پیوست جلسه­ی 2

عمل­گرها

در مکانیک کوانتومی معمولا از عمل­گرهای خطی یا پادخطی استفاده می­شود. هر دو عمل­گر خطی و عمل­گر پادخطی نگاشت از فضای کتبه خودش است است:

1. 

اما وقتی آنها بر روی ترکیب خطی از کت­ها اثر می­کنند، ویژگی­های متفاوت دارند؛ به­ویژه:

(2) 

(3) 

تنها عمل­گر پادخطی در مکانیک کوانتومی نانسبیتی، عمل­گر وارونی زمان است که در بخش تقارن­ها با آن روبه­رو خواهیم شد.

عمل­گرهای خطی را می­توان در عدد مختلط ضر ب کرد. هم­چنین می­توان آنها را باهم جمع کرد. بنابراین، خودِ عمل­گرهای خطی، فضای برداری می­سازند. عمل­گرهای خطی را می­توان درهم ضرب کرد. ضربیعنی نخستو سپس (به یک کت) اثر می­کنند. ضرب عمل­گرهای خطی شرکت­پذیر است:

(4) 

اما عمل­گرهای خطی، در حالت عمومی، جابه­جایی پذیر نیستند

(5) 

اندازه­ی جابه­جایی ناپذیری آنها با *جابه­جاگر* شان سنجیده می­شود. جابه­جاگر دو عمل­گر به صورت زیر تعریف می­شود:

(6) 

برای نیاز احتمالی آینده، بگذارید، پادجابه­جاگر را هم تعریف کنیم:

(7) 

عمل­گر خطی ممکن است وارون داشته باشد. آن را با نشان خواهیم داد. عمل­گر وارون از رابطه­ی زیر پیروی می­کند:

(8) 

که در آن عمل­گر همانی[[1]](#footnote-1) است. اگر عمل­گرهایو وارون داشته باشند، خواهیم داشت:

(9) 

برخی اتحادها برای محاسبه­ی جابه­جاگرها

جابه­جاگرها از ویژگی­های زیر برخوردار اند. همگی آنها پی­آمد رابطه­ی (7) اند.

(10) 

پادمتقارن بودن:

(11) 

جابه­جاگرها از اتحاد ژاکوبی پیروی می­کنند:

(12) 

هر عمل که بر روی هر فضای برداری تعریف شود (و نه فقط فضای عمل­گرهای خطی) و از رابطه­های (12)-(10) پیروی کند، در آن فضا می­توان جبر لی تعریف کرد.

افزون بر ویژگی­های بالا، جابه­جاگرها هم­چنین در رابطه­های زیر صدق می­کنند

(13) 

اثر عمل­گرها بر روی برا

در تعریف (1) از عمل­گر، روشن است که عمل­گر بر روی کت اثر می­کند و یک کتِ دیگر به­دست

می­دهد. معنی هم همین است: نگاشت یک کت به کت دیگر. می­توان این تعریف را چنان تعمیم داد که بر روی برا هم اثر کند و برا دیگری تولید کند.

اگر یک برا و یک عمل­گرباشند، اثر بر روی را با نشان خواهیم داد (برا در سمت چپ عمل­گر). تعریف  به قرار زیر است: چون قرار است یک برا جدید باشد، اثر این برا جدید را بر روی کت دلخواه در نظر بگیرید. بنا به تعریفف داریم

(14) 

بنابراین، می­توان پنداشت که در عنصر ماتریسی یا به سمت راست خود و یا به سمت چپ خود اثر می­کند.

پایه­ها

در هر فضای برداری، پایه­های آن فضا مجموعه­ای از بردارهای مستقل خطی اند که تمامی آن فضا را می­گسترانند. تعداد این گونه بردارها، بعد فضا را تعیین می­کنند. این مفهوم آشنا از فضای برداری معمولی است. روشن است که برای فضای بینهایت بعدی، بینهایت از این بردارهای پایه لازم داریم. پرسشی را که می­خواهم بپرسم این است: آیا پایه­ها شمارپذیر اند یا شمارناپذیر؟ به بیان دیگر، می­توانیم آنها را با یک زیرنویس گسسته شناسایی کنیم یا باید زیرنویس پیوسته برای آنها درنظر بگیریم؟

پاسخ این است: یکی از ویژگی­های ریاضی فضاهای هیلبرت این است که تعداد پایه­های آن شمارپذیر است: مجموعه­ای از بردارهای مستقل و بهنجارپذیر که می­توان آن را با زیرنویس گسسته­ی شمارد. این بدان معنی نیست که هر پایه­ای را که ممکن است با آن روبه­رو شویم، گسسته است، بلکه به این معنی است که همواره پایه­های از این دست وجود دارند. در واقع، در مکانیک کوانتومی، خیلی وقت­ها با پایه­هایی روبه­رو می­شویم که به زیرنویس پیوسته نیاز دارند، اما این بردارهای پایه­ی پیوستار بهنجارپذیر نیستند و در نتیجه، به فضای هیلبرت تعلق ندارند. در این باره در آینده باز هم سخن خواهیم گفت. برای حالا، اجازه دهید سخن را با پایه­های گسسته که شامل بردارهای بهنجارپذیر اند، پیش ببریم.

برای نمونه، تابع­موج­های نوسانگر هماهنگ یک بعدی کوانتومی را در نظر بگیرید. آنها بهنجارپذیر اند و در فضای هیلبرت سامانه قر ار دارند و مجموعه­ی کامل و گسسته تشکیل می­دهند).

پایه­های گسسته در فضای کت­ها را با مجموعه­ی  نشان دهید. گوییم این

پایه­ها راست­بهنجار اند اگر:

(15) 

حالا، هر کت دلخواه را می­توان برحسب ترکیب خطی بردارهای پایه نوشت:

(16) 

و اگر پایه­ها راست بهنجار باشند، ضریب­های بسط عبارت اند از

(17) 

اگر رابطه­ی (17) را در معادله­ی (16) جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

(18) 

اگر از دو طرف را حذف کنیم، به­دست می­آید

(20) 

**بازگشت به درس 1**

1. identity operator [↑](#footnote-ref-1)