فصل دوم:
ریشه‌یابی

در سراسر مطالب این فصل به دنبال یافتن ریشه α از معادله $f(x) = 0$ هستیم. لازم به ذکر است که در معرفی روش‌های عددی، همواره با فرآیندهایی تکراری، دنباله‌ای از اعداد همچون $\{x_n\}_{n=0}$ ساخته خواهد شد به نحوی که هر یک از اعضای دنباله فوق، تقریب‌هایی برای ریشه‌ی α هستند و چنانچه روش عددی مذکور موفقیت آمیز عمل نماید، این دنباله عددی به ریشه α همگرا خواهد شد، یعنی به عبارتی:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$$

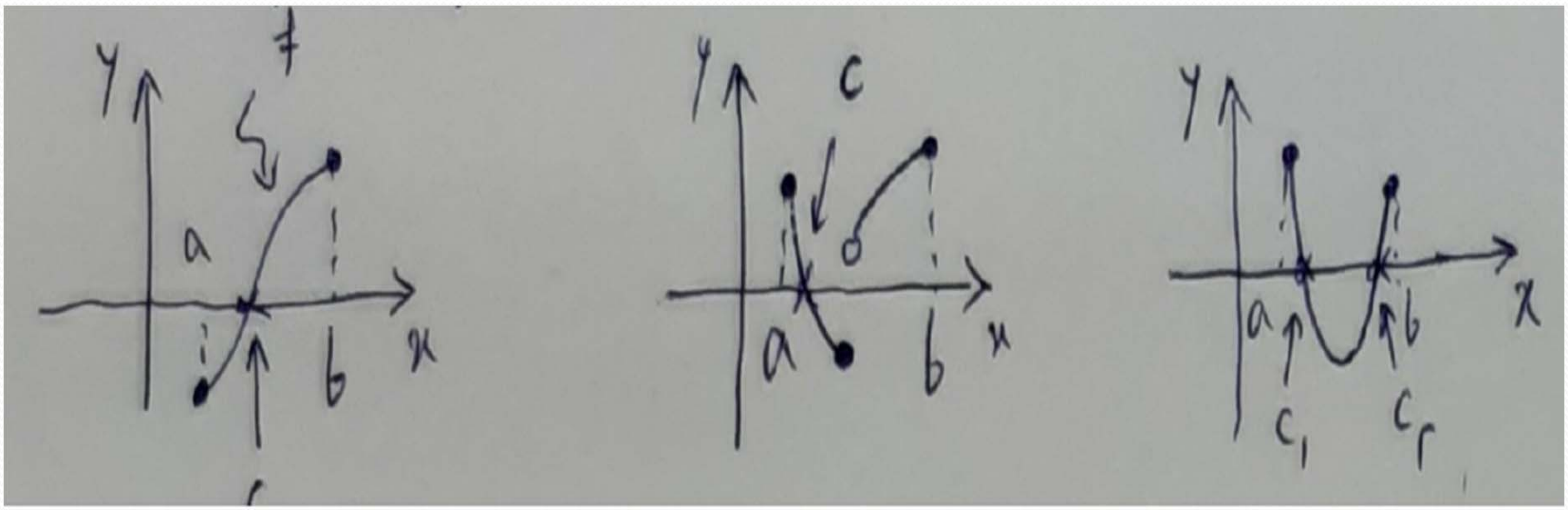
روش‌های عددی که در این فصل مورد ارزیابی قرار می‌گیرند، در استراتژی ساخت این دنباله عددی، با یکدیگر متفاوت هستند.

معرفی روش‌های عددی در ریشه‌یابی

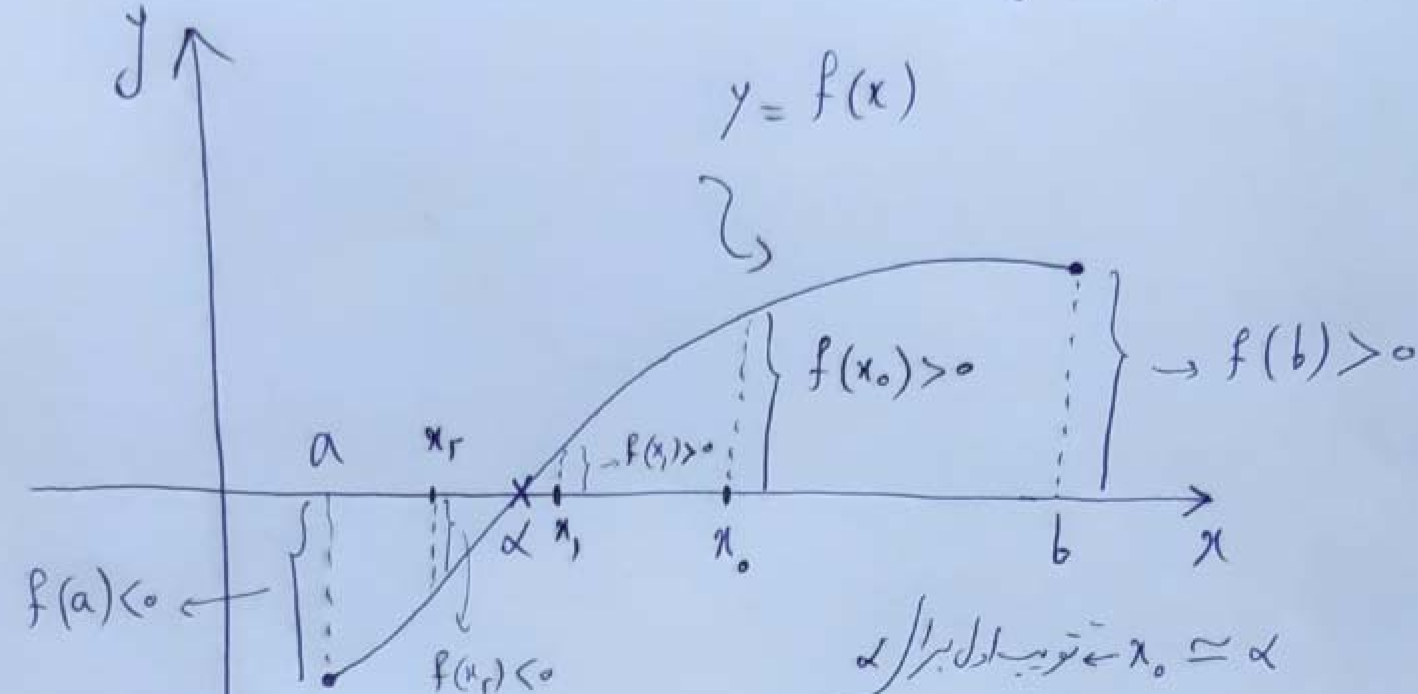
۱- روش تنصیف یا دوبخشی (Bisection Method): اساس این روش قضیه‌ای در ریاضی عمومی تحت عنوان قضیه **بولتزانو-وایرشتراس** است:

قضیه (**بولتزانو-وایرشتراس**): فرض کنیم f تابعی پیوسته بر بازه $[a,b]$ و همچنین $f(a)\times f(b) < 0$ باشد. در اینصورت حداقل یک $a < \alpha < b$ چنان یافت می‌شود که $f(\alpha) = 0$ باشد. همچنین چنانچه f تابعی اکیدا یکنوا باشد، این α منحصر به فرد خواهد بود.

(قضیه بولتزانو-وایرشتراس که گاهی به اختصار قضیه بولتزانو نامیده می‌شود، نتیجه‌ی قضیه معروفی در ریاضی عمومی، تحت عنوان قضیه **مقدار میانی** است)


y
a
b
x
c
c1

«تعبیر هندسی روش دو بخشی»:



$x_0 \simeq \alpha$ ← تقریب اول برای α

$x_1 \simeq \alpha$ ← تقریب دوم برای α

$x_2 \simeq \alpha$ ← تقریب سوم برای α

$\vdots$

دنباله تشکیل شده از روش دو بخشی ⟵ $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$

نقاط ضعف و قوت روش دوبخشی

همانگونه که از تعبیر هندسی روش برمی‌آید، چون روش دوبخشی با بازه‌هایی حول جواب α در حال کارکردن است که طول این بازه‌ها به طور مستمر در حال نصف شدن است، لذا شکست (واگرایی) در این روش هرگز اتفاق نخواهد افتاد. به عبارت دیگر، روش دوبخشی تضمین همگرایی دارد.

نقطه قوت

چنانچه در تعبیر هندسی پیداست، ممکن است در این روش تقریب x_n از تقریب x_{n-1} الزاما بهتر نباشد. (کما اینکه در شکل، تقریب x_2 یعنی تقریب سوم ساخته شده توسط این روش برای α، از تقریب x_1 یعنی تقریب دوم برای α بهتر نمی‌باشد و فاصله‌ی بیشتری تا α نسبت به تقریب x_1 دارد!!) این اشکال سبب می‌شود که برای پیدا کردن یک تقریب مناسب برای α بعضا مجبور شویم تا تکرارهای زیادتری از روش را سپری نماییم که این خود، سبب **کندی روند همگرایی** در این روش خواهد شد.

نقطه ضعف

تذکر: طبیعتا تعداد اعضای دنباله $\{x_n\}_{n=0}$ ساخته شده توسط هر روش عددی، بینهایت نمی‌تواند باشد. اگرچه مفهوم همگرایی به لحاظ تئوری به این معناست که:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$$

بنابراین معمولا باید در یک جایی و به ازای یک تکرار n ای، ساخت اعضای دنباله حاصل از یک روش عددی متوقف گردد. لذا به نظر می‌رسد که برای توقف الگوریتم‌های عددی نیاز به متر یا معیاری جهت توقف داریم. لذا با فرض این که $\varepsilon = c \times 10^{-k},\ k = 1,2,\ldots$ یک تولرانس داده شده در مساله (یا یک دقت داده شده در مساله) باشد، در این درس و برای توقف روش‌های عددی حداقل از یکی از شرایط توقف زیر استفاده می‌گردد.

معیارهای توقف

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$$

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} \le \varepsilon$$

$$|f(x_n)| \le \varepsilon$$

مثال) تقریبی از ریشهٔ معادلهٔ $3xe^x = 1$ را که در بازهٔ $(0,1)$ قرار گرفته، به کمک روش دونیمسازی طوری بیابید که $|f(x_n)| \le 0.01$ باشد.

حل: ابتدا معادله را به شکل استاندارد $f(x)=0$ در می‌آوریم. لذا:

$$3xe^x - 1 = 0 \;\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 3e^1 - 1 \simeq 7.1548 \end{cases} \quad \& \quad f(0)\times f(1) < 0 \;\checkmark$$

$$(0,1) \begin{cases} \to (0, 0.5) \;\checkmark \\ \to (0.5, 1) \end{cases} \qquad \boxed{x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5} \Longrightarrow f(0.5) = 3\times 0.5 \times e^{0.5} - 1 \simeq 1.4731 \not< 0.01$$

بنابراین با توجه به منفی بودن $f(0)$ و مثبت بودن $f(0.5)$، بازهٔ بعدی برای نصف شدن، بازهٔ $(0, 0.5)$ انتخاب می‌گردد و داریم:

$$\boxed{x_1 = \frac{0+0.5}{2} = 0.25} \Longrightarrow (0, 0.5) \begin{cases} \to (0, 0.25) \\ \to (0.25, 0.5) \;\checkmark \end{cases} \Longrightarrow |f(0.25)| = |-0.03698| \not< 0.01$$

$$\boxed{x_2 = \frac{0.25+0.5}{2} = 0.375} \Longrightarrow (0.25, 0.5) \begin{cases} \to (0.25, 0.375) \;\checkmark \\ \to (0.375, 0.5) \end{cases} \Longrightarrow f(0.375) = 0.6369 \not< 0.01$$

$$\boxed{x_3 = \frac{0.25+0.375}{2} = 0.3125} \Longrightarrow (0.25, 0.375) \begin{cases} \to (0.25, 0.3125) \;\checkmark \\ \to (0.3125, 0.375) \end{cases} \Longrightarrow f(0.3125) = 0.2814 \not< 0.01$$

$$\boxed{x_4 = \frac{0.25+0.3125}{2} = 0.28125} \Longrightarrow (0.25, 0.3125) \begin{cases} \to (0.25, 0.28125) \;\checkmark \\ \to (0.28125, 0.3125) \end{cases}$$

$$f(0.28125) = 0.1177 \not< 0.01$$

$$\boxed{x_5 = \frac{0.25+0.28125}{2} = 0.265625} \Longrightarrow (0.25, 0.28125) \begin{cases} \to (0.25, 0.265625) \;\checkmark \\ \to (0.265625, 0.28125) \end{cases}$$

$$f(0.265625) = 0.03 \not< 0.01$$

$$\boxed{x_6 = \frac{0.25+0.265625}{2} = 0.2578125} \Longrightarrow f(0.2578125) = 0.0009 \le 0.01 \;\checkmark$$

در اینجا متوقف شده و x_6 را به عنوان تقریبی از ریشهٔ واقعی این مسأله که شرط توقف را برآورده می‌کند.

اثبات همگرایی روش دوبخشی و نکته‌ای در ارتباط با سرعت همگرایی این روش: مشاهده نمودیم که با توجه به نحوه ساخت اعضای دنباله $\{x_n\}_{n=0}$ در روش دوبخشی داریم:

$$0 \le |x_0 - \alpha| \le \frac{b-a}{2}$$

$$0 \le |x_1 - \alpha| \le \frac{\frac{b-a}{2}}{2} = \frac{b-a}{2^2}$$

$$\vdots$$

$$0 \le |x_n - \alpha| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

اکنون با توجه به این که:

$$\lim_{n\to\infty} (0) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b-a}{2^{n+1}}\right) = 0$$

بنابراین طبق قضیه ساندویچ در ریاضی عمومی و در دنباله‌ها خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \alpha| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - \alpha) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

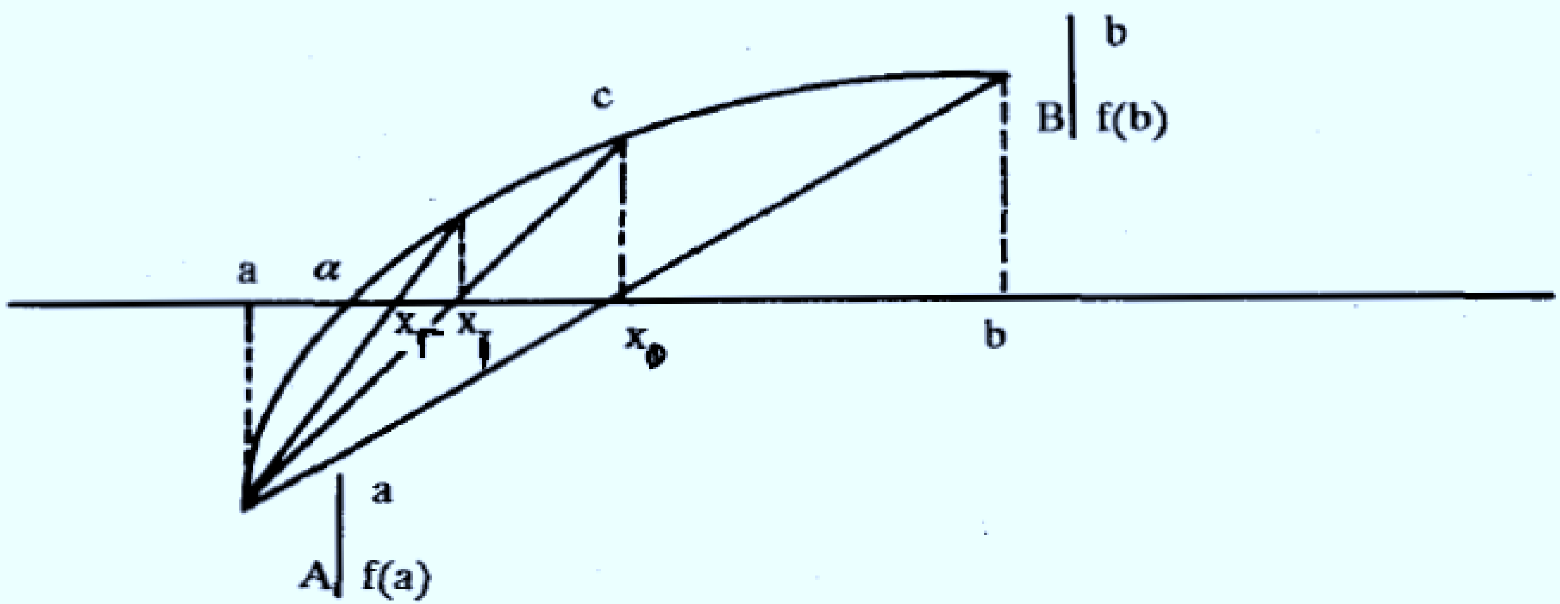
تذکر: به سادگی و با استفاده از رابطه $0 \le |x_n - \alpha| \le \frac{b-a}{2^{n+1}}$ می‌توان مشاهده نمود که تقریب $\{x_n\}$ به دست آمده از روش دوبخشی دارای یک کران بالای خطای مطلق برابر با $\frac{b-a}{2^{n+1}}$ است. همچنین این رابطه گویای این حقیقت است که سرعت میل کردن جملات دنباله حاصل از روش دوبخشی به سمت α، تقریبا متناسب با سرعت میل کردن جملات دنباله $\{\frac{1}{2^{n+1}}\}$ به سمت عدد 0 است و چون به طور مثال:

$$n = 9 \Rightarrow \frac{1}{2^{9+1}} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} \simeq \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

لذا این بدان معناست که در روش دوبخشی، به صورت تقریبی بعد از هر 10 تکرار (با فرض این که x_0 را تکرار اول روش دوبخشی در نظر بگیریم) بهبودی به اندازه 10^{-3} در جواب به دست آمده از دنباله‌ی تولید شده توسط این روش صورت می‌پذیرد!! و این تعداد تکرار، برای یک روش عددی تعداد تکرار زیادی محسوب می‌گردد. (به عنوان تمرین حساب کنید که چنانچه بخواهیم در یک مساله ریشه‌یابی به کمک روش دوبخشی، به دقت ماشین، مثلا در یک ماشینی که از فرمت Binary64 تبعیت می‌کند و در آن $\text{eps} \simeq 2.22 \times 10^{-16}$ می‌باشد برسیم، به حدودا چند تکرار روش نیازمندیم؟!!)

۲- روش نابجایی (False Position Method) (Regula Falsi Method): این روش مشابه با روش دوبخشی است و به این صورت است که در هر تکرار بازه‌ی داده شده به بازه‌ای کوچک‌تر و شامل ریشه تبدیل می‌شود.

تعبیر هندسی روش نابجایی

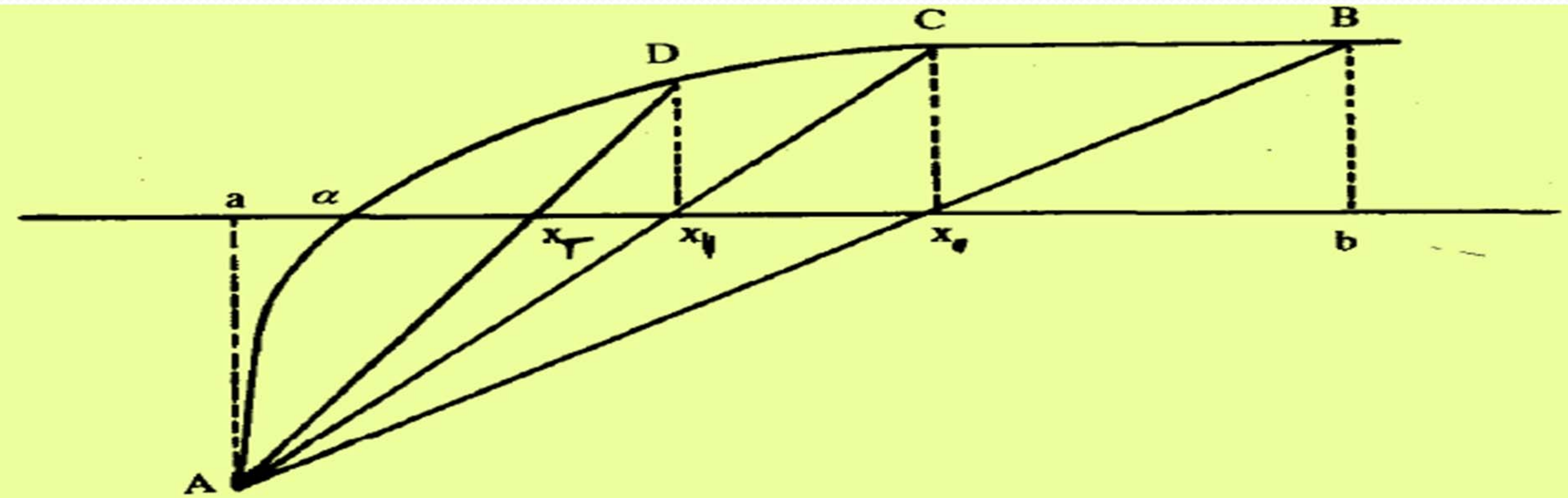


برای پیدا کردن فرمول جبری روش نابجایی تنها کافی است که ابتدا معادله خط گذرنده از نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ را یافته و سپس ریشه خط مذکور (یعنی محل تلاقی آن خط با محور x) را بیابیم و آن را x_0 یعنی تقریب اول به دست آمده از روش، نامگذاری نماییم. بدین منظور داریم:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \Rightarrow 0 - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_0 - a) \Rightarrow x_0 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

و با ادامه این فرآیند تکراری سایر اعضای دنباله حاصل از این روش ساخته خواهد شد.

باید توجه داشت که روش نابجایی هم مانند روش دوبخشی یک روش همیشه همگراست، یعنی تضمین همگرایی دارد و عموما از روش دوبخشی، سریعتر می‌باشد. (البته در حالتی که x_iها یعنی جملات دنباله ساخته شده توسط این روش همگی در یک طرف ریشه α قرار گرفته باشند، این روش از روش دوبخشی کندتر خواهد بود. به شکل زیر توجه شود)



البته پیچیدگی محاسباتی این روش نسبت به روش دوبخشی بیشتر است. به این معنا که عملیات محاسباتی با این روش از روش دوبخشی بیشتر خواهد بود.

مثال) تقریبی از ریشه معادله $f(x) = 3xe^x - 1 = 0$ را که در بازه $(0,1)$ قرار گرفته به کمک روش نابجایی طوری بیابید که $\left|f(x_n)\right| \le 0.01$ باشد. (محاسبات تا ۴ رقم بعد از اعشار باشد)

حل: در این معادله، $f(0) = -1 < 0$ و $f(1) = 7.1548 > 0$ می‌باشد. لذا شرایط قضیه بولتزانو فراهم است. اکنون چنانچه $A\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1\\7.1548\end{vmatrix}$ فرض شوند، بنابر رابطه $x_0 = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$ ، اولین تقریب از ریشه معادله فوق به کمک روش نابجایی عبارت است از:

$$x_0 = \frac{0 \times 7.1548 - 1 \times (-1)}{7.1548 - (-1)} = 0.1226 \Rightarrow f(0.1226) = -0.5842 \quad \& \quad \left|f(x_0)\right| > 0.01$$

لذا شرط توقف برآورده نشده و الگوریتم باید ادامه یابد. اکنون با توجه به اینکه $f(0.1226) = -0.5842 < 0$ لذا ریشه در بازه $(0.1226,1)$ قرار دارد و با یک فرآیند تکراری مشابه، برای x_1 خواهیم داشت:

$$x_1 = \frac{x_0 f(b) - bf(x_0)}{f(b) - f(x_0)} = \frac{0.1226 \times 7.1548 - 1 \times (-0.5842)}{7.1548 - (-0.5842)} = 0.1888 \Rightarrow f(0.1888) = -0.3159$$

پس باز هم شرط توقف برقرار نیست و الگوریتم باید ادامه یابد و با توجه به منفی بودن $f(0.1888)$ ، می‌توان نتیجه گرفت که ریشه در بازه $(0.1888,1)$ قرار دارد و داریم:

$$x_2 = \frac{0.1888 \times 7.1548 + 0.3159}{7.1548 + 0.3159} = 0.2231 \Rightarrow f(0.2231) = -0.1634$$

و با ادامه این فرآیند، ریشه در بازه $(0.2231,1)$ قرار گرفته و داریم:

$$x_3 = \frac{0.2231 \times 7.1548 + 0.1634}{7.1548 + 0.1634} = 0.2404 \Rightarrow f(0.2404) = -0.0828$$

و چون هنوز شرط توقف برآورده نشده، لذا این بار ریشه در بازه $(0.2404,1)$ قرار می‌گیرد و داریم:

$$x_4 = \frac{0.2404 \times 7.1548 + 0.0828}{7.1548 + 0.0828} = 0.2491 \Rightarrow f(0.2491) = -0.0413$$

و با برآورده نشدن شرط توقف، و قرار گرفتن ریشه در بازه $(0.2491,1)$ داریم:

$$x_5 = \frac{0.2491 \times 7.1548 + 0.0413}{7.1548 + 0.0413} = 0.2534 \Rightarrow f(0.2534) = -0.0206$$

و با ادامه این فرآیند و قرار گرفتن ریشه در بازه $(0.2534,1)$:

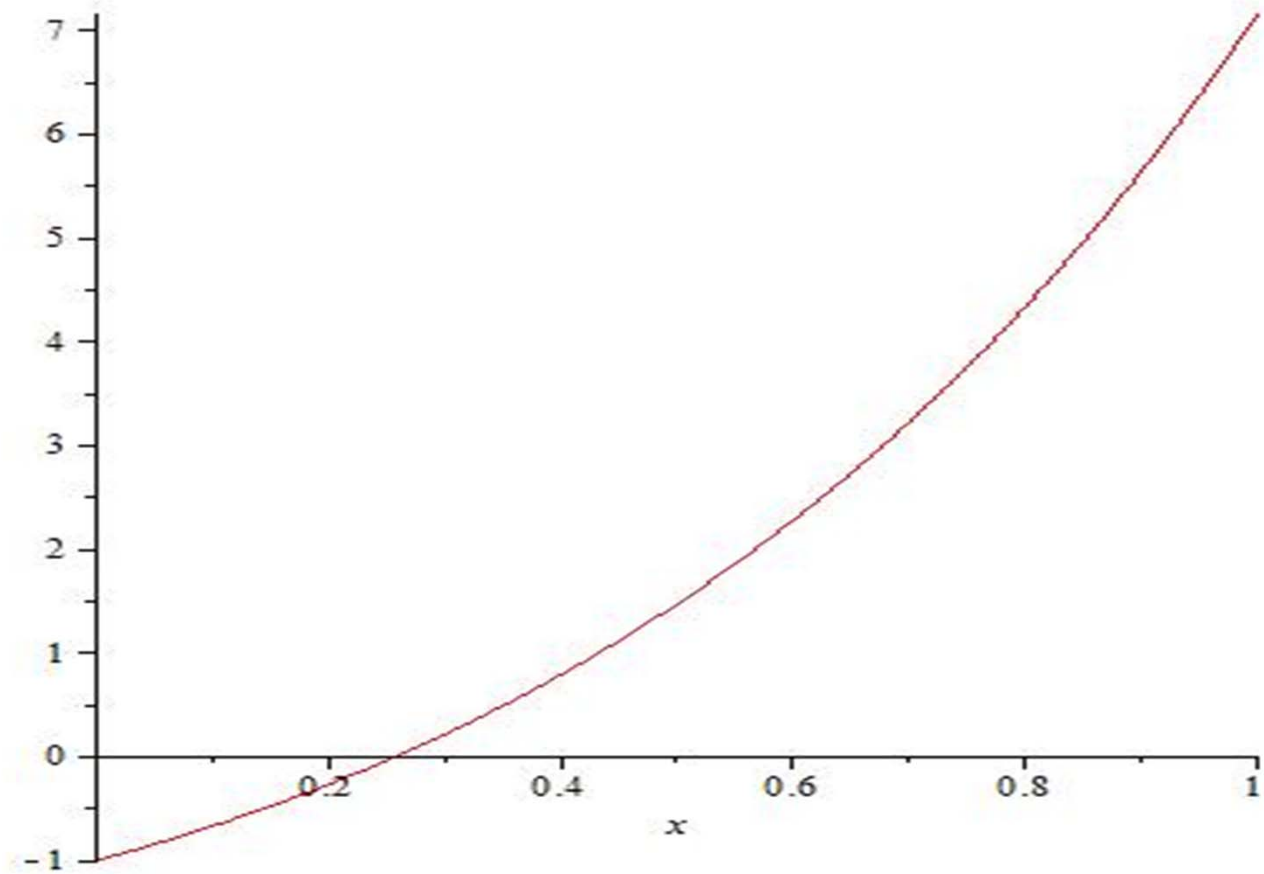
$$x_6 = \frac{0.2534 \times 7.1548 + 0.0206}{7.1548 + 0.0206} = 0.2555 \Rightarrow f(0.2555) = -0.0104$$

و این بار با توجه به برآورده نشدن شرط توقف و قرار گرفتن ریشه در بازه $(0.2555,1)$ داریم:

$$x_7 = \frac{0.2555 \times 7.1548 + 0.0104}{7.1548 + 0.0104} = 0.2566 \Rightarrow f(0.2566) = -0.0050$$

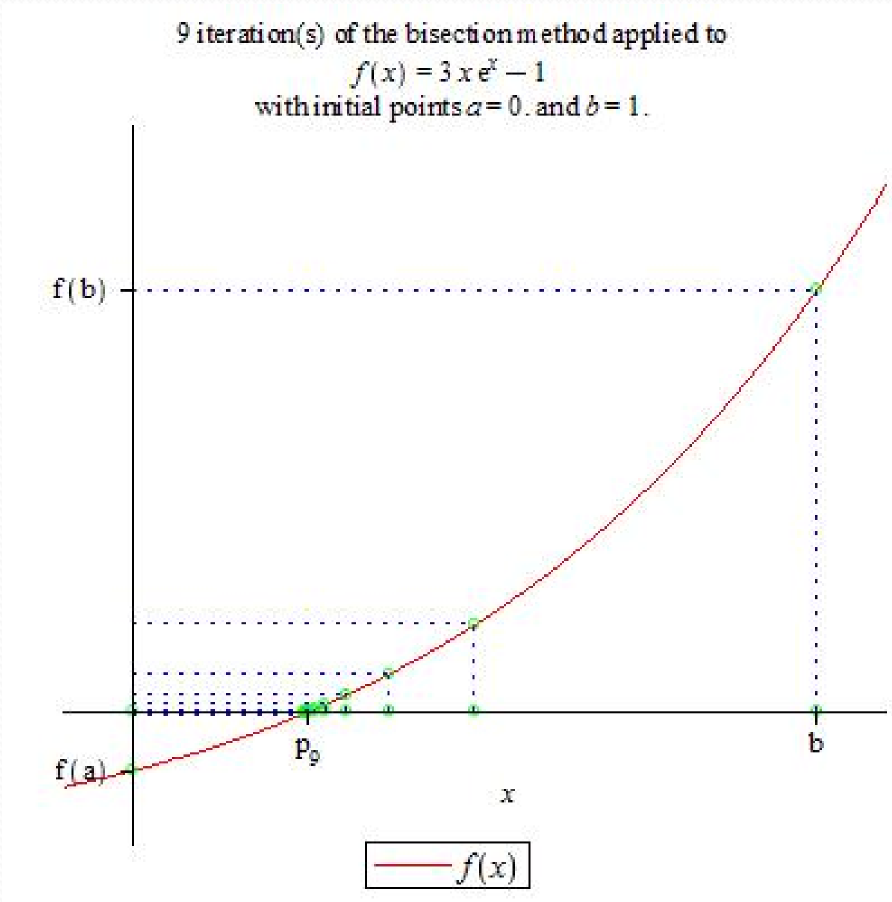
اکنون با توجه به اینکه $\left|f(0.2566)\right| = \left|-0.0050\right| \leq 0.01$، لذا شرط توقف برآورده شده و در همین جا الگوریتم پایان یافته و جواب تقریبی $\alpha \simeq 0.2566$ به عنوان تقریبی از جواب واقعی مساله گزارش می‌گردد.

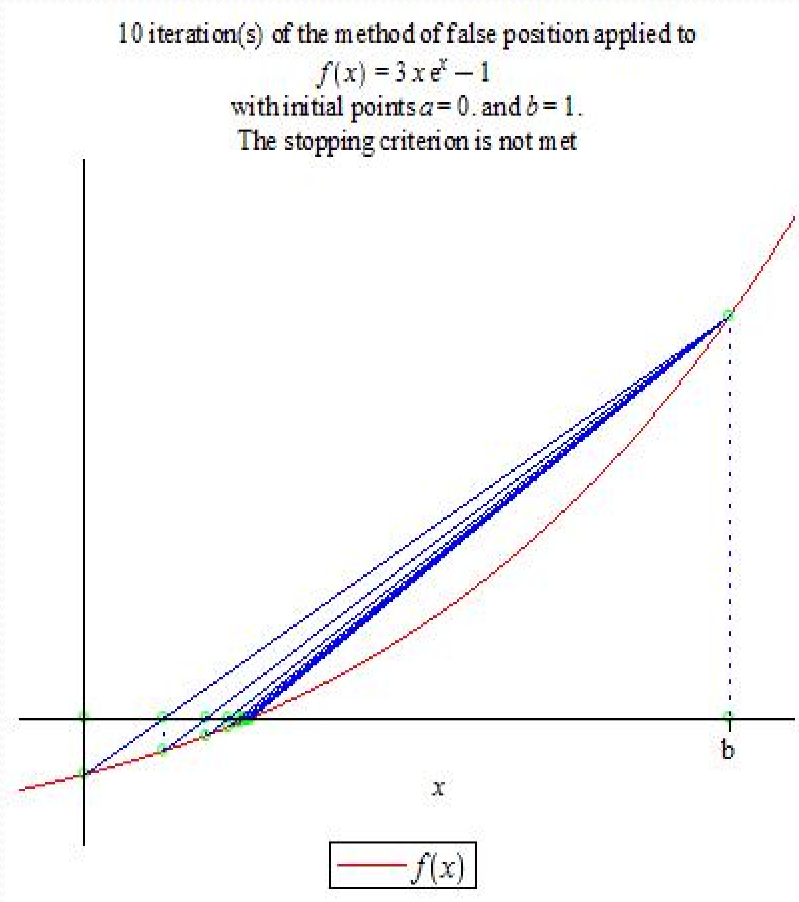
چنانچه در این مساله نمودار تابع $f(x) = 3xe^x - 1$ را در بازه $(0,1)$ رسم کنیم، متوجه کند بودن روش نابجایی در این مثال خواهیم شد. همانگونه که از شکل پیداست، تمامی خطوط واصل در طرف چپ ریشه واقعی مساله قرار می‌گیرند و همین موضوع سبب کندی روش نابجایی خواهد شد.



تفاوت استراتژی بین دو روش دوبخشی و نابجایی در ساخت دنباله به لحاظ هندسی، در مساله

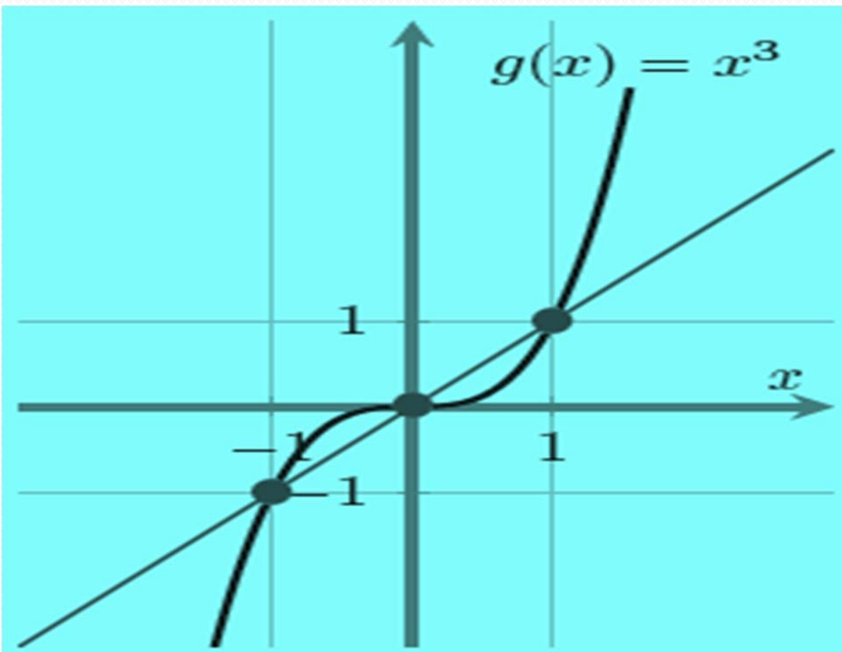
$$f(x) = 3xe^x - 1 = 0$$

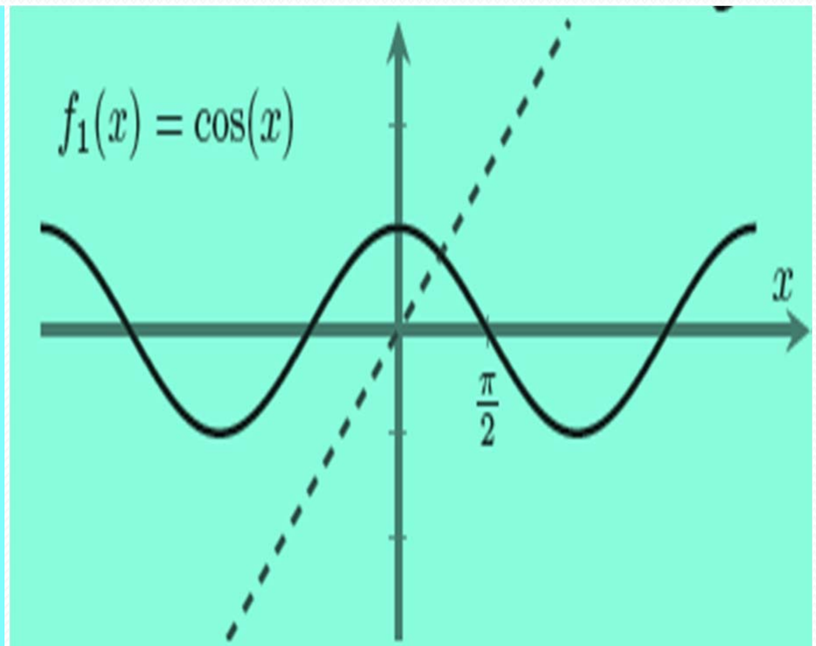




۳- روش نقطه ثابت (Fixed Point Method): که گاهی روش تکرار ساده یا روش تکرار تابعی هم نامیده می‌شود. قبل از بیان روش، ابتدا تعریف **نقطه ثابت** را از ریاضی عمومی، مرور می‌کنیم:

تعریف: نقطه ثابت یک منحنی: نقطه $x = \alpha$ را نقطه ثابت منحنی $y = f(x)$ می‌نامند، هرگاه: $f(\alpha) = \alpha$ باشد. به لحاظ هندسی نقطه ثابت یک منحنی، محل برخورد آن منحنی با نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط $y = x$ است. لازم به ذکر است که ممکن است یک منحنی دارای یک نقطه ثابت، بیش از یک نقطه ثابت و یا حتی فاقد نقطه ثابت باشد.





در روش نقطه ثابت و برای یافتن ریشه α از معادله $f(x) = 0$، ابتدا با دستکاریهایی روی ضابطه این معادله، آن را به شکل یک $x = g(x)$ در می‌آوریم به نحوی که α ریشه هر دو معادله باشد. به عبارت دیگر:

$$\big(f(\alpha) = 0\big) \equiv \big(\alpha = g(\alpha)\big)$$

اکنون مانند همه‌ی روش‌های عددی که تاکنون گفتیم، کار را با یک تقریب اولیه یا حدس اولیه برای α آغاز کرده و آن تقریب اولیه را x_0 می‌نامیم. لذا $\alpha \simeq x_0$ اولین تقریب برای α یا اولین عضو از اعضای دنباله ساخته شده توسط روش نقطه ثابت خواهد بود. اکنون برای ساخت سایر اعضای این دنباله به شیوه زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) \\ x_2 &= g(x_1) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= g(x_n) \end{aligned}$$

فرمول بازگشتی روش نقطه ثابت

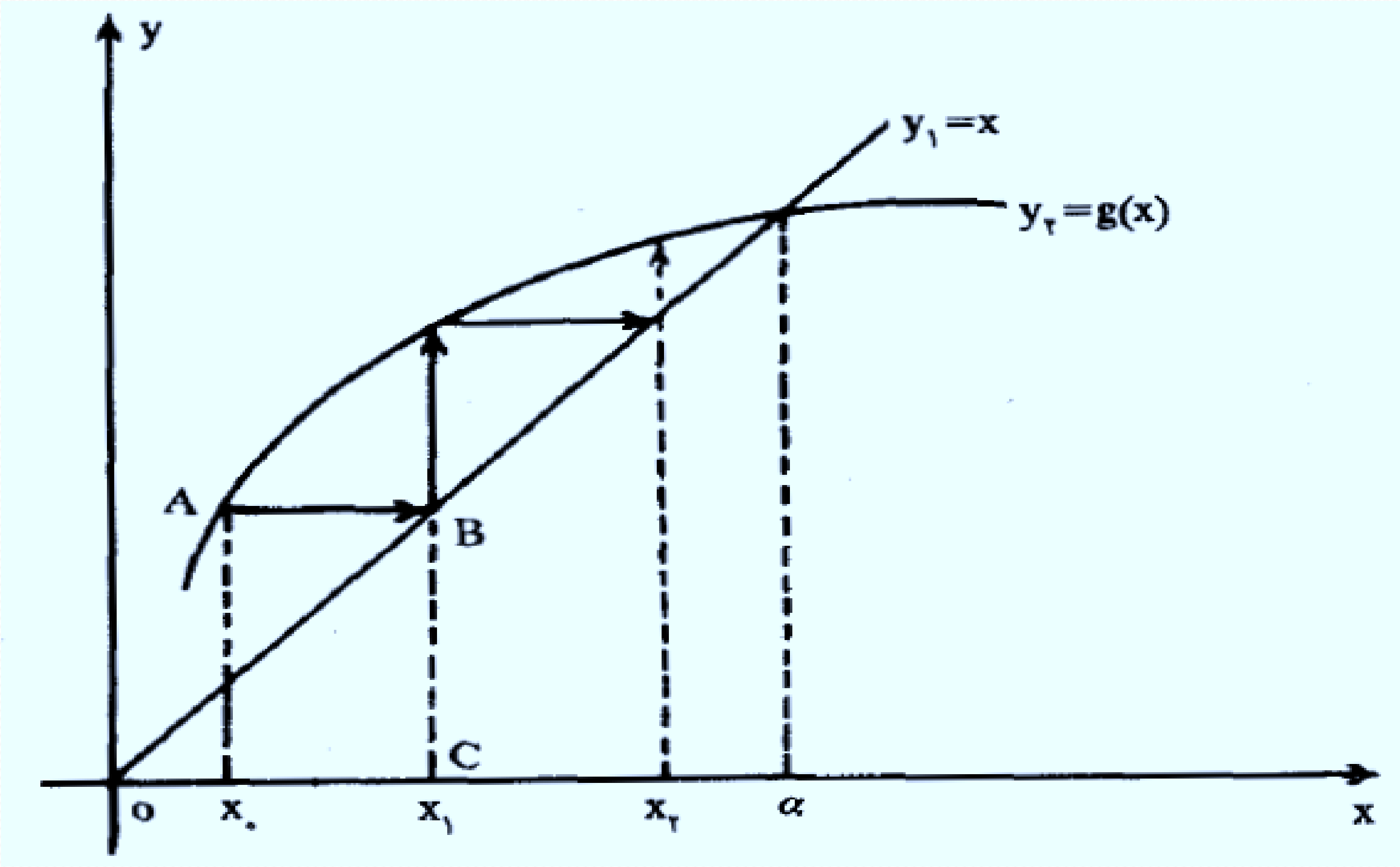
اکنون در مورد دنباله ساخته شده توسط این روش، سوالات اساسی زیر مطرح است:

الف) آیا دنبالهٔ $\{x_n\}$ همواره، یعنی به ازای هر انتخاب $g(x)$ و x_0، همگراست؟

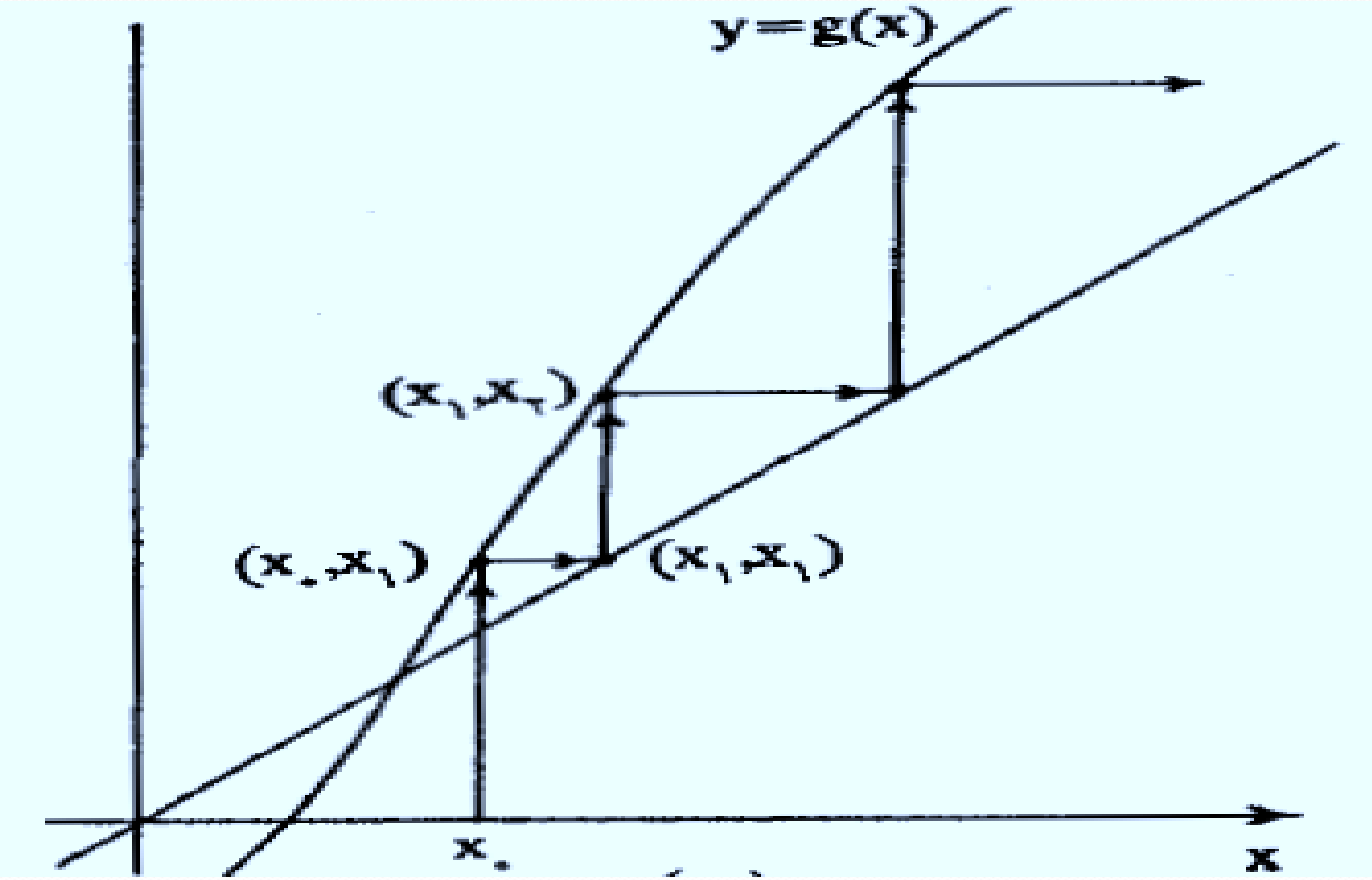
ب) آیا همگرایی $\{x_n\}$ به انتخاب $g(x)$ بستگی دارد یا x_0 یا هر دو؟

ج) اگر $\{x_n\}$ همگرا باشد سرعت همگرایی به چه چیزی بستگی دارد؟

تعبیر هندسی روش نقطه ثابت (در صورت موفقیت یا همگرایی)



تعبیر هندسی روش نقطه ثابت (در صورت شکست یا واگرایی)



مثال) معادله $x^2+x-1=0$ را که دارای ریشه‌ای مثبت به صورت $\alpha \simeq 0.6180$ تا چهار رقم بعد از اعشار می‌باشد را در نظر بگیریم. فرض کنیم پیدا کردن این ریشه به کمک روش نقطه ثابت مد نظر باشد. می‌دانیم که امکان نوشتن این معادله به شکل یک $x=g(x)$، به طرق مختلف در این مساله فراهم است. به عنوان نمونه، چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم: (گر چه ممکن است حالات متعدد دیگری نیز فراهم باشد)

$$x = ۱ - x^۲ = g_۱(x).$$

$$x = \sqrt{۱ - x} = g_۲(x).$$

$$x = \frac{۱}{x+۱} = g_۳(x)$$

$$x = \frac{x^2+1}{2x+1} = g_4(x)$$

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2$$

$$x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n + 1}$$

$$x_0 = 0.5$$

x_n	$g_1(x)=1-x^2$	$g_2(x)=\sqrt{1-x}$	$g_3(x)=\frac{1}{1+x}$	$g_4(x)=\frac{x^2+1}{2x+1}$
x_0	۰/۵	۰/۵	۰/۵	۰/۵
x_1	۰/۷۵	۰/۷۰۷۱	۰/۶۶۶۷	۰/۶۲۵
x_2	۰/۴۳۷۵	۰/۵۴۱۲	۰/۶	۰/۶۱۸۱
x_3	۰/۸۰۸۶	۰/۶۷۷۴	۰/۶۲۵	۰/۶۱۸۰
x_4	۰/۳۴۶۲	۰/۵۶۸۰	۰/۶۱۵۴	
x_5	۰/۸۸۰۲	۰/۶۵۷۳	۰/۶۱۹۰	
x_6	۰/۲۲۵۲	۰/۵۸۵۴	۰/۶۱۷۶	
x_7	۰/۹۴۹۲	۰/۶۴۳۹	۰/۶۱۸۲	
x_8	۰/۰۹۹۰	۰/۵۹۶۸	۰/۶۱۸۰	
$\vdots$		$\vdots$		
x_{34}		۰/۶۱۸۰		

توضیحات مربوط به جدول

الف) وقتی $x = 1 - x^2 = g_1(x)$ جملات دنبالهٔ $\{x_n\}$ از رابطهٔ زیر حساب می‌شوند

$$x_{n+1} = 1 - x_n^2$$

مشاهده می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 1$$

بنابراین همگرایی روش نقطه ثابت کاملا به انتخاب تابع g بستگی دارد

ب) برای $g_2(x) = \sqrt{1-x} = x$ مشاهده می‌شود که همگرایی بسیار کند است. پس از ۳۴ تکرار به تقریب ۰/۶۱۸۰ رسیده‌ایم.

برای همین $g_2(x)$ اگر $x_0 = 0$ یا $x_0 = 1$ دنباله‌های زیر حاصل می‌شوند که هر دو واگرا هستند.

$x_0 = 1$	$x_0 = 0$
$x_1 = 0$	$x_1 = 1$
$x_2 = 1$	$x_2 = 0$

بنابراین همگرایی روش نقطه ثابت کاملا به انتخاب x_0 نیز بستگی دارد

ج) با مقایسه دو ستون آخر که یکی بعد از ۹ تکرار و دیگری پس از ۴ تکرار به همگرایی رسیده، می‌توان به این نتیجه رسید که با توجه به این که هر دو دنباله با یک حدس اولیه یکسان کار خود را شروع کرده‌اند، لذا به نظر می‌رسد که سرعت همگرایی در روش نقطه ثابت به انتخاب تابع g بستگی داشته باشد.

قضیه ۱ـ۶ قضیه نقطه ثابت ـ فضیه شرایط کافی برای همگرای روش تکرار ساده

اگر g تابعی با شرایط زیر باشد

(۱) تابع g در بازه $[a,b]$ پیوسته و g' در (a,b) موجود باشد

(۲) تابع g بازه $[a,b]$ را به توی خودش ببرد. یعنی به ازای هر $x \in [a,b]$، آن‌گاه $g(x) \in [a,b]$.

(۳) عدد حقیقی $1 > \rho$ موجود باشد که به‌ازای هر $x \in (a,b)$ آن‌گاه $|\, g'(x)\, | \leq \rho < 1$

در آن صورت

الف) تابع g دارای یک نقطه ثابت در $[a,b]$ است. و همچنین، این نقطه ثابت منحصر به فرد است.

ب) روش تکرار ساده به ازای هر حدس اولیه $x_0 \in (a,b)$ به نقطه ثابت همگرا می‌گردد.

اثبات: به کمک قضیه مقدار میانگین وجود دارد یک θ_i بین x_i و α به نحوی که:

$$x_{i+1} - \alpha = g(x_i) - g(\alpha) = g'(\theta_i)(x_i - \alpha)$$

اکنون با قدر مطلق گرفتن از طرفین معادله فوق داریم:

$$\left|x_{i+1} - \alpha\right| = \left|g'(\theta_i)(x_i - \alpha)\right| = \left|g'(\theta_i)\right| \times \left|(x_i - \alpha)\right|$$

و با توجه به این که $\theta_i \in [a,b]$، لذا $\left|g'(\theta_i)\right| \leq \rho$ و در نتیجه:

$$\left|x_{i+1} - \alpha\right| \leq \rho\left|x_i - \alpha\right|$$

و لذا برای $i = 0,1,\ldots,n-1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
i &= 0: \quad 0 \leq \left|x_1 - \alpha\right| \leq \rho\left|x_0 - \alpha\right| \\
i &= 1: \quad 0 \leq \left|x_2 - \alpha\right| \leq \rho\left|x_1 - \alpha\right| \leq \rho^2\left|x_0 - \alpha\right| \\
&\vdots \\
i &= n-1: \quad 0 \leq \left|x_n - \alpha\right| \leq \ldots \leq \rho^n\left|x_0 - \alpha\right|
\end{aligned}$$

از طرفی چون $0 \leq \rho < 1$، پس $\lim_{n \to \infty} \rho^n = 0$ و در نتیجه با استفاده از قضیه ساندویچ (فشردگی) می‌توان به سادگی نشان داد که:

$$\lim_{n \to \infty} \left|x_n - \alpha\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$$

در ضمن همانگونه که در اثبات مشخص است، سرعت همگرایی دنباله $\{x_n\}$ ساخته شده در این روش به سمت α تقریبا متناسب با سرعت همگرایی دنباله $\{\rho^n\}$ به سمت 0 است. هر چه این ρ به عدد 0 نزدیکتر باشد، سرعت همگرایی بیشتر و هر چه به عدد 1 نزدیکتر باشد، سرعت همگرایی پایینتر خواهد بود.

تذکر (مهم): باید توجه داشت که قضیه همگرایی روش نقطه ثابت، شرایطی کافی برای همگرایی است و شرایطی لازم محسوب نمی‌گردد. به بیان دیگر، عکس قضیه گفته شده، الزاما برقرار نمی‌باشد.

مثال) به کمک روش نقطه ثابت تقریبی از ریشه معادله $3xe^{x} = 1$ را که در بازه $(0,1)$ قرار گرفته، محاسبه نمایید. (محاسبات تا چهار رقم بعد از اعشار باشد)

حل: ابتدا باید یک تابع g مناسب قضیه بیابیم. مثلا ابتدا با نوشتن $x = \frac{e^{-x}}{3}$، تابع $g(x) = \frac{e^{-x}}{3}$ را در شرایط قضیه همگرایی، می‌آزماییم. لذا داریم:

$$0 < x < 1 \Rightarrow -1 < -x < 0 \Rightarrow \frac{e^{-1}}{3} < \frac{e^{-x}}{3} < \frac{e^{0}}{3} = \frac{1}{3}$$

بنابراین $g(x) \in (\frac{1}{3e}, \frac{1}{3}) \subset (0,1)$ و لذا در این تابع به ازای هر $x \in (0,1)$، $g(x) \in (0,1)$ خواهد بود. پس یکی از ۲ شرط مناسب بودن g برقرار است. همچنین به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$\left|g'(x)\right| = \left|-\frac{e^{-x}}{3}\right| = \frac{e^{-x}}{3} < \frac{e^{0}}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

و در نتیجه شرط دوم مناسب بودن g نیز برقرار است. اکنون قرار می‌دهیم:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{e^{-x_n}}{3}$$

و تنها کافی است با یک نقطه درونی بازه $(0,1)$ به عنوان حدس اولیه مناسب شروع نماییم. به عنوان مثال با شروع از $x_0 = 0.5$ خواهیم داشت:

$$x_۱ = ۰/۲۰۲۲ \; (۴\,D)$$

$$x_۲ = ۰/۲۷۲۳ \; (۴\,D)$$

$$x_۳ = ۰/۲۵۳۹ \; (۴\,D)$$

$$x_۴ = ۰/۲۵۸۶ \; (۴\,D)$$

$$x_۵ = ۰/۲۵۷۴ \; (۴\,D)$$

$$x_۶ = ۰/۲۵۷۷ \; (۴\,D)$$

$$x_۷ = ۰/۲۵۷۶ \; (۴\,D)$$

$$x_۸ = ۰/۲۵۷۶ \; (۴\,D)$$

مرتبه همگرایی یک دنباله

تاکنون برای آهنگ همگرایی یک دنباله از کلمات کند و تند یا سریع استفاده کرده‌ایم. اما، به راستی معیاری برای سرعت میل کردن جملات یک دنباله به حد آن وجود دارد؟ در اینجا معیاری موسوم به مرتبهٔ همگرایی تعریف می‌کنیم که توسط آن نه فقط اندازه‌ای برای سرعت همگرایی به‌دست می‌آید بلکه توسط آن می‌توان سرعت همگرایی دنباله‌های متفاوت را با هم مقایسه کرد و در نتیجه دو روش را از این نظر مورد مقایسه قرار داد.

فرض‌کنید دنبالهٔ $\{x_n\}$ به عدد α همگرا باشد و اعداد ثابت، حقیقی و مثبت p و C چنان باشندکه

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}\right| = C$$

در این صورت، p را مرتبهٔ همگرایی دنبالهٔ $\{x_n\}$ به α نامند. گاهی گفته می‌شود که روشی که $\{x_n\}$ها از آن به‌دست می‌آیند از مرتبهٔ p است.

به راحتی می‌توان مشاهده کرد که هرچه p بزرگتر باشد سرعت همگرایی بیشتر است.

تذکر: مرتبه همگرایی p، هر عدد مثبت حقیقی می‌تواند باشد. برخی از معروفترین مرتبه‌های همگرایی عبارتند از:

مرتبه همگرایی p:

$p = 1$ ⟵ همگرایی خطی

$1 < p < 2$ ⟵ همگرایی فوق خطی یا زیر خطی

$p = 2$ ⟵ همگرایی مربعی

تعبیر عددی مرتبه همگرایی

در اینجا قصد داریم تا به عنوان نمونه مرتبه همگرایی $p = 2$ یعنی همگرایی مربعی را تعبیر عددی نماییم.
طبق تعریف، معنای عددی تعریف

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} \right| = C$$

برای $p = 2$، بدین معناست که برای n به اندازه کافی بزرگ، داریم:

$$|x_{n+1} - \alpha| \simeq C\,|x_n - \alpha|^2$$

لذا چنانچه مثلا $|x_1 - \alpha|$ چیزی در حدود 0.1 باشد، آنگاه این مرتبه همگرایی $p = 2$ بدین معناست که:

$|x_2 - \alpha|$ در حدود ضریبی از $0.01 = (0.1)^2$، $|x_3 - \alpha|$ در حدود ضریبی از 10^{-4}، $|x_4 - \alpha|$ در حدود ضریبی از 10^{-8} و در نهایت $|x_5 - \alpha|$ در حدود ضریبی از 10^{-16} می‌باشد و این تلورانس (دقت) آخر یعنی ضریبی از عدد 10^{-16} بالاترین دقت ممکن در استاندارد IEEE754 در یک ماشین با فرمت Binary64 است.

قضیه: اگر $\{x_n\}$ از روش تکرار ساده به‌دست آمده باشد، و به عدد α که ریشهٔ $x = g(x)$ است همگرا باشد، و $g'(\alpha) \neq 0$ آن‌گاه مرتبهٔ همگرایی $\{x_n\}$ یک است.

برهان

باید ثابت کنیم

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha}\right| = C \neq 0$$

برای این منظور از بسط تیلر تابع g در مجاورت α استفاده می‌کنیم

$$g(x_n) = g(\alpha) + (x_n - \alpha) g'(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^2}{2} g''(\eta_n)$$

که در آن η_n بین x_n و α است.

با توجه به این‌که

$$g(\alpha) = \alpha \quad , \quad g(x_n) = x_{n+1}$$

$$x_{n+1} = \alpha + (x_n - \alpha) g'(\alpha) + \frac{(x_n - \alpha)^2}{2} g''(\eta_n)$$

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} = g'(\alpha) + \frac{(x_n-\alpha)}{2} g''(\eta_n)$$

با توجه به این‌که η_n بین x_n و α است داریم $|x_n - \alpha| \leq |\eta_n - \alpha| \leq 0$ بنابراین، وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند، $|x_n - \alpha|$ به صفر میل می‌کند.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - \alpha)}{2} g''(\eta_n) = \frac{0}{2} \times g''(\alpha) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = g'(\alpha)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right| = |g'(\alpha)|$$

و چون طبق فرض $g'(\alpha) \neq 0$ ، لذا حکم اثبات خواهد شد

قضیه: با همان مفروضات قضیه قبل، منتها چنانچه $g'(\alpha) = 0$ باشد، مرتبه همگرایی روش نقطه ثابت حداقل برابر 2 خواهد بود.

برهان: با روندی مشابه با اثبات قضیه قبل، چنانچه $g'(\alpha) = 0$ باشد، آن گاه در بسط تیلور مربوطه خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{(x_n - \alpha)^2}{2} g''(\eta_n)$$

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{g''(\eta_n)}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} \right| = \frac{|g''(\alpha)|}{2}$$

اکنون همه چیز به $g''(\alpha)$ بستگی دارد. چنانچه:

- $g''(\alpha) \neq 0$ آنگاه مرتبه همگرایی دقیقا برابر 2 است
- $g''(\alpha) = 0$ آنگاه مرتبه همگرایی حداقل برابر 3 است

مثال) فرض کنید $k > 1$ عددی صحیح و $a > 0$ عددی حقیقی باشد. ابتدا تعیین کنید دنباله $x_{n+1} = \dfrac{x_n^k + kax_n}{kx_n^{k-1} + a}, \; n = 0,1,\ldots$ در صورت همگرایی به چه عددی همگرا خواهد شد و سپس مقدار k را طوری بیابید که مرتبه همگرایی حداقل دو باشد.

حل: با توجه به سمت راست فرمول بازگشتی می‌توان $g(x) = \dfrac{x^k + kax}{kx^{k-1} + a}$ را نتیجه گرفت. از آنجایی که فرمول بازگشتی روش نقطه ثابت در صورت همگرایی به نقطه ثابت g همگرا می‌گردد، لذا داریم:

$$g(x) = x \Rightarrow \frac{x^k + kax}{kx^{k-1} + a} = x \Rightarrow kx^k + ax = x^k + kax \Rightarrow x = \sqrt[k-1]{a} = a^{\frac{1}{k-1}}$$

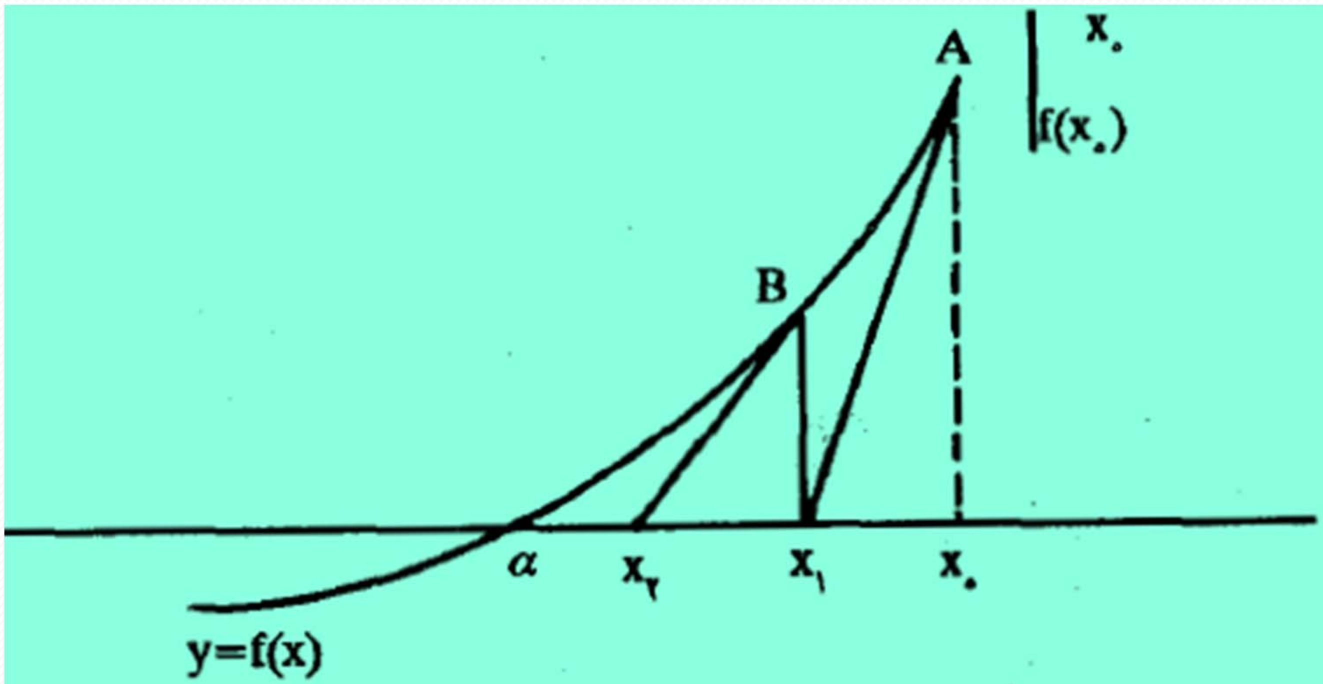
اکنون برای تعیین مقدار k طوری که مرتبه همگرایی حداقل دو باشد، باید داشته باشیم:

$$g'(\sqrt[k-1]{a}) = 0 \Rightarrow \frac{(kx^{k-1} + ka) \times (kx^{k-1} + a) - k(k-1)x^{k-2}(x^k + kax)}{(kx^{k-1} + a)^2}\Big|_{x=\sqrt[k-1]{a}} = 0$$

پس از ساده سازی رابطه فوق در نهایت، $k = 3$ خواهد بود.

۴- روش نیوتن-رافسون (Newton-Raphson Method): که گاهی به اختصار روش نیوتن نامیده می‌شود.

تعبیر هندسی روش نیوتن



نحوه یافتن فرمول بازگشتی روش نیوتن

برای پیدا کردن فرمول بازگشتی روش نیوتن، کافی است تا ابتدا معادله خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ را در $A\left|\begin{matrix} x_0 \\ f(x_0) \end{matrix}\right.$ یافته و سپس ریشه‌ی خط مماس مذکور را به عنوان تقریب دوم برای α پیدا نماییم. لذا داریم:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

محل تلاقی این خط با محور x همان ریشه‌ی خط مذکور است که آن را با x_1 نشان می‌دهیم و برای پیدا کردن آن داریم:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

و با استخراج x_1 از رابطه فوق خواهیم داشت:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

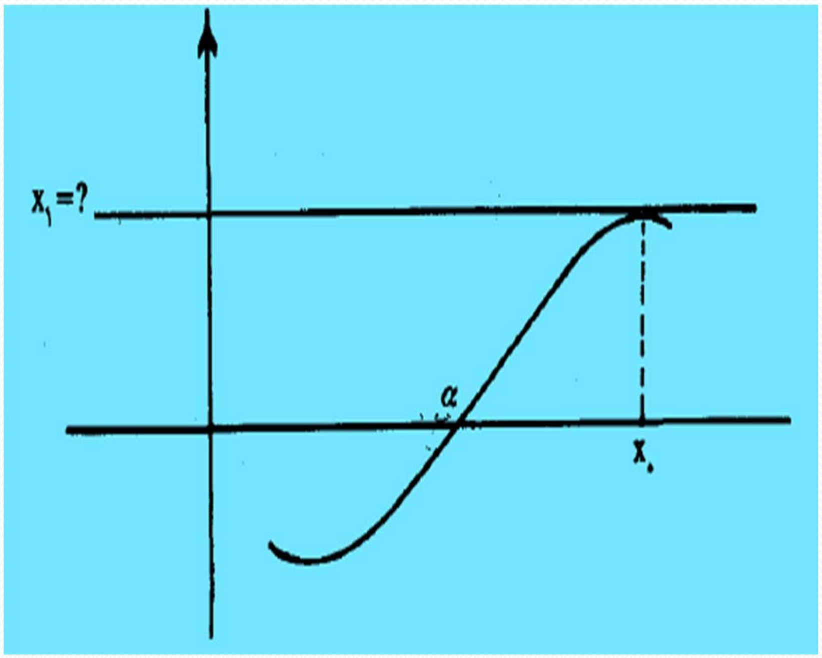
با ادامه این روند:

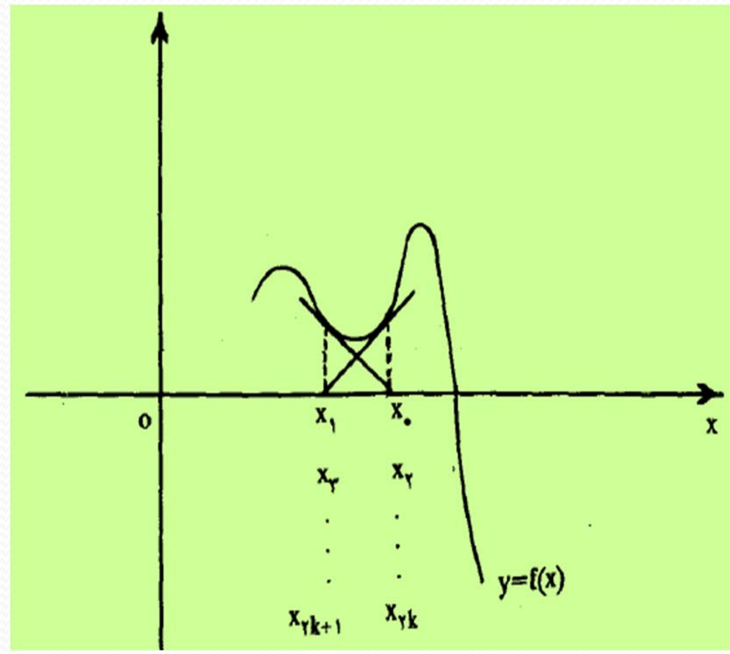
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

با نگاه به فرمول بازگشتی روش نیوتن می‌توان دریافت که این فرمول بازگشتی به نوعی یک حالت خاص از فرمول بازگشتی روش نقطه ثابت یعنی $x_{n+1} = g(x_n)$ است که در آن:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

اشکالات روش نیوتن





بنابراین روش نیوتن به شدت به انتخاب تقریب اولیه (حدس اولیه) حساس است.

مزیت روش نیوتن

مثال) تقریبی از عدد اصم $\sqrt{2}$ را به کمک روش نیوتن بیابید.

حل: می‌دانیم که $\sqrt{2}$ ریشه مثبت معادله $f(x) = x^2 - 2 = 0$ است. با تشکیل فرمول بازگشتی روش نیوتن:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

و با شروع از حدس اولیه $x_0 = 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1.5000000000000000000000\\
x_2 &= 1.4166666666666666666666\\
x_3 &= 1.4142156862745098039215 69\\
x_4 &= 1.4142135623746899106262 96\\
x_5 &= 1.4142135623730950488016 90\\
x_6 &= 1.4142135623730950488016 89\\
x_7 &= 1.4142135623730950488016 89
\end{aligned}$$

مرتبه همگرایی روش نیوتن

قبلا بیان شد که روش نیوتن یک روش سریع برای ریشه‌یابی است. در اینجا می‌خواهیم این روش را از دیدگاه مرتبه همگرایی مطالعه کنیم. در روش نیوتن برای یافتن ریشه $f(x)=0$ روش تکرار ساده و تابع $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ در نظر گرفته می‌شود. فرض کنیم دنباله روش نیوتن به α همگرا شود. داریم:

$$g'(x)=1-\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

اکنون با توجه به این که $f(\alpha)=0$ است می‌توان نتیجه گرفت که:

$$g'(\alpha)=1-\frac{(f'(\alpha))^2}{(f'(\alpha))^2}$$

و چنانچه، $f'(\alpha)\neq 0$ باشد (که در چنین حالتی، ریشه α یک ریشه ساده معادله $f(x)=0$ محسوب می‌شود) آن گاه نتیجه می‌گیریم که: $g'(\alpha)=0$ و لذا طبق قضایای گفته شده، مرتبه همگرایی روش نیوتن حداقل برابر 2 خواهد بود.

تمرین) در چه شرایطی مرتبه همگرایی روش نیوتن، در صورت همگرایی، دقیقا برابر دو است.

۵- روش وتری (Secant Method): یکی از تفاوتهایی که فرمول بازگشتی روش نیوتن با سایر فرمول‌های عددی گفته شده تا کنون دارد این است که، در فرمول بازگشتی روش نیوتن نیاز به محاسبه تحلیلی (Analytical) مشتق تابع f نیز می‌باشد. گاهی از اوقات برای رهایی از این موضوع، مشتق به کار رفته در فرمول بازگشتی روش نیوتن را با رابطه زیر تقریب می‌زنند:

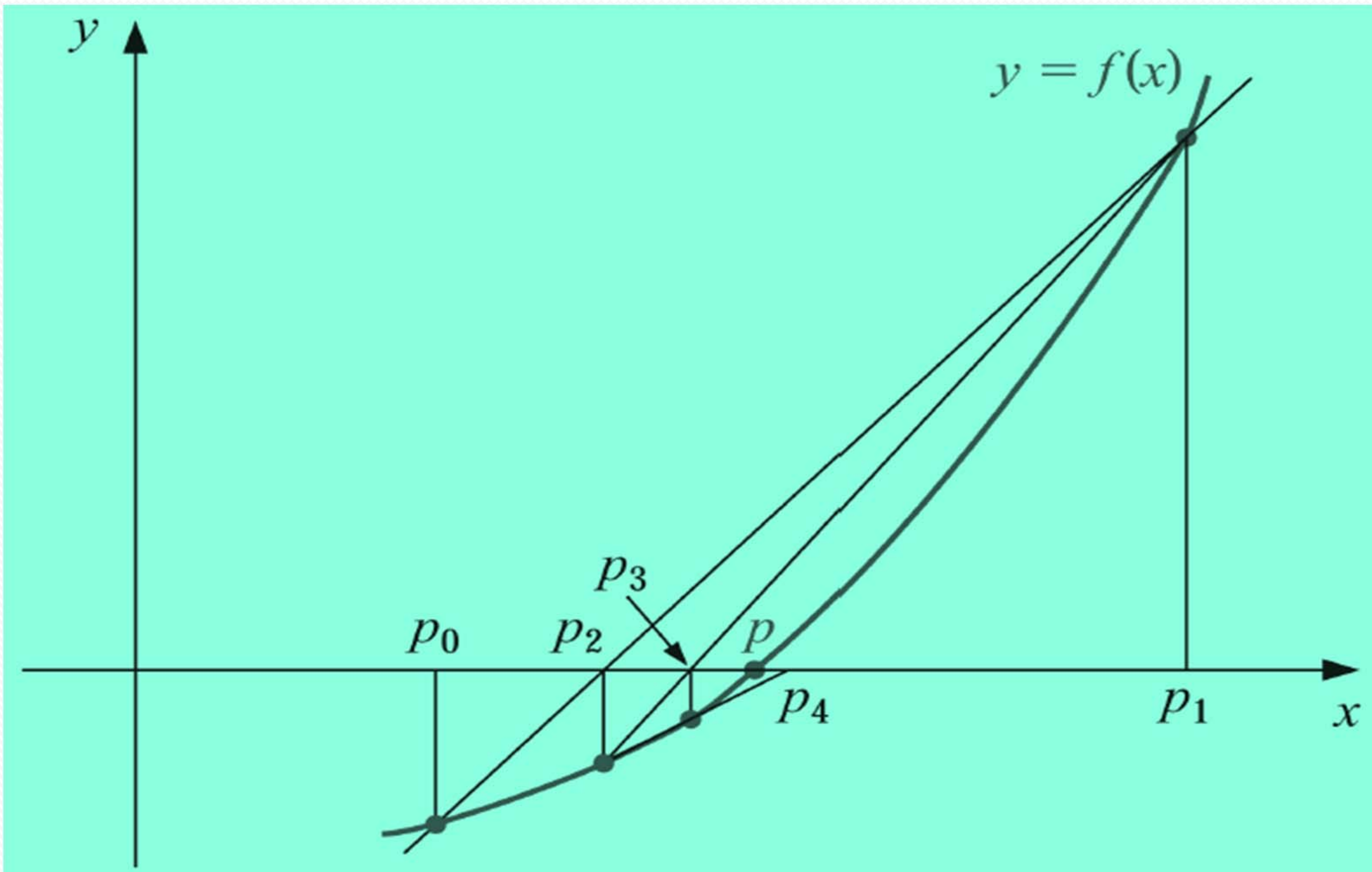
$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

چنانچه در فرمول روش نیوتن رابطه فوق جایگزین $f'(x_n)$ گردد، خواهیم داشت:

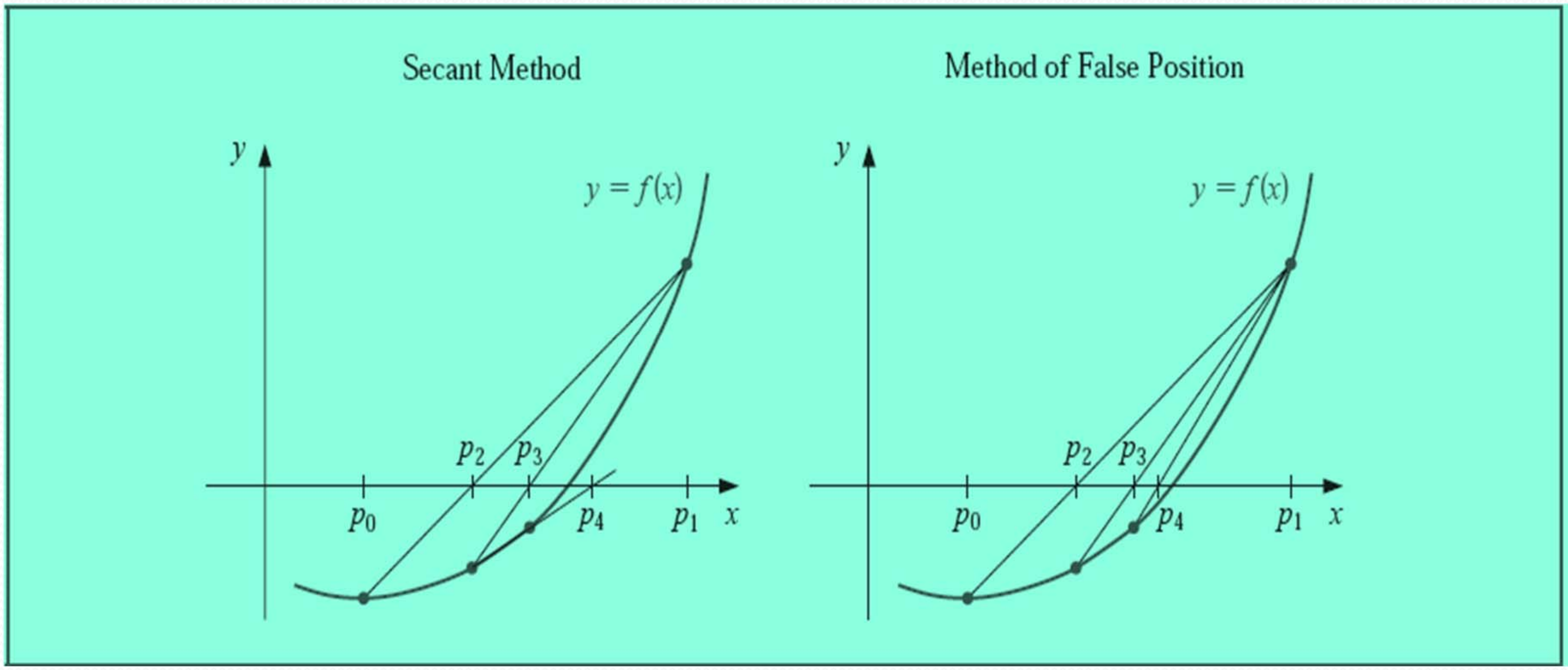
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

در فرمول بازگشتی فوق که به فرمول بازگشتی روش وتری معروف است، نیازی به محاسبه تحلیلی f' نیست، ولی در عوض این روش برای شروع نیاز به دو حدس اولیه x_0 و x_1 دارد.

تعبیرهندسی روش وتری



تفاوت روش نابجایی و روش وتری



مثال) ریشه معادله $x^6 - x - 1 = 0$ را به کمک روش وتری و با شروع از نقاط $x_0 = 2$ و $x_1 = 1$ بیابید.

he equation $f(x) \equiv x^6 - x - 1 = 0.$

n	x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$
0	2.0	61.0	
1	1.0	-1.0	-1.0
2	1.01612903	-9.15E-1	1.61E-2
3	1.19057777	6.57E-1	1.74E-1
4	1.11765583	-1.68E-1	-7.29E-2
5	1.113253155	-2.24E-2	-2.24E-2
6	1.13481681	9.54E-4	2.29E-3
7	1.13472365	-5.07E-6	-9.32E-5
8	1.13472414	-1.13E-9	4.92E-7

ریشه‌های تکراری

آنچه تاکنون راجع به همگرایی روش نیوتن گفتیم، بر اساس شرط $f'(\alpha) \neq 0$ استوار بوده است. اکنون سوالی که پیش می‌آید این است که اگر این شرط برقرار نباشد ولی دنباله $\{x_n\}$ ساخته شده توسط روش نیوتن همگرا باشد، در آن صورت مرتبه همگرایی (وضعیت سرعت همگرایی) روش نیوتن چگونه است؟ قبل از پاسخ، یک تعریف و بلافاصله بعد آن یک مثال می‌آوریم:

- اگر $f(\alpha) = 0$ و $f'(\alpha) \neq 0$، آن‌گاه α را یک ریشه ساده[۴] و یا ریشه مرتبه یک[۵] برای تابع f می‌نامیم.

- اگر $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ و $f''(\alpha) \neq 0$، آن‌گاه α را یک ریشه مضاعف[۶] و یا ریشه مرتبه دو[۷] برای تابع f می‌نامیم.

اگر $f(\alpha) = f'(\alpha) = f''(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$ و $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$، آن گاه α را ریشه تکراری مرتبه m تابع f می‌نامیم.

مثال) می‌دانیم که $\alpha = ۰$ ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = x - \sin x = ۰$ و علاوه بر این‌که $f(۰) = f'(۰) = f''(۰) = ۰$ داریم. یعنی، صفر ریشهٔ تکراری مرتبهٔ ۳ است. با فرض $x_۰ = ۰/۵$ چند جمله از روش نیوتن را حساب کنید.

داریم:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \sin x_n}{1 - \cos x_n}$$

و با فرض $x_0 = 0/5$ جملات به قرار زیر محاسبه می‌شوند:

$x_1 = 0/33197$ (5 D)

$x_2 = 0/22091$ (5 D)

$x_3 = 0/14717$ (5 D)

$x_4 = 0/09817$ (5 D)

$x_5 = 0/06547$ (5 D)

$x_6 = 0/04364$ (5 D)

$x_7 = 0/02909$ (5 D)

مشاهده می‌شود که سرعت همگرایی بسیار پایین است!! و علیرغم افتادن دنباله در مسیر همگرایی، روش نیوتن بسیار کند عمل نموده است.

قضیه: اگر α یک ریشهٔ $f(x) = 0$ باشد و $f'(\alpha) = 0$ و m مرتبهٔ تکرار α باشد و دنبالهٔ حاصل از روش نیوتن به α همگرا باشد آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = \frac{m-1}{m}$$

بنابر قضیه فوق، روش نیوتن در مواجهه با ریشه تکراری، در صورت همگرایی، دارای مرتبه همگرایی برابر یک خواهد شد.

اکنون سوال اینجاست که آیا می‌توان روش نیوتن را طوری تغییر داد تا حتی در مواجهه با ریشه تکراری، همان سرعت بالای همگرایی خود (مرتبه همگرایی حداقل 2) را مجددا به دست آورد؟

۶- روش نیوتن اصلاح شده (Modified Newton-Raphson Method):

قضیه: فرض کنیم $x = \alpha$ ریشه تکراری مرتبه m معادله $f(x) = 0$ باشد. در اینصورت هر یک از دنباله‌های ساخته شده توسط فرمول‌های بازگشتی زیر (موسوم به فرمول‌های بازگشتی روش نیوتن اصلاح شده) در صورت همگرایی، دارای مرتبه همگرایی حداقل 2 خواهند بود:

$$y_{n+1} = y_n - m\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}$$

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f^{(m-1)}(z_n)}{f^{(m)}(z_n)}$$

مثال) چنانچه معادله $f(x)=x-\sin(x)=0$ که دارای ریشه تکراری $\alpha=0$ و از مرتبه $m=3$ است را به کمک هر یک از فرمول‌های بازگشتی روش اصلاح شده نیوتنی و مثلا با همان $x_0=0.5$ حل کنیم، داریم:

$$y_{n+1}=y_n-m\frac{f(y_n)}{f'(y_n)}=y_n-3\frac{y_n-\sin(y_n)}{1-\cos(y_n)}\Rightarrow\begin{cases}y_0=0.5\\ y_1=-0.0042041815326707314\\ y_2=2.4769851395807\times10^{-9}\\ y_3=3.3988396909690223\times10^{-11}\end{cases}$$

$$z_{n+1}=z_n-\frac{f^{(m-1)}(z_n)}{f^{(m)}(z_n)}=z_n-\frac{\sin(z_n)}{\cos(z_n)}=z_n-\tan(z_n)\Rightarrow\begin{cases}z_0=0.5\\ z_1=-0.04630248984379051326\\ z_2=0.0000331180213263836793\\ z_3=-1.2107985436\times10^{-14}\end{cases}$$

یک تمرین چالشی) چنانچه دیدیم، می‌توان به کمک روش اصلاح شده نیوتنی، سرعت همگرایی بالای روش نیوتنی را در مواجهه با ریشه تکراری احیا نمود. همانطور که در هر دو فرمول بازگشتی روش نیوتنی اصلاح شده مشاهده می‌شود، هر دو فرمول بازگشتی محتاج به دانستن m یعنی مرتبه تکرار ریشه هستند. اکنون سوال اینجاست که در مسایلی که ریشه واقعی α در دسترس نباشد، این مرتبه تکرار m برای استفاده در فرمول‌های اصلاح شده چگونه تعیین می‌گردد؟!!

۸–۴ دستگاه معادلات غیرخطی

- فرض کنید، یک دستگاه معادلات غیرخطی عبارت است از k معادله جبری برحسب k متغیر مجهول به طوری که حداقل یکی از معادلات برحسب متغیرهای مجهول غیرخطی است.
- به عنوان نمونه، فرض کنیم که x و y متغیرهایی مجهول باشند، آن‌گاه دو معادله زیر تشکیل یک دستگاه غیرخطی می‌دهند

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y^2 = 1. \end{cases}$$

- البته دستگاه فوق را می‌توان به صورت تحلیلی حل نمود،
- اما مسلما هر دستگاه غیرخطی را نمی‌توان با روش تحلیلی حل نمود.
- بنابراین در عمل از روش‌های عددی برای یافتن جواب یک دستگاه غیرخطی استفاده می‌شود.

- خاطر نشان می‌شود که در خصوص جواب یک دستگاه معادلات غیرخطی، حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:
  - ممکن است دستگاه جوابی نداشته باشد.
  - ممکن است دستگاه جواب منحصر به فرد داشته باشد.
  - ممکن است دستگاه دو یا چند(به تعداد متناهی) جواب داشته باشد.
  - ممکن است دستگاه بی‌نهایت جواب داشته باشد.

٤-۸-۱ فرم کلی یک دستگاه غیرخطی

- برای یک دستگاه غیرخطی با k معادله و k مجهول، فرم کلی زیر را می‌توان در نظر گرفت

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{۱۶}$$

- به طوری که $x_1, \dots, x_n$ متغیرهای مجهول و f_1 تا f_n توابع k متغیره حقیقی می‌باشند.

- با تعریف بردار $\mathbf{x}$ به صورت زیر

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

- و با تعریف میدان $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ به صورت زیر

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

می‌توان دستگاه معادلات (۱۶) را به فرم برداری زیر نوشت

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

- توجه شود که صفر سمت راست، یک صفر برداری است.

مثال ۴ـ ۲۰ (تبدیل یک دستگاه به فرم کلی و برداری)

دستگاه معادلات زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} 3(a-1)^2 + 5(b-3)^2 = r^2, \\ \cos(r) + a^2 - b^2 = 1, \\ r - e^a + b = -4, \end{cases}$$

که در آن، متغیرهای مجهول عبارتند از a، b و r. اکنون متغیرها را به صورت زیر یکسان می‌کنیم

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = r.$$

با نامگذاری مجدد فوق و همینطور دستکاری‌های جبری، دستگاه به صورت زیر بازنویسی می‌گردد

$$\begin{cases} 3(x_1-1)^2 + 5(x_2-3)^2 - x_3^2 = 0, \\ \cos(x_3) + x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0, \\ x_3 - e^{x_1} + x_2 + 4 = 0. \end{cases}$$

همچنین، فرم برداری دستگاه به صورت زیر می‌باشد

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(x_1-1)^2 + 5(x_2-3)^2 - x_3^2 \\ \cos(x_3) + x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ x_3 - e^{x_1} + x_2 + 4 \end{bmatrix}$$

- همانگونه که ذکر شد، در غالب اوقات، حل تحلیلی یک دستگاه معادلات غیرخطی ممکن نمی باشد و ناگزیر به استفاده از روش‌های عددی برای حل آن‌ها می‌باشیم.
- روش‌های عددی برای حل دستگاه معادلات غیرخطی به نوعی تعمیم روش‌های عددی برای ریشه‌یابی می باشد. چرا که مساله حل دستگاه غیرخطی را می‌توان به عنوان تعمیمی از مسئله ریشه‌یابی در نظر گرفت.
- در واقع، در مساله ریشه‌یابی $f(x) = 0$ به دنبال عدد حقیقیی هستیم که تابع f را صفر کند، اما در مساله دستگاه غیرخطی $F(\mathbf{x}) = 0$، به دنبال برداری هستیم که میدان F را صفر کند.
- روش‌های تکرار ساده برای ریشه‌یابی را می‌توان برای حل دستگاه‌های غیرخطی تعمیم داد. خصوصا روش ریشه‌یابی نیوتون را می‌توان برای حل دستگاه معادلات غیرخطی تعمیم داد.

روش نیوتن برای حل دستگاه معادلات غیرخطی

- معادله تکرار روش نیوتن برای حل مساله ریشه‌یابی $f(x) = 0$ به صورت

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

می‌باشد. روش نیوتن

- در حل مساله دستگاه معادلات غیرخطی $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ معادله تکرار زیر را پیشنهاد می‌کند

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \frac{F(\mathbf{x}^{(k)})}{F'(\mathbf{x}^{(k)})}$$

- به‌طوری که $F'(\mathbf{x}^{(k)})$ ماتریس ژاکوبین میدان F می‌باشد و وجود آن در مخرج به معنی معکوس آن می‌باشد.
- توجه شود که درعبارت فوق، از نمادهای صحیح استفاده نشده است و فقط برای نشان دادن شباهت معادلات تکرار مسایل ریشه‌یابی و حل دستگاه معادلات غیرخطی، از چنین نوشتاری استفاده شده است.

- اصولا معادله تکرار فوق باید به صورت زیر نوشته شود

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left[J_F(\mathbf{x}^{(k)})\right]^{-1} F(\mathbf{x}^{(k)})$$

- به طوری که $J_F(\mathbf{x}^{(k)})$ ماتریس ژاکوبین میدان F است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$J_F(\mathbf{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- بنابراین در هر تکرار روش نیوتن، ماتریس ژاکوبین $J_F(\mathbf{x}^{(k)})$ محاسبه می‌شود و سپس معکوس می‌گردد و در $F(\mathbf{x}^{(k)})$ ضرب می‌گردد.

تذکر (مهم): البته می‌توان کاری کرد که دیگر نیازی به محاسبه معکوس ماتریس ژاکوبی نباشد. بدین منظور فرمول روش نیوتن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$J_F(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x}^{(k+1)} = J_F(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{x}^{(k)} - F(\mathbf{x}^{(k)})$$

رابطه فوق یک دستگاه از معادلات خطی است که می‌بایست در هر تکرار به صورت جداگانه حل شود.

مثال) دستگاه معادلات غیرخطی زیر را به کمک روش نیوتن و با شروع از $x_0 = 2$ و $y_0 = 2$ تا یک تکرار حل کنید:

$$\begin{cases} \ln(x^2 + y^2) - \sin(xy) = 2 \\ e^{x-y} + \cos(xy) = 0 \end{cases}$$

<u>راه حل اول</u>) به کمک محاسبه وارون ماتریس ژاکوبی:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}_n)\mathbf{F}(\mathbf{X}_n)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} - y\cos(xy) & \frac{2y}{x^2+y^2} - x\cos(xy) \\ e^{x-y} - y\sin(xy) & -e^{x-y} - x\sin(xy) \end{bmatrix} \;\&\; \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \ln(x^2+y^2) - \sin(xy) - 2 \\ e^{x-y} + \cos(xy) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}([2,2]^T) = \begin{bmatrix} 1.8073 & 1.8073 \\ 2.5136 & 0.5136 \end{bmatrix} \;\&\; \mathbf{J}^{-1}([2,2]^T) = \begin{bmatrix} -0.1421 & 0.5 \\ 0.6954 & -0.5 \end{bmatrix} \;\&\; \mathbf{F}([2,2]^T) = \begin{bmatrix} 0.8362 \\ 0.3464 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.1421 & 0.5 \\ 0.6954 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8362 \\ 0.3464 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9456 \\ 1.5917 \end{bmatrix}$$

راه حل دوم) بدون محاسبه وارون ماتریس ژاکوبی:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_n)\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{X}_n)\mathbf{X}_n - \mathbf{F}(\mathbf{X}_n)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \dfrac{2x}{x^2+y^2} - y\cos(xy) & \dfrac{2y}{x^2+y^2} - x\cos(xy) \\ e^{x-y} - y\sin(xy) & -e^{x-y} - x\sin(xy) \end{bmatrix} \;\&\; \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \ln(x^2+y^2) - \sin(xy) - 2 \\ e^{x-y} + \cos(xy) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}([2,2]^T) = \begin{bmatrix} 1.8073 & 1.8073 \\ 2.5136 & 0.5136 \end{bmatrix} \;\&\; \mathbf{F}([2,2]^T) = \begin{bmatrix} 0.8362 \\ 0.3464 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.8073 & 1.8073 \\ 2.5136 & 0.5136 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8073 & 1.8073 \\ 2.5136 & 0.5136 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8362 \\ 0.3464 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.3930 \\ 5.7080 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1.8073x_1 + 1.8073y_1 = 6.3930 \\ 2.5136x_1 + 0.5136y_1 = 5.7080 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1.9456 \\ y_1 = 1.5917 \end{cases}$$