درس ۳

هم‌یوغ هرمیتی

پیشاپیش هم‌یوغ هرمیتی برا و کت را تعریف کردیم و آن را با $\dagger$ نشان دادیم. حالا می‌خواهیم هم‌یوغ هرمیتی عملگر را تعریف کنیم. اگر $\tilde{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ عمل‌گر خطی باشد، عمل‌گر خطی دیگر $\tilde{A}^\dagger : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ چنان وجود دارد که با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}^\dagger |\psi\rangle = \left(\langle\psi|\tilde{A}\right)^\dagger \qquad (۱)$$

لازم است که یادآوری کنم که $\langle\psi|$ تابع پادخطی از $|\psi\rangle$ است (به خاطر تناظر دوگان) اما هنگامی که هم‌یوغ دوم را در سمت راست رابطه‌ی (۱) انجام می‌دهیم، نتیجه یک تابع خطی از $|\psi\rangle$ می‌شود و این یعنی $\tilde{A}^\dagger$ عمل‌گر خطی است.

برخی پی‌آمدهای مهم تعریف (۱) : ما آنها را در زیر می‌آوریم. اثبات آنها تمرین‌های ساده اند و پیشنهاد می‌کنم انجام دهید.

$$\langle\phi|\tilde{A}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\tilde{A}|\phi\rangle^* \qquad (۲)$$

$$\left(\tilde{A}^\dagger\right)^\dagger = \tilde{A} \qquad (۳)$$

$$\left(c_۱\tilde{A}_۱ + c_۲\tilde{A}_۲\right)^\dagger = c_۱^*\tilde{A}_۱^\dagger + c_۲^*\tilde{A}_۲^\dagger \qquad (٤)$$

$$\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)^\dagger = \tilde{B}^\dagger\tilde{A}^\dagger \qquad (٥)$$

$$\left(|\alpha\rangle\langle\beta|\right)^\dagger = |\beta\rangle\langle\alpha| \qquad (٦)$$

از همه‌ی اینها می‌توان یک نتیجه‌ی سودمند و کلی به‌دست داد:

هم‌یوغ هرمیتی ضرب اشیاء (اشیاء= کت‌ها، براها، عمل‌گرها، عددهای مختلط) با وارون کردن ترتیب اشیاء و جایگزینی هر یک با هم‌یوغ خود، داده می‌شود. این فرایند می‌تواند شامل ضرب ضرب معمولی در اسکالر، ضرب عمل‌گرها یا ضرب داخلی و خارجی (تانسور) باشند. تنها شرط این است که ضرب اولیه‌ی اشیاء معنی دار باشد.

عملگرهای هرمیتی، پاد هرمیتی و یکانی

گوییم عملگر $\tilde{A}$ هرمیتی است اگر با همیوغ هرمیتی خودش برابر باشد:

$$\tilde{A}^{\dagger}=\tilde{A} \qquad (۷)$$

تعریف همارز این است: برای همه‌ی کت‌های $|\phi\rangle$ و $|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|\tilde{A}|\phi\rangle=\langle\phi|\tilde{A}|\psi\rangle^{*} \qquad (۸)$$

گوییم عملگر $\tilde{A}$ پادهرمیتی است اگر

$$\tilde{A}^{\dagger}=-\tilde{A} \qquad (۹)$$

در حالت عمومی، عملگر دلخواهی مانند $\tilde{A}$ نه هرمیتی است و نه پادهرمیتی. اما همواره می‌توان آن را به طور یگانه به جمع عملگرهای هرمیتی و پادهرمیتی تجزیه کرد

$$\tilde{A}=\frac{\tilde{A}+\tilde{A}^{\dagger}}{۲}+\frac{\tilde{A}-\tilde{A}^{\dagger}}{۲} \qquad (۱۰)$$

اگر $\tilde{A}$ هرمیتی باشد، عنصر ماتریسی آن، $\langle\psi|\tilde{A}|\psi\rangle$ باید به‌ازای هر $|\psi\rangle$ حقیقی باشد. این را از رابطه‌ی (۲) می‌دانیم.

عملگر $\tilde{U}$ یکانی است، اگر

$$\tilde{U}\tilde{U}^{\dagger}=\tilde{U}^{\dagger}\tilde{U}=۱ \qquad (۱۱)$$

در نتیجه،

$$\tilde{U}^{-۱}=\tilde{U}^{\dagger} \qquad (۱۲)$$

ضرب دو عملگر یکانی همیشه یکانی است.

ویژه‌مقدارها و ویژه‌کت‌ها: طیف یک عملگر

فرض کنید که $\tilde{A}$ عملگری است که در $\mathcal{H}$ اثر می‌کند. اگر کت غیرصفر $|u\rangle$ و عدد مختلط a چنان وجود داشته باشند که

$$\tilde{A}|u\rangle=a|u\rangle \qquad (۱۳)$$

گوییم، $|u\rangle$ ویژه‌کت عملگر $\tilde{A}$ و a ویژه مقدار (راست) آن است.

به همین ترتیب، اگر برا $\langle v|$ و عدد مختلط b وجود داشته باشند که

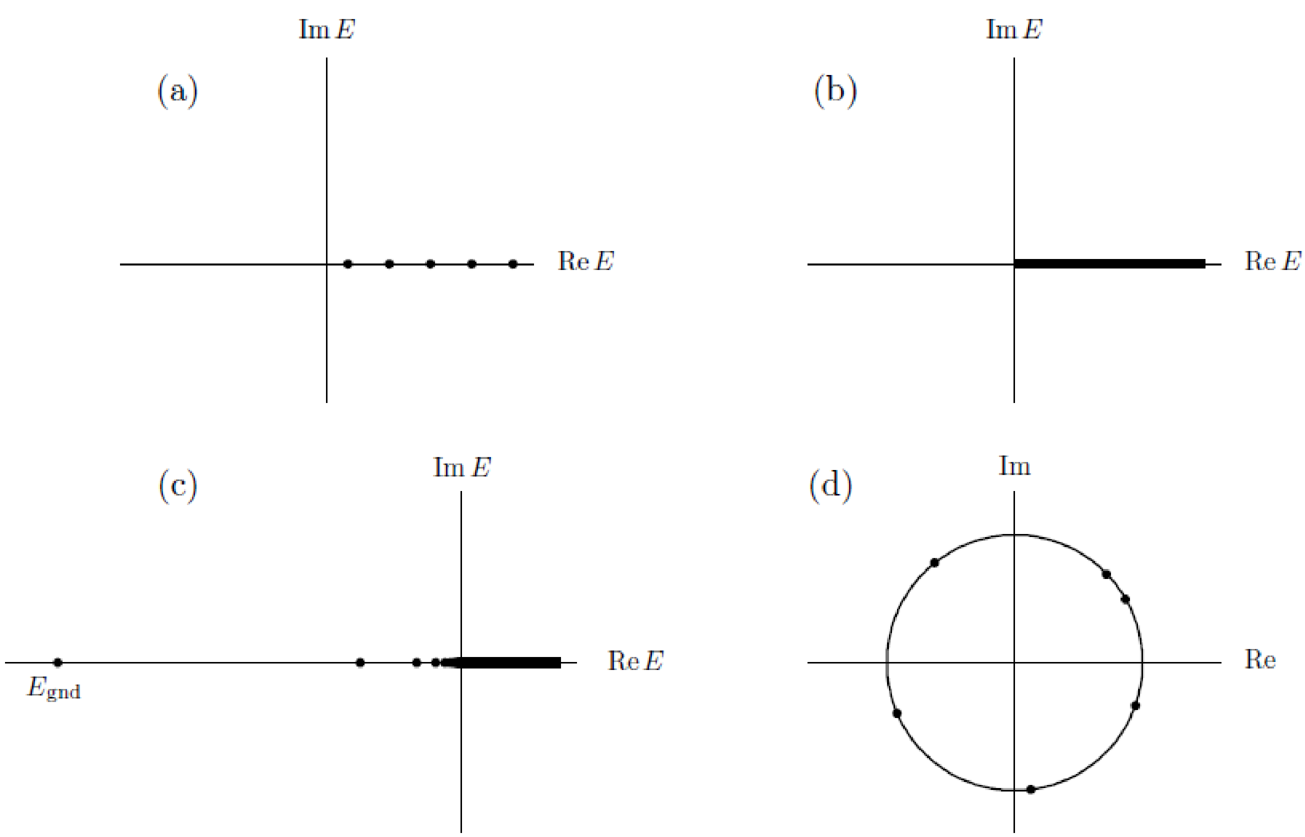
$$\langle v|\tilde{A}=b\langle v| \qquad (١٤)$$

گوییم، $\langle v|$ ویژه‌برا $\tilde{A}$ و b ویژه‌مقدار (چپ) آن است. در فضای هیلبرت با ابعاد محدود، هر ویژه‌مقدار(راست)، همچنین ویژه‌مقدار (چپ) هم است، اما برای فضای هیلبرت بینهایت بعدی لازم نیست که این گزاره درست باشد.

طیف عملگر: مجموعه‌ی همه‌ی ویژه‌مقدارهای عملگر را طیف آن عملگر می‌نامند. در ابعاد محدود، مجموعه‌ی ویژه‌مقدارها (یعنی طیف) نقاط گسسته در صفحه‌ی مختلط اند.

برخی مثال‌ها برای طیف عملگرهای آشنا در مکانیک کوانتومی:

طیف نوسانگر هماهنگ: ویژه‌مقدارهای عملگر همیلتونی آن، $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ اند. طیف آن در شکل (a) نقاط گسسته بر روی محور حقیقی انرژی دیده می‌شود. این نمونه‌ای از طیف گسسته است. فقط انرژی‌های حقیقی از نظر فیزیکی معنی‌دار اند. با این حال من صفحه‌ی مختلط کامل را نشان داده‌ام، چون در حالت عمومی، ویژه‌مقدارهای عملگرها مختلط اند.



در شکل (b) طیف همیلتونی ذره‌ی آزاد، $\tilde{H}=p^{۲}/۲m$، را می‌بینید که شامل همه‌ی انرژی‌های حقیقی مثبت، $E\geq ۰$ است و با خط پررنگ بر روی محور حقیقی نشان داده شده است. این نمونه‌ای از طیف پیوسته است.

در شکل(c) طیف اتم هیدروژن را می‌بینید. این یکی شامل یک مجموعه‌ی گسسته در انرژی‌های منفی است که حالت‌های مقید را نشان می‌دهد و با نزدیک شدن به $E=۰$ تعدادشان به بینهایت میل می‌کند (مانند انرژی ذره‌ی آزاد) . افزون بر این، برای انرژی‌های $E>۰$ یک طیف پیوسته هم دارد. بنابراین، طیف اتم هیدروژن آمیزه‌ای از ویژه‌مقدارهای گسسته و پیوستار است.

شکل(d) طیف یک عملگر یکانی را در فضای با ابعاد محدود، نشان می‌دهد. ویژه‌مقدارهای آن ضریب‌های فاز اند که بر روی دایره‌ی یکه در صفحه‌ی مختلط قرار دارند.

نکته‌ی مهم: اگر طیف ویژه‌مقدارها گسسته باشد، مجموعه‌ی ویژه‌کت‌های $|u\rangle$ که در رابطه‌ی (۱۳)، یعنی $\tilde{A}|u\rangle=a|u\rangle$ صدق می‌کنند، به‌ازای هر ویژه‌مقدار داده شده‌ی a، زیرفضایی در فضای کت‌ها تشکیل می‌دهند.

نکته‌ی توضیحی: به یاد بیاورید که اگرچه $|u\rangle$ و $a|u\rangle$ بردارهای فضای هیلبرت اند اما هر دو یک حالت فیزیکی سامانه را توصیف می‌کنند. بنابراین، مجموعه‌ی ویژه‌کت‌های $|u_۱\rangle$ ، $|u_۲\rangle$ و غیره با ویژه مقدارهای متناظر $a_۱$، $a_۲$ و غیره همگی در فضای هیلبرت اند. و در نتیجه $\{|u_n\rangle\}$ زیر فضای فضای هیلبرت یا فضای کت‌ها است. این زیر فضا دست‌کم یک بعد دارد، اما می‌تواند زیر فضای با ابعاد بالا (حتی بینهایت بعدی) هم باشد. این زیرفضا را فضای‌ویژه‌حالت‌ها خواهیم نامید. اگر فضای ویژه‌حالت‌ها یک بعدی باشد، گوییم ویژه‌مقدارها ناتبهگن اند. در غیر این صورت آنها تبهگن اند. این بدان معنی است که چند ویژه کت، یک ویژه‌مقدار داشته باشند. به بیان دیگر، ویژه‌مقدارهای دو یا چند ویژه‌کت متمایز یکسان باشند. این یعنی تبهگنی. تعداد حالت‌های تبهگن (ابعاد تبهگنی) را مرتبه‌ی تبهگنی می‌نامند.

ویژه‌مقدارهای عملگرهای هرمیتی

در حالت عمومی، رابطه‌ی ساده‌ای بین ویژه‌کت‌ها و ویژه‌براهای یک عملگر وجود ندارد. اما

اگر عمل‌گر $\tilde{A}$ هرمیتی باشد، مسئله تا حد زیادی ساده می‌شود. برای حالا، فقط طیف گسسته را در نظر خواهیم گرفت.

(۱): ویژه‌مقدارهای a_n عمل‌گر هرمیتی $\tilde{A}$ حقیقی اند. بنابراین، طیفِ ویژه‌مقدارها، زیرمجموعه‌ای در روی محور حقیقیِ صفحه‌ی مختلط است.

اثبات: $\tilde{A}|u\rangle = a|u\rangle$ را از سمت چپ در $\langle u|$ ضرب کنید. خواهیم داشت:

$$\langle u|\tilde{A}|u\rangle = \langle u|a|u\rangle = a\langle u|u\rangle \qquad (۱۵)$$

حالا، مزدوج مختلط (۱۵) را حساب کنید: چون $\tilde{A}$ هرمیتی است، $\tilde{A}^\dagger = \tilde{A}$ است و در نتیجه داریم: $\langle u|\tilde{A}^\dagger|u\rangle = \langle u|\tilde{A}|u\rangle$. پس، مزدوج سمت چپ رابطه‌ی (۱۵) خودش است. اما سمت راست آن $a^*\langle u|u\rangle$ می‌شود:

$$\langle u|\tilde{A}^\dagger|u\rangle = \langle u|\tilde{A}|u\rangle = a^*\langle u|u\rangle \qquad (۱٦)$$

رابطه‌های (۱۵) و (۱٦) را از هم کم کنید:

$$(a-a^*)\langle u|u\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad a = a^* \quad \text{since} \quad |u\rangle \neq 0 \qquad (۱۷)$$

(۲): اگر $\tilde{A}|u\rangle = a|u\rangle$ باشد، آنگاه $\langle u|\tilde{A} = a\langle u|$ است. بنابراین، ویژه‌براها هم مزدوج هرمیتی ویژه‌کت‌های عملگر $\tilde{A}$ اند (و ویژه‌مقدارهای چپ و راست برابر اند).

(۳): دو ویژه‌کت متناظر با ویژه‌مقدارهای گسسته، متعامد اند. بگذارید این را با یک قضیه بیان کنیم:

قضیه‌ی ۱: فضای ویژه‌کت‌های عمل‌گر هرمیتی متناظر با ویژه‌مقدارهای گسسته، متعامد اند. (این یعنی هر جفت برداری که از دو فضای ویژه‌کت برگزینیم، متعامد اند)

اثبات: فرض کنید $\tilde{A}|u\rangle = a|u\rangle$ و $\tilde{A}|u'\rangle = a'|u'\rangle$ برای دو ویژه‌کت $|u\rangle$ و $|u'\rangle$ با دو ویژه‌مقدار a و a' اند. اولی را در $\langle u'|$ و دومی را در $\langle u|$ ضرب کنید. خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \langle u'|\tilde{A}|u\rangle &= a\langle u'|u\rangle \\ \langle u|\tilde{A}|u'\rangle &= a'\langle u|u'\rangle \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

حالا هم‌یوغ هرمیتی معادله‌ی دوم را حساب کنید و از اولی کم کنید. هم‌یوغ هرمیتی معادله‌ی دوم عبارت است از $\langle u|\tilde{A}|u'\rangle^{\dagger}=\langle u|\tilde{A}^{\dagger}|u'\rangle=\langle u'|\tilde{A}|u\rangle=a'^{*}\langle u'|u\rangle=a'\langle u'|u\rangle$. در نتیجه، خواهیم داشت

$$(a-a')\langle u'|u\rangle=0 \qquad (19)$$

این رابطه نشان می‌دهد که یا $(a-a')=0$ یا $\langle u'|u\rangle=0$. چون ویژه‌مقدارها را گسسته فرض کردیم، $a\neq a'$ است. بنابراین $\langle u'|u\rangle=0$ است که ضرب داخلی دو کت (یا «بردار») صفر است و این یعنی آنها متعامد اند.

کامل بودن ویژه‌کت‌ها: جمع مستقیم، پایه‌های راست‌بهنجار

به یاد بیاورید که گفتم هر ویژه‌کت $|u\rangle$ که در $\tilde{A}|u\rangle=a|u\rangle$ کند، یک زیرفضا در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است. حال فرض کنید که $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو زیرفضا در $\mathcal{H}$ اند که هیچ عضو مشترک (به جز عنصر صفر) ندارند. جمع مستقیم $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ مجموعه‌ی بردارهایی است که می‌توان از ترکیب خطی بردارهای این دو فضا است. ما ان را با $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ نشان خواهیم داد. یعنی

$$\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2=\{|\psi_1\rangle+|\psi_2\rangle\}\;\;;\;|\psi_1\rangle\in\mathcal{H}_1\;\;,\;|\psi_2\rangle\in\mathcal{H}_2 \qquad (20)$$

البته جمع مستقیم خود یک زیرفضای $\mathcal{H}$ است. می‌توان این گونه هم به جمع مستقیم اندیشید: فضایی که پایه‌های آن، با پایه‌های $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ ساخته می‌شود. بنابراین ابعاد $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ جمع ابعاد $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ است.

حالا در ابعاد محدود، می‌توانیم کامل بودن را برحسب جمع مستقیم بیان کنیم:

فرض کنید $\tilde{A}$ عملگری است که در فضای $\mathcal{H}$ اثر می‌کند. ویژه‌مقدارهای $\tilde{A}$ را $a_1,a_2,\cdots a_N$ بنامید. اگر $\mathcal{H}_n$ زیرفضای nام باشد، یعنی

$$\mathcal{H}_n=\{|u\rangle\;\; s.t.\;\; \tilde{A}|u\rangle=a_n|u\rangle\} \qquad (21)$$

گوییم عملگر $\tilde{A}$ کامل است، اگر

$$\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}_N=\mathcal{H} \qquad (22)$$

اهمیت گفتار بالا در این است که هر عملگر هرمیتی $\tilde{A}$ کامل است. افزون بر این، فضای هیلبرت اصلی $\mathcal{H}$ را به مجموعه‌ای از زیرفضاهای متعامد تجزیه می‌کند، به فضای ویژه‌کت‌های عمل‌گر تجزیه می‌کند.

حال در هر یک از $\mathcal{H}_n$ یک پایه‌ی راست‌بهنجار برگزینید. آن را با $|nr\rangle$ دهید. در این نماد، r اندیسی برای بردارهای راست‌بهنجار است زیرفضای nام است. بنابراین، $r=1,2,\cdots,\dim\mathcal{H}_n$. همواره می‌توان به روش‌های گوناگون این کار را انجام داد. چون هر یک از زیرفضاها، خودشان متعامد اند، مجموعه‌ی بردارهای $|nr\rangle$ به‌ازای همه‌ی nها و r ها ، پایه‌های راست بهنجار برای کل فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می‌شود. بنابراین،

$$\langle nr|n'r'\rangle=\delta_{nn'}\delta_{rr'} \qquad (۲۳)$$

این کت‌های $|nr\rangle$ ویژه‌کت‌های عمل‌گر $\tilde{A}$ اند:

$$\tilde{A}|nr\rangle=a_n|nr\rangle \qquad (۲۴)$$

به بیان دیگر، $|nr\rangle$ ها ویژه‌پایه‌های راست بهنجار اند. افزون بر این، اینک می‌توان عمل‌گر همانی نوشت:

$$\hat{1}=\sum_{n,r}|nr\rangle\langle nr| \qquad (۲۵)$$

که با ویژه‌پایه‌های راست بهنجار برای عملگرکامل $\tilde{A}$، است. همچنین، می‌توانیم خودِ عمل‌گر را برحسب این ویژه‌کت‌ها (پایه‌ها) بنویسیم

$$\tilde{A}=\sum_{nr}a_n|nr\rangle\langle nr| \qquad (۲۶)$$