازی محور y ها باشد. یك گوی باز کوچك به مرکز p از S^2 مانند U آنقدر کوچك اختیار می کنیم که برگوی U میدان برداری بیش از چند درجه‌ای از حالت موازی بودن با محور y ها خارج نشود.

اکنون نگاشت $f: S^2-p \to R^2$ را با ضابطهٔ «تصویر کنجنگاری» درنظر می گیریم. (مرحلهٔ ۱ برهان قضیهٔ ۲.۶ را ملاحظه کنید.)

نگاشت f، در واقع، یك هومئومورفیسم بین R^2 و S^2-p است. علاوه برآن، بردارهای مماس به S^2 را به‌طور پیوسته بتوی بردارهای مماس به R^2 می‌برد. چگونه؟ ساده‌ترین راه برای مشاهدهٔ این وضعیت، آن است که برداری مماس در نقطهٔ x مانند v اختیار کنیم، ویك منحنی مانند C در S^2 بیابیم که آن بردار همان بردار سرعت C در نقطهٔ x باشد. نگاشت f منحنی C را بتوی یك منحنی در R^2 می‌برد، و فرض می کنیم بردار v را بتوی بردار سرعت منحنی‌تصویر، یعنی $f(C)$، درنقطهٔ $f(x)$ ببرد. همچنین، تصویر (x, v) را به (y, w) نمایش می‌دهیم. بامحاسبه مستقیم می‌توانید بیازمایید که f همواره (w خوشتعریف، و تابعی پیوسته از (x, v))است و ناویژه (اگر v ناصفر باشد w هم ناصفر است).

اکنون سؤالی مطرح می کنیم: تحت این نگاشت برای میدان برداری ناصفر (x, v) چه وضعی پیش می‌آید؟ این میدان بتوی یك میدان برداری ناصفر بر R^2 مانند (y, w) برده می‌شود. بالاخص، زیرفضای S^2-U از S^2 را درنظر می گیریم، که نگاشت f آن را بروی یك گوی حول مبدأ مانند B در R^2 با شعاعی بزرگ می برد. حوزهٔ مقادیر میدان برداری شبیه چه‌چیزی است؟ طرحی از این میدان را بر دایرهٔ بزرگ S، که مرز B است، در شکل ۲۸ رسم کرده‌ایم.

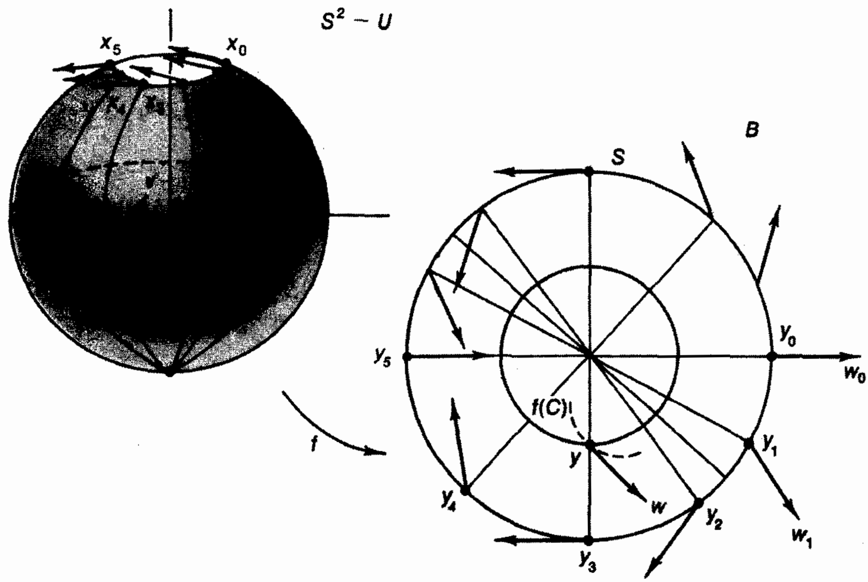
تا اینجا خیلی خوب برگزار شد. حال رفتار میدان برداری $(y, w(y))$ را بر B دقیقتر بررسی کنیم، بالاخص تحدید آن را به‌دایرهٔ S. از روی شکل می‌توانید ملاحظه کنید که نگاشت $h: S \to R^2-0$ با ضابطهٔ

$$h(y)=w(y)$$

یك مولد $\pi_1(S, x_0)$ را به دو برابر مولدی از $\pi_1(R^2-0, x_0)$ می‌برد. توضیح شهودی این مطلب این است که وقتی y یك بار دور دایرهٔ S می گردد، نقطهٔ $h(y)$ دوبار دور مبدأ می گردد.

اینجاست که تناقض پیش می‌آید. می‌دانیم که نگاشت h به نگاشتی از B بتوی R^2-0 گسترش پذیر است، زیرا، $(y, w(y))$ یك میدان برداری ناصفر بر B است. پس h_* باید هومومورفیسم صفر گروههای بنیادی باشد. از طرف دیگر، می‌دانیم که هر دو گروه بنیادی مورد نظر دوری نامتناهی‌اند، و h_* یك مولد اولی را به دو برابر مولدی‌از

دومی می‌برد. درنتیجه، h_* هومومورفیسم صفر نیست. □



شکل ۲۸

این قضایا تعمیمهایی به ابعاد بالاتردارند، که در تمرینهای ۷ و ۸ به بحث گذاشته شده‌اند.

تمرینها

۱. ثابت کنید که اگر A یك توکشیدهٔ B^2 باشد آنگاه هر نگاشت پیوسته مانند $f: A \to A$ یك نقطهٔ ثابت دارد.

۲. ثابت کنید که اگر A یك ماتریس ناویژهٔ ۳ در ۳ با درایه‌های نامنفی باشدآنگاه A یك مقدارویژهٔ حقیقی مثبت دارد.

۳. ثابت کنید که مجموعهٔ B یی که درنتیجهٔ ۳.۱۰ تعریف شد با B^2 هومئومورف است.

*۴. سعی کنید که یك برهان جبری برای نتیجه ۳.۱۵ بیاورید. (این تمرین برای دانشجویانی است که دچار این وسوسه می‌شوند که مطلب مورد نظر بدیهی است. بد نیست اول حالت ۲ در ۲ را بررسی کنید.)

۵. ثابت کنید که اگر $f : S^1 \rightarrow S^1$ غیراساسی باشد آنگاه f یك نقطهٔ ثابت دارد و نقطه‌ای مانند x را به متقاطر آن $-x$ می‌برد.

۶. ثابت کنید که به ازای نگاشتی پیوسته و مفروض مانند $f : S^2 \rightarrow S^2$، یا f نقطهٔ ثابتی دارد یا f نقطه‌ای مانند x را به متقاطر آن $-x$ می‌برد. [راهنمایی: قضیهٔ ۴.۱.۵ را به‌کار ببرید.]

۷. فرض کنید این مطلب را می‌دانیم که به‌ازای هر n، توکشنده‌ای مانند $r : B^{n+1} \rightarrow S^n$ وجود ندارد. (این قضیه را می‌توان با تکنیکهای توپولوژی جبری ثابت کرد.) نتایج ذیل را استخراج کنید:

(الف) نگاشت همانی $i : S^n \rightarrow S^n$ اساسی است.

(ب) نگاشت متقاطر $a : S^n \rightarrow S^n$ اساسی است.

(پ) نگاشت احتوای $j : S^n \rightarrow R^{n+1} - 0$ اساسی است.

(ت) هرمیدان برداری ناصفر بر B^{n+1} در نقطه‌ای از S^n مستقیماً به طرف داخل، و در نقطه‌ای از S^n مستقیماً به طرف خارج متوجه است.

(ث) هرنگاشت پیوسته مانند $f : B^n \rightarrow B^n$ یك نقطهٔ ثابت دارد.

(ج) هرماتریس n در n بادرایه‌های حقیقی‌مثبت یك مقدارویژهٔ حقیقی مثبت دارد.

(چ) اگر $f : S^n \rightarrow S^n$ غیراساسی باشد آنگاه نقطه‌ای ثابت دارد ونقطه‌ای را به متقاطرش می‌برد.

۸. ثابت شده است که S^n یك میدان برداری‌مماس ناصفر دارد اگر وتنها اگر n فرد باشد. قسمت «اگر» آسان است. ثابت کنید که اگر $n = 2m - 1$ آنگاه

$$v(x) = (-x_2,\ x_1,\ -x_4, x_3,\ \dots,\ -x_{2m},\ x_{2m-1})$$

یك میدان برداری مماس ناصفر بر S^n است. قسمت « تنها اگر » دشوارتر است؛ تمرین ۷، در بخش ۸-۱۱، ملاحظه شود.

۸-۱۱ نوع هموتوپی

در بخش ۸-۸ مسئلهٔ تعیین هموتوپ بودن یا نبودن نگاشتی مفروض مانند $h : X \rightarrow Y$ با یك نگاشت ثابت‌را درنظر گرفتیم. اکنون مسئلهٔ کلیترهموتوپ بودن یا نبودن دونگاشت مفروض مانند $h, k : X \rightarrow Y$ را مد نظرقرارمی‌دهیم. ثابت می‌کنیم که شرط لازم برای هموتوپ بودن h و k آن است که با تقریبی متضمن یك ایزومورفیسم گروه، h_* و k_* مساوی باشند.

ثابت می‌شود که این‌قضیه کاربردی درمسئلهٔ محاسبهٔ گروههای بنیادی دارد. قبلاً در بخش ۸-۵ متذکر شده‌ایم که، دوفضا دارای گروههای بنیادی ایزومورف‌اند هر گاه یکی توکشیدهٔ دگردیسی قوی دیگری باشد، و این مطلب را در محاسبهٔ گروههای بنیادی به کار

برده‌ایم. اما رابطه‌ای کلیتر از این موسوم به هم‌ارزی هموتوپی موجود است که آن نیز مستلزم ایزومورف بودن گروههای بنیادی فضاهای مورد بحث است. در این بخش به مطالعهٔ این رابطه می‌پردازیم.

نخست ببینیم وقتی دو نگاشت هموتوپ‌اند چه اتفاقی رخ می‌دهد.

۱۱.۱۰ قضیه فرض‌کنیم $\mathbf{h, k : X \to Y}$ ، $\mathbf{h(x_\circ) = y_\circ}$ ، و $\mathbf{k(x_\circ) = y_1}$. اگر $\mathbf{h}$ و $\mathbf{k}$ هموتوپ باشندآنگاه راهی در $\mathbf{Y}$ از $\mathbf{y_\circ}$ به $\mathbf{y_1}$ مانند $\boldsymbol{\alpha}$ هست‌که $\mathbf{k_* = \hat{\alpha} \circ h_*}$ ؛ و اگر $\mathbf{y_\circ = y_1}$ و نقطه پایه‌ای $\mathbf{x_\circ}$ در ضمن هموتوپی ثابت بماند آنگاه $\mathbf{k_* = h_*}$.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_\circ) \arrow[r, "h_*"] \arrow[dr, "k_*"'] & \pi_1(Y, y_\circ) \arrow[d, "\hat{\alpha}"] \\ & \pi_1(Y, y_1) \end{tikzcd}$$

برهان. فرض‌کنیم $H : X \times I \to Y$ هموتوپی بین h و k باشد؛ دراین‌صورت به ازای هر x از X ، $H(x, 0) = h(x)$ و $H(x, 1) = k(x)$. حال نگاشت $\alpha : I \to Y$ را با ضابطهٔ $\alpha(t) = H(x_\circ, t)$ اختیار می‌کنیم؛ در این صورت α راهی است در Y از $y_\circ$ به y_1. ادعا می‌کنیم که $k_* = \hat{\alpha} \circ h_*$.

یعنی، مدعی هستیم که به ازای هرکمند برپایهٔ $x_\circ$ در X مانند $f : I \to X$ داریم

$$k_*([f]) = \hat{\alpha}(h_*([f])).$$

باید ثابت کنیم که $[k \circ f] = [\bar{\alpha}] * [h \circ f] * [\alpha]$ ، یا ، معادل آن، که

$$[\alpha] * [k \circ f] * [\bar{\alpha}] = [h \circ f]. \qquad (*)$$

بررسی این معادله مستلزم ساختن یك هموتوپی راهی مانند G است.

G را به صورت هندسی ذیل تعبیرمی‌کنیم: به‌ازای مقدار مفروض پارامتر t، α_t را راهی می گیریم که درطول α از $y_\circ$ به $\alpha(t)$ می‌رود، و براساس بازهٔ $[0, 1]$ مجدداً پارامتری شده است. و فرض‌کنیم β_t کمند $\beta_t(s) = H(f(s), t)$ در Y برپایهٔ $\alpha(t)$ باشد. شکل ۲۹ ملاحظه شود. سپس کمند

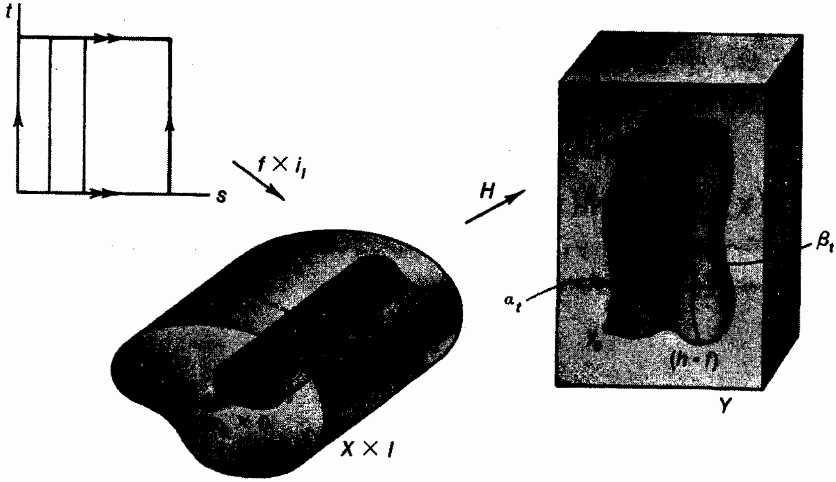
$$(\alpha_t * \beta_t) * \bar{\alpha}_t$$

را بر پایهٔ $y_\circ$ در نظر می‌گیریم. وقتی $t = 0$، این کمند برابراست با

$$(e_{y_\circ} * (h \circ f)) * e_{y_\circ},$$

که با $h \circ f$ هموتوپی راهی است؛ و هنگامی که $t = 1$، مساوی است با کمند

$$(\alpha * (k \circ f)) * \bar{\alpha}.$$



شکل ۲۹

پس، تعریف G به صورت $G(s,\ t)=((\alpha_t * \beta_t) * \bar{\alpha}_t)(s)$، هموتوپی موردنیاز اثبات (*) را می‌دهد.

به بیان صوری، نگاشت $G: I \times I \to Y$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$G(s,\ t)=\begin{cases} \alpha(4st) & \text{،} s\in \left[0,\ \frac{1}{4}\right] \text{ به‌ازای} \\ H(f(4s-1),t) & \text{،} s\in \left[\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right] \text{ به‌ازای} \\ \alpha(2t(1-s)) & \text{،} s\in \left[\frac{1}{2},\ 1\right] \text{ به‌ازای} \end{cases}$$

می‌توانید بررسی کنید که ضوابط فوق با معنی هستند؛ یعنی، این ضوابط در نقاط مشترک حوزه‌های تعریف خود توافق دارند، و G هموتوپی راهی مطلوب است.

بالاخره، توجه می‌کنیم که اگر هموتوپی H نقطهٔ پایهٔ x_0 را در نقطهٔ y_0 نگه‌دارد آنگاه راه $\alpha(t)=H(x_0,\ t)$ راه ثابت است، که درنتیجه $k_*=\hat{\alpha}\circ h_*=h_*$. $\square$

۲.۱۱. نتیجه فرض‌کنیم $h,\ k: X \to Y$، $h(x_0)=y_0$، $k(x_0)=y_1$. همچنین فرض‌کنیم h و k هموتوپ باشند. اگر k_* یك به یك (یا پوشا یا هوموموفیسم صفر) باشدآنگاه h_* نیزچنین است. بالاخص، اگر h با یك نگاشت ثابت هموتوپ باشد آنگاه h_* هومومورفیسم صفراست.

اینك نوبت دومین مسئله‌ای است که در ابتدای این بخش متذکر شدیم ، یعنی مسئلهٔ محاسبهٔ گروههـای بنیادی . یك شرط کلی به دست می‌آوریم که تحت آن دو فضا دارای گروههای بنیادی ایزومورف‌اند .

تعریف . نگاشت پیوستهٔ $f: X \to Y$ را **هم‌ارزی هموتوپی** گوییم درصورتی که نگاشتی پیوسته مانند $g: Y \to X$ موجود باشد به‌طوری که $g \circ f$ با i_X ، نگاشت همانی X و $f \circ g$ با i_Y نگاشت همـانی Y هموتوپ باشد. نگاشت g را **عکس هموتوپی** نگاشت f می‌نامیم.

به‌آسانی ملاحظه می‌شود کـه به ازای هر گردایهٔ مفروض فضاهای توپولوژی مانند $\mathscr{C}$ ، رابطهٔ هم ارزی هموتوپی یك رابطهٔ هم ارزی در $\mathscr{C}$ است.[1] تمرین ۲ دیده شود. دو فضا را دارای یك **نوع هموتوپی** گوییم هرگاه هم‌ارز هموتوپی باشند .
مفهوم هم ارزی هموتـوپی مفهوم توکشندهٔ دگردیسی قـوی راکه در بخش ۸ـ۵ تعریف شد تعمیم می دهد؛ اگر A یك توکشیدهٔ دگردیسی قوی X باشد آنگاه A دارای همـان نوع هموتوپی X است . زیرا، فرض‌کنیم کـه $j: A \to X$ نـگاشت احتوا و $r: X \to A$ نگاشت توکشنده باشد. در این صورت ، تـرکیب $r \circ j$ مساوی نگاشت همانی A است ، و ترکیب $j \circ r$ بنـابرفرض با نگاشت همانی X هموتوپ است (در واقع، هر نقطهٔ A در ضمن این هموتوپی ثابت می‌ماند .)
با فرض اینکه دو فضا هم ارز هموتوپی‌اند، می‌توان ایزومورف بودن گـروههای بنیادی آنها را ثابت‌کرد:

۳۰.۱۱ قضیه فرض کنیم $f: X \to Y$ پیوسته باشد و $f(x_0)=y_0$. اگـر f هم‌ارزی هموتوپی باشد آنگاه

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

یك ایزومورفیسم است .

برهان. فرض کنیم $g: Y \to X$ عکس هموتوپی f باشد. نگاشتهای

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (X, x_1) \xrightarrow{f} (Y, y_1),$$

را درنظر می گیریم، که درآن، $x_1 = g(y_0)$ و $y_1 = f(x_1)$. همومورفیسمهـای القایی متناظر عبارت‌اند از:

---

[1] . فضای X را با Y هم‌ارز هموتوپی گوییم هرگاه یك نـگاشت هم‌ارزی هموتوپی مـانند $f: X \to Y$ موجود باشد. ـ م.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "(f_{x_0})_*"] & \pi_1(Y, y_0) \arrow[dl, "g_*"'] \\ \pi_1(X, x_1) \arrow[r, "(f_{x_1})_*"] & \pi_1(Y, y_1) \end{tikzcd}$$

[دراینجا ناچاریم بین هومومورفیسمهای القایی f نسبت به دونقطهٔ پایه‌ای مختلف تفاوت قائل شویم.] اکنون

$$g \circ f : (X, x_0) \longrightarrow (X, x_1).$$

ازآنجاکه، بنابرفرض، $g \circ f$ با نگاشت همانی هموتوپ است، راهی در X مانند α هست که

$$(g \circ f)_* = \hat{\alpha} \circ (i_X)_* = \hat{\alpha}.$$

بالاخص، $(g \circ f)_* = g_* \circ (f_{x_0})_*$ یك ایزومورفیسم است.

به طریقی مشابه، چون $f \circ g$ با i_Y هموتوپ‌است، هومومورفیسم

$$(f \circ g)_* = (f_{x_1})_* \circ g_*$$

یك ایزومورفیسم است.

حکم اول مستلزم پوشا بودن g_* است و دومی مستلزم یك به یك بودن‌آن است. بنابراین، g_* یك‌ایزومورفیسم است. با به‌کار بردن مجدد معادلهٔ اول نتیجه می‌گیریم که

$$(f_{x_0})_* = (g_*)^{-1} \circ \hat{\alpha},$$

بدین معنی که $(f x_0)_*$ نیز ایزومورفیسم است.

توجه کنید که گرچه g یك عکس هموتوپی f است، هومومورفیسم g_* عکس هومومورفیسم $(f_{x_0})_*$ نیست. □

رابطهٔ هم ارزی هموتوپی بوضوح کلیتر از مفهوم توکشندهٔ دگردیسی قوی است. فضای تتا و فضای به شکل 8 هردو توکشیدهٔ دگردیسی قوی صفحهٔ دوبار سفته‌اند؛ ما این مطلب را در مثالهای ۳ و ۴، بخش ۸ ــ ۵، متذکر شده‌ایم. بنابراین، آنها با صفحهٔ‌دوبارسفته و درنتیجه با یکدیگرهم‌ارز هموتوپی‌اند. ولی هیچیك ازآنها با یك‌توکشیدهٔ دگردیسی قوی دیگری هموتوپ نیستند؛ در حقیقت هیچیك از آنها را حتی نمی‌توان در دیگری نشاند. (به تمرین ۴ مراجعه کنید.)

حقیقت قابل توجه اینکه در مورد هم‌ارزیهای هموتوپی، وضعیت این دو فضا نسبت به یکدیگر، وضعیت استانده‌ای است. مارتین فوش [1] ثابت‌کرده است که دو فضای X و

1. Martin Fuchs

و Y دارای یك نوع هموتوپی‌اند اگر و فقط اگر X و Y با توکشیدهٔ دگردیسی قوی فضایی مانند Z هومئومورف باشند. برهان، با اینکه فقط از ابزارهای مقدماتی کمك می‌گیرد، دشوار است $[F]$.

تمرینها

۱. بتفصیل مطالب مربوط به هموتوپی G را که در برهان قضیهٔ ۱۱.۱ ساخته شد، بررسی کنید.

۲. ثابت کنید که به ازای یك گردایهٔ مفروض فضاها، مانند $\mathscr{C}$، رابطهٔ هم‌ارزی هموتوپی یك رابطهٔ هم ارزی بر $\mathscr{C}$ است.

۳. ثابت کنید که X و فضای تك نقطه‌ای یك نوع هموتوپی دارند اگر و فقط اگر X انقباض پذیر باشد. (تمرین ۴ در بخش ۸ ــ ۸ دیده شود.)

۴. ثابت کنید که هیچیك از فضاهای θ و 8 را نمی‌توان در دیگری نشاند.

۵. فرض کنید A زیرفضایی از X باشد و $j : A \to X$ نگاشت احتوا و $f : X \to A$ نگاشتی پیوسته باشد. همچنین، فرض کنید $j \circ f : X \to X$ با نگاشت همانی $i_X : X \to X$ تحت یك هموتوپی مانند $H : X \times I \to X$ هموتوپ باشند.

(الف) ثابت کنید که اگر به ازای هر a از A، $H(a, t) \in A$ آنگاه j_* و f_* ایزومورفیسم‌اند.

(ب) ثابت کنید که اگر f یك توکشنده باشد آنگاه j_* و f_* ایزومورفیسم‌اند. [در این مورد، H را به جای توکشندهٔ دگردیسی قوی فقط **توکشنده دگردیسی** می‌نامند.]

(پ) برای اثبات اینکه لزومی ندارد درحالت کلی f_* و g_* ایزومورفیسم باشند، مثالی ارائه دهید.

۶. به‌طریق ذیل درجهٔ یك نگاشت پیوسته مانند $h : S^1 \to S^1$ را تعریف می‌کنیم: فرض کنید b_0 نقطهٔ $(1, 0)$ از S^1 باشد، یك مولد مانند γ برای گروه دوری نامتناهی $\pi_1(S^1, b_0)$ انتخاب می‌کنیم. (تنها دومولد هست و تفاوت آنها در علامت آنهاست.) اگر x_0 هر نقطه‌ای از S^1 باشد، راهی در S^1 از b_0 به x_0 مانند α انتخاب و $\gamma(x_0)$ را مساوی $\hat{\alpha}(\gamma)$ تعریف می‌کنیم. دراین صورت، $\gamma(x_0)$، $\pi_1(S^1, x_0)$ را تولید می‌کند. چون گروه بنیادی S^1 آبلی است، عضو $\gamma(x_0)$ مستقل از انتخاب راه α است.

اکنون به ازای نگاشت مفروض $h : S^1 \to S^1$، x_0 را از S^1 انتخاب کنید و فرض کنید $h(x_0) = x_1$. هومومورفیسم

$$h_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_1)$$

رادرنظر بگیرید. چون هردو گروه‌دوری نامتناهی‌اند، به‌ازای عددی صحیح مانند d داریم

$$(*) \qquad h_*(\gamma(x_0)) = d \cdot \gamma(x_1)$$

عدد صحیح d را درجهٔ h می‌نامیم و آن را به $\deg h$ نشان می دهیم.

درجهٔ h مستقل از انتخاب مولد γ است؛ انتخاب مولد دیگر تنها علامت هر دوطرف (*) را تغییر می‌دهد.

(الف) ثابت کنید که d مستقل از انتخاب x_0 است.

(ب) ثابت کنید که اگر $h, k : S^1 \to S^1$ هموتوپ باشند آنگاه درجهٔ آنها مساوی است.

(پ) ثابت کنید که $\deg(h \circ k) = (\deg h) \cdot (\deg k)$.

(ت) درجهٔ نگاشت همانی، نگاشت انعکاسی $\rho(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$، نگاشت ثابت، و نگاشت $h(z) = z^n$، را که z عددی است مختلط، محاسبه کنید.

*(ث) ثابت کنید که اگر $h, k : S^1 \to S^1$ دارای درجهٔ یکسانی باشند، هموتوپ‌اند.

۷. فرض کنید به هر نگاشت $h : S^n \to S^n$ یك عدد صحیح، که آن را درجهٔ h می‌نامیم و به $\deg h$ نمایش می‌دهیم چنان نظیر کرده باشیم که:

(۱) نگاشتهای هموتوپ دارای درجهٔ مساوی‌اند.

(۲) $\deg(h \circ k) = (\deg h) \cdot (\deg k)$.

(۳) درجهٔ نگاشت همانی مساوی ۱ و درجهٔ نگاشت ثابت مساوی ۰ است و نگاشت انعکاسی $\rho(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_{n+1})$ دارای درجهٔ ۱- است.

[با به‌کار بردن ابزارهای توپولوژی جبری چنین تابعی را می‌توان ساخت. از نظر شهودی، $\deg h$ می‌گوید که h چند بار S^n را به دور خودش می پیچد؛ علامت بیانگر این است که h جهت را حفظ می کند یا خیر.] ثابت کنید که:

(الف) هیچ توکشنده‌ای مانند $r : B^{n+1} \to S^n$ وجود ندارد.

(ب) اگر درجهٔ $h : S^n \to S^n$ مخالف $(-1)^{n+1}$ باشد آنگاه h یك نقطهٔ ثابت دارد. [راهنمایی: ثابت کنید که اگر h نقطهٔ ثابتی نداشته باشد آنگاه h با نگاشت متقاطر هموتوپ است.]

(پ) اگر درجهٔ $h : S^n \to S^n$ مخالف یك باشد آنگاه h نقطه‌ای مانند x را به متقاطر آن $-x$ می‌نگارد.

(ت) اگر S^n یك میدان برداری مماس ناصفر، مانند v، داشته باشد آنگاه n فرد است. [راهنمایی: اگر v موجود باشد ثابت کنید که نگاشت همانی با نگاشت متقاطر هموتوپ است.]

(ث) هر نگاشت مانند $h : S^{2m} \to S^{2m}$ یا یك نقطهٔ ثابت دارد یا نقطه‌ای مانند x وجود دارد که $h(x) = -x$.

(ج) این نتایج را با تمرینهای ۶، ۷ و ۸ در بخش ۸ ـ ۱۰ مقایسه کنید.

برای کاربرد مفهوم درجه در هندسهٔ دیفرانسیلی کتاب $[G-P]$ را ملاحظه کنید.

۸-۱۲ قضیهٔ جداسازی ژوردان

اکنون یکی از مسائل کلاسیک ریاضیات را در نظر می گیریم: قضیهٔ منحنی ژوردان. این قضیه بیانگر واقعیتی است که از نظر هندسی کاملاً «بدیهی» است؛ یعنی این که هر منحنی بسته ساده، همیشه صفحه را به دو قطعه جدا می‌سازد، ولی، اثبات آن با استدلالهای صرفاً هندسی بسیار دشوار است. در اینجا آن را به عنوان نتیجه‌ای از مطالبی که در مورد فضاهای پوششی و گروه بنیادی مطالعه کرده‌ایم ثابت می کنیم.

برهان عملاً متضمن سه قضیهٔ جداسازی است. اولی، که آن را قضیهٔ جداسازی ژوردان می نامیم، می گوید که یک منحنی بستهٔ ساده در S^2 (یا در صفحه) حداقل آن را به دو مؤلفه جدا می‌سازد. قضیه دوم حکم به این می کند که یک کمان، S^2 (یا صفحه) را جدا نمی‌سازد. و سومی، یا قضیهٔ منحنی ژوردان، می گوید که یک منحنی بستهٔ ساده مانند C در S^2 (یا در صفحه) دقیقاً آن را به دو مؤلفه جدا می‌سازد به‌طوری که C مرز مشترک آنهاست.

اینک اولین قضیه از این سه قضیه را ثابت می کنیم. برای اثبات آن به حکم ذیل احتیاج داریم:

۱۲-۱۰ لم فرض کنیم a و b دو نقطهٔ S^2 باشند؛ همچنین فرض کنیم A فضای فشرده و $f: A \to S^2 - a - b$ نگاشتی پیوسته باشد. اگر a و b در یک مؤلفهٔ $S^2 - f(A)$ قرار داشته باشند آنگاه f غیراساسی است.

از جنبهٔ شهودی، لم بیانگر این است که اگر در S^2 مجموعهٔ $f(A)$ نقطهٔ a و b را ازهم جدا نکند آنگاه f می تواند بدون لمس کردن a یا b به یک نقطه درهم کشیده شود.

برهان. مرحلهٔ ۱. ثابت می کنیم که هومئومورفیسمی مانند h از S^2 به $R^2 \cup \{\infty\}$ (فشرده شدهٔ تک نقطه‌ای R^2) موجود است که $h(a)=\infty$ و $h(b)=0$.

برای ساختن h ابتدا دورانی از S^2 مانند h_1 را طوری اختیار می کنیم که a را به p (قطب شمال) ببرد. سپس، h_2 تصویر کنجنگاری را اختیار می کنیم که S^2-p را به طور هومئومورفیک بروی R^2 می‌نگارد؛ h_2 را با تعریف $h_2(p)=\infty$ به S^2 گسترش می‌دهیم. سرانجام انتقالی از R^2، مانند h_3، را درنظر می گیریم که نقطهٔ $h_2(h_1(b))$ را به مبدأ 0 ببرد، و با تعریف $h_3(\infty)=\infty$ آن را به $R^2 \cup \{\infty\}$ گسترش می‌دهیم. به آسانی ملاحظه می شود که h_2 و h_3 هومئومورفیسم‌اند همچنانکه h_1 نیز چنین است. دراین صورت، $h_3 \circ h_2 \circ h_1$ هومئومورفیسم مطلوب است.

مرحلهٔ ۲. در پرتو مرحلهٔ ۱، لم ما به حکم ذیل تبدیل می‌شود. فرض کنیم A فشرده و $f: A \to R^2 - 0$ نگاشتی پیوسته باشد. اگر 0 در مؤلفهٔ بیکران $R^2 - f(A)$ قرار داشته باشد آنگاه f غیراساسی است.

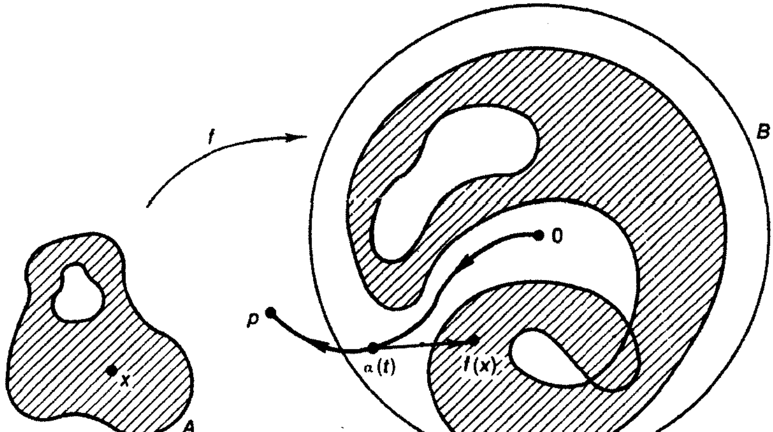
اثبات این حکم آسان است. فرض کنیم که 0 در مؤلفهٔ بیکران $R^2 - f(A)$ قرار

بگیرد. گویی مانند B به‌مرکزمبدأ با شعاعی به‌اندازهٔ کافی بزرگ به‌طوری‌اختیارمی‌کنیم که حاوی مجموعهٔ $f(A)$ باشد. نقطه‌ای از $R^۲$ مانند p خارج از B اختیارمی‌کنیم. دراین صورت، ۰ و p در یك مؤلفهٔ $R^۲-f(A)$ قرارمی‌گیرند.

چون $R^۲$ همبند راهی موضعی است، مجموعهٔ باز $R^۲-f(A)$ نیز چنین است. بنابراین، مؤلفه‌ها ومؤلفه‌های راهی $R^۲-f(A)$ یکی هستند. پس می‌توانیم راهی در $R^۲-f(A)$ مانند α از ۰ به p انتخاب کنیم. هموتوپی $F: A\times I\to R^۲-۰$ را با ضابطهٔ ذیل تعریف می‌کنیم:

$$F(x, t)=f(x)-\alpha(t);$$

این هموتوپی درشکل ۳۰ ترسیم شده‌است. F یك هموتوپی بین نگاشت f و نگاشت g باضابطهٔ $g(x)=f(x)-p$ است. توجه کنید که $F(x, t)\neq ۰$، زیرا، راه α مجموعهٔ $f(A)$ را قطع نمی‌کند.



شکل ۳۰

هموتوپی $G: A\times I\to R^۲-۰$ را باضابطهٔ

$$G(x, t)=tf(x)-p$$

تعریف می‌کنیم. G یك هموتوپی بین نگاشت g و نگاشتی ثابت است. توجه کنید که چون $tf(x)$ داخل گوی B است و p درداخل آن نیست، پس $G(x, t)\neq ۰$.

بنابراین ثابت‌کرده‌ایم که f غیراساسی‌است. □

تعریف. یك **کمان** عبارت‌است ازفضایی هومئومورف با بازهٔ واحد $[۰, ۱]$. یك **منحنی بستهٔ ساده** عبارت است ازفضایی هومئومورف با دایرهٔ $S^۱$.

۲.۱۲. قضیه (قضیهٔ جداسازی ژوردان) فرض‌کنیم C یك منحنی بستهٔ ساده در

$S^۲$ باشد. دراین صورت ، $S^۲-C$ همبند نیست.

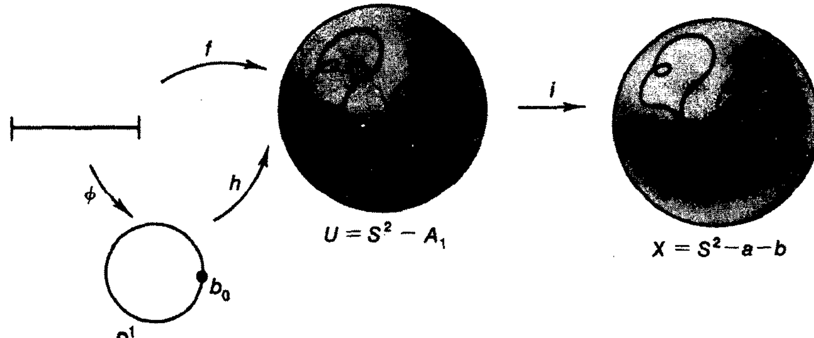
برهان. چون $S^۲-C$ همبند راهی موضعی است، مؤلفه‌ها و مؤلفه هـای راهی آن یکی هستند . فرض می کنیم $S^۲-C$ همبند راهی باشد و تناقضی استخراج می کنیم .
قضیهٔ ۱.۶ را به‌کار می‌بریم، یعنی قضیهٔ ون کمپن درحالت خاص . این قضیه گروه بنیادی $X=U\cup V$ را بـرحسب گروههای بنیادی U و V بیان می کند ، به‌شرط آنکه $U\cap V$ همبند راهی باشد.
ابتدا C را به صورت اجتمـاع دو کمان، مانند $A_۱$ و $A_۲$ ، می‌نویسیم که فقط در نقاط انتهایی خود، یعنی a و b ، یکـدیگر را قطع می کنند . سپس ، فرض می کنیم X نمایش فضای $S^۲-a-b$ باشد. فضای X با صفحهٔ سفتهٔ $R^۲-۰$ هومئومورف است، پس گروه بنیادی آن دوری نامتناهی است.
فرض کنیم U مجموعهٔ باز $S^۲-A_۱$ و V مجموعهٔ باز $S^۲-A_۲$ باشد؛ دراین صورت $X=U\cup V$. و

$$U\cap V=S^۲-(A_۱\cup A_۲)=S^۲-C,$$

در نتیجه، بنابرفرض $U\cap V$ همبند راهی‌است. فرض‌کنیم $x_۰$ نقطه‌ای از $U\cap V$ باشد. اگرثابت کنیم که توابع احتوای

$$i:(U,\ x_۰)\to(X,\ x_۰),\ \ j:(V,\ x_۰)\to(X,\ x_۰)$$

هومومورفیسمهـای صفر گروه بنیـادی را القا می‌کنند ، قضیهٔ ۱.۶ حـکم می‌کند کـه $\pi_۱(X,\ x_۰)=۰$ که این امر با دوری نامتناهی بودن گروه $\pi_۱(x,\ x_۰)$ تناقض دارد، پس فرض همبند راهی بودن $S^۲-C$ غلط است.
حال ثابت می کنیم که i_* هومومورفیسم صفراست. به ازای کمندی مفروض بر پایهٔ $x_۰$ مانند $f:I\to U$ ثابت مـی کنیم که $i_*([f])$ عضو خنثاست. برای این منظور فرض کنیم $\phi:I\to S^۱$ کمند استاندهٔ مولدگروه $\pi_۱(S^۱,b_۰)$ باشد. نگاشت $f:I\to U$ نگاشتی پیوسته مـانند $h:S^۱\to U$ را القا می کند به‌طوری که $h\circ\phi=f$. شکل ۳۱ ملاحظه شود.



شکل ۳۱

نگاشت $i\circ h : S^1 \to S^2-a-b$ را در نظر می گیریم، بنا بر فرض، مجموعهٔ $i(h(S^1))=h(S^1)$ ، کمان A_1 را، که a را به b وصل می کند، قطع نمی کند. بنا براین، a و b در یك مؤلفهٔ $S^2-i(h(S^1))$ قرار دارند. بنابر لم سابق، نگاشت $i\circ h$ غیر اساسی است. از قضیهٔ ۲.۸ نتیجه می‌شود که $(i\circ h)_*$ همومورفیسم صفر گروههای بنیادی است. ولی

$$(i\circ h)_*([\phi])=[i\circ h\circ\phi]=[i\circ f]=i_*([f])\;.$$

بنابراین، $i_*([f])$، همانطور که می‌خواستیم، عضو خنثاست. □

تمرینها

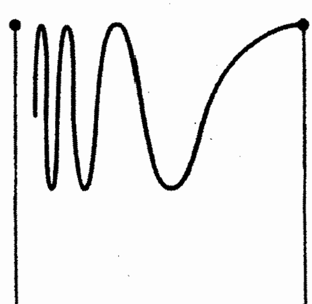
۱. با یکی گرفتن S^2 و $R^2\cup\{\infty\}$ ، ثابت کنید که هرمنحنی بستهٔ ساده در R^2 آن را جدا می‌سازد.

۲. در برهان قضیهٔ ۲.۱۲ فرض کردیم که منحنی بستهٔ سادهٔ C مساوی همهٔ S^2 نیست. چرا این فرض مجاز است؟

۳. با ارائهٔ مثالهایی ثابت کنید که یك منحنی بستهٔ ساده درچنبره ممکن است (و یاممکن نیست) آن را جدا سازد.

۴. (الف) لم. فرض‌کنید A و B زیر مجموعه‌های بستهٔ همبندی از S^2 باشند که مقطع آنها دقیقاً از دو نقطه تشکیل می‌شود. دراین صورت، $A\cup B$ فضای S^2 را جدا می‌سازد.

(ب) فرض کنید C زیرمجموعه‌ای از S^2 باشد که هومئومورف است با فضایی که اجتماع منحنی سینوسی توپولوژیدانها و خط شکسته‌ای که از نقطهٔ $(۱ ,۰)$ به $(-۲ ,۰)$ سپس به $(-۲ ,۱)$ و بالاخره به $(۱ ,۱)$ کشیده شده است (شکل ۳۲



ملاحظه شود.) ثابت کنید که C فضای S^2 را جدا می‌سازد.

*۵. این تمرین منجر به برهانی برای قضیهٔ ناوردایی حوزه برای R^2 می‌شود.

(الف) ثابت کنید:

لم (لم گسترش هموتوپی). فرض کنید X و $X \times I$ نرمال باشند؛ A را یک زیرمجموعهٔ بستهٔ X اختیار کنید. اگر $f: A \to R^2 - 0$ نگاشتی پیوسته و غیر اساسی باشد آنگاه f را می‌توان به نگاشتی پیوسته مانند $g: X \to R^2 - 0$ گسترش داد.

[راهنمایی: با استفاده از هموتوپی بین f و نگاشتی ثابت، نگاشتی از زیرفضای $Y = (A \times I) \cup (X \times I)$ از فضای $X \times I$ بتوی $R^2 - 0$ تعریف کنید. این نگاشت را به یک همسایگی از Y مانند U در $X \times I$ گسترش دهید. سپس نگاشتی از $X \times 0$ بتوی U طوری بسازید که بر $A \times 0$ مساوی نگاشت همانی باشد.]

(ب) ثابت کنید:

قضیه (بورسوک). فرض کنید X یک زیرمجموعهٔ فشرده R^2 باشد. اگر 0 دریک مؤلفهٔ کراندار $R^2 - X$ مانند C قرار گیرد آنگاه نگاشت احتوای $j: X \to R^2 - 0$ غیر اساسی است؛ و بعکس.

[راهنمایی: فرض کنید B گوی‌بازی حاوی C و X باشد. اگر j غیراساسی باشد، ثابت کنید که نگاشت احتوای از $B - C$ بتوی $R^2 - 0$ را می‌توان به نگاشتی پیوسته از B بتوی $R^2 - 0$ گسترش داد.]

(پ) ثابت کنید:

قضیه (یک قضیهٔ جداناسازی). هیچ کمانی R^2 را جدا نمی‌سازد. هیچیک از فضاهای هومئومورف با B^2 فضای R^2 را جدا نمی‌سازد.

(ت) حکم ذیل را ثابت کنید. خلاصهٔ برهان دیگری در تمرین ۹، بخش ۸-۱۳، آمده است.

قضیه (قضیهٔ براوئر[1] دربارهٔ پایایی حوزه برای R^2): اگر U یک زیرمجموعهٔ باز R^2 باشد و $f: U \to R^2$ پیوسته و یک‌به‌یک آنگاه $f(U)$ در R^2 باز و f یک نشاننده است.

[راهنمایی: اگر $f: B^2 \to R^2$ یک نشاننده باشد، توجه کنید که $f(S^1)$ فضای R^2 را جدا می‌سازد ولی $f(B^2)$ چنین نمی‌کند؛ نتیجه بگیرید که $f(\text{Int}\, B^2)$ باید مساوی یکی از مؤلفه‌های $R^2 - f(S^1)$ باشد.]

۸-۱۳ قضیهٔ منحنی ژوردان

قضیهٔ ون کمپن درحالت خاص، که آن را دراثبات قضیهٔ جداسازی ژوردان به‌کار بردیم،

1. Brouwer

به‌شرط آنکه مقطع $U \cap V$ همبند راهی باشد اطلاعاتی راجع به گروه بنیادی $X = U \cup V$ بیان می‌دارد. در دو لم بعدی این مسئله را بررسی می‌کنیم که اگر $U \cap V$ همبند نباشد چه وضعی پیش می‌آید. در لم اول فرض می‌کنیم $U \cap V$ دست کم دو مؤلفه داشته باشد، و در دومی فرض بر این است که دست کم سه مؤلفه داشته باشد.

این لمها به ما امکان می‌دهند تا برهان قضیهٔ منحنی ژوردان را به‌پایان برسانیم. برهانی که می‌آوریم، تا جایی که می‌دانیم، یك برهان جدید است. این برهان متضمن یك ساختمان مشابه ساختمانی است که درآنالیز مختلط برای ساختن سطوح ریمانی به‌کار می‌رود. ولی از نرمال بودن یا قضیهٔ تیتسه استفاده‌ای نمی‌کند.

۱۰-۱۳. لم فرض‌کنیم X اجتماع دو مجموعهٔ باز U و V باشد، و $U \cap V$ را بتوان به‌صورت اجتماع دو مجموعهٔ باز جدا از هم X مانند A و B نوشت، و $a \in A$ و $b \in B$؛ همچنین فرض‌کنیم a و b را بتوان به‌وسیلهٔ راههایی در U و در V به‌یکدیگر وصل کرد. در این صورت، $\pi_1(X, a) \neq 0$.

برهان. برهان از بسیاری جهات تقلیدی است از برهان این حکم که گروه بنیادی دایره دوری نامتناهی است (بخش ۸-۴). مانند آن برهان، مرحلهٔ قاطع آن یافتن یك فضای پوششی مناسب مانند E برای فضای X است.

مرحلهٔ ۱. (ساختمان E). با به هم چسباندن نسخه‌هایی از زیرفضاهای U و V، فضای E را می‌سازیم. نسخه‌های شمارای بسیاری از U و نسخه‌های شمارای بسیاری از V طوری اختیار می‌کنیم که همگی جدا از هم باشند؛ به عبارت دیگر،

$$U \times (2n), \quad V \times (2n+1) \qquad (n \in Z)$$

که درآن، Z نمایش مجموعهٔ اعداد صحیح است. فرض کنیم Y نمایش اجتماع این فضاها باشد؛ Y زیرفضایی است از $X \times Z$. اکنون با یکی گرفتن نقاط

$$x \times (2n), \quad x \times (2n-1) \qquad (x \in A)$$

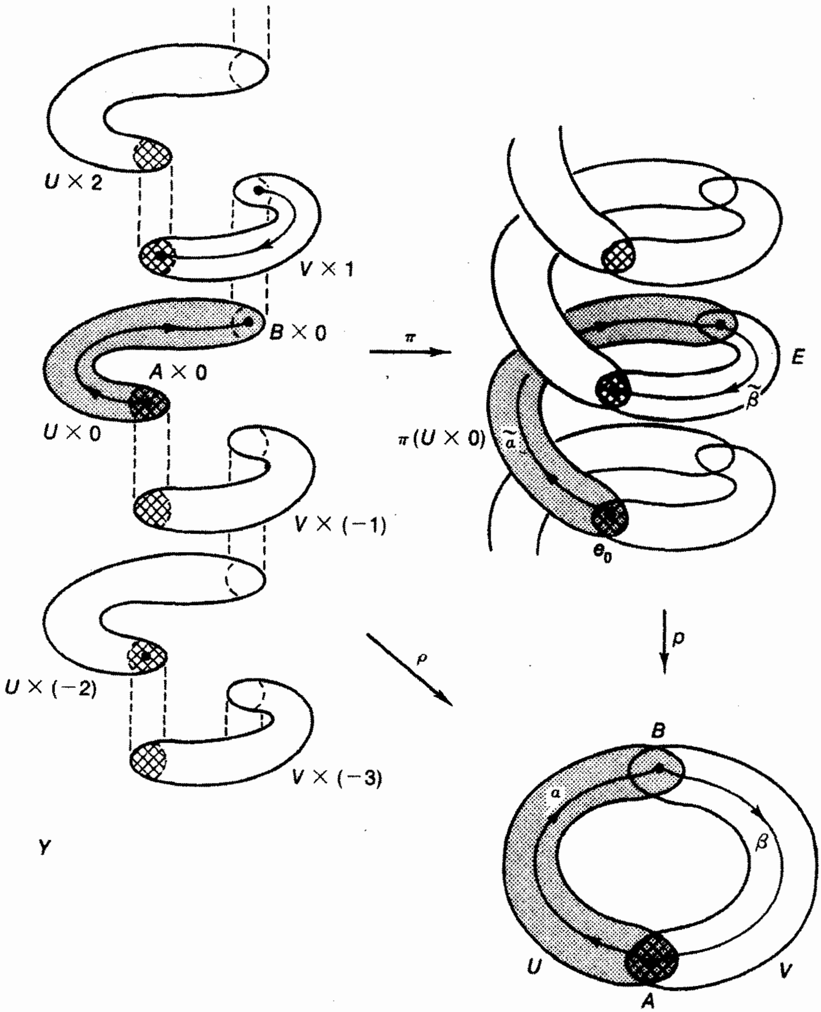
و یکی گرفتن نقاط

$$x \times (2n), \quad x \times (2n+1) \qquad (x \in B)$$

فضای جدید E را به عنوان یك فضای خارج قسمتی Y تشکیل می‌دهیم. فرض کنیم $\pi : Y \to E$ این نگاشت خارج قسمتی باشد.

اکنون نگاشت $p : Y \to X$ با ضابطهٔ $p(x \times m) = x$ نگاشتی مانند $p : E \to X$ را القا می‌کند؛ چون E دارای توپولوژی خارج قسمتی است، p پیوسته است. نگاشت p پوشا نیز هست. ثابت خواهیم کرد که p یك نگاشت پوششی است.

فضای E درشکل ۴۳ نمایانده شده است.



شکل ۴۳

ابتدا ثابت کنیم که نگاشت π باز است. چون Y اجتماع مجموعه‌های باز جدا از هم $\{U\times(2n)\}$ و $\{V\times(2n+1)\}$ است، کافی است ثابت کنیم که $\pi|(U\times 2n)$ و $\pi|(V\times(2n+1))$ نگاشتهایی بازند، و این مطلب ساده‌ای است. مثلاً، یك مجموعهٔ باز در $U\times 2n$ اختیار می‌کنیم؛ این مجموعه به‌صورت $W\times 2n$ است به‌طوری که W در U باز است. دراین صورت

$$\pi^{-1}(\pi(W\times 2n))=[W\times 2n]\cup[(W\cap B)\times(2n+1)]$$
$$\cup[(W\cap A)\times(2n-1)]\ ,$$

که مساوی اجتماع سه مجموعهٔ باز Y است، و درنتیجه، در Y باز می‌باشد. بنابر تعریف توپولوژی خارج قسمتی، همچنانکه می‌خواستیم، $\pi(W\times 2n)$ در E باز است.

اکنون ثابت می کنیم که p یک نگاشت پوششی است؛ ثابت می کنیم که مجموعه‌های باز U و V به‌وسیلهٔ p به‌طور هموار پوشانده می‌شوند. مثلاً، U را درنظر می گیریم. مجموعهٔ $p^{-1}(U)$ مساوی اجتماع مجموعه‌های جدا ازهم $\pi(U\times 2n)$ است که در آن، $n\in Z$. چون π نگاشتی باز است، هریک از این مجموعه‌ها در E باز است. فرض کنیم که π_{2n} نمایش تحدید π به مجموعهٔ باز $U\times 2n$ باشد، که $U\times 2n$ را بروی $\pi(U\times 2n)$ می‌نگارد. در ضمن چون π_{2n} یک‌به‌یک، پیوسته، و باز است، پس یک هومئومورفیسم‌است. دراین‌صورت، وقتی که p به $\pi(U\times 2n)$ تحدید می‌شود، به‌صورت ترکیب دو هومئومورفیسم ذیل در می‌آید:

$$\pi(U\times 2n)\xrightarrow{\pi_{2n}^{-1}}U\times 2n\xrightarrow{p}U$$

و لهذا، یک هومئومورفیسم است. بنابراین $p|\pi(U\times 2n)$، همان طور که می‌خواستیم، این مجموعه را به‌طور هومئومورفیک بروی U می‌نگارد.

مرحلهٔ ۲. اینک ثابت می‌کنیم که $\pi_1(X,a)\neq 0$. راه α را در U از a به b، و راه β را در V از b به a اختیار می کنیم. مدعی هستیم که کمند $\alpha*\beta$ بر پایهٔ a با یک کمند ثابت هموتوپ راهی نیست. $\alpha*\beta$ را به راهی در E با نقطهٔ آغازی $e_0=\pi(a\times 0)$ (نقطهٔ پایه‌ای) بالا می‌بریم. $\tilde{\alpha}$ و $\tilde{\beta}$ را چنین تعریف می کنیم

$$\tilde{\alpha}(t)=\pi(\alpha(t)\times 0)\ ,$$
$$\tilde{\beta}(t)=\pi(\beta(t)\times 1)\ .$$

چون $\tilde{\alpha}(1)=\pi(b\times 0)=\pi(b\times 1)=\tilde{\beta}(0)$، راه $\tilde{\alpha}*\tilde{\beta}$ تعریف می‌شود. به‌آسانی ملاحظه شود که $\tilde{\alpha}*\tilde{\beta}$ یک بالابر $\alpha*\beta$ است، زیرا $p\circ\tilde{\alpha}=\alpha$ و $p\circ\tilde{\beta}=\beta$. چون راه بالا بردهٔ $\tilde{\alpha}*\tilde{\beta}$ از نقطهٔ پایه‌ای e_0 شروع و به‌نقطه‌ای متفاوت از نقطهٔ پایه‌ای ختم می‌شود، کمند $\alpha*\beta$ نمی‌تواند با یک کمند ثابت هموتوپ راهی باشد. □

۲.۱۳. لم فضای X را اجتماع دومجموعهٔ باز U و V می‌گیریم. فرض‌کنیم $U\cap V$ را بتوان به‌صورت اجتماع سه مجموعهٔ باز جدا ازهم A، A'، و B نوشت. فرض‌کنیم $a\in A$، $a'\in A'$، و $b\in B$؛ و هر سه نقطه را بتوان به وسیلهٔ راههایی در U و در V به‌یکدیگر وصل‌کرد. دراین‌صورت $\pi_1(x,a)$ دوری نامتناهی نیست.

برهان. فرض کنیم α راهی در U از a به b، و β راهی‌در V از b به a باشد؛ همچنین، فرض کنیم δ راهی در U از a به a'، و γ راهی در V از a' به a باشد. با نوشتن $U \cap V$ به‌صورت اجتماع مجموعه‌های باز جدا از هم

$$A, \ A' \cup B,$$

ملاحظه می‌کنیم که، بنابر برهان لم سابق، کمندهای $\alpha * \beta$ و $\gamma * \delta$ نمایندهٔ اعضای غیر بدیهی $\pi_1(X, a)$ هستند.

اکنون اگر $\pi_1(X, a)$ دوری نامتناهی باشد هریک از این کمندها نمایندهٔ یك مضرب مولد گروه است. پس باید اعداد صحیح ناصفری مانند m و n وجود داشته باشند که

$$n[\alpha * \beta] = m[\delta * \gamma] \cdot$$

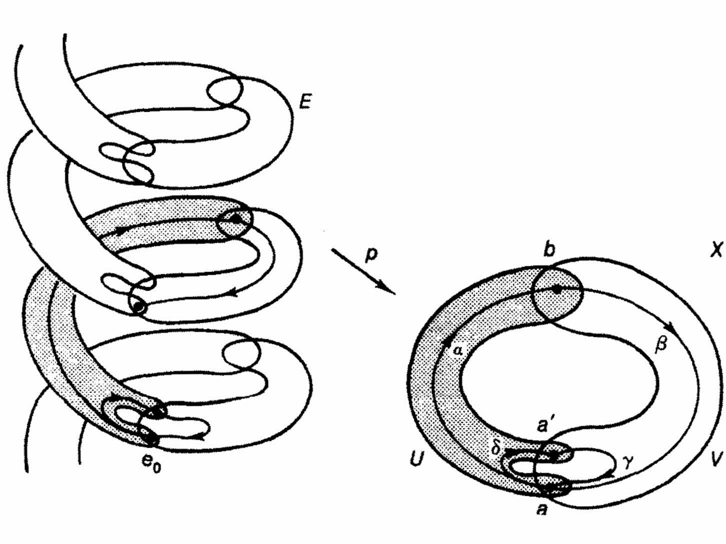
ثابت خواهیم کرد که چنین اعداد صحیحی وجود ندارند.

حال با نوشتن $U \cap V$ به‌صورت دو مجموعهٔ باز جدا از هم

$$A \cup A', \ B$$

ساختمان لم سابق را برای این وضعیت به‌کار می‌گیریم. مانند گذشته فضای پوششی E از X به‌دست می‌آید. شکل ۳۴ ملاحظه شود. (به‌خاطرداشته باشید که وقتی E را می‌ساختیم ابدأ فرض نکردیم که A و B همبند باشند.)

اکنون کمندهای $\alpha * \beta$ و $\gamma * \delta$ را در نظر می‌گیریم و آنها را به راههایی در E



شکل ۳۴

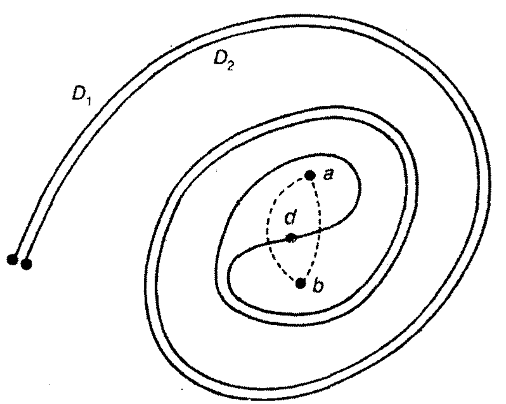
با نقطهٔ آغازی e_0 بالا می بریم. به‌آسانی ملاحظه می‌شود که $\gamma * \delta$ به کمندی در E بالا می‌رود، و حال آنکه $\alpha * \beta$ چنین نیست. به‌طور کلی، هر مضرب $\gamma * \delta$ به‌کمندی در E بالا خواهد رفت، درصورتی که هرمضرب ناصفر $\alpha * \beta$ به راهی که از e_0 شروع و به‌نقطهٔ دیگری در E ختم می‌شود بالا می‌رود.

بنابراین، هیچ مضربی از $\gamma * \delta$ نمی‌توانند با مضربی از $\alpha * \beta$ هموتوپ راهی باشد. □

وحالا ثابت می کنیم که هیچ کمان در S^2، آن‌را جدا نمی‌سازد. خلاصه‌ای ازبرهان این‌حکم درتمرین ۵ (پ) در بخش قبل آمده است. دراینجا برهان دیگری است که اگر تمرین مذکور را عمل کرده‌اید می‌توانید ازاین برهان صرفنظر کنید.

۳.۰۱۳. قضیه (قضیهٔ جداناسازی) فرض‌کنیم‌که A کمانی در S^2 باشد. دراین‌صورت، $S^2 - A$ همبند است.

برهان. مرحلهٔ ۱. فرض کنیم که D کمانی باشد در S^2 به‌صورت اجتماع دوکمان D_1 و D_2 که دقیقاً یك نقطهٔ مشترك مانند d دارند. فرض کنیم $a, b \notin D$. ادعا می کنیم که اگر a و b بتوانند به‌وسیلهٔ راههایی در $S^2 - D_1$ و $S^2 - D_2$ به یکدیگر وصل شوند آنگاه آنها می‌توانند به وسیلهٔ راهی در $S^2 - D$ نیز به یکدیگر وصل شوند. شکل ۳۵ نشاندهندهٔ این‌امر است که ادعای اخیر چندان هم بدیهی نیست.



شکل ۳۵

فرض می کنیم که a و b نتوانند به‌وسیلهٔ راهی در $S^2 - D$ به‌یکدیگر وصل‌شوند و تناقضی استخراج می کنیم. لم ۱.۱۳ را به کار می بریم. X را فضای $S^2 - d$ اختیار می کنیم، و U و V را مجموعه‌های باز

$$U = S^2 - D_1, \quad V = S^2 - D_2.$$

دراین صورت، $X = U \cup V$ ، و $U \cap V = S^2 - D$. بنابر فرض، a و b نقاطی از $S^2 - D$ هستند که نمی‌توانند به وسیلهٔ راهی در آن به هم وصل شوند. بنابراین، $U \cap V$ همبند راهی نیست. فرض کنیم A مؤلفهٔ راهی $U \cap V$ شامل a باشد، و B اجتماع مؤلفه‌های دیگر $U \cap V$. چون $U \cap V$ همبند راهی موضعی‌است(زیرا در S^2 بازاست)، مؤلفه‌های راهی $U \cap V$ باز هستند؛ درنتیجه A و B در X بازند. مطابق فرض a و b می‌توانند به‌وسیلهٔ راههایی در $U = S^2 - D_1$ و $V = S^2 - D_2$ به‌هم وصل شوند. از لم ۱.۱۳ نتیجه می گیریم که $\pi_1(X, a) \neq 0$.

اما X فضای $S^2 - d$ است، که با R^2 هومئومورف است و درنتیجه همبند ساده است. درنتیجه، باید بتوان a و b را به‌وسیلهٔ راهی در $S^2 - D$ به‌یکدیگروصل کرد.

مرحلهٔ ۲. اکنون به‌ازای کمان مفروض A و نقاط a و b از $S^2 - A$ ، فرض کنیم a و b نتوانند به‌وسیلهٔ راهی در $S^2 - A$ به‌هم وصل‌شوند و تناقضی استخراج می کنیم. این کار قضیه را ثابت می کند.

هومئومورفیسمی مانند $h : [0, 1] \to A$ انتخاب می‌کنیم؛ فرض می کنیم

$$A_1 = h\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right), \qquad A_2 = h\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

نتیجهٔ مرحلهٔ ۱ ثابت می کند که چون a و b نمی‌توانند به‌وسیلهٔ راهی در $S^2 - A$ به‌هم وصل‌شوند، در $S^2 - A_1$ و $S^2 - A_2$ هم نمی‌توانند به‌وسیلهٔ راههایی به‌هم وصل‌شوند. برای آنکه ابهامی نباشد، فرض کنیم a و b نتوانند به وسیلهٔ راهی در $S^2 - A_2$ به هم وصل شوند.

اکنون با شکستن A_2 به‌دو کمان $B_1 = h([1/2, 3/4])$ و $B_2 = h([3/4, 1])$ استدلال راتکرارمی کنیم. از مرحلهٔ ۱ نتیجه می گیریم که a و b نمی‌توانند به‌وسیلهٔ‌راهی در $S^2 - B_1$ و در $S^2 - B_2$ به‌هم وصل شوند.

به‌همین قیاس ادامه می‌دهیم. به‌این طریق دنباله‌ای از بازه‌های بسته مانند

$$\cdots \subset I_2 \subset I_1 \subset I$$

طوری تعریف می کنیم که طول I_n برابر $(1/2)^n$ باشد و به ازای هر n ، نقاط a و b نتوانند به‌وسیلهٔ راهی در $S^2 - h(I_n)$ به هم وصل شوند. فشردگی بازهٔ واحد وجود نقطه‌ای مانند x را در $\bigcap I_n$ تضمین می کند؛ چون دنبالهٔ حاصل از طول بازه‌ها به‌صفر همگراست، این نقطه منحصر به فرد است.

سپس، فضای $S^2 - h(x)$ را درنظر می‌گیریم. چون این فضا با R^2 هومئومورف است نقاط a و b می‌توانند به وسیلهٔ راهی مانند α در $S^2 - h(x)$ به هم وصل شوند. چون $h(x) = \bigcap h(I_n)$ ، فضای $S^2 - h(x)$ مساوی است با اجتماع مجموعه‌های باز

$$(S^2-h(I_1))\subset(S^2-h(I_2))\subset\cdots$$

از طرفی $\alpha(I)$ فشرده است، و باید در اجتماع تعدادی متناهی از این مجموعه‌ها، و در نتیجه، دریکی از آنها، مثلاً در $S^2-h(I_m)$، قرار گیرد. ولی در این صورت برخلاف فرض، α راهی است در $S^2-h(I_m)$ که a و b را به‌هم وصل می‌کند. □

۴.۱۳. قضیه (قضیهٔ منحنی ژوردان) فرض کنیم C منحنی بستهٔ ساده‌ای در S^2 باشد. در این صورت، S^2-C دقیقاً دو مؤلفه مانند W_1 و W_2 دارد که C مرز مشترک آنهاست. [یعنی: $C=\overline{W}_1-W_1=\overline{W}_2-W_2$.]

برهان. مرحلهٔ ۱. نخست، ثابت می‌کنیم که S^2-C دقیقاً دو مؤلفه دارد. لم ۲.۱۳ را به‌کار می‌بریم. C را به‌صورت اجتماع دو کمان C_1 و C_2 می‌نویسیم که درست در دو نقطهٔ p و q مشترک باشند. X را فضای S^2-p-q می‌گیریم، و فرض کنیم U و V مجموعه‌های باز

$$V=S^2-C_2 \quad \text{و} \quad U=S^2-C_1$$

باشند. در این صورت، $X=U\cup V$، و $U\cap V$ مساوی S^2-C است که بنابر قضیهٔ ۲.۱۲ دست‌کم دو مؤلفه دارد.

فرض کنیم S^2-C بیش از دو مؤلفهٔ داشته باشد. A و A' را دو مؤلفهٔ آن و B را اجتماع بقیهٔ مؤلفه‌ها می‌گیریم. چون S^2-C همبندموضعی است، هریك ازمجموعه‌های A، A'، و B بازند. فرض کنیم a، a'، و b بترتیب، نقاطی از A، A'، و B باشند. بنابر لم سابق، مجموعه‌های $U=S^2-C_1$ و $V=S^2-C_2$ همبند راهی‌اند (زیرا، هیچ کمانی S^2 را جدا نمی‌سازد). بنابراین a، a'، و b را می‌توان به وسیلهٔ راههایی در U و در V به هم وصل کرد. اکنون لم ۲.۱۳ مستلزم این است که گروه $\pi_1(X, a)$ دوری نامتناهی نباشد.

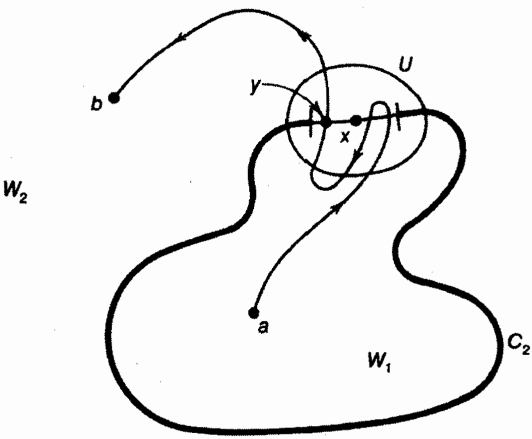
ازطرفی X مساوی S^2-p-q است، که با صفحهٔ سفتهٔ R^2-0 هومئومورف است، پس گروه بنیادی آن دوری نامتناهی است. بنابراین، فرض بیش از دو مؤلفه داشتن S^2-C غلط است.

مرحلهٔ ۲. اکنون ثابت می‌کنیم که C مرز مشترك W_1 و W_2 است.

چون S^2 همبند موضعی است، هر یك از مؤلفه‌های S^2-C، یعنی W_1 و W_2، در S^2 بازند. بالاخص، هیچکدام شامل نقطه‌ای حدی از دیگری نیست، در نتیجه $\overline{W}_1\cap W_2=W_1\cap\overline{W}_2=\varnothing$. چون S^2 مساوی اجتماع مجموعه‌های جدا از هم W_1، W_2، و C است، هر دو مجموعهٔ $\overline{W}_1-W_1$ و $\overline{W}_2-W_2$ باید زیر مجموعهٔ C باشند.

برای اثبات عکس آن، نشان می‌دهیم که اگر x نقطه‌ای از C باشد آنگاه هر همسایگی x مانند U مجموعهٔ بستهٔ $\overline{W}_1-W_1$ راقطع می‌کند. درنتیجه، $x\in\overline{W}_1-W_1$.

فرض کنیم U یك همسایگی x باشد. چون C با دایرهٔ S^1 هومئومورف است می‌توانیم C را به‌صورت دوکمان مانند C_1 و C_2 تقسیم کنیم به‌طوری‌که این دو کمان فقط در نقاط انتهایی یکدیگر را قطع کنند و C_1 آن قدر کوچك باشد که داخل U قرار گیرد. شکل ۳۶ ملاحظه شود.

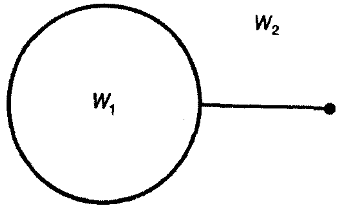


شکل ۳۶

فرض کنیم که a و b، بترتیب، نقاطی از W_1 و W_2 باشند. ازآنجا که C_2 (بنا بر قضیهٔ ۳.۱۳) S^2 را جدا نمی‌سازد، می‌توانیم راهی‌مانند α در S^2-C_2 بیابیم که a و b را به‌هم وصل کند. مجموعهٔ $\alpha(I)$ باید شامل نقطه‌ای‌از $\overline{W}_1-W_1$ مانند y باشد، چون در غیر این‌صورت $\alpha(I)$ مجموعهٔ همبند می‌شود که در اجتماع مجموعه‌های باز جدا از هم W_1 و $S^2-\overline{W}_1$ قراردارد و هریك ازآنها راهم‌قطع می کند. چون $C\supset(\overline{W}_1-W_1)$، نقطهٔ y ضرورتاً به‌منحنی بستهٔ C تعلق دارد. از طرفی چون راه α کمان C_2 را قطع نمی‌کند، پس نقطهٔ y باید درکمان C_1 قرار گیرد، که این خود زیر مجموعهٔ باز U است. درنتیجه، همان‌طورکه می‌خواستیم، مجموعه‌های U و $\overline{W}_1-W_1$ یکدیگر را در نقطهٔ y قطع می‌کنند. □

مثال ۱. نتیجهٔ دوم ازقضیهٔ منحنی ژوردان، با این محتواکه C مرزمشترك W_1 و W_2 است، ممکن است آن قدر واضح به‌نظر برسدکه نیازی به توضیح نداشته باشد. ولی، در واقع، این نتیجه بستگی قاطعی به‌هومئومورف بودن C با S^1 دارد.

مثلاً، زیر مجموعهٔ C از صفحه متشکل از اجتماع دایرهٔ واحد S^1 و قطعه خط $0\times[1,2]$، درست مانند دایره، S^2 را به دومؤلفه مانند W_1 و W_2 جدا می‌سازد. ولی در این مورد، C مساوی مرز مشترك W_1 و W_2 نیست. شکل ۳۷ ملاحظه شود.



شکل ۳۷

قضیهٔ چهارمی هم هست کـه اغلب توأم با این سه قضیهٔ جداسازی در نـظر گرفته می‌شود و آن را قضیهٔ شوئن‌فلایز[1] می‌نامند. قضیهٔ اخیر می گویـد که اگر C منحنی بستهٔ ساده‌ای در S^2 باشد، و U و V مؤلفه‌های $S^2 - C$ آنگاه $\bar{U}$ و $\bar{V}$ هرکدام با گوی واحد بستهٔ B^2 هومئومورف‌اند. ما تصمیم نداریم که این قضیه‌را ثابت کنیم. قضیهٔ اخیر نتیجه‌ای است ازقضیهٔ نگاشت ریمان درنظریهٔ متغیرهای مختلط.

قضایای جداسازی را می‌توان به‌طریق ذیل به ابعاد بالاتر تعمیم داد:

(۱) هرزیرمجموعهٔ C از S^n که با S^{n-1} هومئومورف باشد، S^n را جدا می‌سازد.

(۲) هیچ زیرمجموعهٔ A از S^n که با $[0, 1]$ یا گویی مانند B^m هومئومـورف باشد، S^n را جدا نمی‌سازد.

(۳) هرزیر مجموعهٔ C از S^n که با S^{n-1} هومئومورف باشد S^n را به دومؤلفه جدا می‌سازد به‌طوری که C مرز مشترك آنهاست.

پس‌از مطالعهٔ گروههای همولوژی ویژه در توپولوژی جبری، این قضایا به آسانی ثابت می‌شوند. (به صفحهٔ ۱۹۸ ازکتاب $[S]$ مراجعه کنید.) قضیهٔ براوئردرمورد ناوردایی‌حوزه برای R^n به‌عنوان نتیجه‌ای از این قضایا حاصل می گردد.

اگرچه، قضیهٔ شوئن‌فلایز بدون قیودی که منجر به نشاندن فضای C در S^n شود، به ابعاد بالاتر تعمیم نمی یابد. این مطلب با مثال مشهور «کرهٔ شاخدار اسکـندر» ثابت شده‌است، این کره عبارت است از تصویر هـومئومورفیك S^2 در S^3 که یکی از حوزه های مکمل آن همبند ساده نیست! (به صفحهٔ ۱۷۶ از [H-Y] مراجعه شود.)

قضایای جداسازی حتی بیش‌از این می‌توانند تعمیم یابند. دراین زمینه قضیهٔ بسیار مهمی معروف به قضیهٔ دوگانی الکساندر-پونتر یاگین[2] که قضیهٔ نسبتاً عمیقی درتوپولوژی جبری است وجود دارد، در اینجا قصد نداریم آن را بیان کنیم. ($[S]$ ملاحظه شود.) این قضیه مستلزم این است که اگر C فضای S^n را به k مؤلفهٔ جدا سازدآنگاه هرزیرمجموعهٔ S^n نیزکه با C هومئومورف (یا حتی بـا C هم ارز هموتوپی) بـاشد نیز چنین می کند. قضایای جداسازی (۱) — (۳) نتایج مستقیم این قضیه‌اند.

---

1. Schoenflies   2. Alexander - Pontryagin

تمرینها

۱. (الف) ثابت کنید که هیچ کمانی در R^2 آن را جدا نمی‌سازد.
(ب) ثابت کنید که یك منحنی بستهٔ ساده در R^2 مانند C، R^2 را به دو مؤلفهٔ جدا می‌سازد که C مرز مشترك آنهاست.

۲. بامفروضات لم ۱۰.۱۲، ثابت کنید که $\pi_1(X, a)$ حاوی یك زیر گروه دوری نامتناهی است.

۳. لم. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های همبند بسته‌ای از S^2 باشند که مقطع آنها دقیقاً از دو نقطه تشکیل شده است. اگر هیچیك از A و B فضای S^2 را جدا نسازد آنگاه $S^2-(A\cup B)$ دقیقاً دو مؤلفه دارد.

۴. یادآوری می کنیم که یك فضای تتا فضایی است به‌صورت اجتماع سه کمان a، b، و c که دو به دو یکدیگر را در نقاط انتهایی قطع می کنند.
(الف) ثابت کنید که یك فضای تتادر S^2 فضای S^2 را دقیقاً به‌سه مؤلفه جدا می‌سازد.
[راهنمایی: اگر C مؤلفه‌ای از $S^2-(a\cup b)$ باشد که c را قطع نکند آنگاه، بنا بر تمرین سابق، $\bar{C}\cup c$ فضای S^2 را دقیقاً به‌دومؤلفه جدا می‌سازد.]
(ب) ثابت کنید که $a\cup b$، $a\cup c$، و $b\cup c$، بترتیب، مرزهای این سه مؤلفه‌اند.
[راهنمایی: ثابت کنید که C یکی‌از این مؤلفه‌هاست؛ سپس از خاصیت تقارن استفاده کنید.]
(پ) قضیهٔ گراف گاز-آب-برق را نمی‌توان در S^2 نشاند (شکل ۱۳ در بخش ۹.۷).
[راهنمایی: فضایی را که از الحاق H_1 و H_2 به G، W، و E به‌دست می‌آید در نظر بگیرید.]

۵. فرض کنید a_1، a_2، a_3، و a_4 چهار نقطه متمایز S^2 باشند، و به‌ازای هر زوج از این نقاط مانند a_i و a_j $(i\neq j)$، کمانی مانند $a_i a_j$ در S^2 داشته باشیم که این دو نقطه را به هم وصل می کند. بعلاوه، فرض کنید هرزوج از این کمانها حداکثر یکدیگر را در یك نقطهٔ انتهایی قطع کنند. اجتماع این کمانها را **گراف کامل چهار راسی** می‌نامند و آن را به G_4 نمایش می‌دهند.
(الف) فرض کنید C منحنی $(a_1\ a_2)\cup(a_2\ a_3)\cup(a_3\ a_4)\cup(a_4\ a_1)$ باشد، که برای اختصار آن را به $a_1a_2a_3a_4a_1$ نشان می دهیم. فرض کنید A و B مؤلفه های S^2-C باشند. ثابت کنید که اگر A از a_1a_3 جدا باشد آنگاه B از a_2a_4 جداست. [راهنمایی: تمرین ۴ را فرض کنید. توجه کنید که A یکی از سه مؤلفهٔ $S^2-(C\cup a_1a_3)$ است که این سه مؤلفه، بترتیب، دارای مرزهای C، $a_1a_2a_3a_1$، و $a_1a_3a_4a_1$ هستند.]
(ب) ثابت کنید که S^2-G_4 چهارمؤلفه دارد که مرزهای آنها، بترتیب، عبارت‌اند

از $a_1a_2a_3a_1$، $a_1a_3a_4a_1$، $a_1a_2a_4a_1$، و $a_2a_3a_4a_2$.

(پ) قضیه. گراف کامل پنج رأسی را نمی توان در S^2 نشاند.(شکل ۱۳ از بخش ۷ـ۹ ملاحظه شود.)

۶. (الف) مفروضات و علائم لم ۱۰۱۳ را فرض بگیرید. همچنین، فرض کنید U و V همبند راهی باشند و $\pi_1(X, a)$ دوری نامتناهی باشد. ثابت کنید که E همبند ساده است و $[\alpha * \beta]$، $\pi_1(X, a)$ را تولیدمی‌کند. [راهنمایی: تمرین ۱۰ از بخش ۸ـ۴ را به‌کار ببرید.]

(ب) G_4 گراف کامل چهاررأسی a، b، c، و d را در نظر بگیرید؛ فرض کنید G_4 زیرمجموعه‌ای است از S^2. ثابت کنید که اگر p یك نقطهٔ درونی کمان ac باشد و q یك نقطهٔ درونی کمان bd آنگاه کمند $abcda$ گروه بنیادی S^2-p-q را تولید می کند. [راهنمایی: فرض کنید $U=S^2-pabq$ و $V=S^2-pcdq$. x را یك نقطهٔ درونی ad و y را یك نقطهٔ درونی bc اختیار کنید؛ بنابر تمرین ۵ (الف)، آنها درمؤلفه‌های متفاوت $U \cap V$ قرار دارند. فرض کنید $\alpha = xaby$ و $\beta = ycdx$.]

۷. ثابت کنید که:

قضیه. فرض کنید A یك منحنی بستهٔ ساده در R^2 باشد، و 0 درمؤلفهٔ کراندار R^2-A قرارگیرد. دراین صورت A گروه بنیادی R^2-0 را تولید می‌کند.

برهان. فرض کنید که $S=R^2 \cup \{\infty\}$ فشرده شدهٔ تك نقطه‌ای R^2 باشد. B را مؤلفهٔ کراندار R^2-A بگیرید.

(الف) کمانی مانند D در S شامل ∞ بسازید که A را دقیقاً در نقاط انتهاییش a و c قطع کند.

(ب) کمانی مانند E در S شامل 0 بسازید که A را درست در نقاط انتهاییش b و d قطع کند، که b و d در مؤلفه‌های متفاوت $A-a-c$ قرار گیرند. [راهنمایی: ثابت کنید که اگر x و y دو نقطهٔ زیرمجموعهٔ باز وهمبند U از S^2 باشد آنگاه (۱) کمانی در U موجود است که x و y را به‌هم وصل می کند، و (۲) هومئومورفیسمی مانند $h: S^2 \to S^2$ موجود است که خارج از U همانی است و x را به y می‌نگارد. فرض کنید A_1 و A_2 مؤلفه‌های $A-a-c$ باشند. نقطه‌ای مانند x از B برگزینید؛ x را به وسیلهٔ کمانهایی در $S-\bar{A}_1$ و $S-\bar{A}_2$ به ∞ وصل کنید؛ کمانهایی به دست آورید که x را به b و d وصل کنند؛ سپس کمانی از b به d به دست آورید، بالاخره برای به‌دست آوردن کمان شامل 0، (۲) را به‌کار ببرید.]

(پ) تمرین ۶ را به‌کار ببرید.

۸. قضیهٔ ذیل را که از قضایای اساسی آنالیز است ثابت کنید:

قضیه. فرض کنیدکه A یك منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه‌به‌قطعه مشتق‌پذیر درصفحهٔ مختلط

C باشد؛ $z_{\circ}$ را نقطه‌ای از C اختیار کنید به‌طوری که $z_{\circ} \notin A$. در این صورت، اگر $z_{\circ}$ در مؤلفهٔ کراندار $C - A$ قرار گیرد انتگرال

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{A}\frac{dz}{z-z_{\circ}}$$

مقداری مساوی ± 1 دارد، و اگر $z_{\circ}$ در مؤلفهٔ بیکران باشد، مقدار انتگرال ۰ است. [راهنمایی: تمرین سابق و تمرین ۶ از بخش ۸ ـ ۵ را به‌کار ببرید.]

۹. در تمرینات بخش ۸ ـ ۱۲ برهانی از قضیهٔ ناوردایی حوزه برای R^2 خلاصه شد. اکنون برهانی مستقل برمبنای تمرین ۷ این بخش بیاورید.

۸-۱۴ رده‌بندی فضاهای پوششی

تاکنون فضاهای پوششی را به‌طور عمده به عنوان ابزاری برای محاسبهٔ گروههای بنیادی به کار برده‌ایم. از این به بعد ورق برمی‌گردد، و گروههای بنیادی را به عنوان ابزاری برای مطالعهٔ فضاهای پوششی به خدمت می‌گیریم. ثابت می‌شود که همهٔ فضاهای پوششی ممکن یك فضای مفروض B را می‌توان صرفاً با بررسی گروه بنیادی B معین کرد. اکنون به توضیح این فرایند می‌پردازیم.

اگر H_1 و H_2 زیرگروههای گروه G باشند، ممکن است از درس جبر به خاطر داشته باشید که آنها را **مزدوج** گویند درصورتی که به ازای عضوی از G مانند α داشته باشیم $H_2 = \alpha \cdot H_1 \cdot \alpha^{-1}$. به عبارت دیگر، آنها مزدوج‌اند هرگاه ایزومورفیسم از G به خودش که x را به $\alpha \cdot x \cdot \alpha^{-1}$ می‌نگارد، گروه H_1 را بروی گروه H_2 تصویر کند. بررسی این مطلب آسان است که مزدوج بودن یك‌رابطهٔ هم ارزی بر گردایهٔ زیرگروههای G است. ردهٔ هم‌ارزی زیرگروه H را **ردهٔ ازدواج** H می‌نامند.

فرض‌کنیم یك فضای همبند راهی ثابت مانند B و یك نقطهٔ پایه‌ای ثابت از آن مانند $b_{\circ}$ در دست باشد. فرض‌کنیم $p: E \to B$ نگاشتی پوششی از فضای همبند راهی E به B باشد. اگر نقطه‌ای مانند $e_{\circ}$ در $p^{-1}(b_{\circ})$ به عنوان نقطهٔ پایه‌ای برای E انتخاب کنیم آنگاه یك هومومورفیسم القایی مانند

$$p_* : \pi_1(E, e_{\circ}) \to \pi_1(B, b_{\circ})$$

داریم (که در واقع یك به یك است). تصویر گروه $\pi_1(E, e_{\circ})$، یعنی گروه

$$H_{\circ} = p_*(\pi_1(E, e_{\circ})),$$

البته به انتخاب نقطهٔ پایه‌ای $e_{\circ}$ از E بستگی دارد، ولی نحوهٔ این بستگی بسیار ساده است. ثابت خواهیم کرد که وقتی $e_{\circ}$ همهٔ نقاط مختلف $p^{-1}(b_{\circ})$ را طی می‌کند، تصاویر

این زیر گروهها زیر گروههایی از G می‌شود که مزدوج H_0 هستند. پس به هر فضای پوششی‌همبند راهی B مانند $p: E \to B$ می‌توانیم ردهٔ ازدواج مشخصی را از زیر‌گروههای $\pi_1(B, b_0)$ اختصاص دهیم، که همان‌گردایهٔ تصاویر گروههای $\pi_1(E, e)$ است تحت هومومورفیسم القایی p به ازای $e \in p^{-1}(b_0)$.

ثابت می‌شود که تحت این تناظر هر ردهٔ ازدواج، نظیر یك فضای پوششی B است. همین طور، این ردهٔ ازدواج، فضای پوششی را با تقریب هومئومورفیسم به طور یکتا مشخص می‌کند. این همان قضیهٔ اساسی رده‌بندی فضاهای پوششی‌است.

دقیقتر آنکه، دو فضای پوششی B $p: E \to B$ و $p': E' \to B$ را **هم‌ارز** گوییم درصورتی که هومئومورفیسمی مانند $h: E' \to E$ موجود باشد که $p \circ h = p'$.

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{h} & E \\ & {\scriptstyle p'}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & B & \end{array}$$

دراین صورت، دو قضیهٔ اصلی مربوط به رده‌بندی فضاهای پوششی را می‌توان به صورت ذیل بیان کرد:

(۱) به ازای هر ردهٔ ازدواج از زیر گروههای $\pi_1(B, b_0)$، یك فضای پوششی همبند راهی برای B مانند $p: E \to B$ موجود است که به‌ازای $e \in p^{-1}(b_0)$ گروههای $p_*(\pi_1(E, e))$ این ردهٔ ازدواج را می‌سازند.

(۲) دو فضای پوششی همبند راهی B هم‌ارزند اگر و تنها اگر تحت این تناظر ردهٔ ازدواج زیر گروههای $\pi_1(B, b_0)$ باشند.

به کمك این قضایا، مسئلهٔ توپولوژیك تعیین همهٔ فضاهای پوششی همبند راهی ممکن یك فضای مفروض، تماماً به‌مسئلهٔ جبری‌تعیین همهٔ رده‌های‌ازدواج زیر گروههای $\pi_1(B, b_0)$ تقلیل می‌یابد.

اما باید توجه کنیم که این قضایا به ازای فضای همبند راهی‌کاملاً دلخواهی مانند B برقرار نیستند. برای اقامهٔ برهان محتاج به‌این هستیم که فرض کنیم B دارای خصوصیات «موضعی مناسبی» است. (قضایای ۱۴ . ۳ و ۱۴ . ۴ ملاحظه شود.)

۱۴ . ۱ لم فرض کنیم $p: E \to B$ نگاشتی پوششی باشد، و E و B همبند راهی باشند. همچنین، فرض کنیم $b_0 \in B$. وقتی e نقاط $p^{-1}(b_0)$ را طی می‌کند، گروه $p_*(\pi_1(E, e))$ دقیقاً بریك ردهٔ ازدواج زیرگروههای $\pi_1(B, b_0)$ تغییر می‌کند.

برهان. به ازای دونقطهٔ مفروض $p^{-1}(b_0)$ مانند e_0 و e_1 فرض کنیم

$$H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0)) \quad \text{و} \quad H_1 = p_*(\pi_1(E, e_1))$$

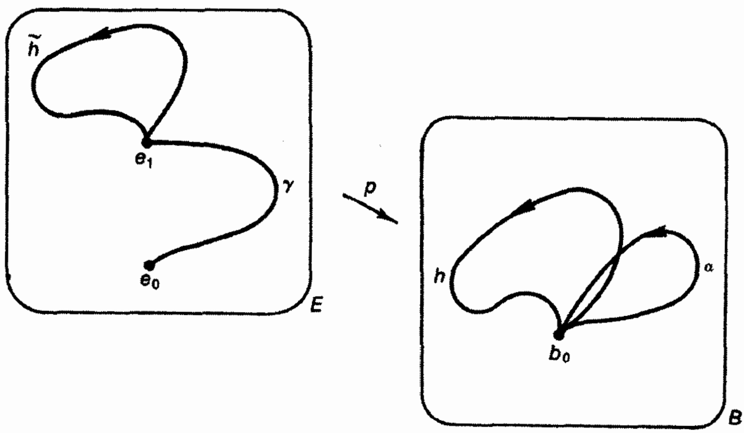
مرحلهٔ ۱. فرض کنیم γ راهی در E از e_0 به e_1 باشد، و α کمند $p \circ \gamma$ در B بر پایهٔ b_0 باشد. ثابت می‌کنیم که

$$[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0 \cdot$$

$[h]$ را عضوی از H_1 می‌گیریم؛ در این صورت به‌ازای کمندی در E برپایهٔ e_1 مانند $\tilde{h}$، $[h] = p_*([\tilde{h}])$. فرض کنیم $\tilde{k} = (\gamma * \tilde{h}) * \bar{\gamma}$؛ $\tilde{k}$ کمندی است برپایهٔ e_0 و

$$p_*([\tilde{k}]) = [(\alpha * h) * \bar{\alpha}] \cdot$$

پس، همان‌طور که می‌خواستیم، $[\alpha] * [h] * [\alpha]^{-1} \in H_0$. شکل ۳۸ ملاحظه شود.



شکل ۳۸

مرحلهٔ ۲. نتیجه می‌شود که زیرگروههای H_0 و H_1 مزدوج‌اند. زیرا فرض کنیم γ راهی در E از e_0 به e_1 باشد، و $\alpha = p \circ \gamma$. دراین صورت، $\bar{\gamma}$ راهی است از e_1 به e_0 و $\bar{\alpha} = p \circ \bar{\gamma}$. اگر دوبار مرحلهٔ ۱ را به‌کار ببریم، خواهیم داشت

$$[\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1} \subset H_0 ,$$

$$[\bar{\alpha}] * H_0 * [\bar{\alpha}]^{-1} \subset H_1 \cdot$$

پس، همان‌طور که می‌خواستیم، $H_0 = [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$.

مرحلهٔ ۳. اکنون به‌ازای $e_0 \in p^{-1}(b_0)$، و زیرگروه مفروضی از $\pi_1(B, b_0)$ مانند H که مزدوج H_0 باشد، می‌خواهیم نقطه‌ای از $p^{-1}(b_0)$ مانند e_1 بیابیم که H_1 (زیرگروه نظیر آن) مساوی H باشد. بنابر فرض، به‌ازای کمندی در B برپایهٔ b_0 مانند α، داریم $H_0 = [\alpha] * H * [\alpha]^{-1}$. فرض کنیم γ بالابر α به راهی در E با نقطهٔ آغازی e_0 باشد، و $e_1 = \gamma(1)$. فرض کنیم $H_1 = p_*(\pi_1(E, e_1))$. از مرحلهٔ ۲

نتیجه می‌شود که $H_\circ = [\alpha] * H_1 * [\alpha]^{-1}$. پس، همان طور که می‌خواستیم، $H = H_1$. □

هم ارزی پوششها

اکنون ثابت می‌کنیم که دو پوشش هم‌ارزند اگر و تنها اگر نظیر به یك ردهٔ ازدواج باشند. برای این منظور، به‌صورت تعمیم یافتهٔ ذیل از «لم بالابری» که در بخش ۸ـ۴ بیان شد احتیاج داریم:

۲.۱۴. لم (لم عمومی بالابری) فرض‌کنیم $p: E \to B$ یك نگاشت پوششی باشد، و $p(e_\circ) = b_\circ$، و $f: Y \to B$ نگاشتی پیوسته باشدکه $f(y_\circ) = b_\circ$. فرض کنیم Y همبند راهی موضعی‌باشد. نگاشت f رامی‌توان‌به‌یك نگاشت مانند $\tilde{f}: Y \to E$ بالا برد به‌طوری که $\tilde{f}(y_\circ) = e_\circ$ اگر و تنها اگر

$$f_*(\pi_1(Y, y_\circ)) \subset p_*(\pi_1(E, e_\circ)).$$

بعلاوه، چنین بالابری، درصورت وجود، منحصر به فرد است.

برهان. اگر بالابر $\tilde{f}$ موجود باشد آنگاه

$$f_*(\pi_1(Y, y_\circ)) = p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_\circ))) \subset p_*(\pi_1(E, e_\circ)),$$

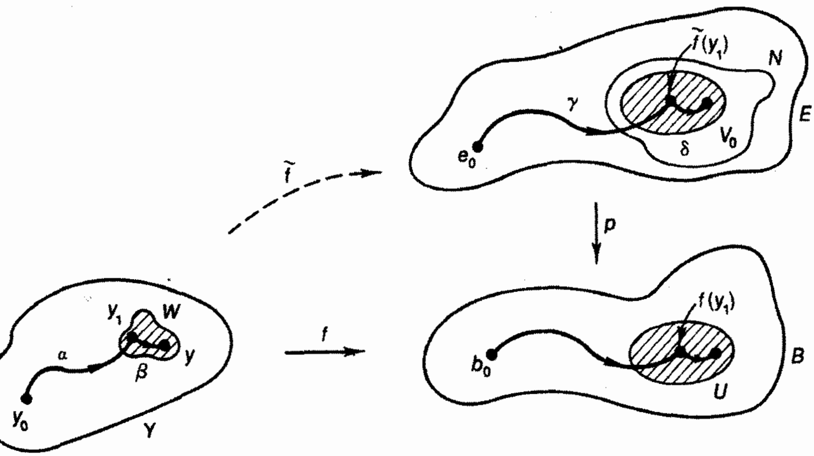
که این قسمت «تنها اگر» قضیه را ثابت می‌کند.

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $\tilde{f}$ موجود باشد، منحصر به فرد است. به‌ازای عضو مفروضی‌از Y مانند y_1، راهی مانند α در Y از $y_\circ$ به y_1 انتخاب می‌کنیم. راه $f \circ \alpha$ را در B اختیارمی‌کنیم و آن را به راهی مانند γ در E با نقطهٔ‌آغازی $e_\circ$ بالا می‌بریم. اگر f بالابری مانند $\tilde{f}$ داشته باشد آنگاه $\tilde{f}(y_1)$ باید مساوی نقطهٔ انتهایی γ، یعنی $\gamma(1)$، باشد؛ زیرا، $\tilde{f} \circ \alpha$ بالابر $f \circ \alpha$ است که از $e_\circ$ شروع می‌شود، و بالابرهای راهها یکتا هستند.

سرانجام، قسمت «اگر» قضیه را ثابت می‌کنیم. قسمت یکتایی برهان، ما را در چگونگی انجام آن راهنمایی می‌کند. به‌ازای $y_1 \in Y$، راهی در Y مانند α از $y_\circ$ به y_1 انتخاب می‌کنیم. راه $f \circ \alpha$ را به‌راهی مانند γ در E با نقطهٔ‌آغازی $e_\circ$ بالامی‌بریم، $\tilde{f}(y_1)$ را مساوی $\gamma(1)$ تعریف می‌کنیم. شکل ۳۹ ملاحظه شود. اثبات اینکه $\tilde{f}$ خوشتعریف و مستقل از انتخاب α است، خود مستلزم مقداری کار است. پس از اثبات آنها، پیوستگی $\tilde{f}$ به‌آسانی به‌صورت ذیل ثابت می‌شود:

به‌ازای همسایگی مفروضی از $\tilde{f}(y_1)$ مانند N، یك همسایگی از y_1 مانند W می‌یابیم که $\tilde{f}(W) \subset N$. نخست همسایگی U از $f(y_1)$ راکه به‌طور هموار به‌وسیلهٔ

p پوشانده شده است انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم $V_\circ$ قاچ شامل $\tilde{f}(y_1)$ از $p^{-1}(U)$ باشد، و $p_\circ$ تحدید p به $V_\circ$. درصورت لزوم با انتخاب همسایگیهای کوچکتر می‌توانیم فرض کنیم $V_\circ \subset N$. اکنون همسایگیی از y_1 مانند W انتخاب می‌کنیم که همبندراهی و زیرمجموعهٔ $f^{-1}(U)$ باشد. مدعی هستیم که $\tilde{f}(W) \subset V_\circ$. زیرا، به‌ازای $y \in W$، می‌توانیم راهی‌مانند β در W از y_1 به y انتخاب کنیم. راه $f \circ \beta$ را درنظر می‌گیریم؛ آن‌را در E به راه $\delta = p_\circ^{-1} \circ f \circ \beta$ با نقطهٔ آغازی $\tilde{f}(y_1)$ بالا می‌بریم. دراین‌صورت، $\gamma * \delta$، که بالابر $f \circ (\alpha * \beta)$ با نقطهٔ آغازی $e_\circ$ است، قابل تعریف است. بنابر تعریف، $\tilde{f}(y)$ مساوی نقطهٔ انتهایی $\gamma * \delta$ است، که در $V_\circ$ قرار دارد.



شکل ۳۹

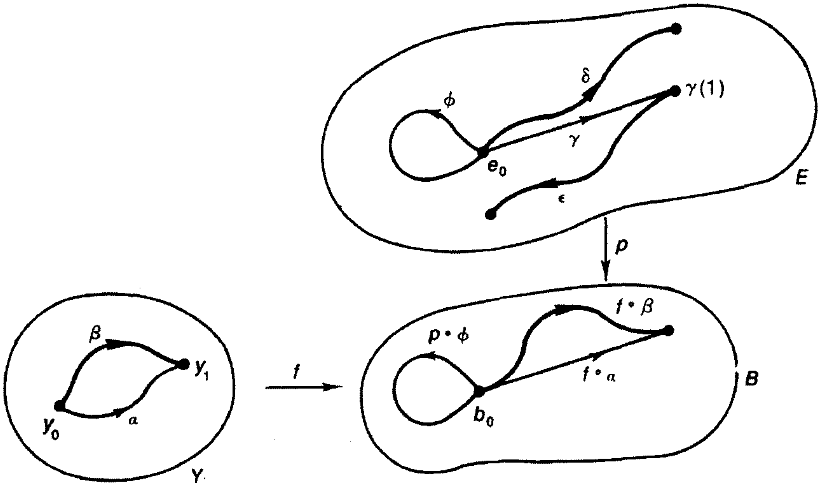
اکنون خوشتعریفی $\tilde{f}$ راثابت می‌کنیم. به‌ازای‌دو راه مفروض α و β در Y از $y_\circ$ به y_1، تصاویر آنها، یعنی $f \circ \alpha$ و $f \circ \beta$، راههایی در B هستند. فرض کنیم γ و δ، بترتیب، نمایش‌بالابرهای آنها به راههایی در E با نقطهٔ آغازی $e_\circ$ باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم که $\gamma(1) = \delta(1)$.

فرض‌کنیم ε بالابری از $f \circ \bar{\beta}$ به راهی در E با نقطهٔ آغازی $\gamma(1)$ باشد. شکل ۴۰ ملاحظه شود. در این صورت، $\gamma * \varepsilon$ یك بالابر کمند $(f \circ \alpha) * (f \circ \bar{\beta})$ در B به E است. ردهٔ هموتوپی این‌کمند عبارت است از $f_*([\alpha * \bar{\beta}])$، که بنابر فرض، به $p_*(\pi_1(E, e_\circ))$ تعلق دارد. پس‌کمندی در E بر پایهٔ $e_\circ$ مانند ϕ هست که

$$[(f \circ \alpha) * (f \circ \bar{\beta})] = [p \circ \phi].$$

نتیجه می‌شود که ε باید به $e_\circ$ منتهی شود. زیرا، بنابر قضیهٔ ۳.۴، اگر دو راه در

B که هموتوپ راهی‌اند به راههایی در E با یك نقطهٔ آغازی بالا برده شوند آنگاه آنها باید به یك نقطه منتهی شوند. چون $p\circ\phi$ و $(f\circ\alpha)*(f\circ\bar{\beta})$ هموتوپ راهی‌اند، بالابرهای آنها، یعنی ϕ و $\varepsilon*\gamma$، باید به یك نقطه منتهی شوند. در این صورت، $\varepsilon*\gamma$ به e_0 منتهی می‌شود، همان‌طور که ε نیز به e_0 منتهی می‌شود.



شکل ۴۰

اکنون ε یك بالابر $\bar{\beta}$ است که از $\gamma(1)$ شروع و به e_0 منتهی می‌شود. دراین صورت، $\bar{\varepsilon}$ یك بالابر β است که از e_0 شروع و به $\gamma(1)$ منتهی می‌شود. راه δ بالابر دیگری از این نوع است. بنابر یکتایی بالابری راهها، $\delta=\bar{\varepsilon}$. بالاخص، همان طور که می‌خواستیم، $\delta(1)=\gamma(1)$. □

۳.۱۴. قضیه فرض کنیم B همبند راهی و همبند راهی موضعی باشد. فرض کنیم $\mathrm{p}:\mathrm{E}\to\mathrm{B}$ و $\mathrm{p}':\mathrm{E}'\to\mathrm{B}$ فضاهای پوششی همبندراهی B باشندو $\mathrm{p}(\mathrm{e}_0)=\mathrm{p}'(\mathrm{e}'_0)=\mathrm{b}_0$. در این صورت، p و p' نگاشتهای پوششی هم‌ارزند اگر و فقط اگر $\mathrm{p}_*(\pi_1(\mathrm{E},\mathrm{e}_0))$ و $\mathrm{p}'_*(\pi_1(\mathrm{E}',\mathrm{e}'_0))$ زیرگروههای مزدوج $\pi_1(\mathrm{B},\mathrm{b}_0)$ باشند.

برهان. فرض کنیم نگاشتهای پوششی هم‌ارز باشند، و $h:E'\to E$ هومئومورفیسمی باشد به‌طوری که $p\circ h=p'$ وفرض کنیم $h(e'_0)=e_1$. دراین‌صورت، چون h یك هومئومورفیسم است، $h_*(\pi_1(E',e'_0))=\pi_1(E,e_1)$. با اثر دادن p_* به‌هر دو طرف، خواهیم داشت

$$p'_*(\pi_1(E',e'_0))=p_*(\pi_1(E,e_1))$$

بنابر لم ۱.۱۴ زیر گروه دومی با $p_*(\pi_1(E, e_0))$ مزدوج است.

اکنون عکس آن را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم این دو زیر گروه مزدوج باشند. با توجه به لم ۱.۱۴ می‌توانیم با انتخاب یك نقطهٔ پایه‌ای دیگری در E' وضعیتی به‌دست آوریم که در آن دو زیر گروه مساوی شوند. این عمل را انجام شده تلقی می‌کنیم، و فرض می‌کنیم e'_0 نمایشگر نقطهٔ پایه‌ای جدید باشد.

لم سابق را به‌کار می‌بریم. نمودار ذیل را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ccc} & & E' \\ & & \downarrow p' \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

که p' یك نگاشت پوششی است. فضای E همبند راهی است؛ و چون به‌طور موضعی با B هومئومورف است، همبند راهی موضعی نیز هست. بعلاوه،

$$p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset p'_*(\pi_1(E', e'_0));$$

در واقع، این دو گروه مساوی‌اند. بنابر لم سابق، نگاشت $p: E \to B$ را می‌توانیم به یك نگاشت پیوسته مانند $h: E \to E'$ طوری بالا ببریم که $h(e_0) = e'_0$. در این صورت، $p' \circ h = p$.

با تعویض نقش E و E' در این استدلال، ملاحظه می‌کنیم که نگاشت $p': E' \to B$ می‌تواند به‌نگاشتی پیوسته مانند $k: E' \to E$ بالا رود به‌طوری که $k(e'_0) = e$.

برای اثبات اینکه h و k عکس یکدیگرند، نمودار ذیل را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

توجه کنید که $k \circ h: E \to E$ یك بالابر نگاشت $p: E \to B$ است که در شرط $(k \circ h)(e_0) = e_0$ صدق می‌کند. نگاشت همانی $i_E: E \to E$ بالابر دیگری از p است که از این نوع می‌باشد. بنابر یکتایی بالابرها، $k \circ h = i_E$. به طریقی مشابه $h \circ k = i_{E'}$. □

مثال ۱. فضاهای پوششی دایرهٔ $B = S^1$ را درنظر می‌گیریم. چون $\pi_1(B, b_0)$ آبلی است، دو زیرگروه $\pi_1(B, b_0)$ مزدوج‌اند اگر وفقط اگر مساوی باشند. بنابراین دو پوشش B هم ارزند اگر و فقط اگر متناظر به یك زیرگروه $\pi_1(B, b_0)$ باشند.

می‌دانیم که $\pi_1(B, b_\circ)$ با Z (اعدادصحیح) ایزومورف‌است.زیرگروههای Z کدام‌اند؟ این یکی از قضایای استانده‌ٔ جبر است که، به‌ازای هر زیرگروه نابدیهی مفروض Z، عدد صحیح مثبتی مانند n هست که این زیرگروه مساوی G_n، یعنی مجموعهٔ همهٔ مضارب n، باشد.

یکی از فضاهای پوششی دایره را مطالعه کرده‌ایم، پوشش $p: R \to S^1$. چون R همبند ساده است، این پوشش به زیرگروه بدیهی $\pi_1(S^1, b_\circ)$ نظیر شود. همچنین، نگاشت پوششی $p: S^1 \to S^1$ را با ضابطهٔ $p(z)=z^n$ درنظرگرفتیم، که در آن، z عددی مختلط است. دراین مورد، نگاشت p_* مولدی از $\pi_1(S^1, b_\circ)$ را به n برابر خودش می‌نگارد. بنابراین، گروه $p_*(\pi_1(S^1, b_\circ))$، تحت ایزومورفیسم استاندهٔ $\pi_1(S^1, b_\circ)$ با Z، به زیرگروه G_n از Z نظیر می‌شود.

از قضیهٔ سابق نتیجه می‌گیریم که هر پوشش همبند راهی فضای S^1 با یکی از این پوششها هم ارز است.

وجود پوششها

اکنون ثابت می‌کنیم که به ازای هر زیرگروه مفروض $\pi_1(B, b_\circ)$ مانند H، یك فضای پوششی مانند $p: E \to B$ و نقطه‌ای از $p^{-1}(b_\circ)$ مانند $e_\circ$ موجود است که $p_*(\pi_1(E, e_\circ))=H$. برای این منظور، احتیاج به فرض‌یك شرط اضافی برفضای B داریم موسوم به «همبندی سادهٔ نیم‌موضعی».

تعریف. فضای B را **همبند سادهٔ نیم‌موضعی** گویند درصورتی که‌هرنقطهٔ b از B یك همسایگی مانند V داشته باشد به‌طوری که هومومورفیسم القا شده به وسیلهٔ تابع احتوا از $\pi_1(V, b)$ بتوی $\pi_1(B, b)$ بدیهی باشد.

اگر V چنین‌همسایگیی‌از b و U همسایگی‌دلخواهی‌از b باشدآنگاه $U \cap V$، نیز همسایگیی از b است که در U قرار دارد، و در این شرط صدق می‌کند. همبندی سادهٔ نیم‌موضعی از همبندی سادهٔ موضعی ضعیفتر است؛ همبندی سادهٔ موضعی مستلزم آن است که به‌ازای هر همسایگی b مانند U باید یك همسایگی از b مانند V موجود باشد که $V \subset U$ و V همبند ساده باشد.

۴.۱۴. قضیه فرض‌کنیم B همبندراهی، همبندراهی موضعی، وهمبندسادهٔ نیم موضعی باشد و $\mathrm{b}_\circ \in \mathrm{B}$. به‌ازای زیرگروه مفروضی از $\pi_1(\mathrm{B}, \mathrm{b}_\circ)$ مانند H، یك‌فضای پوششی‌همبند راهی مانند $\mathrm{p}: \mathrm{E} \to \mathrm{B}$ و نقطه‌ای از $\mathrm{p}^{-1}(\mathrm{b}_\circ)$ مانند $\mathrm{e}_\circ$ موجود است به‌طوری که

$$\mathrm{p}_*(\pi_1(\mathrm{E}, \mathrm{e}_\circ))=\mathrm{H}.$$

برهان. مرحلهٔ ۱. (ساختمان E). طریقهٔ ساختن E یادآور طریقه‌ای است که در

آنـالیز مختلط برای ساختن سطوح ریمانی مـورد استفاده قـرار می‌گیرد. فرض‌کنیم $\mathcal{P}$ نمایش همهٔ راههایی در B باشد که از b_0 شروع می‌شوند. به‌طریق ذیل یك رابطهٔ هـم‌ارزی بر $\mathcal{P}$ تعریف می‌کنیم: $\alpha \sim \beta$ هرگاه α و β به یك نقطهٔ B منتهی شونـد و ردهٔ $[\alpha * \bar{\beta}]$ به زیرگروه H تعلق داشته بـاشد. به‌آسانی معلوم می‌شود کـه «$\sim$» یك رابطهٔ هم ارزی است.

فرض‌کنیم E نمایش‌گردایهٔ رده‌های هم‌ارزی بـاشد؛ ردهٔ هم‌ارزی راه α را به $\alpha^{\#}$ نمایش‌می‌دهیم. نگاشت $p: E \to B$ رابا ضابطهٔ $p(\alpha^{\#}) = \alpha(1)$ تعریف‌می‌کنیم. چون B همبند راهی است، p پوشاست. بر E توپولوژیی تعریف می‌کنیم کـه نسبت به آن p نگاشتی پوششی شود.

نخست به دو مطلب توجه می‌کنیم:

(۱) اگر $\alpha \simeq_p \beta$ آنگاه $\alpha^{\#} = \beta^{\#}$.

(۲) اگر $\alpha^{\#} = \beta^{\#}$ آنگاه به‌ازای هر راه δ در B بـا نقطهٔ آغازی $\alpha(1)$ داریم $(\alpha * \delta)^{\#} = (\beta * \delta)^{\#}$.

اولی بـا توجه به‌این نکته نتیجه می‌شود که اگر $\alpha \simeq_p \beta$ آنگـاه $[\alpha * \bar{\beta}]$ عضو خنثایی است که به H تعلق دارد. دومی نتیجه‌ای است از این مطلب کـه $\alpha * \delta$ و $\beta * \delta$ بـه‌یك نقطه منتهی می‌شوند و

$$[(\alpha * \delta) * (\overline{\beta * \delta})] = [(\alpha * \delta) * (\bar{\delta} * \bar{\beta})] = [\alpha * \bar{\beta}] ,$$

که بنابر فرض، به H تعلق دارد.

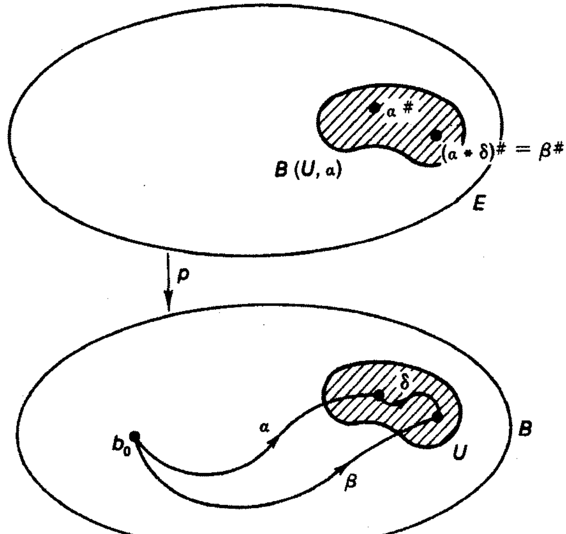
مرحلهٔ ۲. (توپولوژی‌دهی به E) . یك طریقهٔ توپولوژی‌دهی به E چنین است که $\mathcal{P}$ را با توپولوژی فشرده ـ باز (به فصل ۷ مراجعه شود) مجهز کنیم و E را از توپولوژی خارج قسمتی متناظر به آن برخـوردار کنیم. ولی به‌صورت ذیـل هـم می‌تـوان مستقیماً به E توپولوژی بدهیم:

فرض‌کنیم α عضوی از $\mathcal{P}$، و U همسایگی همبند راهی دلخواهی از $\alpha(1)$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$B(U, \alpha) = \{(\alpha * \delta)^{\#} | \alpha(1) \text{ راهی است در } U \text{ با نقطهٔ آغازی } \delta\}$$

مـدعی هستیم که مجموعـه‌هـای $B(U, \alpha)$ تشکیل پـایه‌ای برای یك توپولوژی در E می‌دهند. شکل ۴۱ ملاحظه شود. توجه‌کنید که $\alpha^{\#} \in B(U, \alpha)$.

نخست ثابت می‌کنیم که اگر $\beta^{\#} \in B(U, \alpha)$ آنگـاه $B(U, \beta) = B(U, \alpha)$. می‌دانیم که به‌ازای راهی در U مـانند δ، $\beta^{\#} = (\alpha * \delta)^{\#}$. عضو نـوعی $B(U, \beta)$ بـه صورت $(\beta * \gamma)^{\#}$ است کـه γ راهـی است در U. بنابـر احـکام (۱) و (۲) مرحلهٔ ۱ داریـم



شکل ۴۱

$$(\beta * \gamma)^{\#} = ((\alpha * \delta) * \gamma)^{\#} = (\alpha * (\delta * \gamma))^{\#} ,$$

کـه بنابر تعریف در $B(\alpha, U)$ قرار دارد. در نتیجه $B(U, \beta) \subset B(U, \alpha)$. بعکس، عضو نـوعی $B(U, \alpha)$ به‌صورت $(\alpha * \varepsilon)^{\#}$ است، کـه ε راهی است در U. مجدداً بنابر (۱) و (۲)،

$$(\alpha * \varepsilon)^{\#} = ((\alpha * \delta) * (\bar{\delta} * \varepsilon)^{\#} = (\beta * (\bar{\delta} * \varepsilon))^{\#} ,$$

که در $B(U, \beta)$ قرار دارد. پس $B(U, \alpha) \subset B(U, \beta)$.

اکنون ثابت می‌کنیم که مجموعه‌های $B(U, \alpha)$ تشکیل یك‌پایه می‌دهند. اگر $\beta^{\#}$ به مقطع $B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$ تعلق داشته باشد، تنهانیاز ما انتخاب یك همسایگی همبند راهی از $\beta(1)$ مانند V است که زیر مجموعهٔ $U_1 \cap U_2$ باشد. جزئیت

$$B(V, \beta) \subset B(U_1, \beta) \cap B(U_2, \beta)$$

نتیجه‌ای است از تعریف این مجموعه‌هـا، و بنا بـر نتیجه‌ای که ثـابت شد، طرف راست مساوی است با $B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$.

مرحلهٔ ۳. نگاشت p پیوسته و باز است. به آسانی ملاحظه می‌شود که p باز است، زیرا تصویر عضو پایه‌ای $B(U, \alpha)$ مجموعهٔ باز U از B است: به‌ازای عضو مفروضی

از U مانند x، راه δ را در U از $\alpha(1)$ به x انتخاب می‌کنیم؛ دراین صورت $(\alpha*\delta)^{\#}$ عضوی است از $B(U,\alpha)$ و $p((\alpha*\delta)^{\#})=x$.

برای اثبات پیوستگی p، فرض می‌کنیم که $\alpha^{\#}$ عضوی از E باشد، و W یك همسایگی‌از $p(\alpha^{\#})$. یك‌همسایگی همبند راهی‌ازنقطهٔ $p(\alpha^{\#})=\alpha(1)$ مانند U انتخاب می‌کنیم که زیر مجموعهٔ W باشد. در این صورت، $B(U,\alpha)$ یك همسایگی $\alpha^{\#}$ است که p آن را بتوی W می‌نگارد. پس p در $\alpha^{\#}$ پیوسته است.

مرحلهٔ ۴. نگاشت p یك نگاشت پوششی است. به ازای عضو مفروض b_1 از B، یك همسایگی همبند راهی از b_1 مانند U چنان برمی‌گزینیم که دراین شرط اضافی هم صدق کند که هومورفیسم القایی $\pi_1(U,b_1)\to\pi_1(B,b_1)$ به‌وسیلهٔ تابع احتوا برابر هومورفیسم بدیهی باشد. ادعا می‌کنیم که U به‌وسیلهٔ p به‌طور هموار پوشانده می‌شود.

اولاً، ملاحظه می‌کنیم که $p^{-1}(U)$ مساوی اجتماع مجموعه‌های $B(U,\alpha)$ است وقتی α همهٔ راههای در B از b_0 به b_1 را اختیار می‌کند: چون p هر مجموعهٔ $B(U,\alpha)$ را بروی U می‌نگارد، واضح‌است که $p^{-1}(U)$ حاوی این اجتماع است. از طرف دیگر، اگر $\beta^{\#}\in p^{-1}(U)$ آنگاه $\beta(1)$ عضوی است از U و می‌توانیم راهی مانند δ در U از $\beta(1)$ به b_1 انتخاب کنیم. فرض کنیم α راه $\beta*\delta$ از b_0 به b_1 باشد؛ در این‌صورت $\beta\simeq_p\alpha*\bar{\delta}$، درنتیجه، $\beta^{\#}=(\alpha*\bar{\delta})^{\#}$، که به $B(U,\alpha)$ تعلق‌دارد پس $p^{-1}(U)$ زیر مجموعهٔ اجتماع مجموعه‌های $B(U,\alpha)$ است.

ثانیاً، توجه می‌کنیم که مجموعه‌های متمایز $B(U,\alpha)$ جدا از هم‌اند. زیرا اگر $\beta^{\#}$ به مقطع $B(U,\alpha_1)\cap B(U,\alpha_2)$ تعلق داشته باشدآنگاه بنابر مرحلهٔ ۲،

$$B(U,\alpha_1)=B(U,\beta)=B(U,\alpha_2)\,.$$

ثالثاً، ثابت می‌کنیم که p یك‌نگاشت دوسویی از $B(U,\alpha)$ به U تعریف می‌کند. نتیجه می‌شود که $p|B(U,\alpha)$ دوسویی، پیوسته، و باز است و در نتیجه یك هومئومورفیسم است. قبلاً ملاحظه کردیم که p مجموعهٔ $B(U,\alpha)$ را بروی U می‌نگارد. برای اثبات یك‌به‌یك بودن p، فرض کنیم

$$p((\alpha*\delta_1)^{\#})=p((\alpha*\delta_2)^{\#}),$$

که δ_1 و δ_2 راههایی در U هستند. در این صورت، $\delta_1(1)=\delta_2(1)$. از آنجا که هومورفیسم القایی $\pi_1(U,b_1)\to\pi_1(B,b_1)$ به‌وسیلهٔ تابع احتوا مساوی هومومورفیسم بدیهی است، $\delta_1*\bar{\delta}_2$ در B با یك نگاشت ثابت هموتوپ راهی است. پس، $\alpha*\delta_1\simeq_p\alpha*\delta_2$، که درنتیجه، همان‌طورکه می‌خواستیم، $(\alpha*\delta_1)^{\#}=(\alpha*\delta_2)^{\#}$.

مرحلهٔ ۵. فضای E همبند راهی است و به ازای عضوی‌از $p^{-1}(b_0)$ مانند e_0 زیرگروه H مساوی $p_*(\pi_1(E,e_0))$ است. اثبات این حکم برهان قضیه را به پایان می‌رساند.

نخست، دقیقاً تعیین می‌کنیم که بالابر راهی مانند α در B چگونه است. فرض کنیم α راهی در B با نقطهٔ آغازی b_0 باشد. به ازای $t \in [0, 1]$، فرض کنیم $\alpha_t : I \to B$ با ضابطهٔ

$$\alpha_t(s) = \alpha(ts) \qquad (s \in [0, 1] \text{ به‌ازای})$$

نمایش «قسمتی» از راه α باشد که بین b_0 و $\alpha(t)$ قرار گرفته است. سپس $\widetilde{\alpha} : I \to E$ را با معادلهٔ

$$\widetilde{\alpha}(t) = (\alpha_t)^{\#}$$

تعریف‌می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که $\widetilde{\alpha}$ بالابر α است؛ توجه‌می‌کنیم که $\widetilde{\alpha}$ ازنقطهٔ $e_0 = (e_{b_0})^{\#}$، یعنی ردهٔ هم‌ارزی راه ثابت، شروع می‌شود و به نقطهٔ $\alpha^{\#}$ منتهی می‌شود. به آسانی ملاحظه می‌شود که $p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$، زیرا $p(\widetilde{\alpha}(t)) = p((\alpha_t)^{\#}) = \alpha_t(1) = \alpha(t \times 1)$. مشکلترین قسمت، اثبات پیوستگی $\widetilde{\alpha}$ است.

زمانی که آن را ثابت‌کنیم قضیه بسهولت نتیجه می‌شود. برای اثبات همبند راهی بودن E توجه می‌کنیم که اگر $\alpha^{\#}$ نقطهٔ دلخواهی از E باشد آنگاه α راهی است در B با نقطهٔ آغازی b_0، و بالابر آن $\widetilde{\alpha}$ راهی است در E که ازنقطهٔ e_0 شروع و به $\alpha^{\#}$ منتهی می‌شود.

برای اثبات اینکه $H \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$، عضوی از H مانند $[\alpha]$ بر می‌داریم. فرض می‌کنیم $\widetilde{\alpha}$ بالابر α به‌راهی در E با نقطهٔ آغازی e_0 باشد؛ در این صورت، $\widetilde{\alpha}$ به $\alpha^{\#}$ منتهی می‌شود. α با راه ثابت e_{b_0} هم‌ارز است. زیرا، $[\alpha * \bar{e}_{b_0}] = [\alpha] \in H$. بنابراین، $\alpha^{\#} = (e_{b_0})^{\#}$، که در نتیجه $\widetilde{\alpha}$ کمندی است در E برپایهٔ e_0. از آنجاکه $p_*([\widetilde{\alpha}]) = [\alpha]$، نتیجه می‌شود که $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e_0))$. پس

$$H \subset p_* \ (\pi_1(E, e_0))$$

برای اثبات عکس این جزئیت، عضوی از $\pi_1(E, e_0)$ مانند $[\widetilde{\alpha}]$ برمی‌داریم. فرض می‌کنیم $\alpha = p \circ \widetilde{\alpha}$ و توجه داریم که α بالابر یکتای α به E با نقطهٔ آغازی e_0 است. بنابراین، $\widetilde{\alpha}$ به $\alpha^{\#}$ منتهی می‌شود؛ از آنجاکه $\widetilde{\alpha}$ کمندی است در E، داریم $\widetilde{\alpha}(1) = e_0$. بنابراین، $\alpha^{\#} = (e_{b_0})^{\#}$، در نتیجه α با e_{b_0} هم‌ارز است، و لهذا $[\alpha]$ به H تعلق دارد. پس $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset H$.

برهان را با اثبات پیوستگی $\widetilde{\alpha}$ به پایان می‌رسانیم. مقداری از پارامتر t مانند t_0 و یك همسایگی نقطهٔ $\widetilde{\alpha}(t_0) = (\alpha_{t_0})^{\#}$ در E مانند $B(U, \alpha_{t_0})$ انتخاب می‌کنیم. عددی مثبت مانند E طوری می‌یابیم که هرگاه $|t_1 - t_0| < \varepsilon$، داشته باشیم $(\alpha_{t_1})^{\#} \in B(U, \alpha_{t_0})$. این مطلب پیوستگی را ثابت می‌کند. ε را به‌اندازهٔ‌کافی کوچك انتخاب می‌کنیم به‌طوری

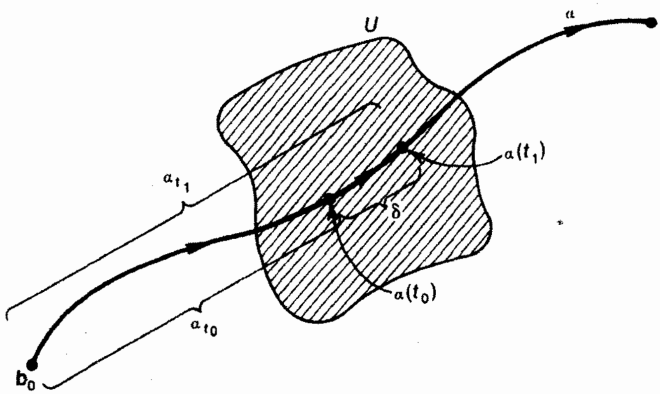
$$|t_1 - t_0| < \varepsilon \implies \alpha(t_1) \in U.$$

مدعی هستیم که اگر $|t_1 - t_0| < \varepsilon$ آنگاه به‌ازای راهی در U مانند δ، α_{t_1} با $\alpha_{t_0} * \delta$

هموتوپ راهی است، در نتیجه، همان طور که می‌خواستیم، $\tilde{\alpha}(t_1) = (\alpha_{t_1})^{\#}$ در $B(U, \alpha_{t_0})$ قرار می‌گیرد.

برای سهولت در علامتگذاری فرض کنیم $t_0 < t_1$. δ را آن قسمت از راه α می‌گیریم که بین $\alpha(t_0)$ و $\alpha(t_1)$ قرار دارد، و به طور مناسب پارامتری شده است. شکل ۴۲ هموتوپی راهی بودن α_{t_1} و $\alpha_{t_0} * \delta$ را آشکار می‌کند. به‌بیان صوری فرض کنیم

$$\delta(s) = \alpha((1-s)t_0 + st_1);$$



شکل ۴۲

دراین صورت δ در U قرار می‌گیرد. تابع $F : I \times I \to B$ را با ضابطهٔ

$$F(s, t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{[t_0(1-t)+t_1 t]2s}{[1+t]}\right), & s \in \left[0, \dfrac{1+t}{2}\right] \text{ به ازای} \\[2ex] \alpha(t_0(1-(2s-1)) + t_1(2s-1)), & s \in \left[\dfrac{1+t}{2}, 1\right] \text{ به ازای} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. F هموتوپی راهی مطلوب است. □

۵.۱۴ نتیجه فرض‌کنیم B همبند راهی و همبند راهی موضعی باشد.

(الف) اگر B یک فضای پوششی عمومی داشته باشد آن فضای پوششی با تقریب هم‌ارزی به‌طور یکتا مشخص می‌شود.

(ب) اگر B همبند سادهٔ نیم موضعی باشد آنگاه B یک فضای پوششی عمومی دارد.

برهان. قسمت (الف) نتیجهٔ فوری قضیه ۳.۱۴ است؛ اگر $p : E \to B$ فضای پوششی عمومی B باشد آنگاه گروه $p_*(\pi_1(E, e_0))$ زیر گروه بدیهی $\pi_1(B, b_0)$ است

برای اثبات (ب)، قضیهٔ سابق را جهت ساختن یك فضای پوششی همبند راهی مانند $p: E \to B$ به طوری که $p_*(\pi_1(E, e_0))$ زیر گروه بدیهی $\pi_1(B, b_0)$ باشد به‌کار می گیریم. از آنجا که p_* یك‌به‌یك است (اثبات این مطلب را به خواننده محول می کنیم)، E همبند ساده است و درنتیجه فضای پوششی عمومی B است. □

تمرینها

۱. می‌دانیم که $\pi_1(S^1 \times S^1, b_0 \times b_0)$ با $Z \times Z$ ایزومورف است، ایزومورفیسم مورد نظر به‌وسیلهٔ تصاویر $S^1 \times S^1$ بروی دو عامل آن القا می‌شود.
(الف) زیر گروه دوری نامتناهی $Z \times Z$ راکه به‌وسیلهٔ عضو 0×1 تولید می‌شود درنظر بگیرید؛ فضای پوششی متناظر با این زیرگروه را برای $S^1 \times S^1$ بیابید.
(ب) فضای پوششی $S^1 \times S^1$ راکه متناظر با زیر گروه دوری نامتناهی تولید شده به‌وسیلهٔ 1×1 است بیابید.
(پ) فضای پوششی متناظر با زیر گروه ذیل را بیابید:

$$H = \{(2n, 2m) | n, m \in Z\}.$$

۲. فرض کنید B یك فضای توپولوژی باشد. ثابت‌کنید که اگر B یك فضای پوششی عمومی داشته باشد آنگاه B همبند سادهٔ نیم‌موضعی است.

۳. فرض‌کنیم A_n دایره‌ای به شعاع $1/n$ درصفحهٔ xy باشد که در مبدأ به محور y ها مماس است، و $X = \bigcup A_n$.
(الف) ثابت‌کنید که X همبند سادهٔ نیم موضعی نیست.
(ب) فرض‌کنید $C(X)$ زیر فضایی‌از R^3 باشد که متشکل‌است ازاجتماع همهٔ قطعه خطهایی که نقاط X را به نقطهٔ $(0, 0, 1)$ وصل می کنند. (این فضا موسوم است‌به مخروط روی X) ثابت‌کنید که درمبدأ، $C(X)$ همبند سادهٔ نیم موضعی است ولی در آنجا همبند سادهٔ موضعی نیست.

۴. فرض‌کنید B همبند راهی و همبند راهی موضعی باشد، و فرض کنید $p: E \to B$ یك نگاشت پوششی باشد. هومئومورفیسم $h: E \quad E$ را یك **تبدیل عرشه‌ای** (یا **تبدیل پوششی**) گوییم هرگاه $p \circ h = p$.
(الف) فرض‌کنید e_0 و e_1 دو نقطه از $p^{-1}(b_0)$ باشد. ثابت‌کنید که یك تبدیل عرشه‌ای مانند $h: E \to E$ موجود است که $h(e_0) = e_1$ اگر و تنها اگر $p_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, e_1))$. ثابت‌کنید که h، درصورت وجود، منحصر به فرد است.
(ب) اگر $H_0 = p_*(\pi_1(E, e_0))$ در $\pi_1(B, b_0)$ نرمال باشدآنگاه $p: E \to B$ **نگاشت پوششی منتظم** نامیده می‌شود. ثابت‌کنید که در این مورد، گروه تبدیلهای

عرشه‌ای E با گروه خارج قسمتی $\pi_1(B, b_0)/H_0$ ایزومورف است. (با تمرین ۱۰ در بخش ۸ـ۴ مقایسه کنید.)

(پ) اگر $p: E \to B$ یك فضای پوششی عمومی B باشد در مورد گروه تبدیلهای عرشه‌ای E چه حکمی می‌توانید بکنید؟

۵. نگاشت پوششی عادی $p: R \times R \to S^1 \times S^1$ را درنظر بگیرید. گروه تبدیلهای عرشه‌ای $R \times R$ را تعریف کنید.

۶. همهٔ تبدیلهای عرشه‌ای فضای پوششی به شکل 8 را که در لم ۵.۷ ساخته شده تعیین کنید.

*۷. تمرین ۱۳ در بخش ۸ـ۴ را که مربوط است به فضاهای پوششی گروههای توپولوژیك، به حالتی که فضای پوششی همبند راهی است ولی همبند ساده نیست تعمیم دهید.

کتابنامه

[A-S] Ahlfors, L. V., and Sario, L., *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.

[D] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[F] Fuchs, M., "A note on mapping cylinders," *Michigan Mathematical Journal*, **18** (1971) pp. 289–290.

[G-P] Guillemin, V., and Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[H] Halmos, P. R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1960.

[H-W] Hurewicz, W., and Wallman, H., *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1948.

[H-Y] Hocking, J. G., and Young, G. S., *Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1961.

[K] Kelley, J. L., *General Topology*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1955.

[M] Massey, W. S., *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1967.

[M-Z] Montgomery, D., and Zippin, L., *Topological Transformation Groups*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1955.

[R] Rudin, M. E., "The box product of countably many compact metric spaces," *General Topology and its Applications*, **2** (1972) pp. 293–298.

[Sm] Smullyan, R. M., "The continuum hypothesis," *The Mathematical Sciences, A Collection of Essays*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1969.

[S] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[S-S] Steen, L. A., and Seebach, J. A., Jr., *Counterexamples in Topology*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., New York, 1970.

[T] Thomas, J., "A regular space, not completely regular," *American Mathematical Monthly*, **76** (1969) pp. 181–182.

[W] Wilder, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1952.

[Wd] Willard, S., *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1970.

واژه نامهٔ انگلیسی ـ فارسی

accumulation	انباشتگی
– point	نقطهٔ ـ
action	عمل
adjunction	الحاق
– space	فضای ـ ی
antipodal	متقاطر
– map	نگاشت ـ
– point	نقطهٔ ـ
antipode - preserving map	نگاشت حافظ نقاط متقاطر
arc	کمان
ball	گوی
– unit	ـ واحد
base	پایه
– point	نقطهٔ ـ
basis	پایه
countable –	ـ شمارا
– element	عضو ـ
bijection	دو سویی

binary	دوتایی
— operation	عمل —
bound	کران
boundary	کرانه
bounded	کراندار
— above	از بالا —
— below	از پایین —
boundedness	کرانداری
cardinality	عدد اصلی
cardinal number	عدد اصلی
cartesian	دکارتی
category	مقوله
choice	انتخاب
axiom of —	اصل موضوع —
— function	تابع —
classification	رده‌بندی
closure	بستار
cluster	انباشتگی
— point	نقطهٔ —
coarse	درشت
cofinal	همپایان
coherent	همو سته
collection	گردایه
compact	فشرده
— support	محمل —
compactification	فشرده شده، فشرده سازی

one point —	ـ تك نقطه‌ای
compactness	فشردگی
limit point —	ـ نقطهٔ حدی
local —	ـ موضعی
comparability	مقایسه‌پذیر
complement	متمم
complete graph	گراف کامل
completely	تماماً
— normal space	فضای ـ نرمال
— regular space	فضای ـ منتظم
completeness	تمامیت
completion	تمام‌سازی
component	مؤلفه
connected —	ـ همبند
path —	ـ راهی
conjugacy class	ردهٔ ازدواج
conjugate	مزدوج
connected	همبند
— im kleinen	ـ خردجا
path —	ـ راهی
continuity	پیوستگی
uniform —	ـ یکنواخت
continuous	پیوسته
continuum	پرستار
— hypothesis	فرضیهٔ ـ
linear —	ـ خطی
contractible	انقباض‌پذیر

contraction	انقباض
contrapositive	عکس نقیض
convergent	همگرا
_ sequence	دنبالهٔ ـ
converse	عکس
convex	محدب
coordinate	مختص
correspondence	تناظر
one to one _	ـ یك به یك
coset	همرده
countable	شمارا
_ intersection condition	شرط مقطع ـ
counterimage	تصویر عکس
cover	پوشش
curve	منحنی
simple closed _	ـ بستهٔ ساده
decimal	اعشاری
deck	عرشه
_ transformation	تبدیل ـ ای
decomposition	تجزیه
deformation	دگردیسی
strong _	ـ قوی
deleted	سفته
_ comb space	فضای شانه‌ای ـ
dense	چگال
diagonal	قطر، قطری

diameter	قطر
dictionary order relation	رابطهٔ ترتیب قاموسی
difference	تفاضل
dimension	بعد
directed	جهت‌دار
disconnected	ناهمبند
discrete	گسسته
– topology	توپولوژی –
disjoint	جدا از هم
distance	فاصله
distributive	توزیع پذیری
divergent	واگرا
domain	حوزهٔ تعریف
equicontinuous	همپیوسته
equivalence	هم‌ارزی
essential	اساسی
evaluation	ارزه
– map	نگاشت –
evenly	به‌طور هموار
eventually zero	سرانجام صفر
expansion	بسط
extended	گسترده
– complex plane	صفحهٔ مختلط –
extension	گسترش
family	خانواده

field	میدان
ordered _	_ مرتب
figure eight	شکل 8
final	انجامی
_ point	نقطهٔ _
fine	ظریف
finite	متناهی
functional	تابعی
functor	تابعگون
functorial	تابعگونی
general position	وضع عمومی
generate	تولیدکردن
graph	گراف
linear _	_ خطی
greatest lower bound	بزرگترین کران پایین
group	گروه
fundamental _	_ بنیادی
groupoid	گروهوار
homeomorphism	هومئومورفیسم
homogeneous	همگن
homomorphism	همومورفیسم
homotopic	هموتوپیک، هموتوپ
homotopy	هموتوپی
identification	همانسازی

identity	اتحاد، همانی
identity function	تابع همانی
image	تصویر
imbed	نشاندن
immediate	بلافصل
— predesessor	سابق —
— succesor	تالی —
inclusion	احتوا، جزئیت
independent	مستقل
index	اندیس
indexed	اندیسدار
indexing	اندیسگذار
indiscrete	ناگسسته
induced	القایی، القا شده
induction	استقرا
inductive	استقرایی
inessential	غیراساسی
infimum	اینفیموم
infinite	نامتناهی
initial	آغازی
injective function	تابع یك به‌یك
interior	درون
intermediate	میانی
intersection	مقطع
interval	بازه
inverse	وارون، معکوس
irrational number	عدد گنگ

irrationality	گنگ بودن
isometry	ایزومتری
isomorphism	ایزومورفیسم
J-tuple	J تایی
K-fold	K لایی
least upper bound	کوچکترین کران بالا
lens space	فضای عدسی
lifting	بالابر
limit	حد
– point compact	فشرده برحسب نقطهٔ ـ
– point compactness	فشردگی برحسب نقطهٔ ـ
linear	خطی
local	موضعی
locally	موضعاً
loop	کمند
manifold	بسلا
mapping	نگاشت
maximal	ماکزیمال
maximum	ماکزیموم
metric	متریک ، متری
metrizable	متری‌پذیر
metrization	متریسازی
multiple	بستا

multiplicity	بستایی
neighborhood	همسایگی
nested	تودرتو
net	تور
nonreflexivity	نامنعکس
norm	نرم
normal	نرمال
nowhere differentiable	هیچ‌جا مشتق‌پذیر
one - point	تك نقطه
one - to - one	يك به‌يك
onto	بروی
open	باز
operation	عمل
orbit	مدار
order_preserving	حافظ‌ترتیب
pasting lemma	لم چسب
paracompact	پیرافشرده
paradox	پارادوکس
partition of uniy	افراز واحد
path component	مؤلفهٔ راهی
piecewise	قطعه به قطعه
plane	صفحه
doubly punctured _	ـ دوبار سفته
sorgenfrey	ـ سورجنفری

point	نقطه
accumulation —	— انباشتگی
final —	— انجامی
initial —	— آغازی
— open topology	توپولوژی — باز
pointwise	نقطه به نقطه
— convergence topology	توپولوژی همگرایی —
power set	مجموعهٔ توانی
preimage	تصویر عکس
principle	اصل
— of induction	— استقرا
— of recursive definition	— تعریف بازگشتی
— of transfinite induction	— استقرای ترانسفینی
projection	تصویر
projective	تصویری
— n - space	فضای n بعدی —
— plane	صفحهٔ —
proper	سره
— subset	زیر مجموعهٔ —
punctured	سفته
quantifier	سور
quasicomponent	شبه مؤلفه
quotient	خارج قسمت
— map	نگاشت — ی
— operation	عمل — ی
— space	فضای — ی

_ topology	توپولوژی ـ ی
range	حوزهٔ مقادیر
rational	گویا
ray	شعاع
reciprocal	عکس [عدد]
recurrence	بازگشت
recurrsion formula	دستور بازگشتی
recurrsive	بازگشتی
refinement	تعریف
reflexivity	انعکاسی
regular	منتظم
completely _	تماماً ـ
regularity	منتظم بودن
relation	رابطه
restriction	تحدید
retract	توکشیده
absolute _	ـ مطلق
strong deformation _	ـ دگردیسی قوی
retraction	توکشنده
reverse	وارونه
saturated	اشباع شده
section	قطعه
semicontinuity	نیم پیوستگی
semilocally	نیم موضعی
separable	تفکیك پذیر

separation	جدا سازی
sequence	دنباله
nested _	_ تو در تو
shirinking	درهم کشیدن
simple	ساده
simplicial 2 - complex	همبافت دو بعدی
slice	قاچ
space filling curve	منحنی فضا پر کن
sphere	کره
unit_	_ واحد
standard	استانده
star convex	محدب ستاره‌ای
stereographic	گنجنگاری
strict	اکید
strong	قوی
subbasis	زیرپایه
subnet	زیرتور
subsequence	زیردنباله
subset	زیرمجموعه
subspace	زیرفضا
superset	ابرمجموعه
sup metric	متریك سوپرموم
support	محمل
surface	رویه
surjective	پوشا
symbol	نماد
symmetry	تقارن

test	آزمون
topological	توپولوژیك
topology	توپولوژی
box —	ـ جعبه‌ای
compact open —	ـ فشردهٔ باز
fine —	ـ ظریف
— of compact convergence	ـ همگرایی فشرده
— of pointwise convergence	ـ همگرایی نقطه به نقطه
point open —	ـ نقطه باز
— space	فضای ـ
torus	چنبره
double —	ـ مضاعف
total boundedness	کرانداری کلی
totally bounded	کلاًکراندار
tower	برج
transcendental	متعالی
transitivity	تعدی
transfinite	ترانسفینی
translation	انتقال
trivial	بیمایه
uncountable	ناشمارا
uniform	یکنواخت
union	اجتماع
unit	واحد
universal	عمومی

vacuously true	به انتفای مقدم راست
vertice	رأس
well - ordered	خوشترتیب
well - ordering	خوشترتیبی
winding	پیچش

واژه‌نامهٔ فارسی ـ انگلیسی

آزمون	test
آغازی	initial
ابرمجموعه	superset
اتحاد	identity
اجتماع	union
احتوا	inclusion
ارزه	evaluation
اساسی	essential
استانده	standard
استقرا	induction
استقرایی	inductive
اشباع شده	saturated
اصل	principle
ـ استقرا	– of induction
ـ استقرای ترانسفینی	– of transfinite induction
ـ تعریف بازگشتی	– of recursive definition
اصل موضوع	axiom
ـ انتخاب	– of choice
ـ شمارایی	countability –

decimal	اعشاری
partition	افراز
– of unity	– واحد
strict	اکید
adjunction	الحاق
induced	القایی، القا شده
accumulation, cluster	انباشتگی
choice	انتخاب
translation	انتقال
final	انجامی
index	اندیس
indexed	اندیسدار
indexing	اندیسگذار
reflexivity	انعکاسی
contraction	انقباض
contractible	انقباض‌پذیر
isometry	ایزومتری
isomorphism	ایزومورفیسم
infimum	اینفیموم
open	باز
recurrence	بازگشت
interval	بازه
lifting	بالابر
into	بتوی
fixed point free	بدون نقطهٔ ثابت
equality	برابری

برج	tower
بردار	vector
بروی	onto
بزرگترین کران پایین	greatest lower bound
بستا	multiple
بستار	closure
بستایی	multiplicity
بسته	closed
بسجمله	polynomial
بسط	expansion
بسط دادن	expand
بسلا	manifold
بعد	dimension
بلافصل	immediate
تالی ـ	ـ successor
سابق ـ	ـ predecessor
به انتفای مقدم راست	vacuously true
بهترین تقریب	best approximation
به‌طور هموار	evenly
بیمایه	trivial
بینهایت	infinity
بینهایت بعدی	infinite-dimensional
پایه	base
پایه	basis
ـ شمارا	countable ـ
عضو ـ	ـ element

surjective	پوشا
cover	پوشش
covering	پوشش
k-fold –	– k لایی
winding	پیچش
paracompact	پیرافشرده
continuum	پیوستار
continuity	پیوستگی
continuous	پیوسته
functor	تابعگون
functorial	تابعگونی
– group	گروه –
functional	تابعی
transformation	تبدیل
transform	تبدیل کردن
degenerate	تبهگن
decomposition	تجزیه
restriction	تحدید
transfinite	ترانسفینی
logical identity	تساوی منطقی
image, projection	تصویر
counterimage, inverse image, preimage	تصویر عکس
stereographic projection	تصویر گنجنگاری
projective	تصویری
refinement	تظریف
transitivity	تعدی

تفاضل دو مجموعه	difference of two sets
تفریق	subtraction
تفکیک‌پذیر	separable
تقارن	symmetry
تقاطع	intersection
تقریب	approximation
تقریبی	approximate
تك نقطه	one - point
تمام سازی	completion
تماماً منتظم	completely regular
تمامیت	completeness
تناظر	correspondence
ـ یك‌به‌یك ، ـ دوسویی	one - to - one ـ
تناقض	contradiction
توپولوژی	topology
ـ استانده	standard ـ
ـ جعبه‌ای	box ـ
ـ خارج قسمت	quotient ـ
ـ زیر فضا	subspace ـ
ـ فشرده ـ باز	compact - open ـ
فضای ـ	ـ space
ـ نقطه ـ باز	point - open ـ
ـ همگرایی فشرده	ـ of compact convergence
ـ همگرایی میانگین	ـ of mean convergence
ـ همگرایی نقطه‌به‌نقطه	pointwise convergence ـ
توپولوژیك	topological
تودر تو	nested
تور	net

توزیع	distribution
توزیعپذیر	distributive
توزیعپذیری	distributivity
توسیع	extension
توکشنده	retraction
توکشیده	retract
تولیدکردن	generate
جداازهم	disjoint
جداسازی	separation
جزئی	partial
جزئیت	inclusion
ـ سره	proper ـ
جمع	addition
جمع، مجموع	sum
جملهٔ عمومی	genral term
جهت‌دار	directed
J تایی	J-tuple
چپ	left
چگال	dense
چگالی	density
چنبره	torus
حافظ	preserving
ـ ترتیب	order ـ

حد	limit
حقیقی	real
حلقه	ring
حوزهٔ تعریف	domain
حوزهٔ مقادیر	range
خارج قسمت	quotient
خاصیت	property
ـ توپولوژیك	topological ـ
خانواده	family
خطا	error
خطی	linear
خوشترتیب	well-ordered
مجموعهٔ ـ	ـ set
خوشترتیبی	well-ordering
خاصیت ـ	ـ property
درآیه	entry
درجه	degree
درشت	coarse
در هم کشیدن	shirinking
دستور بازگشتی	recurrsion formula
دکارتی	cartesian
دگردیسی	deformation
ـ قوی	strong ـ
دلخواه	arbitrary
دنباله	sequence

ـ همگرا	convergent ـ
دنباله‌ای	sequentially
دو به دو از هم جدا	pairwise disjoint
دوتایی	binary
دوجمله‌ای	binomial
دوخطی	bilinear
دوسویی	bijective
دوم، دومین	second
رابطه	relation
رأس	vertex
راه	path
ردهٔ ازدواج	conjugacy class
رده‌بندی	classification
رویه	surface
ریشه	root
زنجیر	chain
زوج [تابع، عدد]	even
زوج [دستهٔ دو چیزی]	pair
ـ مرتب	order ـ
زیرتور	subnet
زیرپایه	subbasis
زیردنباله	subsequence
زیرفضا	subspace
زیرمجموعهٔ سره	subset proper

ساده	simple
سرانجام صفر	eventually zero
سره	proper
سفته	punctured
صفحهٔ ـ	– plane
سفته	deleted
فضای شانه‌ای ـ	– comb space
سوپرموم	supremum
سور	quantifier
ـ عمومی	universal –
ـ منطقی	logical –
ـ وجودی	existential –
شبه مؤلفه	quasicomponent
شعاع	ray
شکل 8	figure eight
شمارا	countable
شرط مقطع ـ	– intersection condition
صفحه	plane
ـ دوبار سفته	doubly punctured –
ـ سورجنفری	sorgenfrey –
ـ مختلط	complex –
صوری	formal
ضریب	coefficient
ـ بسجمله‌ای ، ـ چند جمله‌ای	multinomial –

ـ دوجمله‌ای	binomial ـ
ضلع	side
ظریف	fine
عبارت صوری	formal expression
عدد اصلی	cardinality, cardinal number
عدسی	lens
فضای ـ	ـ space
عرشه	deck
عضو	element
ـ پایه	basis ـ
عکس	converse
عکس [عدد]	reciprocal
عکس نقیض	contrapositive
علامت	sign, notation
عمل	action, operation
عمومی	universal
فضای پوششی ـ	ـ covering space
عمومی	general
گروه خطی GL (n)ـ	ـ linear group GL (n)
غیراساسی	inessential
فاصله	distance
فرد	odd
فرض	hypothesis, assumption
فشردگی	compactness

local ـ	ـ موضعی
limit point ـ	ـ نقطهٔ حدی
compact	فشرده
countably ـ	ـ شمارشی
Compactification	فشرده شده ، فشرده سازی
one point ـ	ـ تك نقطه‌ای
space	فضا
slice	قاچ
dictionary	قاموس
ـ order relation	رابطهٔ ترتیب ـ ی
diameter	قطر
section	قطعه
piecewise	قطعه به‌قطعه
linear function ـ	تابع خطی ـ
bound	کران
bounded	کراندار
ـ above	از بالا ـ
ـ below	از پایین ـ
ـ totally	کلا
boundedness	کرانداری
total ـ	ـ کلی
pointwise ـ	ـ نقطه به نقطه
uniformly ـ	ـ یکنواخت
boundary	کرانه

کره	sphere
ـ واحد	– unit
کمان	arc
کمند	loop
گنجنگاری	stereographic
کوچکترین کران بالا	least upper bound
گراف	graph
ـ خطی	linear –
ـ کامل چهار رأسی	complete – on four vertices
گردایه	collection
گزاره	proposition, statement
گزاره‌نما	proposition function
گسترده، گسترش‌یافته	extended
گسترش	extension
ـ عمومی	universal –
گسسته	discrete
توپولوژی ـ	– topology
گروه	group
ـ بنیادی	fundamental –
ـ خطی عمومی	general linear –
گروهوار	groupoid
گنگ	irrational
گویا	rational
لم چسب	pasting lemma

ماکزیمال	maximal
ماکزیموم	maximum
متری	metric
فضای ــ	– space
متری‌پذیر	metrizable
متریسازی	metrization
متریك	metric
ــ مربعی	square –
ــ یکنواخت	uniform –
متعالی	transcendental
متعدی	transitive
متغیر	variable
متمم	complement
متناهی	finite
مثبت	positive
مجموعهٔ توانی	power set
محدب ستاره‌ای	star convex
محمل	support
مختص	coordinate
مختلط	complex
مرتب	ordered
مرتب کردن، مرتبه	order
مزدوج	conjugate
مستقل	independent
مضاعف	double
مضرب	multiple

مطلق	absolute
معادل منطقی	logical equivalence
معکوس، وارون	inverse
مقایسه پذیر	comparability
مقطع	intersection
مقوله	category
منتظم	regular
منحنی بستهٔ ساده	simple closed curve
مؤلفه	component
ـ راهی	path –
ـ همبند	connected –
موضعاً	locally
موضعی	local
موهومی	imaginary
میانی	intermediate
میدان مرتب	ordered field
ناشمارا	uncountable
ناگسسته	indiscrete
نامتناهی	infinite
نامساوی	inequality
نامنعکس	nonreflexive
ناوردایی	invariance
ناهمبند	disconnected
نرم	norm
نرمال	normal
نرمال بودن	normality

imbed	نشاندن
point	نقطه
initial –	ـ آغازی
accumulation –, cluster –	ـ انباشتگی
final –	ـ انجامی
base –	ـ پایه
limit –	ـ حدی
antipodal –	ـ متقاطر
finite –	ـ متناهی
pointwise	نقطه به نقطه
mapping	نگاشت
half-open	نیم‌باز
half-closed	نیم‌بسته
semicontinuity	نیم‌پیوستگی
semilocally	نیم‌موضعی
unit	واحد
inverse	وارون
reverse	وارونه
divergent	واگرا
general position	وضع عمومی
equivalence	هم‌ارزی
identification	همانسازی
indentity	همانی
simplicial 2-complex	همبافت ۲ بعدی
connected	همبند

– im kleinen	خردجا –
path –	– راهی
simply –	– ساده
local –	– موضعی
connectedness	همبندی
confinal	همپایان
equicontinuous	همپیوسته
coset	همرده
neighborhood	همسایگی
convergent	همگرا
convergence	همگرایی
homogeneous	همگن
geometrically	هندسی
homotopic	هموتوپ
path –	– راهی
homotopy	هموتوپی
coherent	همدوسته
homomorphism	همومورفیسم
homeomorphism	هومئومورفیسم
nowhere-differentiable	هیچ‌جا مشتق‌پذیر
one-to-one, injective	یك به یك
uniform	یکنواخت

فهرست راهنما

آزمون M وایرشتراوس ۱۷۳، ۲۸۰

ابرمجموعه ۳۵۳

اجتماع ۹، ۱۷، ۵۰

استقرای ترانسفینی ۸۸

اصل استقرا ۴۲

اصل استقرای ترانسفینی ۸۸

اصل تعریف بازگشتی ۶۴، ۷۲

— ترانسفینی ۸۹

اصل T_1 ۱۲۸

اصل ماکزیموم ۹۰

اثبات — ۹۶

اثبات شهودی — ۹۱

کاربرد — ۳۵۳، ۳۵۷

اصل موضوع انتخاب ۷۷

عبارات معادل — ۸۱، ۹۶

— متناهی ۷۹

اعداد صحیح ۴۲

اعداد صحیح مثبت ۴۲

اعداد گنگ

— و تمام بودن توپولوژیک ۳۵۴

— و قضیهٔ مقولهٔ بئر ۳۸۸

— و مجموعهٔ G_δ ۳۲۸

اعداد گویا ۴۲

اعضای یک مجموعه ۸

افراز

— واحد ۲۹۱، ۲۹۴

— یک مجموعه ۳۱

اگر ... آنگاه ۱۱

انتقال R^N ۴۰۵

انقباض ۲۳۶، ۳۵۳

انقباض‌پذیری ۴۲۷، ۴۸۵

— و همبندی ساده ۴۷۰

اولین اصل شمارایی ۱۶۶، ۲۴۸

— و حاصلضرب ۲۴۹

— و زیرفضا ۲۴۹

— و فضای متری ۱۶۶

— و نتیجه دادن کافی بودن همگرایی دنباله‌ها ۲۴۸

— و R_l ۲۵۰

— و S_Ω ۲۵۳
اولین گروه هموتوپی ۴۲۸
ایزومتری ۲۳۶
ایزومورفیسم ۱۳۶

بازه
— باز ۳۳، ۱۱۰
— بسته ۱۱۰
— نیم‌باز ۱۱۰
بالا بر یك نگاشت ۴۲۰
بازه‌های R
بعد توپولوژیك — ۳۹۸
فشردگی — ۲۲۵
همبندی — ۱۹۸
برج ۹۶
بزرگترین عضو یك مجموعهٔ مرتب ۳۵
بزرگترین کران پایین ۳۶
بدون نقطهٔ ثابت ۴۶۶
بستار ۹۴
— اجتماع ۱۳۰، ۳۲۱
— اعضای پایه ۱۲۴
— تورها ۲۴۴
— حاصل‌ضرب دکارتی ۱۳۰، ۱۵۰
— دنباله‌ها ۱۶۵، ۲۴۸
— مجموعهٔ همبند ۱۹۲
— و نقاط حدی ۱۲۶
بسلا ۲۹۲

بعد توپولوژیك — ۴۰۱، ۴۱۱، ۴۱۳
لزوم شرط هاوسدورف برای — ۲۹۵
متری‌پذیری — ۲۹۲
— ی قابل نشاندن در R^N ۲۹۳
— ی قابل نشاندن در R^{2m+1} ۴۱۱، ۴۱۳
بعد توپولوژیك ۳۹۶
— اجتماع ۳۹۸، ۴۱۲
— بسلا ۴۱۱، ۴۱۳
— بسلای ۲ بعدی ۴۰۲
— دریك فضای متری ۳۹۸
— زیرفضا ۳۹۶
— گراف خطی ۳۹۹
— ناحیهٔ مثلثی ۴۰۱، ۴۶۹
— همبافت ۲ بعدی ۴۰۱
— یك مجموعه در R^2 ۳۹۹
— یك مجموعه در R^N ۴۰۹، ۴۱۲
— $[a, b]$ ۳۹۸
بعد لبگ ۳۹۵
بعد متناهی ۳۹۶

پارادوکس
— آرایشگر شهر سویل ۶۴
— راسل ۸۱
پایایی حوزه ۴۹۱، ۵۰۳
پایه
— توپولوژیکی ۱۰۲، ۱۰۶
— شمارا ۲۴۸

ـ شمارا دریك نقطهٔ ۱۶۶، ۲۴۸
پوشاندن هموار ۴۳۴
پوشش ۲۱۲، ۲۱۳
ـ باز ۲۱۲
ـ k لایی ۴۴۰
پیرافشردگی ۳۳۳
ـ R ۳۳۳
ـ R_L ۳۳۵، ۳۳۹
ـ S_Ω ۳۳۹، ۳۴۲
ـ حاصلضرب ۳۳۵، ۳۳۹
ـ خط طویل ۳۳۹
ـ زیرفضا ۳۳۵
ـ فضای فشردهٔ هاوسدورف ۳۳۳
ـ فضای منتظم لیندلوف ۳۳۹
ـ فضای نرمال ۳۳۴
ـ و افراز واحد ۲۹۵
ـ و متری پذیری ۳۳۵، ۳۴۰
پیرا فشردهٔ بسلا ۳۴۲
پیوستار خطی ۴۱، ۱۹۷
ـ و مجموعه‌های فشرده ۲۲۴
ـ و مجموعه‌های همبند ۱۹۷
پیوستگی ۱۳۲
ـ و اعضای پایه ۱۳۳
ـ و اعضای زیرپایه ۱۳۳
ـ برحسب مجموعه‌های بسته ۱۳۴
ـ برحسب بستار ۱۳۴
ـ تابع احتوا ۱۳۸
ـ تابع ثابت ۱۳۸
ـ تابع ریشهٔ nام ۱۴۳
ـ تابع مرکب ۱۳۸
ـ جمع، تفریق، ضرب، وتقسیم ۱۶۷
ـ عملیات جبری در R ۱۶۷، ۱۷۳
ـ نسبت به هریك از متغیرها ۱۴۵
ـ نقطه‌ای ۱۳۹
ـ نگاشتها بتوی فضای حاصلضرب ۱۴۱، ۱۴۹
ـ نگاشتهای روی فضاهای خارج قسمتی ۱۸۰
ـ و بیان موضعی ۱۳۹
ـ و ε-δ ۱۶۴
ـ و $f \times g$ ۱۴۵
ـ و تحدید حوزهٔ تعریف ۱۳۸
ـ و تحدید حوزهٔ مقادیر ۱۳۹
ـ وتورها ۲۴۴
ـ و دنباله‌ها ۱۶۶، ۲۴۸
ـ و قضیهٔ حد یکنواخت ۱۶۷
ـ و متریك ۱۶۱

تابع ۲۲
ـ انتخاب ۷۷
ـ اندیسگذار ۵۰
ـ پوشا ۲۶
ـ پیوسته ۱۳۲
ـ خطی قطعه به‌قطعه ۳۹۲

ـ دو سویی ۲۶
ـ مرکب ۲۵
ـ معکوس ۲۶
ـ همانی ۲۸
ـ هیچ‌جا مشتقپذیر ۳۸۹
ـ یك‌به‌یك ۲۶
تابع ریشهٔ nم
پیوستگی ـ ۱۴۳
وجود ـ ۲۰۴
تالی بلافصل ۳۳
تبدیل
ـ پوششی ۵۱۶
ـ عرشه‌ای ۵۱۶
تحدید
ـ تابع ۲۳
ـ رابطه ۳۶
ترتیب
ـ ارشمیدسی ۴۳
ـ خطی ۳۲
ـ ساده ۳۲
ترتیب جزیی ۹۳
اصول موضوع ـ ۹۳، ۲۴۲
ـ اکید ۸۹
ترکیب
ـ توابع پیوسته ۱۳۸
ـ راهها ۴۲۱
ـ نگاشتهای پوششی ۴۴۰
ـ نگاشتهای خارج قسمتی ۱۷۹
تسرملو ۸۵
تصویر ۲۲، ۲۳
تصویر پیوسته
ـ فضای فشرده ۲۱۵
ـ فضای همبند ۱۹۳
تصویر عکس ۲۴
تصویر گنجنگاری ۴۵۷، ۴۷۸
تظریف
ـ باز ۳۲۸
ـ بسته ۳۲۸
ـ یك گردایه ۲۹۵، ۳۲۸
تعداد اعضای یك مجموعه ۵۳
یکتایی ـ ۵۶
تعریف بازگشتی ۶۴
اصل ـ ۶۴، ۷۲
ـ ترانسفینی ۸۹
تفاضل دو مجموعه ۱۴
تفکیك‌پذیر ۲۵۰
تقاطع دو مجموعه ۱۲۴
تمام ساز ۳۵۲
یکتایی ـ ۳۵۵
تمامیت
ـ زیر فضای باز ۳۵۳
ـ $\mathcal{C}(Y, X)$ درمتری یکنواخت ۳۴۹
ـ فضای R^n ۳۴۶
ـ فضای R^ω ۳۴۷

ـ فضای حاصل‌ضرب ۳۵۳
ـ فضای متری سوپرموم ۳۵۰
ـ فضای متری یکنواخت ۳۲۸
ـ متری l^2 ۳۵۴
ـ مجموعهٔ اعداد گنگ ۳۵۴
ـ مجموعهٔ G_δ ۳۵۴
ـ و فشردگی ۳۵۹
ـ و فضای بئر ۳۸۵
توابع مختصی ۱۴۱
توپولوژی ۱۰۰
ـ اکیداً درشتتر ۱۰۲
ـ اکیداً ظریفتر ۱۰۲
ـ بزرگتر ۱۰۲
ـ بیمایه ۱۰۱
ـ تولیدشده به‌وسیلهٔ پایه ۱۰۳، ۱۰۵
ـ تولیدشده به وسیلهٔ زیرپایه ۱۰۸
ـ حد پایینی ۱۰۷
ـ درشتتر ۱۰۲
ـ ضعیفتر ۱۰۲
ـ قویتر ۱۰۲
ـ کوچکتر ۱۰۲
ـ گسسته ۱۰۱
ـ متمم متناهی ۱۰۱
ـ همگرایی در میانگین ۳۷۲
ـ هموسته ۲۸۳
توپولوژی ترتیبی ۱۱۱
ـ و زیر پایه ۱۱۹
ـ و زیرفضا ۱۱۸
ـ و شرط هاوسدورف ۱۲۸
ـ و فشردگی ۲۲۴، ۲۲۸
ـ و منتظم بودن ۲۶۸
ـ و نرمال بودن ۲۶۰
ـ همگرایی نقطه‌به‌نقطه ۳۶۶
توپولوژی جعبه‌ای ۱۴۶
پایهٔ ـ ۱۴۷
خاصیت فشردگی ـ ۲۳۵
زیرفضای ـ ۱۴۸
ـ و توپولوژی حاصل‌ضرب ۱۴۷
ـ وشرط هاوسدورف ۱۴۸
توپولوژی خارج قسمتی ۱۷۵
زیر فضای ـ ۱۷۹
ـ و توپولوژی حاصل‌ضرب ۱۷۹، ۱۸۲، ۲۴۲، ۲۷۹
ـ و شرط هاوسدورف ۱۸۰، ۱۸۱
ـ و فضای نرمال ۲۶۹
توپولوژی زیر فضایی ۱۱۶
پایه برای ـ ۱۱۶
ـ و اصل اول شمارایی ۲۴۹
ـ و اصل دوم شمارایی ۲۴۹
ـ و پیرافشردگی ۳۳۵
ـ و تماماً منتظم بودن ۳۰۸
ـ و توپولوژی جعبه‌ای ۱۴۷
ـ و توپولوژی حاصل‌ضرب ۱۱۸، ۱۴۷
ـ و توپولوژی مرتب ۱۱۸

— و زیرمجموعهٔ چگال و شمارا ۲۵۲
— و شرط لیندلوف ۲۵۳، ۲۸۸
— و شرط هاوسدورف ۱۲۸، ۲۵۶
— و فشردگی ۲۱۳
— و فضای خارج قسمتی ۱۷۹
— و فضای متری ۱۶۴
— و منتظم بودن ۲۵۷
— و نرمال بودن ۲۵۷
— و همبندی ۱۹۰
توپولوژی ظریفتر ۱۰۲
معیار برای — ۱۰۵
توپولوژی ظریف روی $\mathcal{C}(X, Y)$ ۳۷۳
— و بئر بودن ۳۸۹
توپولوژی فشرده- باز ۳۷۴، ۳۷۹
— و پیوستگی نگاشت ارزه ۳۷۶
— و توپولوژی همگرایی فشرده ۳۷۴
— و شرط هاوسدورف ۳۷۸
— و منتظم بودن ۳۷۸
توپولوژی نقطه- باز ۳۶۶
دنبالههای همگرا در — ۳۶۷
— و توپولوژی فشرده- باز ۳۷۴
— و توپولوژی همگرایی فشرده ۳۷۰، ۳۸۰
توپولوژی همگرایی فشرده ۳۶۹
دنبالههای همگرا در — ۳۷۰
— و اولین اصل موضوع شمارایی ۳۶۹
— و توپولوژی فشرده- باز ۳۷۴
— و عدم وابستگی بد متری ۳۷۵
— و منتظم بودن ۳۷۱
— و همگرایی نقطه به نقطه ۳۶۹، ۳۸۰
توپولوژی یکنواخت ۱۵۸، ۳۴۸
— و توپولوژی حاصلضربی ۱۵۸
— و خاصیت فشردگی ۲۳۵، ۳۶۳، ۳۶۵
— و عدم وابستگی به متری ۳۷۸
— و همگرایی فشرده ۳۷۰
— و همگرایی نقطه به نقطه ۳۷۰
تور ۲۴۲
توزیع پذیری اجتماع و مقطع ۱۵
توکشنده ۴۳۳
— R^3 به محور گره خوردهٔ x ها ۲۹۰
— دگردیسی ۴۸۵
— دگردیسی قوی ۴۵۱
— گروه بنیادی ۴۵۲
توکشیده ۲۸۲، ۴۵۱
— مطلق با خاصیت گسترش همسایهای عمومی ۲۹۰
— همسایهای ۲۹۰
— همسایهای مطلق ۲۹۰
توکشیدهٔ دگردیسی قوی ۴۵۱
— R^{n-1} بتوی S^{n-1} ۴۵۱
— R^2-p-q بتوی θ و δ ۴۵۲، ۴۵۳
— و هم ارزی هموتوپی ۴۸۵
تولید شده بهطور فشرده ۳۶۹

جاروب نامتناهی ۲۱۱
جداسازی ۱۹۰
جداسازی به‌وسیلهٔ تابع پیوسته
— مجموعه‌های بسته ۲۷۵
— نقاط از مجموعه‌های بسته ۲۸۸

چنبره ۴۳۶
گروه بنیادی — ۴۶۰
میدان‌برداری روی — ۴۷۷
— و پوشش به‌وسیلهٔ $R \times R$ ۴۳۷
چنبرهٔ مضاعف ۴۶۴

حاصل‌ضرب دکارتی
— دلخواه ۴۸
— دو مجموعه ۱۸
حاصل‌ضرب نگاشتهای
— باز ۱۷۹
— پوششی ۴۴۰
— پیوسته ۱۴۵
— خارج قسمت ۱۷۹، ۱۸۲، ۲۴۲، ۳۷۹
حافظ ترتیب ۳۳
حوزهٔ مقادیر یك تابع ۲۲

خاصیت
— بزرگترین کران پایین ۳۶
— بولتزانو ـ وایرشتراس ۲۳۰
— توپولوژیك ۱۳۶
خاصیت کوچکترین کران بالا ۳۶
— برای R ۴۰
— برای مجموعه‌های خوشترتیب ۸۷
— و خاصیت بزرگترین کران پایین ۳۸
خاصیت گسترش عمومی ۲۸۳
— و توکشیدهٔ مطلق ۲۸۹
خاصیت گسترش همسایه‌ای عمومی ۲۹۰
خانوادهٔ اندیسدار مجموعه‌ها ۵۰
خانوادهٔ اندیسدار موضعاً متناهی ۱۴۴، ۲۹۴
— با گردایهٔ موضعاً متناهی ۳۲۱
خانوادهٔ اندیسدار نقطه متناهی ۲۹۴
خط‌طویل ۲۰۵
— و پیرافشردگی ۳۳۹
خواص گروهواری ۴۲۲

دارای n عضو ۵۳
در بینهایت صفر می‌شود ۳۶۵
درجهٔ نگاشت ۴۸۶
درون تهی ۳۸۴
درون مجموعه ۱۲۳
دستور بازگشتی ۶۴، ۷۲
دنبالهٔ تودرتویی از مجموعه‌ها ۲۲۰
دنبالهٔ کوشی ۳۴۵
دنبالهٔ نامتناهی ۴۹
دنباله‌ها ۴۹
جمع، تفریق، ضرب، وتقسیم — ۱۷۱
— در فضای حاصل‌ضرب ۱۵۱

ـ و بستار ۱۶۵، ۲۴۸
ـ و پیوستگی ۱۶۶، ۲۴۸
ـ و فشردگی ۲۳۲، ۲۳۴
دنبالهٔ همگرا ۱۵۰، ۱۶۵
دومین اصل شمارایی ۲۴۸
ـ و R^{n} ۲۴۸
ـ و R^{ω} ۲۴۸
ـ و حاصل‌ضرب ۲۴۹
ـ و زیرفضا ۲۴۹
ـ و زیرمجموعهٔ چگال شمارا ۲۴۹، ۲۵۴
ـ و شرط لیندلوف ۲۵۰، ۲۵۴
ـ و فضای متری فشرده ۱۹۴
ـ و فضای متری همبند موضعاً فشرده ۳۴۲

رأسهای یك گراف خطی ۳۹۹
رابطه ۲۸
ـ ترتیب ۳۲
ـ ترتیب جزیی اکید ۸۹
ـ ترتیب قاموسی ۳۴
ـ هم ارزی ۲۹
راست به انتفای مقدم ۱۲
راه ۲۰۰
ـ ثابت ۴۲۲
رده
ـ ازدواج ۵۰۳
ـ هم ارزی ۳۰
ـ هموتوپی‌راهی ۴۱۹
رده‌بندی فضاهای پوششی ۵۰۳، ۵۰۸، ۵۰۹
رویه ۲۹۲

زوج مرتب ۱۸
زیرپایه برای یك توپولوژی ۱۰۸
زیرتور ۲۴۴
زیر دنباله ۲۳۲
زیر گروه مزدوج ۵۰۳
زیرمجموعه ۸
ـ چگال ۲۴۶
ـ سره ۸
زیرمجموعهٔ شمارا و چگال ۲۴۹
ـ در I^{I} ۲۵۴
ـ در I^{2} ۲۵۴
ـ در $\mathcal{C}(I, R)$ ۲۵۴
ـ در زیرفضا ۲۵۲
ـ در فضای حاصل‌ضرب ۲۵۴
ـ و دومین اصل شمارایی ۲۵۰

سابق بلافصل ۳۳
ساختار یکنواخت ۳۸۳
سرانجام صفر ۶۸
سری نامتناهی ۱۷۲
سورهای منطقی ۱۴

شرط منتظم بودن ۲۵۵
— برای G/H ۱۸۸
— برای حاصل‌ضرب ۲۵۷
— برای زیرفضا ۲۵۷
— و شرط هاوسدورف ۲۵۵، ۲۶۱
— و فضای تماماً منتظم ۳۱۱
— و گروههای توپولوژیك ۱۸۷
— و متری‌پذیری ۲۸۴، ۳۲۵
— و نرمال بودن ۲۵۵، ۲۶۲، ۲۶۷
شرط ناگاتا ـ اسمیرنوف ۳۲۰
شرط هاوسدورف ۱۲۷
شعاعها در مجموعهٔ مرتب ۱۱۲
شعاعهای باز ۱۱۲
شعاعهای بسته ۱۱۲

صفحه
— در R^N ۴۰۵
— دوبار سفته ۴۵۲
— سفته ۴۲۰
— سورجنفری ۲۵۱
— k بعدی ۴۰۵
صفحهٔ تصویری p^2 ۴۶۰
سطح در — ۴۶۱
گروه بنیادی — ۴۶۱
صفر ۴۰

عدد
— جبری ۶۷
— صحیح زوج ۴۸
— صحیح فرد ۴۸
— لبگ ۲۳۲
— متعالی ۶۷
— مثبت ۴۱
— منفی ۴۱
عدد اصلی
— بزرگتر ۸۱
— قیاسی برای دو مجموعه ۸۹
— یکسان ۶۸
عدد پیچش ۴۵۴
— به‌صورت یك انتگرال ۴۵۴
— منحنی بستهٔ ساده ۵۰۲
عکس ۱۳
— نقیض ۱۲
— هموتوپی ۴۸۳
عمل
— تفریق ۴۱
— جمع ۴۰
— خارج قسمت ۴۱
— دوتایی ۳۹
— ضرب ۴۰
— یك گروه روی یك فضا ۴۶۵

فاصله ۱۵۲
فرض ۱۲

فرض پیوستار ۸۱
فرض تعمیم یافتهٔ پیوستار ۸۱
فشردگی ۲۱۲
ـ بازهٔ بسته ۲۲۵
ـ تصویر پیوسته ۲۱۵
ـ حاصل‌ضرب ۳۰۲
ـ حاصل‌ضرب شمارا ۳۶۴
ـ حاصل‌ضرب هر تعداد متناهی ۲۱۶
ـ در R ۲۲۵
ـ در R^n ۲۲۵
ـ در $\mathscr{C}_f$ ۲۱۵
ـ در توپولوژی ترتیبی ۲۲۴
ـ در توپولوژی یکنواخت ۲۳۵
ـ در زیرفضا ۲۱۳
ـ در $\mathscr{C}(X, Y)$ ۳۷۹
ـ در $\mathscr{C}(X, R^n)$ ۳۶۳، ۳۶۵
ضابطهٔ مجموعه‌های بسته‌برای ـ ۲۲۰
ـ و تورها ۲۴۴
ـ و دنباله‌ها ۲۳۴
ـ و فشردگی برحسب‌نقطهٔ حدی ۲۳۰، ۲۳۴، ۲۵۴
ـ و فضای تمام ۳۶۰
ـ و فضای هاوسدورف ۳۶۶
فشردگی دنباله‌ای ۲۳۲
ـ و فشردگی ۲۳۴، ۲۵۴
فشردگی فرشه‌ای ۲۳۰
فشردگی موضعی ۲۳۷
ـ R^n و R^ω ۲۳۷
ـ حاصل‌ضرب ۲۴۱
فشرده برحسب نقطهٔ حدی
ـ و حاصل‌ضرب ۲۳۶
ـ و فشردگی ۲۳۰، ۲۳۴، ۲۵۴
ـ و فشردهٔ شمارشی ۲۳۵
فشردهٔ شمارشی ۲۵۴، ۲۳۵
فشرده‌سازی ۳۱۲
ـ القا شده به‌وسیلهٔ نشانده ۳۱۲
ـ تك نقطه ۲۳۸
ـ $(0, 1)$ ۳۱۳
فشرده سازی استون ـ چخ ۳۱۵
ـ S_Ω ۳۱۸
ـ Z_+ ۳۱۸
ـ و متری‌پذیری ۳۱۷
ـ و همبندی ۳۱۸
ـ و یکتایی ۳۱۶
فشرده‌سازی تك نقطه‌ای ۲۳۸
فضای اقلیدسی ۵۰
ـ سفته ۲۰۱
فضای الحاقی ۲۹۰
فضای بئر ۳۸۴
ـ R^J ۳۸۹
ـ و اعداد گنگ ۳۸۷
ـ و توپولوژی ظریف ۳۸۹
ـ و فضای متری تمام ۳۸۵
ـ و فضای هاوسدورف فشرده ۳۸۵

ـ و فضای‌هاوسدورف‌موضعاً‌فشرده ۳۸۸
فضای به‌شکل 8 ۴۵۲، ۴۸۵
گروه بنیادی ـ ۴۶۲
ـ و مجموعهٔ G_δ ۳۸۸
فضای پئانو ۳۵۹
فضای پوششی ۴۳۴
رده‌بندی ـ ۵۰۹
ـ kلایی ۴۴۰
ـ گروههای توپولوژیك ۴۴۸
وجود ـ ۵۱۰
ـ و منتظم بودن ۵۱۶
ـ و هم ارزی ۵۰۴
فضای پوششی عمومی ۴۴۶
وجود ـ ۵۱۵
یکتایی ـ ۴۴۶، ۵۱۵
فضای پیرافشرده ۲۹۵، ۳۳۳
فضای تتا ۴۵۳، ۴۸۵
ـ و جداسازی S^2 ۵۰۱
فضای تجزیه ۱۷۷
فضای تصویری n بعدی ۴۶۲
فضای تماماً منتظم ۲۷۶، ۳۰۸
ـ و R^ω ۳۱۰
ـ و حاصل‌ضرب ۳۰۸
ـ و زیرفضا ۳۰۸
ـ و شرط هاوسدورف و فشردگی موضعی ۳۱۰
ـ وگروههای توپولوژیك ۳۱۰
ـ و منتظم بودن ۳۱۱
ـ و نرمال بودن ۳۰۹
فضای تماماً نرمال ۲۶۸
فضای تمام توپولوژیکی ۳۵۳
فضای توپولوژیك ۱۰۰
فضای حاصل‌ضرب ۱۱۳، ۱۲۶
ـ برابری با توپولوژی نقطه ـ باز ۳۶۶
بستار در ـ ۱۳۰، ۱۵۰
گروه بنیادی ـ ۴۵۹
ـ فضاهای پیرافشرده ۳۳۵، ۳۳۹
ـ فضاهای تماماً منتظم ۳۰۸
ـ فضاهای شمارای نوع اول ۲۴۹
ـ فضاهای شمارای نوع دوم ۲۴۹
ـ فضاهای‌فشرده‌برحسب‌نقطهٔ حدی ۲۳۶
ـ فضاهای لیندلوف ۲۵۱، ۲۵۴، ۳۰۷
ـ فضاهای موضعاً فشرده ۲۴۱
ـ فضاهای نرمال ۲۵۷، ۲۶۲، ۲۶۵
ـ فضای منتظم ۲۵۷
ـ و پایه ۱۱۴، ۱۴۷
ـ و توپولوژی جعبه‌ای ۱۴۷
ـ و توپولوژی‌خارج‌قسمت ۱۷۹، ۱۸۲، ۲۴۲، ۳۷۹
ـ و توپولوژی یکنواخت R^J ۱۵۸
ـ و دنباله‌های همگرا ۱۵۰، ۳۶۸
ـ و زیرپایه ۱۱۵، ۱۴۷
ـ و زیر فضا ۱۱۸، ۱۴۸
ـ و زیر مجموعهٔ چگال شمارا ۲۵۴

— وشرطهاوسدورف۱۲۹،۱۴۸،۲۵۷
— و فشردگی ۲۱۶، ۳۰۲، ۳۶۴
— و متری‌پذیری ۱۶۹، ۱۷۰
— و همبندی ۱۹۳
فضای خارج قسمتی ۱۷۵
فضای دومین اصل شمارایی ۲۴۸
فضای شانه‌ای ۲۰۲
فضای شانه‌ای سفته ۲۰۲
مؤلفه‌های — ۲۰۸
همبندی — ۲۰۲
همبندی موضعی — ۲۰۸
فضای عدسی ۴۶۶
فضای فشرده ۲۱۲
فضای فشرده برحسب نقطهٔ حدی ۲۳۰
فضای‌لیندلوف ۲۵۰
فضای متری تمام ۳۴۵
فضای مداری ۴۶۵
گروه اساسی — ۴۶۵
فضای منتظم ۲۵۵
فضای منتظم لیندلوف
— و پیرافشردگی ۳۳۹
— و متری پذیری ۲۸۸
— و نرمال بودن ۲۶۸
فضای‌نرمال ۲۵۵
فضای هاوسدورف ۱۲۷
— با اصل T_1 ۱۲۸، ۱۲۹
— برای بسلا ۲۹۵
— و بسته بودن قطر ۱۳۰، ۲۶۳
— و توپولوژی ترتیبی ۱۲۸
— و توپولوژی جعبه‌ای ۱۴۸
— و توپولوژی‌حاصل‌ضربی ۱۲۹،۱۴۹، ۲۵۷
— و زیرفضا ۱۲۹، ۲۵۶
— و فضای خارج قسمتی ۱۸۰، ۱۸۱
— و فضای متری ۱۶۴
— وگروههای توپولوژیك ۱۸۶
— و منتظم بودن ۲۵۵، ۲۶۱
فضای هاوسدورف فشرده
شبه مؤلفه‌های — ۳۰۷
مؤلفه‌های — ۳۰۷
— و بئر بودن ۳۸۵
— و بئر بودن درمجموعهٔ G_δ ۳۸۷
— و پیرافشردگی ۳۳۳
— و متری‌پذیری ۲۸۸
— و نرمال بودن ۲۵۸
فضای هاوسدورف موضعاً فشرده
— و بئر بودن ۳۸۸
— و فشرده‌شدگی تك نقطه ۳۳۸
— و فضای تماماً منتظم ۳۰۹
— و منتظم بودن ۲۶۸
— و نشاندن در R^N ۴۱۳
فضای همانسازی ۱۷۷
فضای همبند ۱۹۰
فضای همبند ساده ۴۳۰

ـ R^n ۴۲۸
ـ $R^n - 0$ ۴۵۸
ـ S^2 ۴۵۵، ۴۵۹
ـ S^n ۴۵۸
ـ B^n ۴۲۸
ـ و انقباض‌پذیری ۴۷۰
فضای همگن ۱۸۷
فضای متری ۱۵۴
ـ R ۱۵۳
ـ R^n ۱۵۶
ـ R^J با متریك یکنواخت ۱۵۸
ـ l^2 ۱۶۳
ـ Y^J با متریك یکنواخت ۳۴۸
ـ تمام ۳۴۵
ـ و پیرافشردگی ۳۳۴
ـ و زیر فضا ۱۶۴
ـ و شرط هاوسدورف ۱۶۴
ـ و نرمال بودن ۲۵۸
فضای R^2 و توپولوژی استانده ۱۱۴
فضای $R^2 - 0$ ۴۲۰
گروه بنیادی ـ ۴۴۹
ـ و پوشش با $R \times R_+$ ۴۳۸
فضای R^n ۵۰
پایه برای ـ ۱۴۹
زیرمجموعه‌های فشرده ـ ۲۲۵
متریك برای ـ ۱۵۶
ـ و تمام بودن ۳۴۶
ـ و دومین اصل شمارایی ۲۴۸
ـ و فشردگی موضعی ۲۳۷
ـ و همبندی ساده ۴۲۸
ـ و همبندی موضعی راهی ۲۰۹
فضای $R^n - 0$
ـ گروه بنیادی ۴۵۰
ـ همبندی راهی ۲۰۱، ۴۵۸
فضای R^J در توپولوژی جعبه‌ای
ـ بئر بودن ۳۸۹
ـ وگروههای توپولوژیکی ۱۸۶
فضای R^ω در توپولوژی جعبه‌ای
مؤلفه‌های ـ ۲۱۰
ـ و پیرافشردگی ۲۶۸
ـ و تماماً منتظم بودن ۳۰۹
ـ و متری پذیری ۱۶۸
ـ و نرمال بودن ۲۶۸
ـ و همبندی ۱۹۶
فضای R^J در توپولوژی حاصلضرب
ـ بئر بودن ۳۸۹
ـ وگروههای توپولوژیکی ۱۸۶
ـ و متری‌پذیری ۱۶۹
ـ و نرمال بودن ۲۶۷
فضای R^ω درتوپولوژی حاصلضرب
ـ و تمام بودن ۳۴۷
ـ و دومین اصل شمارایی ۲۴۸
ـ و فشردگی موضعی ۲۳۷
ـ و متری‌پذیری ۱۵۹

ـ و همبندی موضعی راهی ۲۰۹
فضای R^J درتوپولوژی یکنواخت ۱۵۸
ـ بشر بودن ۳۸۹
ـ تمام بودن ۳۴۸
ـ و گروههای توپولوژیکی ۱۸۶
فضای R^ω درتوپولوژی یکنواخت
مؤلفه‌های ـ ۲۱۰
ـ و دومین اصل شمارایی ۲۴۹
فضای R^∞ ۱۵۰، ۱۶۲، ۳۵۹
فضای R_l ۱۰۷
ـ و اصول شمارایی ۲۵۰
ـ و پیرافشردگی ۳۳۵، ۳۳۹
ـ و توپولوژی‌استاندده روی R ۱۰۷
ـ و متری‌پذیری ۲۵۴
ـ و نرمال بودن ۲۶۵
فضای R_l^2
ـ و پیرافشردگی ۳۳۵
ـ و تماماً منتظم بودن ۳۱۰
ـ و شرط لیندلوف ۲۵۱
ـ و نرمال بودن ۲۶۵
فضای l^2 ۱۶۳
زیر مجموعهٔ چگال شمارای ـ ۲۵۴
ـ و تمام بودن ۳۵۴
فضای $\mathscr{T}_f$ ۱۰۱
ـ و اصل T_1 ۱۳۱
ـ و فشردگی ۲۱۵
ـ و همبندی ۱۹۶
قاچ
ـ در فضای پوششی ۴۳۴
ـ در فضای حاصل‌ضرب ۲۱۷
قاعدهٔ تناظر ۲۱
قضایای جداسازی
ـ R^2 به‌وسیلهٔ منحنی سادهٔ بسته ۴۹۰، ۵۰۱
ـ S^2 به‌وسیلهٔ منحنی سادهٔ بسته ۴۸۸، ۵۰۱
ـ S^2 به وسیلهٔ $A \cup B$ ۴۹۰، ۴۹۸
ـ S^n ۵۰۰
قضیه
ـ آرزلا ۳۶۵، ۳۸۳
ـ اساسی جبر ۴۷۲
ـ استون ۳۳۵
ـ براوئر دربارهٔ پایایی حوزه ۴۹۱
ـ بورسوك ۴۹۱
ـ بورسوك ـ اولام برای S^2 ۴۷۱
ـ جداسازی ژوردان ۴۸۸
ـ جدا ناسازی ۴۹۱، ۴۹۶
ـ شرودر ـ برنشتاین ۶۸
ـ شوئن فلایز ۵۰۰
ـ فروبنیوس ۴۷۶، ۴۸۰
ـ گسترش تیتسه ۲۷۶
ـ متریسازی اسمیرنوف ۳۴۰
ـ متریسازی اوریسون ۲۸۴
ـ متریسازی بینگ ۳۳۲
ـ منحنی ژوردان ۴۹۸
ـ هان مازورکیه‌ویچ ۳۵۹

ـ یکتایی تمام‌ساز ۳۵۵
قضیهٔ آسکولی
صورت تعمیم یافته ـ ۳۷۹
صورت کلاسیک ـ ۳۶۳
قضیهٔ پیوستگی یکنواخت
تعمیم ـ ۲۳۳
ـ حسابان ۱۸۹
ـ S^{2} به‌وسیلهٔ $A \cup B$ ۴۹۰، ۴۹۸
ـ S^{n} ۵۰۰
قضیهٔ تیخونوف ۳۰۲
ـ شمارا ۳۰۲
ـ متناهی ۲۱۶
قضیهٔ حد یکنواخت ۱۶۷
ـ و عکس جزیی ۲۲۲
ـ و نادرستی عکس ۱۷۲
قضیهٔ خوشترتیبی ۸۵
کاربرد ـ ۲۹۴، ۳۲۹
ـ و اصل ماکزیموم ۹۶
ـ و اصل موضوع انتخاب ۹۶
قضیهٔ متریسازی ناگاتا ـ اسمیرنوف
ـ (کفایت) ۳۲۳
ـ (لزوم) ۳۲۸
قضیهٔ مقادیر میانی
ـ تعمیم یافته ۱۹۹
ـ حسابان ۱۸۹
قضیهٔ مقدار ماکزیموم
ـ تعمیم یافته ۲۲۶
ـ حسابان ۱۸۹
قضیهٔ مقولهٔ بئر ۳۸۵
ـ (حالت خاص) ۲۲۹، ۲۶۵
قضیهٔ نشاندن
ـ بتوی R^{J} ۲۸۷
ـ برای بسلا ۴۱۲
ـ برای بسلای m بعدی ۴۱۳
ـ برای بسلای فشرده ۲۹۳، ۴۱۱
ـ برای فضای تماماً منتظم ۳۰۹
ـ برای گراف خطی ۴۰۳
ـ برای همبافت ۲ بعدی ۴۱۲
قضیهٔ نقطهٔ ثابت
ـ برای S^{n} ۴۸۶
ـ برای انقباض ۲۳۶، ۳۵۳
ـ برای B^{2} ۴۷۶
ـ برای B^{n} ۴۸۰
ـ برای توکشیدهٔ B^{2} ۴۷۹
ـ برای $[0, 1]$ ۲۰۴
قضیهٔ نقطهٔ ثابت براوئر
ـ برای B^{2} ۴۷۶
ـ برای B^{n} ۴۸۰
قضیهٔ ون کمپن ۴۵۷
ـ (حالت خاص) ۴۵۵
قطر یک مجموعه ۱۵۴، ۲۲۹
قطعه
ـ Z_{+} ۵۳
ـ مجموعهٔ مرتب ۸۶

قوانین
- جبری ۴۴
- دمورگن ۱۶
- نامساویها ۴۵
- نماها ۴۶

کران بالا ۳۵
کران پایین ۳۶
کراندار
- از پایین ۳۶
- کلی ۳۵۹
- یکنواخت ۳۶۵
کرانه ۱۳۱
کرانهٔ A ۱۳۱
کرهٔ شاخدار اسکندر ۵۰۰
کرهٔ واحد ۱۷۸، ۲۰۱
کرهٔ واحد ۲ بعدی ۱۷۸
کمان ۴۸۸
کمند ۴۲۷
کوچکترین عضو مجموعهٔ مرتب ۳۵
کوچکترین کران بالا ۳۵

گراف
- بسته ۲۲۲
- تمام پنج رأسی ۳۹۹
- تمام چهار رأسی ۵۰۱
گراف گاز ـ آب ـ برق ۳۹۹
- غیرقابل نشاندن در S^2 ۵۰۱
گراف خطی ۳۹۹
- بعد توپولوژیك ۳۹۹
گردایه ۱۶
- موضعاً گسسته ۳۳۲
- موضعاً متناهی ۳۲۱
- کراندار نقطه‌به‌نقطه ۳۶۵
- نقطه ـ متناهی ۳۲۶
گروه‌بنیادی ۴۲۷
- آبلی ۴۳۳، ۴۶۲، ۴۶۴
- R^2-0 ۴۴۹
- R^n-0 ۴۵۰
- S^1 ۴۴۴
- S^2 ۴۵۷
- S^n ۴۵۷
- P^2 ۴۶۰
- توکشندهٔ دگردیسی قوی ۴۵۲
- چنبره ۴۶۰
- چنبرهٔ مضاعف ۴۶۴
- حاصل‌ضرب ۴۵۹
- شکل 8 ۴۶۲
- غیر آبلی ۴۶۲، ۴۶۴
- فضای مداری ۴۶۵
- و هم‌ارزی هموتوپی ۴۸۳
گروه پوششی عمومی ۴۴۹
گروه توپولوژیك ۱۸۶
فضای پوششی ـ ۴۴۸، ۵۱۷

— و بسته بودن $A \cdot B$ ۲۲۳، ۲۲۵
— و پیرا فشردگی ۳۴۰
— و تماماً منتظم بودن ۳۱۰
— و شرط هاوسدورف ۱۸۷
— و منتظم بودن ۱۸۷
— و نرمال بودن ۲۷۰
— π_1 آبلی است ۴۳۴
گروه خطی عمومی ۱۸۶
گنگ بودن $\sqrt{2}$ ۴۸
گوی واحد B^n ۲۰۰
فشردگی — ۲۲۶
همبندی راهی — ۲۰۱

لم
— چسب ۱۴۰
— درهم کشیدن ۲۹۴، ۳۳۹
— دنباله ۱۶۵
— عدد لبگ ۲۳۱
— گسترش هموتوپی ۴۹۱
لم اوریسون ۲۷۱
— برای فضای تماماً منتظم ۳۰۹
صورت قوی — ۲۸۲
لم بالابر
— برای راهها ۴۴۱
— برای هموتوپی راهی ۴۴۲
— درحالت عمومی ۵۰۶
لم لوله ۲۱۸
— تعمیم یافته ۲۲۲
لوله ۲۱۶

متریک ۱۵۲
— اقلیدسی ۱۵۶، ۱۶۳
— کراندار استانده ۱۵۵
— مربعی ۱۵۶، ۳۵۰
— هاوسدورف ۳۶۶
متریک سوپرمومی ۳۵۰
— و تمام‌بودن ۳۵۰، ۳۵۱
— و متریک یکنواخت ۳۵۰
متریک یکنواخت ۱۵۸، ۳۴۸
— و تمام بودن ۳۴۸
— و متریک سوپرمومی ۳۵۰
متری‌پذیری ۱۵۳
— R ۱۵۳
— R^n ۱۵۶
— R^ω ۱۵۷
— R^ω در توپولوژی جعبه‌ای ۱۶۸
— R^J ۱۶۹
— R_l ۲۵۴
— S_Ω ۲۳۱
— $\bar{S}_\Omega$ ۱۷۰
— $I \times I$ با توپولوژی ترتیب قاموسی ۲۵۴
— بسلاها ۲۹۴
— حاصلضرب ۱۳۲، ۱۶۴

ستم ۱۴
متناهی بودن ۵۳
ـ اجتماع متناهی ۵۸
ـ حاصل‌ضرب متناهی ۵۸
ـ زیرمجموعه ۵۷
ـ مجموعه ۵۳
مجموعه ۷، ۸
ـ R^ω ۵۰
ـ R_+، $\bar{R}_+$ ۴۱
ـ اشباع شده ۱۷۵
ـ اعداد صحیح Z ۴۲
ـ اعداد صحیح Z_+ ۴۲
ـ F_δ ۳۲۸
ـ اندیس ۵۰
ـ X^J ۵۱
ـ X^m ۵۰
ـ X^ω ۵۰
ـ تصویر ۲۲
ـ توانی ۱۶
ـ تهی ۱۰
ـ جدا از هم ۱۰
ـ جهت‌دار ۲۴۳
ـ خوشترتیب ناشمارای مینیمال ۸۶
ـ رده‌های هموتوپی $[X, Y]$ ۴۲۷
ـ شمارا ۵۹
ـ قطری ۱۳۰، ۲۶۳
ـ کانتور ۲۲۹
ـ کراندار ۱۵۴
ـ متناهی ۵۳
ـ محدب ۱۹۷، ۴۲۶
ـ محدب ستاره‌ایی ۴۳۳
ـ ناشمارا ۶۱
ـ نامتناهی ۵۹، ۷۴
ـ و پارادوکس «مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها» ۸۱
مجموعهٔ استقرایی
ـ در R ۴۲
ـ در مجموعهٔ خوشترتیب ۸۷
مجموعهٔ اعداد حقیقی ۴۰
متریك برای ـ ۱۵۳
مجموعه‌های فشرده در ـ ۲۲۵
مجموعه‌های ناشمارا در ـ ۲۲۸
مجموعه‌های همبند در ـ ۱۹۸
ـ و پیرافشردگی ۳۳۲
ـ و توپولوژی استانده ۱۰۷
مجموعهٔ باز ۱۰۰
ـ نسبت به زیرفضا ۱۱۶
مجموعه‌های بسته ۱۲۰
ـ نسبت به‌زیرفضا ۱۲۲
مجموعهٔ خوشترتیب ۸۲
ـ Z_+ ۴۲
ـ $Z_+ \times Z_+$ ۸۲
ـ و زیرمجموعه ۸۳
ـ و شمارایی ۸۴

ـ و فشردگی ۲۲۴
ـ و متناهی بودن ۸۳
ـ و مجموعهٔ $A\times B$ باترتیب‌قاموسی ۸۳
ـ و ناشمارایی ۸۶، ۹۵
ـ و نرمال بودن ۲۶۰
مجموعهٔ خوشترتیب ناشمارا ۸۶
وجود ـ ۹۶
مجموعهٔ G_δ ۲۵۳، ۳۲۴
بئر بودن ـ ۳۸۸
تمام بودن توپولوژیکی ـ ۳۵۴
ـ و صورت قوی لم اوریسون ۲۸۲
ـ و مجموعهٔ اعداد گنگ ۳۲۸
ـ و مجموعهٔ اعداد گویا ۳۸۷
ـ و مجموعهٔ بسته ۳۲۴، ۳۲۸
مجموعهٔ $I\times I$ در توپولوژی ترتیبی
بستار ـ ۱۳۱
ـ و پیوستار خطی ۱۹۹
ـ و متری‌پذیری ۲۵۴
ـ و همبندی ۲۰۱
ـ و همبندی راهی ۲۰۱
ـ و همبندی موضعی ۲۱۱
مجموعهٔ S^1 ۱۳۷
ـ و پوشش به‌وسیلهٔ R ۴۳۵
ـ و پوشش به‌وسیلهٔ S^1 ۴۳۹، ۴۴۰
ـ رده‌بندی فضاهای پوششی ۵۰۹
ـ گروه بنیادی ۴۴۴
مجموعهٔ S^n ۲۰۱
ـ و فشردگی ۲۲۶
ـ و قضیهٔ نقطهٔ ثابت ۴۸۶
ـ و میدان برداری ۴۸۰، ۴۸۶
ـ و همبندی راهی ۲۰۱
ـ و همبندی ساده ۴۵۷
مجموعهٔ S_Ω ۸۶
خاصیتهای فشردگی ـ ۲۳۱
یکتایی ـ ۹۵
ـ و اصول شمارایی ۲۵۳
ـ و پیرافشردگی ۳۳۹، ۳۴۲
ـ و قضیهٔ استون ـ چخ ۳۱۸
ـ و متری‌پذیری ۲۳۱
مجموعهٔ $\bar{S}_\Omega$ ۸۶
متری پذیری ـ ۱۷۰
مجموعهٔ $S_\Omega\times\bar{S}_\Omega$
ـ و پیرافشردگی ۳۳۵
ـ و تماماً منتظم بودن ۳۰۹
ـ و نرمال بودن ۲۶۲
محمل ۲۹۱
مختص
ـ اول زوج مرتب ۱۸
ـ دوم زوج مرتب ۱۸
مرتبهٔ گردایه ۳۹۶
مسئلهٔ ۱۴ از مجموعهٔ کوراتوفسکی ۱۳۲
مستقل هندسی ۴۰۴
معکوس

— چپ ۲۸
— راست ۲۸
معنای «یا» ۹
مقایسه‌پذیری اعداد اصلی ۸۹
مقایسه‌پذیری مجموعه‌های خوشترتیب ۹۵
مقدار تابع ۲۲
مقطع ۱۰، ۱۷، ۵۰
مقوله
— دوم ۳۸۵
— یکم ۳۸۵
مکعب ۴۱۰
مکعب هیلبرت ۱۶۲
منحنی ۲۹۲
منحنی پئانو ۳۵۵
منحنی سادهٔ بسته ۴۸۸
— و جداسازی R^2 ۴۹۰، ۵۰۱
— و جداسازی S^2 ۴۸۸، ۴۹۸
— و مولدگروه بنیادی ۰ — R^2 ۵۰۲
منحنی سینوسی توپولوژی دانان ۲۰۴
منحنی فضا پرکن ۳۵۵
منطقاً معادل ۱۳
موضعاً گسستهٔ شمارشی ۳۳۲
موضعاً متری‌پذیری ۲۸۸
— و متری پذیری ۲۸۸، ۳۴۰
موضعاً متناهی شمارشی ۳۲۲
مؤلفه ۲۰۶
— درفضای‌فشرده و هاوسدورف ۳۰۷
— و شبه مؤلفه ۲۱۰، ۳۵۷
— و مؤلفهٔ راهی ۲۰۹
مؤلفهٔ راهی ۲۰۷
— و مؤلفه ۲۰۹
میدان ۴۱
میدان برداری ۴۷۴
— روی S^2 ۴۷۸
— روی S^n ۴۸۰، ۴۸۶
— روی B^2 ۴۷۴
— روی بطری کلاین ۴۷۷
— روی چنبره ۴۷۷
میدان مرتب ۴۱

ناشمارایی
— R ۲۲۸
— اعداد متعالی ۶۷
— $\mathcal{P}(Z_+)$ ۶۶
— $\{0, 1\}^\omega$ ۶۶
نامساوی مثلثی ۱۵۲
ناهمبندی کلی ۱۹۶
نتیجه ۱۲
نرم ۱۵۶
نرمال بودن ۲۵۵
— R_l ۲۶۵
— توپولوژی همبسته ۲۸۳
— حاصلضرب ۲۵۷، ۲۶۲، ۲۶۵، ۲۶۸
— زیرفضا ۲۵۷، ۲۶۲، ۲۶۸
— زیرفضای بسته ۲۶۸

— فضای الحافی ۲۹۰
— فضای پیرافشرده ۳۳۴
— فضای لیندلوف منتظم ۲۶۸
— فضای متری ۲۵۸
— فضای هاوسدروف فشرده ۲۵۸
— مجموعهٔ خوشترتیب ۲۶۰
— و فضای تماماً منتظم ۳۰۹
— و منتظم بودن ۲۵۵، ۲۶۲، ۲۶۵، ۲۶۸
نشاندن ایزومتریک ۱۷۰
— بتوی یک فضای تمام ۳۵۱
پوشایی — ۲۳۶
نشاننده ۱۳۶
— توپولوژیک ۱۳۶
نقطه
— آغازی راه ۴۱۸
— انباشتگی ۱۲۵
— انباشتگی تور ۲۴۴
— انجامی راه ۴۱۸
— پایه ۴۲۷
— ثابت ۲۰۲
— حدی ۱۲۵
— متقاطر ۴۶۰
نقیض ۱۲
نگاشت ۲۲
— باز ۱۱۹، ۱۷۵
— بسته ۱۷۵، ۲۲۲
نگاشت
— ارزه ۳۷۶
— اساسی ۴۶۶
— تصویری ۱۱۵، ۱۴۶
— حافظ نقاط متقاطر ۴۷۰
— سره ۳۷۳، ۴۱۳
— قطری ۳۵۴
— متقاطر ۴۶۱
نگاشت پوششی ۴۳۴
— $R^2-0 \leftarrow R\times R_+$ ۴۳۸
— $S^1 \leftarrow R$ ۴۳۵، ۵۱۰
— $S^1 \leftarrow S^1$ ۴۳۹، ۴۴۰
— $P^2 \leftarrow S^2$ ۴۶۱
ترکیب — ۴۴۰
— چنبره $\leftarrow R\times R$ ۴۳۷
حاصل‌ضرب — ۴۴۰
— منتظم ۵۱۶
— و هومئومورفیسم موضعی ۴۳۸
نگاشت خارج قسمتی ۱۷۲
ترکیب — ۱۷۹
حاصل‌ضرب — ۱۷۹، ۱۸۲، ۲۲۲، ۳۷۹
نگاشت غیراساسی ۴۶۶
— والقای هومئومورفیسم صفر ۴۶۸، ۴۸۲
نگاشتهای هموتوپ ۴۱۸
نماد تساوی ۸
نمودار ۲۲۲
نوع هموتوپی ۲۸۳

وجود ریشهٔ دوم ۴۸
وضع عمومی
— R^3 ۲۰۳
— R^N ۲۰۵

هم‌ارزی
— فشرده شدگی ۳۱۲
— نگاشتهای پوششی ۵۰۴، ۵۰۸
هم‌ارزی هموتوپی ۴۸۳
— ایزومورفیسم القا شده توسط π_1 ۴۸۳
— و توکشیدهٔ دگردیسی قوی ۴۸۴
همبافت ۲ بعدی ۴۰۱
بعد توپولوژیك — ۴۰۱
— و نشاندن در R^5 ۴۰۶
همبافت ۲ بعدی سادگی متناهی ۴۰۱
همبند
— خردجا ۲۱۱
— سادهٔ موضعی ۵۱۰، ۵۱۶
— سادهٔ نیم‌موضعی ۵۱۰
همبندی ۱۹۰
— R ۱۹۸
— بستار ۱۹۲
— پیوستار خطی ۱۹۷
— تحت نگاشت پیوسته ۱۹۳
— $\mathcal{T}_f$ ۱۹۶
— و توپولوژی جعبه‌ای ۱۹۶
— و زیرفضا ۱۹۰
— و فضای حاصلضرب ۱۹۳
— و همبندی راهی ۲۰۲، ۲۰۵
همبندی راهی ۲۰۰
— $R^n - 0$ ۲۰۱، ۲۵۸
— S^n ۲۰۱
— $I \times I$ با ترتیب قاموسی ۲۰۱
— B^n ۲۰۰
— خط طویل ۲۰۵
— فضای شانه‌ای سفته ۲۰۲
— منحنی سینوسی توپولوژی دانان ۲۰۲
— و همبندی ۲۰۱، ۲۰۴
همبندی موضعی ۲۰۸
— R^n و R^ω ۲۰۹
— راهی ۲۰۸
— وهمبندی خردجا ۲۱۱
— و همبندی موضعی راهی ۲۰۹
همپایان ۲۴۳
همپیوستگی ۳۶۱
— بستار ۳۶۵، ۳۷۹
— و فشردگی ۳۶۳، ۳۷۹
— وکرانداری کلی ۳۶۱
همرده ۱۸۷
همسایگی ۱۲۵
همگرایی تور ۲۴۴
همگرایی یکنواخت ۱۶۷
— و آزمون M وایرشتراس ۱۷۳

هموتوپی ۴۱۸
ـ مستقیم الخط ۴۲۰
ـ و برابری باراه در $\mathcal{C}(X, Y)$ ۳۷۸
ـ و تأثیر روی h_* ۴۸۱
هموتوپی راهی ۴۱۸
هومورفیسم
ـ القا شده توسط راه (α) ۴۲۸
ـ القا شده توسط نگاشت (h_*) ۴۳۱
ـ حاصل ضرب ۴۵۹
ـ صفر ۴۳۳
هومورفیسم القا شدهٔ h_* ۴۳۱
ـ خواص تابعگونی ۴۳۲
ـ و بستگی به ردهٔ هموتوپی h ۴۸۱
هومئومورفیسم ۱۳۵
ـ موضعی ۴۳۸
ـ ونگاشت پیوستهٔ دوسویی ۱۳۷، ۲۱۶

یک ۴۰

α ۴۲۸، ۴۲۹
ـ و ایزومورفیسم بودن ۴۲۹
a^n ۴۶، ۷۲
B^2 ۱۷۲
$B(x, \varepsilon)$ ۱۵۲
$\mathcal{C}(X, Y)$ ۳۴۹
بسته بودن ـ در Y^X ۳۴۹
زیر مجموعه‌های فشرده ـ ۳۷۹
تمام بودن ـ ۳۴۹
ε - همسایگی ۲۲۹
G/H ۱۸۷
پیرافشردگی ـ ۳۴۰
منتظم بودن ـ ۱۸۸
J تایی ۵۱
m تایی ۴۸
ω تایی ۴۹
S^2 ۱۷۸
میدان برداری ـ ۴۷۸
ـ و همبندی ساده ۴۵۵، ۴۵۹