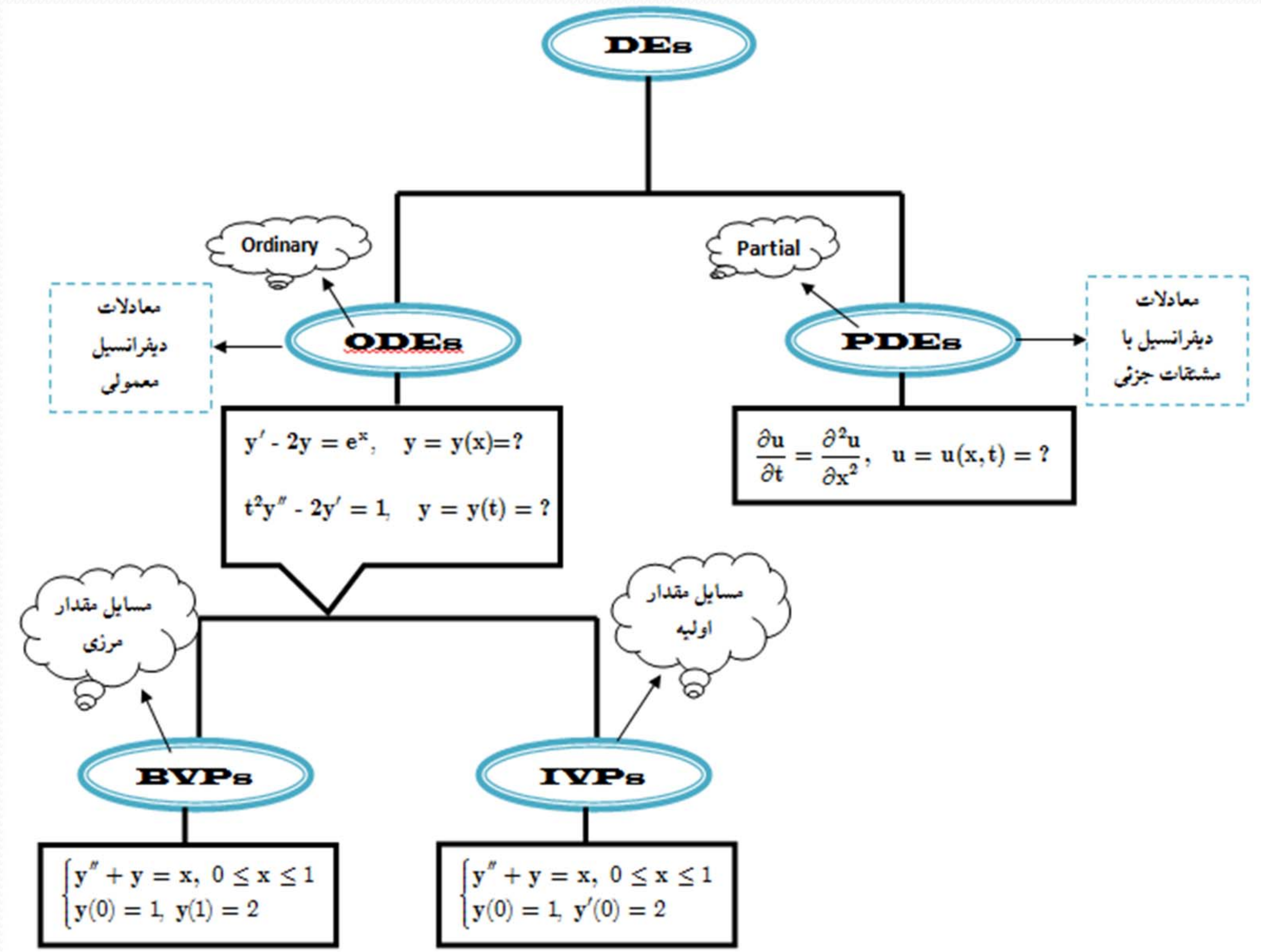
معادلات دیفرانسیلی (Differential Equations) که آن‌ها را به اختصار DEs می‌نامیم، معادلاتی هستند که در آن‌ها حداقل مرتبه‌ای از مشتق یک تابع مجهول وجود داشته باشد.



ما در این فصل فقط به حل عددی مسایل مقدار اولیه (IVPs) خواهیم پرداخت.

مسایل مقدار اولیه در شکل استاندارد

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \; x_0 \le x \le x_n \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y' - y + 1 = e^x \\ y(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = \dfrac{1}{2}\left(y + e^x - 1\right) = f(x,y) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

تذکر: معادلات دیفرانسیل مرتبه 2 و به بالا را نیز می‌توان به کمک تغییر متغیر به شکل استاندارد فوق، منتها <u>در شکل برداری</u> آن، تبدیل نمود. یعنی در این حالت، به یک <u>دستگاه از معادلات دیفرانسیلی مرتبه اول</u> خواهیم رسید.

مثال) مساله مقدار اولیه $\begin{cases} y'' - xy' = \cos(x), \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$ را به یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کنید.

حل: با معرفی تغییر متغیرهای،

$$y_1' := y'$$

$$\begin{cases} y_1 := y \\ y_2 := y' \end{cases}$$

$$y_2' := y''$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_1' = y_2,\ \ y_1(0) = 1 \\ y_2' = xy_2 + \cos(x),\ \ y_2(0) = -1 \end{cases}$$

یا در شکل ماتریسی:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(x) \\ xy_2(x) + \cos(x) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

تذکر: در تمامی روش‌های عددی که در این فصل برای حل مساله مقدار اولیه (چه در حالت اسکالر و چه در حالت برداری یعنی دستگاه) مطرح خواهیم کرد، جواب تقریبی مساله مقدار اولیه به صورت دنباله $\{y_i = y(x_i)\}_{i=0}^{n}$ یا $\{\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(x_i)\}_{i=0}^{n}$ روی یک دامنه گسسته از جواب مانند $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ ارائه خواهد گردید. به عبارت دیگر، جواب تقریبی مساله مقدار اولیه همواره به صورت جدولی از داده‌های گسسته همچون جدول زیر خواهد بود:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$y = y(x)$	$y_0 = y(x_0)$	$y_1 = y(x_1) = ?$	$y_2 = y(x_2) = ?$	$\dots$	$y_n = y(x_n) = ?$

از شرط اولیه، مقداری معلوم دارد

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$	$\mathbf{y}_0$	$\mathbf{y}_1 = ?$	$\mathbf{y}_2 = ?$	$\dots$	$\mathbf{y}_n = ?$

از شرایط اولیه، مقداری معلوم دارد

۱ - روش تیلور (Taylor Method): اساس این روش همان به کارگیری تقریب تیلور است. با فرض این که:

$$x_{i+1} = x_i + h,\ \ i = 0,1,2,\cdots,n-1$$

در این صورت:

$$y_{i+1} = y(x_{i+1}) \simeq y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2!}y_i'' + \cdots + \frac{h^p}{p!}y_i^{(p)},\ \ \ i = 0,1,2,\cdots,n-1$$

فرمول بازگشتی فوق به فرمول تیلور مرتبه p ، جهت حل تقریبی مساله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y' = f(x,y),\ x_0 \le x \le x_n \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

معروف است. واضح است که قبل از استفاده از فرمول بازگشتی فوق، می‌بایست که از قبل y'' ، y''' ، ...، $y^{(p)}$ را به صورت تحلیلی (یا دستی) استخراج کرده باشیم.

مثال) مطلوبست تعیین برآوردی از $y(0.5)$ در مساله مقدار اولیه $\begin{cases} y'-y=x \\ y(0)=1 \end{cases}$ با روش تیلور مرتبه $p=4$ و طول گام $h=0.1$

حل: ابتدا مساله را به شکل استاندارد درمی‌آوریم:

$$\begin{cases} y'=y+x \\ y(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'(x)=y(x)+x=f(x,y(x)) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

از طرفی چون طول $h=0.1$ تعیین گردیده، لذا مجهولات در این مساله عبارتند از:

x	$x_0=0$	$x_1=0.1$	$x_2=0.2$	$x_3=0.3$	$x_4=0.4$	$x_5=0.5$
$y=y(x)$	$y_0=1$	$y_1=?$	$y_2=?$	$y_3=?$	$y_4=?$	$y_5=?$

از طرفی چون $p=4$ تعیین شده، پس به محاسبه y''، y''' و $y^{(4)}$ نیازمندیم و داریم:

$$\begin{cases} y'=f(x,y(x))=x+y \\ y''=1+y'=1+x+y \\ y'''=0+1+y'=1+x+y \\ y^{(4)}=0+1+y'=1+x+y \end{cases}$$

بنابراین:

$$y_{i+1} \simeq y_i + h(x_i + y_i) + \frac{h^2}{2!}(1 + x_i + y_i) + \frac{h^3}{3!}(1 + x_i + y_i) + \frac{h^4}{4!}(1 + x_i + y_i)$$
$$= y_i + h(x_i + y_i) + (1 + x_i + y_i)(\frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}), \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

و لذا:

$$i = 0: \quad y_1 = y(x_1) = y(0.1) \simeq y_0 + h(x_0 + y_0) + (1 + x_0 + y_0)(\frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!})$$
$$= 1 + 0.1(0 + 1) + (1 + 0 + 1)(\frac{0.1^2}{2!} + \frac{0.1^3}{3!} + \frac{0.1^4}{4!}) = 1.11034$$

$$i = 1: \quad y_2 = y(x_2) = y(0.2) \simeq \cdots = 1.24280$$
$$i = 2: \quad y_3 = y(x_3) = y(0.3) \simeq \cdots = 1.39971$$
$$i = 3: \quad y_4 = y(x_4) = y(0.4) \simeq \cdots = 1.58364$$
$$i = 4: \quad y_5 = y(x_5) = y(0.5) \simeq \cdots = 1.79743$$

از طرفی این مساله دارای جوابی تحلیلی به صورت $y = y(x) = 2e^x - x - 1$ می‌باشد که در $x = 0.5$:

$$y(0.5) = 2e^{0.5} - 0.5 - 1 = 1.79744$$

که مشاهده می‌گردد که روش تیلور روشی از مرتبه دقت بالا می‌باشد.

تذکر: مشاهده گردید که روش تیلور روشی از مرتبه دقت بالا محسوب می‌گردد. ثابت می‌گردد که خطای برشی سراسری این روش $O(h^p)$ می‌باشد. این بدان معنا است که هر چه مقدار p بالاتر رود، دقت روش تیلور نیز بالاتر خواهد رفت. اما اشکالی که به روش تیلور وارد است، این است که این روش محتاج محاسبه تحلیلی y'' ، y''' ، ...، $y^{(p)}$ است و چنانچه طرف راست مساله مقدار اولیه یعنی $f(x,y(x))$ فقط اندکی پیچیده باشد، محاسبه‌ی دستی (تحلیلی) این مشتقات بسیار دشوار خواهد بود!

۲- روش اویلر (Euler Method): چنانچه در روش تیلور $p = 1$ در نظر گرفته شود، آن گاه داریم:

$$y_{i+1} = y(x_{i+1}) \simeq y_i + hy'_i = y_i + hf(x_i,y_i), \quad i = 0,1,2,\cdots,n-1$$

در روش اویلر دیگر نیازی به محاسبه مشتقات y'' ، y''' ، ...، $y^{(p)}$ نیست ولی در عوض دقت این روش نیز بالا نمی‌باشد (خطای برشی روش اویلر $O(h)$ است)

مثال) مطلوبست تعیین برآوردی از $y(0.5)$ در مساله مقدار اولیه $\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ با روش اویلر و طول گام

$h = 0.1$

حل: هدف پیدا کردن مجهولات جدول زیر است:

x	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.1$	$x_2 = 0.2$	$x_3 = 0.3$	$x_4 = 0.4$	$x_5 = 0.5$
$y = y(x)$	$y_0 = 1$	$y_1 = ?$	$y_2 = ?$	$y_3 = ?$	$y_4 = ?$	$y_5 = ?$

$$y_{i+1} \simeq y_i + hy_i' = y_i + h(x_i + y_i), \quad i = 0,1,2,3,4$$

و داریم:

$$\begin{aligned}
i = 0: \quad & y_1 \simeq y_0 + h(x_0 + y_0) = 1 + 0.1(0+1) = 1.1 \\
i = 1: \quad & y_2 \simeq y_1 + h(x_1 + y_1) = 1.1 + 0.1(0.1+1.1) = 1.22 \\
i = 2: \quad & y_3 \simeq y_2 + h(x_2 + y_2) = 1.22 + 0.1(0.2+1.22) = 1.362 \\
i = 3: \quad & y_4 \simeq y_3 + h(x_3 + y_3) = 1.362 + 0.1(0.3+1.362) = 1.5282 \\
i = 4: \quad & y_5 \simeq y_4 + h(x_4 + y_4) = 1.5282 + 0.1(0.4+1.5282) = 1.72102
\end{aligned}$$

از طرفی این مساله دارای جوابی تحلیلی به صورت $y = y(x) = 2e^x - x - 1$ می‌باشد که در $x = 0.5$:

$$y(0.5) = 2e^{0.5} - 0.5 - 1 = 1.79744$$

و مشاهده می‌گردد که در مقایسه با روش تیلور مرتبه $p = 4$ ، این روش از مرتبه دقت پایین‌تری برخوردار است.