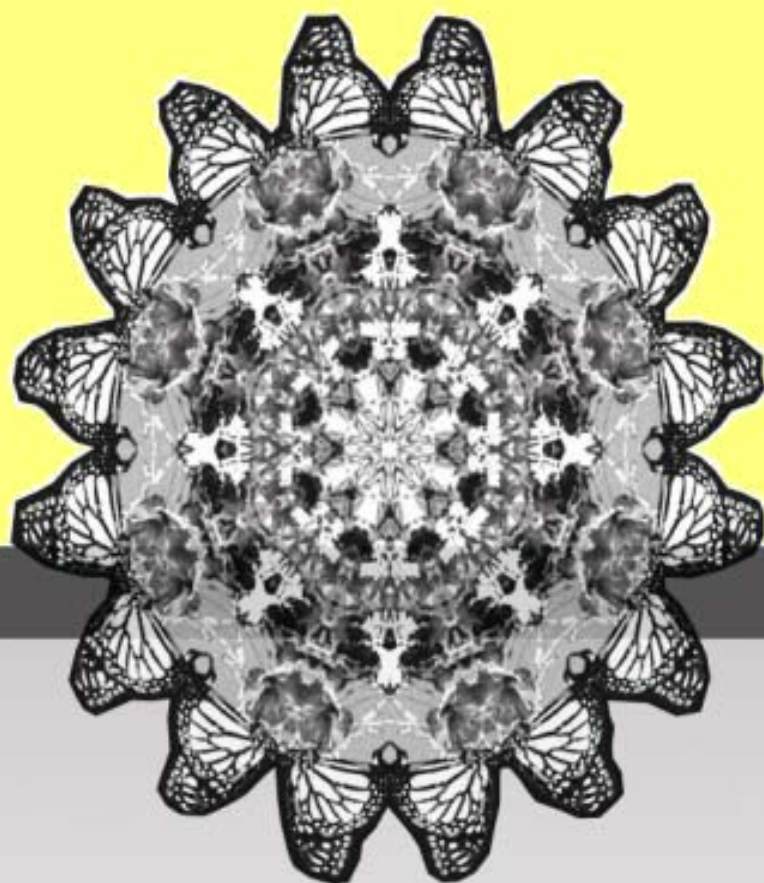


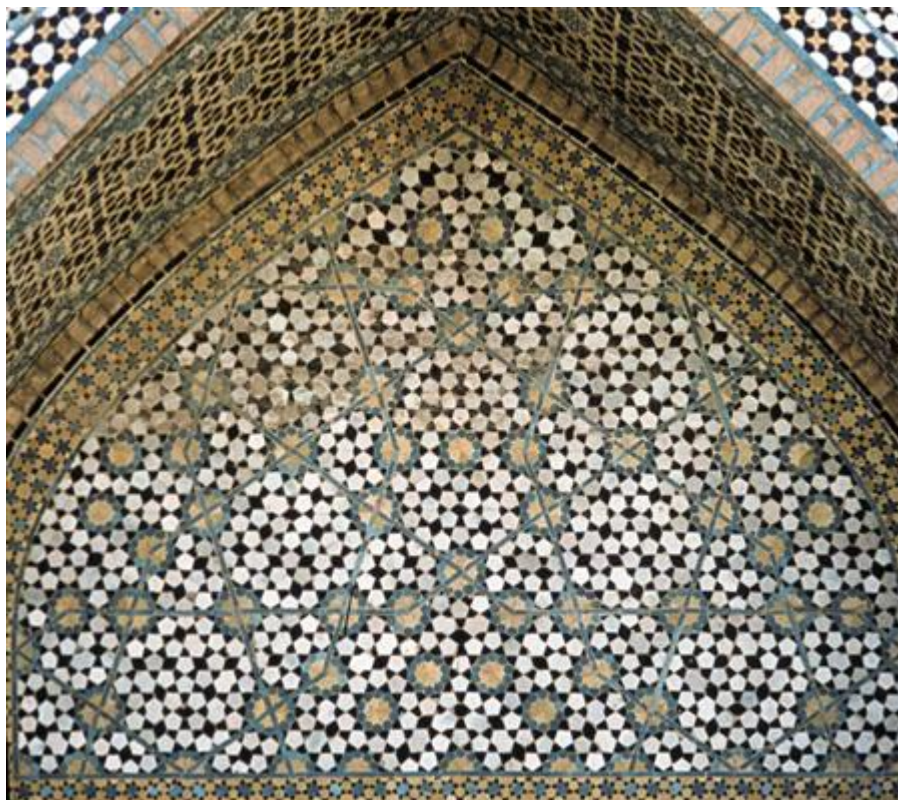
مقامه‌ای نو

اپتیک و بلورها فوتونی



سینا خراسانی

مقدمه‌ای بر اپتیک بلورهای فوتونی



تصویری از باب مسجد امام، اصفهان، متعلق به سال ۸۳۲ هجری شمسی (۱۴۵۳ میلادی)

نمایی از تقارن کامل ده‌گون در شبه‌بلورها (Quasi-Crystals) که قرن‌ها قبل از ابداع ساختار شبه‌بلور دوبعدی با تقارن پنج‌گون در دهه‌ی ۱۹۷۰ توسط راجر پنروز (Penrose Tiling) بدست معماران اسلامی در ایران بنا نهاده شده است.



اللَّهُ نُورُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ مِثْلُ نُورِهِ كَمِشْكَاةٍ فِيهَا
مِصْبَاحٌ الْمِصْبَاحُ فِي زُجَاجَةٍ الزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوْكَبٌ
دُرِّيٌّ يُوقَدُ مِنْ شَجَرَةٍ مُبَارَكَةٍ زَيْتُونَةٍ لَا شَرْقِيَّةٍ وَلَا غَرْبِيَّةٍ
يَكَادُ زَيْتُهَا يُضِيءُ وَلَوْ لَمْ تَمْسَسْهُ نَارٌ نُورٌ عَلَى نُورٍ
يَهْدِي اللَّهُ لِنُورِهِ مَنْ يَشَاءُ وَيَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَالَ لِلنَّاسِ
وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ (سوره مبارکه نور، آیه ۳۵)



مقدمه‌ای بر اپتیک بلورهای فوتونی

سینا خراسانی

استادیار دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

تهران

فروردین ماه ۱۳۸۶

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شریف می باشد.

نقل مطالب و استفاده از محتویات، شکل‌ها، و همچنین خروجی برنامه‌های پیوست ب، با ذکر ماخذ

بلامانع است.

به یاد استاد فقید دانشکده مهندسی برق

دانشگاه صنعتی شریف

دکتر کسری برکشلی

فهرست

دیباچه

پیشگفتار

- بخش ۱ - مقدمه‌ای بر الکترومغناطیس محیط‌های ناهمگن ۱
- بخش ۲ - انتشار موج در سیستم ناهمگن یک بعدی ۹
- بخش ۳ - ساختار یک‌بعدی متناوب ۲۱
- بخش ۴ - ساختار دوبعدی متناوب ۳۵
- بخش ۵ - شبکه‌ی معکوس ۴۱
- بخش ۶ - قضیه‌ی بلوخ و بسط امواج تخت ۵۷
- بخش ۷ - بسط امواج تخت اصلاح‌شده و تفاضل‌های متناهی ۶۹
- بخش ۸ - سایر روش‌های عددی و نقص در شبکه ۸۵
- بخش ۹ - موجبر کاواک‌های تزویج شده و توابع ونیر ۱۰۱
- بخش ۱۰ - تحلیل ساختارهای بلور فوتونی با توابع ونیر و ویژه مودها ۱۱۱
- بخش ۱۱ - سرعت فاز و گروه و تابع گرین تاخیری ۱۲۵
- بخش ۱۲ - نظریه‌ی گروه در دوبعد ۱۳۹
- بخش ۱۳ - گروه‌بندی بلورهای فوتونی و تابش دوقطبی در آنها ۱۵۱
- بخش ۱۴ - مبانی اپتیک کوانتومی بلورهای فوتونی، حالات چگالیده و جابجایی لمب ۱۷۳

۱۹۷	پیوست الف - فضای هیلبرت و جبر عملگرها
۲۰۵	پیوست ب - برنامه‌هایی به زبان MATLAB برای محاسبه‌ی نوارهای بسامد
۲۱۹	پیوست پ - مراجع و پیوندهای مفید
۲۲۱	واژه نامه

دیباچه

این کتابچه ثمره‌ی چندین سال پیایی تحقیق، و تدریس در زمینه بلورهای فوتونی در دانشگاه صنعتی شریف، موسسه‌ی فن‌آوری جورجیا، و دانشگاه شهید بهشتی است، که نسخه اولیه‌ی آن توسط دو تن از دانشجویان دکتری فیزیک لیزر در دانشگاه شهید بهشتی، آقایان مهرداد مرادی و فیصل کروشاوی طی تابستان سال ۱۳۸۵ با تلاش و دقت فوق‌العاده تحسین برانگیزی تهیه و تنظیم گردیده است. آقایان احمد بیرامی و سید پیام علیپور متعلم، دانشجویان کارشناسی مهندسی برق دانشگاه صنعتی شریف، در ویرایش متن و رفع غلطهای متعدد نقش بسیار موثری داشته‌اند و تکمیل و اصلاح شش بخش اول کتاب با کمک ایشان انجام پذیرفته است. بدینوسیله نهایت تشکر و امتنان را نسبت به ایشان اعلام می‌دارد. برنامه‌های پیوست ب تماماً توسط آقای امیر حسینی به عنوان بخشی از پروژه‌ی کارشناسی ایشان در طول بهار و تابستان سال ۱۳۸۴ در دانشکده‌ی برق دانشگاه صنعتی شریف نوشته شده است.

طی سالهای گذشته از همراهی دانشجویان و استادان متعددی درس آموخته‌ام که بحث و تبادل نظر با ایشان در ایضاح و تدوین بسیاری از نکات و دقایق این کتابچه نقش داشته است. از این بابت مراتب سپاس و قدردانی نسبت به آقایان استاد دکتر بیژن رشیدیان، مرحوم شادروان استاد دکتر کسری برکشلی در دانشگاه صنعتی شریف و آقای دکتر علی ادیبی در موسسه‌ی فن‌آوری جورجیا را اعلام می‌دارد. از میان دانشجویان عزیز آقایان امیر حسین برادران قاسمی، احمد خیاط جعفری، سید هاشم

عارف، علی انصاری، و خانم‌ها نفیسه زواره‌ایان، مهری حمیدی سنگ‌دهی، و نرگس انصاری، دانشجویان دکتری فیزیک لیزر در دانشگاه شهید بهشتی، و آقایان امیرحسین اتابکی، میثم‌رضا چمنزار، مهدی میری، علی‌رضا کوکبی و حسام زندی در دانشگاه صنعتی شریف، و جمعی دیگر از دانشجویان در داخل و خارج از کشور که مستقیماً یا جز آن با اینجانب در تماس بوده‌اند ضمن شرکت در کلاس و بحثها موجبات ساختار اصلی این متن را فراهم آوردند. ضمن ارج نهادن به علاقه، تلاش فوق‌العاده و درخشش این عزیزان امید است در آینده شاهد پیشرفت ایشان در این زمینه یا سایر زمینه‌های مرتبط باشیم.

در کلاسهای درس ارایه شده توسط اینجانب نسخه‌ی نخست کتاب

K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer-Verlag, Berlin, 2001

به عنوان مرجع پایه مورد استفاده بوده است. با این وجود بخش معتناهایی از این نوشتار محصول مستقیم کارهای شخصی اینجانب یا مقالات دیگران می‌باشد. بنابراین مراجع مورد استفاده نیز برای ارجاع علاقمندان ذکر شده‌اند.

هر چند در تهیه این نوشتار دقت کافی برای ویراست متن از غلطها و اشکالات تایپی بکار بسته شده است، کلیه‌ی اشتباهات احتمالی باقی‌مانده متوجه اینجانب می‌باشد. لذا از کلیه‌ی استادان، محققین و دانشجویان عزیز که این نوشتار را در کار علمی خود مفید یافته‌اند دعوت می‌گردد پیشنهادها، انتقادات، و کلیه‌ی اشتباهات موجود در متن را جهت بهبود نسخه‌ی موجود از طریق پست، پست الکترونیک، و یا دورنگار به اینجانب منعکس فرمایند.

سینا خراسانی

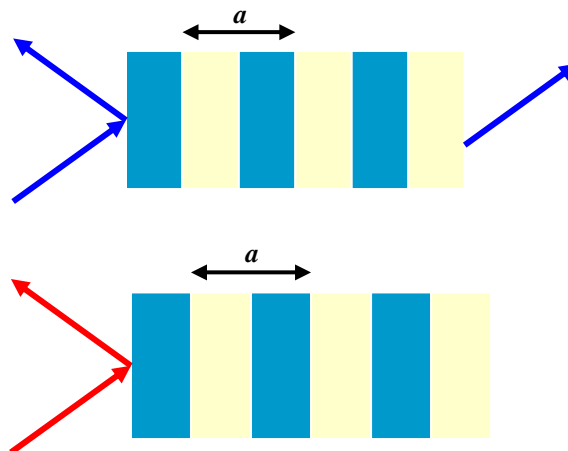
تهران، هفدهم فروردین ماه ۱۳۸۶

پست الکترونیک: khorasani@sina.sharif.edu

دورنگار: ۳۲۶۱-۶۶۰۲ (۰۲۱)

پیشگفتار

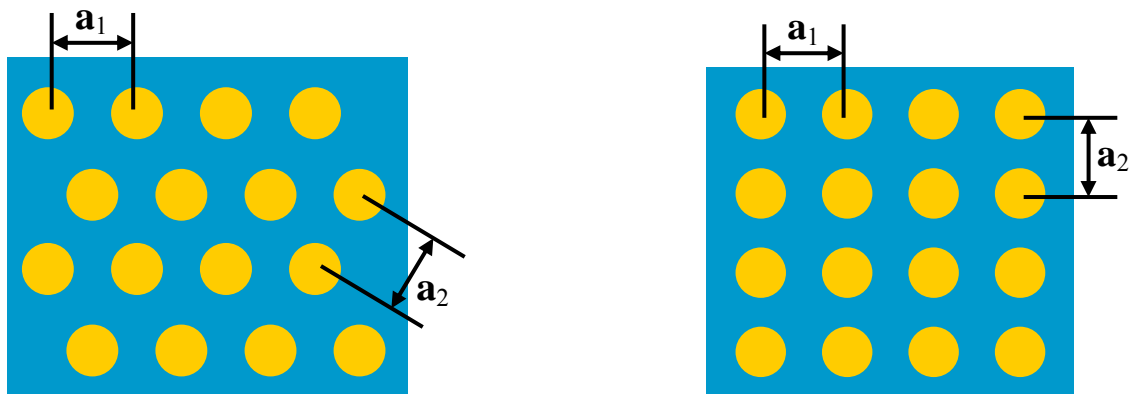
بلور فوتونی را به طور ساده می‌توان یک محیط با خواص اپتیکی متناوب تعریف کرد. مثلاً یک محیط اپتیکی متناوب در شکل (۱) نشان داده شده است که قسمت‌های تیره دارای گذردهی الکتریکی ϵ و مغناطیسی μ همگن و متفاوت نسبت به قسمت‌های روشن هستند. این سیستم را می‌توان به عنوان یک بلور فوتونی ساده‌ی یک بعدی در نظر گرفت. بلور فوتونی بسیار پاشنده است و میزان گذردهی و انعکاس آن به شدت وابسته به طول موج می‌باشد. این ویژگی در شکل زیر برای یک بلور فوتونی که ضریب گذردهی آن برای نور آبی بزرگتر از صفر و برای نور قرمز تقریباً صفر می‌باشد نمایش داده شده است.



شکل (۱): بلور فوتونی یک بعدی و پاسخ آن به دو طول موج متفاوت [۱۲].

در شکل فوق a ثابت شبکه و یا دوره‌ی تناوب نامیده می‌شود و نمایان‌گر حداقل طول فضایی است که ساختار شبکه در آن تکرار می‌گردد. به بیان دیگر $\varepsilon(x) = \varepsilon(x+a)$ که در آن $\varepsilon(\cdot)$ تابع مکانی گذردهی الکتریکی است. می‌توان نشان داد که مهمترین اثر ناشی از تناوب وجود محدوده‌هایی پیوسته و کران‌دار در حوزه‌ی بسامد است که در آنها امکان انتشار موج در ساختار وجود ندارد. به این نواحی گاف فوتونی یا نوار ممنوع بسامد گفته می‌شود. بین هر دو گاف فوتونی متوالی یک نوار مجاز بسامد قرار دارد (و برعکس) که انتشار موج در آن تحت شرایطی امکان‌پذیر است. اگر یک گاف فوتونی با بازه‌ی بسامد $[f_1, f_2]$ مشخص شود که در آن $f_1 < f_2$ ، آن‌گاه $f_c \triangleq (f_1 + f_2)/2$ بسامد مرکزی گاف و $\Delta f_c \triangleq f_2 - f_1$ پهنای گاف نامیده می‌شوند. معمولاً در طراحی هندسه‌های گوناگون بلورهای فوتونی علاقه‌مندیم ساختارهایی با عریض‌ترین پهنای نسبی گاف را که بصورت $m \triangleq \Delta f_c / f_c$ تعریف می‌شود به دست آوریم.

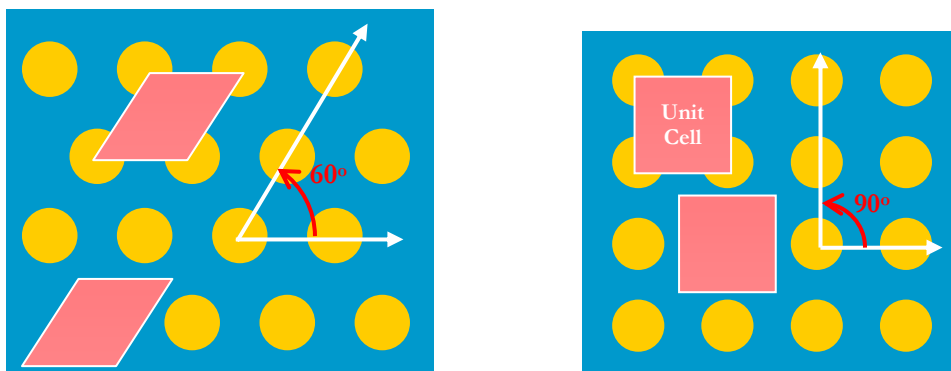
در دو بعد یک بلور فوتونی را می‌توان مانند یک آرایه‌ی متناوب از دو دی‌الکتریک فرض نمود. ساده‌ترین هندسه‌ها با این احتساب در دو بعد همانند گروه‌های بلوری براوایس در فیزیک حالت جامد به پنج خانواده‌ی اصلی قابل تقسیم خواهند بود. اما به دلایل گوناگون که برخی از آنها در طول این نوشتار خواهد آمد تنها دو گروه بلوری در دو بعد از اهمیت برخوردارند که در شکل (۲) نمایش داده شده‌اند.



شکل (۲): نمایش دو هندسه پایه‌ی بلور فوتونی دو بعدی؛ راست: ساختار مربعی؛ چپ: ساختار مثلثی [۱۲].

در اینجا \mathbf{a}_1 و \mathbf{a}_2 بردارهای پایه شبکه نامیده می‌شوند. در ساختارهای بیش از یک بعد تناوب مکانی به ابعاد فضایی تقارن انتقالی باز می‌گردد که در این جا به صورت $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(x, y) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i)$ نمایش داده می‌شود و در دو بعد (سه بعد) $i = 1, 2$ ($i = 1, 2, 3$) می‌باشد. بدیهی است حاصل ضرب خارجی بردارهای شبکه در دو بعد (سه بعد) به فرم $(|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|)$ ($|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3|$) باید غیر صفر باشد. برای هر دو ساختار دو بعدی مربعی و مثلثی بردارهای پایه از نظر طول با یکدیگر یکسانند ($a_1 \triangleq |\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| \triangleq a_2 \equiv a$). از طرف دیگر برای ساختار مربعی $\angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \pi/2$ در حالی که برای ساختار مثلثی $\angle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \pi/3$ می‌باشند.

به سادگی دیده می‌شود که علاوه بر تقارن انتقالی که همان ویژگی تناوب مکانی است گونه‌ی دیگری از تقارن در اثر دوران حول مبدا وجود دارد که بلور فوتونی را بدون تغییر باقی می‌گذارد. به بیان دیگر بلور فوتونی نسبت به آن تبدیل ناوردا است. در ساختار مربعی (مثلثی) این زاویه برابر 90° (60°) است که موجب تقارن دورانی چهارگون (شش‌گون) می‌گردد و در اشکال زیر نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که بحث مفصلی پیرامون تقارن در بلورهای فوتونی در بخش‌های آینده خواهد آمد.

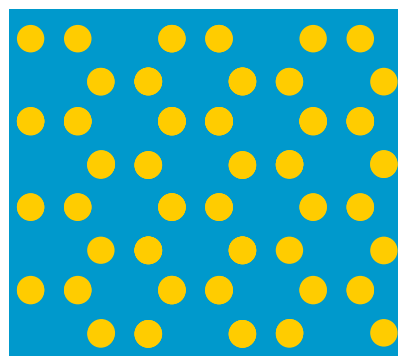


شکل (۳): نمایش تقارن دورانی و سلول واحد در بلورهای فوتونی بعدی [۱۲].

همان طور که در شکل فوق با نواحی صورتی رنگ مشخص شده است سلول واحد در دو بعد (سه بعد) سطح (حجم) متشکل از دو (سه) بردار پایه است و در واقع از نظر سطح (حجم) کوچک‌ترین جزیی

است که با انتقال و تکرار آن بتوان کل بلور فوتونی را بازسازی نمود. گرچه این انتخاب منحصر به فرد نیست ولی معمولاً ساده‌ترین انتخاب برای بلور فوتونی مربعی و مثلثی به ترتیب مربع و لوزی با اضلاع برابر با ثابت شبکه a می‌باشند.

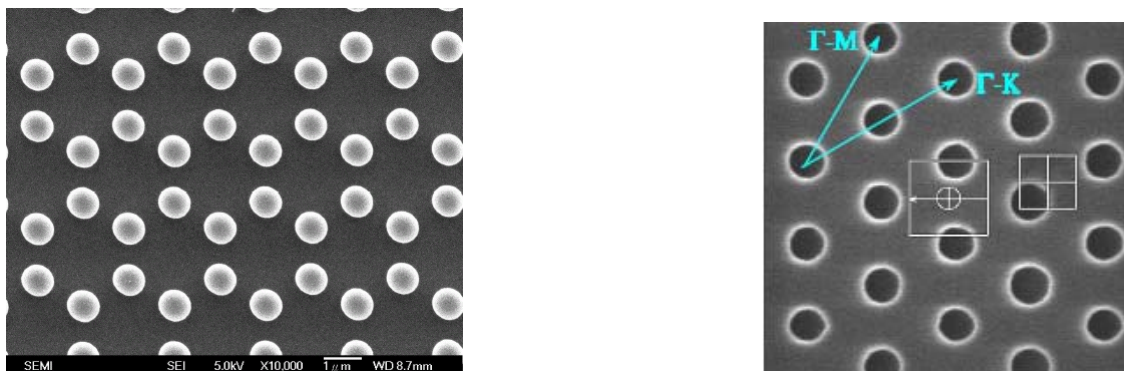
شبکه مشهور دو بعدی دیگری که در واقع از خانواده‌ی بلور فوتونی مثلثی شمرده می‌شود شبکه گرافیت یا لانه زنبوری است که در شکل بعد نمایش داده شده است و دارای تقارن دورانی شش‌گون می‌باشد. نیز فیبر براگ در شکل زیر را میتوان حالت خاصی از بلور فوتونی دو بعدی در دستگاه مختصات استوانه‌ای فرض نمود.



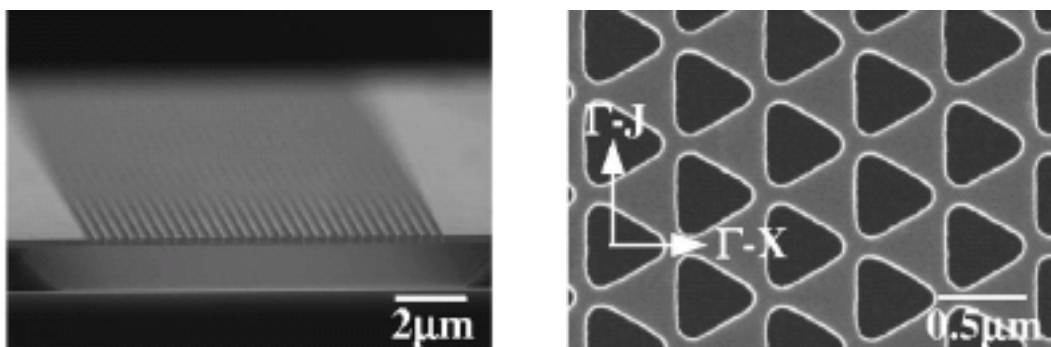
شکل (۴): بلورهای فوتونی گرافیت (شکل راست) و فیبر براگ (شکل چپ) [۱ و ۲].

در عمل ساخت بلورهای فوتونی شامل مراحل و فرآیندهای متعدد و پیچیده‌ای است که ذکر آنها را به بخش انتهایی مוקول می‌کنیم. ولی در عمل ساختار بلور فوتونی بسیار مانند آنچه است که در اشکال فوق آورده شده است. در شکل (۵) تصاویری از ساختارهای واقعی دو بعدی مثلثی و گرافیت نمایش داده شده که با میکروسکوپ الکترونی گرفته شده است. البته مادامی که ویژگی‌های تقارن دو یا چند ساختار بلور فوتونی یکسان می‌باشد امکان‌پذیر است که آنها را هنوز از یک خانواده محسوب کنیم، حتی اگر فرضاً برای مثال شکل سوراخ‌ها (یا استوانه‌ها) گرد نباشد. این حالت برای دو بلور فوتونی از گونه‌ی مثلثی با سوراخ‌های مثلثی در شکل (۶) [۵] و گرافیت با اتصالات پل‌مانند میان استوانه‌ها در شکل (۷) [۴] نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که ساختارهای دو بعدی در واقع در امتداد

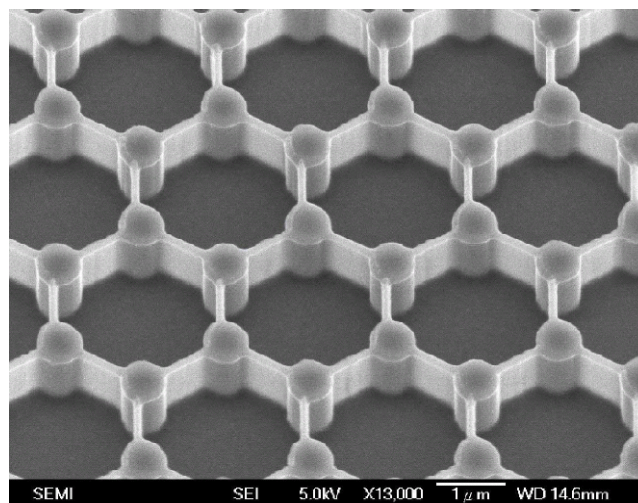
محور عمود بر صفحه دارای ضخامت محدود (ساختار تیغه‌ای) و معمولا در حد ۲۰۰ تا ۵۰۰ نانومتر می‌باشند.



شکل (۵): تصاویری از بلورهای فوتونی مثلثی (چپ) [۳] و گرافیت (راست) [۴].



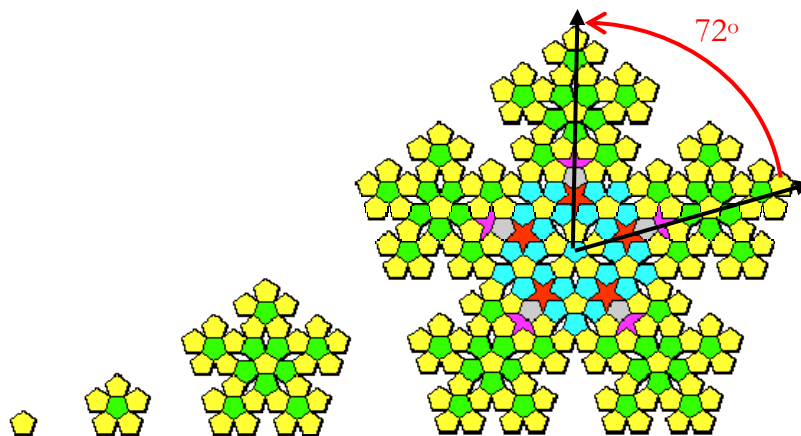
شکل (۶): تصاویر مربوط به تیغه‌ی بلور فوتونی دو بعدی مثلثی با سوراخ‌های مثلثی [۵].



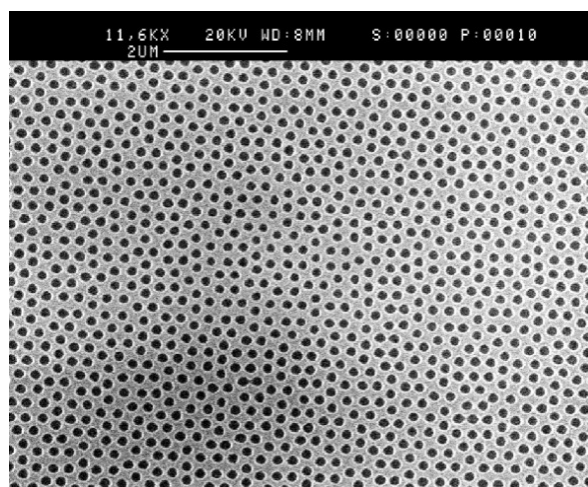
شکل (۷): بلور فوتونی گرافیت با تیغه‌ی اتصال میان استوانه‌ها [۴].

تقارن دورانی در بلورهای فوتونی دو بعدی تا این جا به دو حالت چهارگون و شش‌گون تقسیم شده است. در واقع می‌توان نشان داد که امکان داشتن تقارنهای دورانی در ساختارهای دو بعدی تنها به

دوگون، سه‌گون، چهارگون و شش‌گون محدود می‌گردد [۶]. در غیر این صورت تقارن دورانی با تقارن انتقالی ناسازگار خواهد بود. در شکل (۸) نمونه‌ای از یک هندسه‌ی پنج‌گون نمایش داده شده است [۷]. همان‌طور که دیده می‌شود این ساختار تحت دورانهای 72° و آن هم تنها حول یک نقطه مرکز در صفحه، ناوردا است ولی فاقد هرگونه تقارن انتقالی هندسی دقیق می‌باشد. اما از آنجایی که ساختارهایی از این دست هنوز دارای بسیاری خواص اپتیکی مطلوب و قابل توجه می‌باشند و دست کم نظمی هندسی (تقارن دورانی) بر آنها حکم‌فرما است تحت عنوان شبه‌بلورها طبقه‌بندی می‌شوند. در شکل (۹) نیز یک نمونه شبه‌بلور فوتونی دوازده‌گون دیده می‌شود [۸].



شکل (۸): ساختار هندسی شبه‌بلور با تقارن دورانی پنج‌گون [۷].



شکل (۹): شبه‌بلور فوتونی با تقارن دورانی دوازده‌گون [۸].

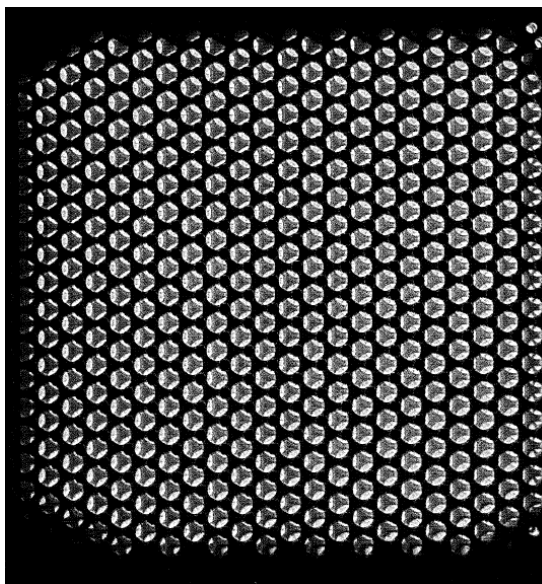
First bandgap occurrence (between which bands)	Crystal-Type	Structure name	Bandgap width $\Delta\omega/\omega_0$ for Si/Air structure ($\epsilon \sim 12$)	Publication
2-3	Diamond	Diamond	29%	K.M. Ho et al., Phys. Rev. Lett. 65, 3152 (1990).
	Diamond-like	Yablonovite	19%	E. Yablonovitch, et al., Phys. Rev. Lett. 67, 2295 (1991).
	Diamond-like	Kielovite	22%	M. Christophersen et al., Mat. Sci. Eng. B 69, 194 (2000).
	Diamond-like	Lincoln-Log/Woodpiles	20%	K. Ho et al., Solid State Commun. 89, 413 (1994).
	Diamond-like	2D Crystal in 3D	21%	S.G. Johnson et al., App. Phys. Lett. 77, 3490 (2000).
4-5	Simple cubic	Spiral structure	17 %	Á. Chutinan, Phys. Rev. B. 57, R2006 (1998).
	Tetragonal	Square-Spiral	24%	Toader et al., Science 292, 1133 (2001).
	Body centred orthorhombic	Layered 3D	23%	Fan et al., Appl. Phys. Lett. 65, 1466 (1994).
	Tetragonal	Autocloning structure	12% (for Si/SiO ₂) probably 20% for Si/Air	M. Notomi, et al., Appl. Phys. Lett. 77, 4256 (2000).
5-6	Inverted simple cubic	Inverted scaffold lattice	7%	H.S. Sözüer et al., J. Opt. Soc. Am. B 10, 296 (1993).
8-9	Inverse fcc	Inverse Opal	4.25 %	H. S. Sözüer et al., Phys. Rev. B. 45, 13962 (1992).
16-17	Inverted hcp	Inverse hcp	2.8 %	S. John et al., J. Lightw. Techn. 17, 1931 (1999).

جدول (۱): طبقه‌بندی انواع بلورهای فوتونی سه‌بعدی [۹].

اما طبقه‌بندی بلورهای فوتونی در سه بعد از نظر گروه‌های بلوری همانند بلورهای الکترونی در فیزیک حالت جامد به ۱۴ گروه اصلی شبکه براوایس انجام می‌پذیرد [۶]. اما از آنجایی که فن‌آوری ساخت بلورهای فوتونی سه‌بعدی هنوز به سرعت در حال تکامل است از بحث مفصل در این باره اجتناب، و ضمن ارجاع خواننده به جدول (۱) و مراجع درون آن تنها به ذکر حالات مشهورتر اکتفا می‌کنیم.

پس از پیش بینی وجود گاف فوتونی در سه بعد که در سال ۱۹۸۷ مستقلاً توسط جان [۱۰] و یابلونوویچ [۱۱] انجام پذیرفت اولین ساختاری که توانست عملاً آن را به نمایش بگذارد توسط هو و دیگران [۱۲] در ۱۹۹۰ گزارش شد که بر مبنای هندسه‌ی بلور الماس طراحی شده و دارای نسبت گاف برابر ۲۹٪ بود. یکسال بعد یابلونوویچ ساختار معکوسی شبیه به بلور الماس ارایه کرد که به یابلونوویت مشهور شد [۱۳]. به دنبال آن ساختارهای بسیار گوناگونی ارایه شدند که عموماً از نظر وجود فن‌آوری ساخت و یا نسبت گاف مطلوب نبودند. امروزه ساخت یابلونوویت با فرآیندهای تراش الکتروشیمیایی و باریکه‌ی متمرکز یونی، به همراه پرتونگاری باریکه‌ی الکترونی انجام می‌پذیرد. تراش

باریکه‌ی متمرکز یونی امکان ایجاد سوراخهایی با عمق زیاد و نسبت منظر بسیار بزرگ را فراهم می‌کند، به گونه‌ای که سوراخهایی کاملاً استوانه‌ای و نه مخروطی بر جای می‌گذارد.

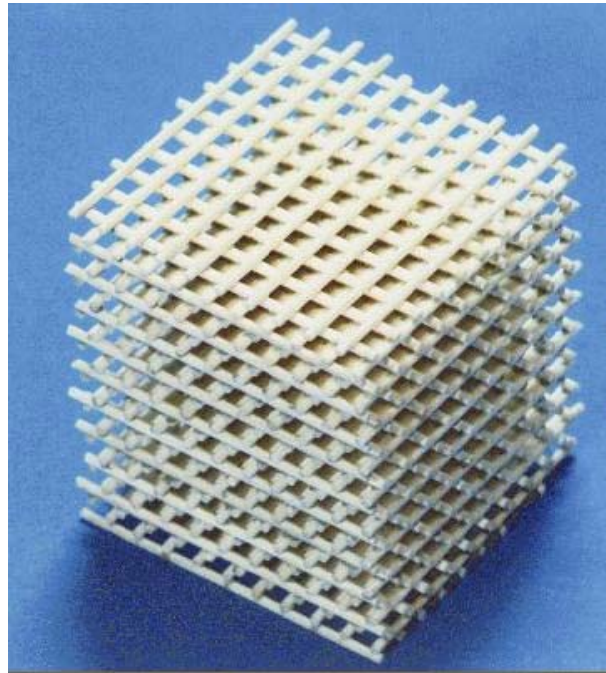


شکل (۱۰): تصویری از بلور فوتونی یابلونوویت [۱۳].

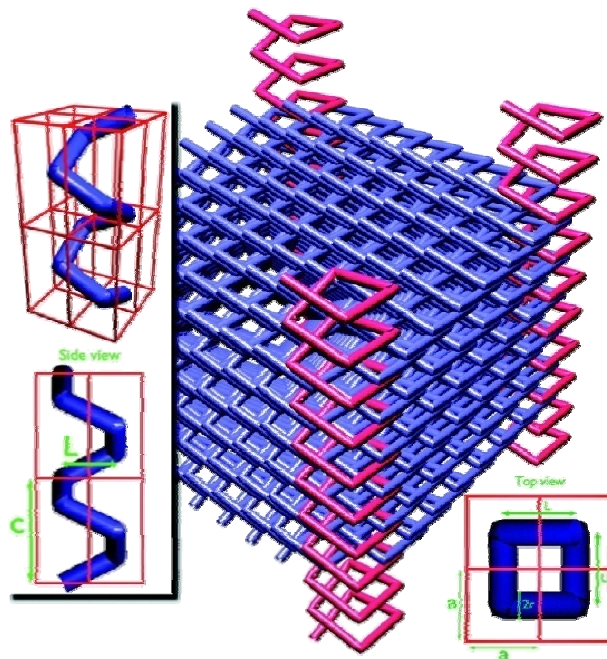
اما با ساختار افرازی چوبی [۱۴] در سال ۱۹۹۴ دسترسی به یک ساختار فوتونی سه‌بعدی با نسبت گاف قابل قبول و عدم پیچیدگی در فن‌آوری ساخت حتی تا مقیاس مورد نیاز برای طول موجهای مخابراتی فیبر نوری میسر شد. در حقیقت سادگی ساخت این ساختار از فرم لایه‌لایه‌ی آن ناشی می‌شود که در شکل (۱۱) نمایش داده شده است. فرآیند لایه‌لایه در رشد این ساختار امکان ایجاد نقص در شبکه را نیز نسبتاً به سهولت فراهم می‌کند، در حالی که این ویژگی در یابلونوویت به سادگی در دسترس نیست.

در سال ۲۰۰۱ تودر و جان [۱۶] پس از محاسبات مفصل ساختار پیچیده‌ای به نام ماریچ درهم بافته را ارائه کردند که دارای گاف فوتونی کامل بود. ولی فن‌آوری ساخت چهار سال بعد، و با تکیه بر روش مدرن پرتونگاری دو فوتونی یا نوشتن مستقیم لیزری [۱۷]، امکان محقق شدن آن را با کیفیت

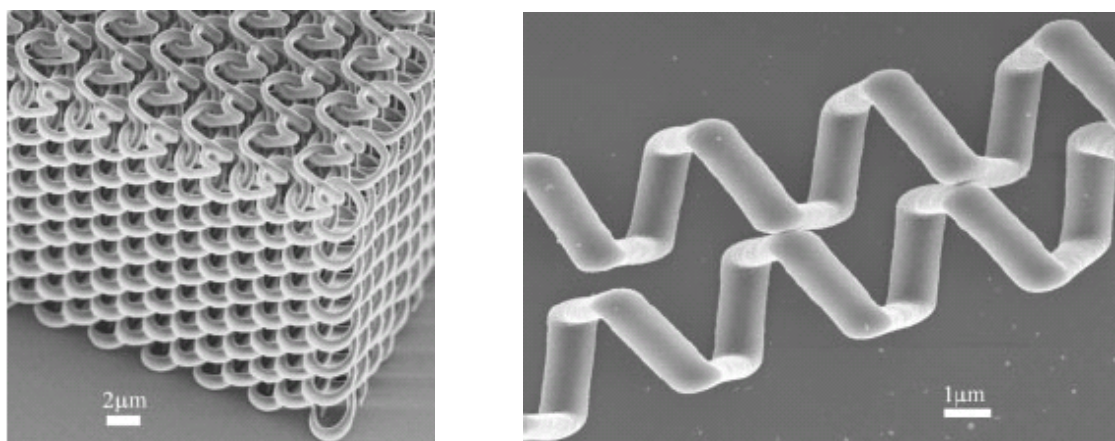
مطلوب فراهم ساخت، که در شکل (۱۳) نمایش داده شده است. این در حالیست که قبل از آن دسترسی به ساختارهایی با پیچیدگی زیاد، مانند آنچه تودر و جان ارائه کردند، در طیف فرسرخ و امواج کوتاه‌تر به دلیل خطای بسیار زیاد در کنترل هندسه و مرزها غیر ممکن بود.



شکل (۱۱): نمایی از ساختار افزازهی چوبی در طیف ریزموج [۱۵].



شکل (۱۲): ساختار ماریپیچ درهم بافته [۱۶].

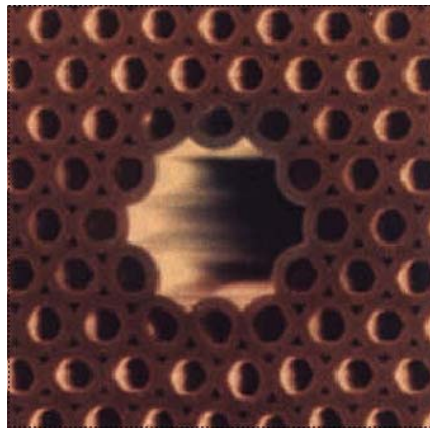
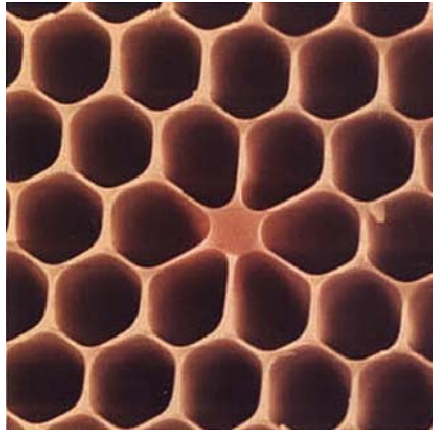


شکل (۱۳): تصویر میکروسکوپ الکترونی از ساختار واقعی مارپیچ درهم بافته در طیف فرسرخ [۱۷].

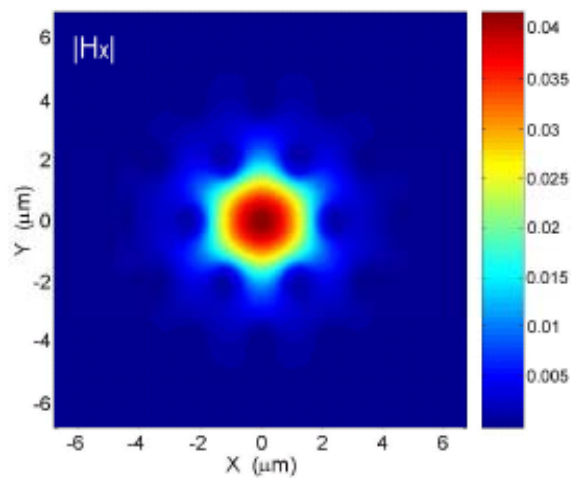
از میان سایر فرآیندهایی که در ساخت بلورهای فوتونی استفاده می‌شوند میتوان به هولوگرافی، نگاشت، پرتونگاری لایه به لایه، پرتونگاری تداخلی موج x، پیوند ویفر (برای ساختار افزازه چوبی)، آپالها، آپالهای وارون، و کولوئیدها اشاره نمود.

کاربردهای بلورهای فوتونی در طول دهه‌ی گذشته به سرعت در حال گسترش بوده است. از آن میان به برخی از جدیدترین و مهمترین‌ها اشاره می‌کنیم. احتمالاً جالب‌ترین و مهم‌ترین کاربرد بلورهای فوتونی در مخابرات فیبر نوری بوده است. ویژگی منحصر به فرد بلورهای فوتونی در انعکاس کامل نور هنگامی که فرکانس آن در گاف فوتونی قرار دارد امکان کاهش تلفات در غلاف فیبر را بطور چشم‌گیری افزایش می‌دهد. همچنین لزومی ندارد که نور در دی‌الکتریک انتشار یابد. می‌توان در واقع نور را در داخل خلأ یا هوا با فشار کم هدایت نمود که در این صورت اثرات غیر خطی و تلفات فیبر به حد بسیار ناچیزی می‌رسد. به این خانواده از فیبرهای بلور فوتونی فیبر سوراخدار گفته می‌شود. از آن جایی که امکان طراحی مناسب نمودار پاشندگی همزمان با طراحی فیبر بلور فوتونی وجود دارد، عملاً می‌توان اثرات اتلاف، تغییرات قطبش، و اثرات غیر خطی را به حدی کاهش داد که مخابرات فیبر نوری بین هر دو نقطه از سطح کره زمین بدون احتیاج به تقویت کننده یا تکراراساز میسر گردد. در شکل (۱۴) دو نوع اصلی از فیبرهای نوری بلور فوتونی دیده می‌شود [۱۸]. نیز در شکل (۱۵) مقطع

دامنه میدان عرضی مغناطیسی نور متعلق به مود انتشار پایه در یک فیبر بلور فوتونی نمایش داده شده است که میزان محصورسازی انرژی نورانی را در مرکز فیبر نشان می‌دهد [۱۹].

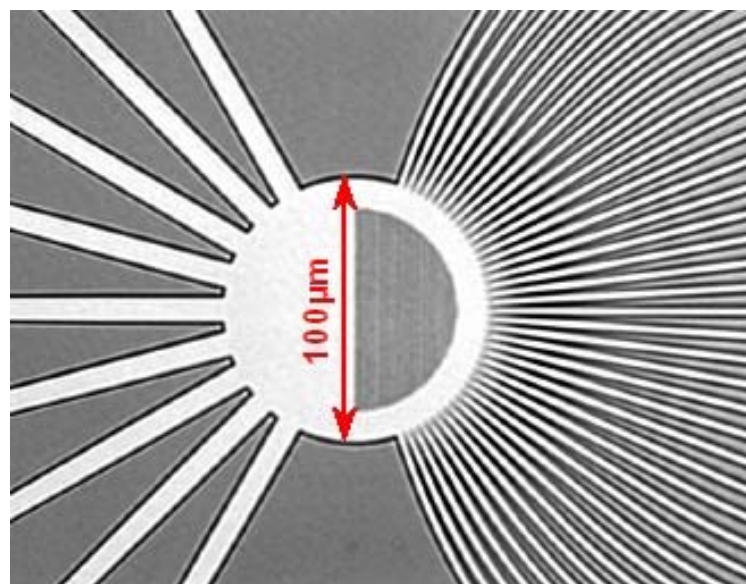
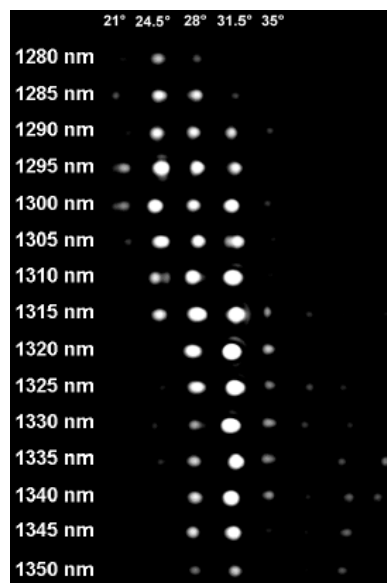


شکل (۱۴): دو نوع از فیبر بلور فوتونی [۱۸].

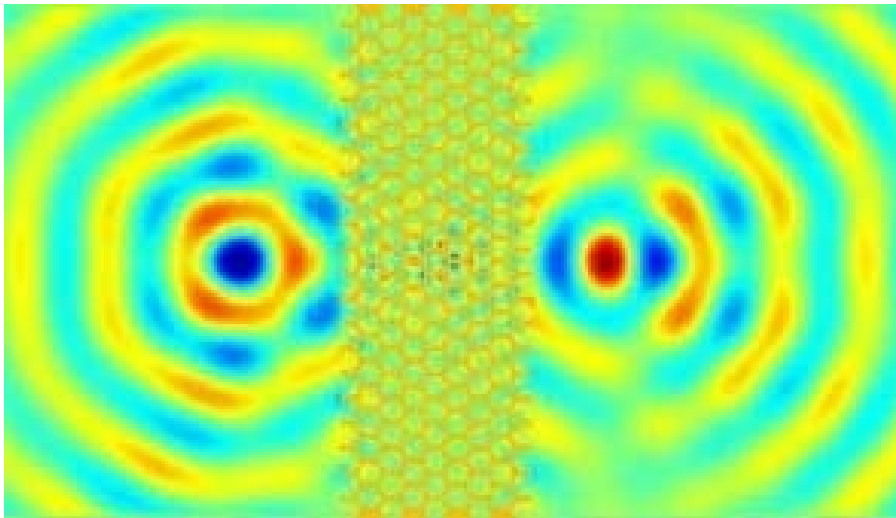


شکل (۱۵): نمودار دامنه میدان مغناطیسی عرضی مود پایه در سطح مقطع یک فیبر نوری بلور فوتونی [۱۹].

از دیگر خواص بسیار مهم بلورهای فوتونی می توان به اثر ابرمنشور و شکست منفی اشاره نمود [۲۰]. هر دوی این ویژگیها در حقیقت از پاشندگی بسیار شدید و غیر عادی نور در آنها سرچشمه می گیرند. در شکل (۱۶) یک تفکیک ساز کانال های مخابراتی برای کاربرد در مخابرات تفکیک طول موج چگال نشان داده شده است. همانطور که دیده می شود این سیستم با وجود ابعاد حدود ۱۰۰ میکرون به خوبی قادر به تفکیک کانالهایی با اختلاف طول موج حدوداً ۲۵ نانومتر می باشد.



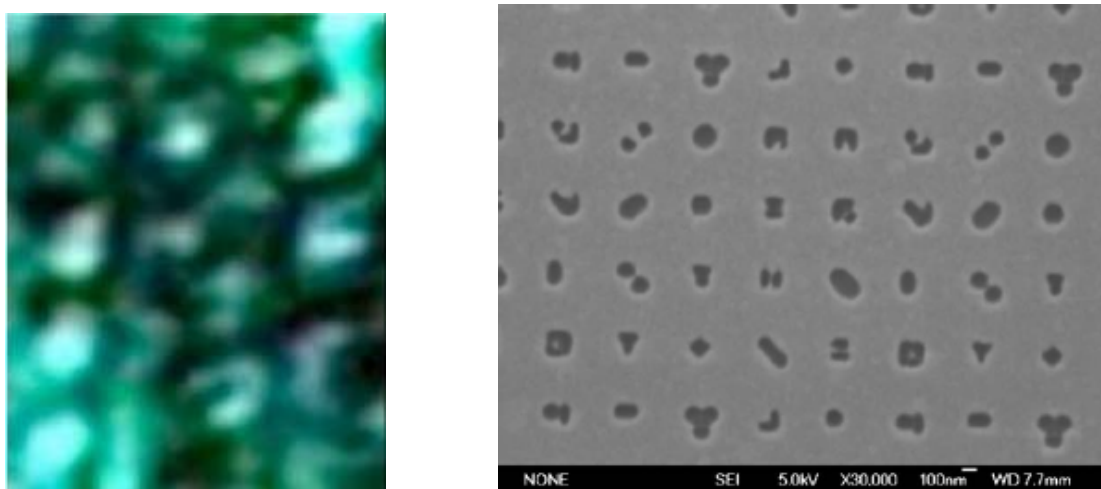
شکل (۱۶): استفاده از اثر ابرمنشور در تفکیک کانال های چگال مخابرات نوری [۳].



شکل (۱۷): شکست منفی و بازسازی کامل تصویر منبع نقطه‌ای نور توسط بلور فوتونی [۲۱].

در شکل بعدی پدیده‌ی شکست منفی توسط بلور فوتونی به نمایش درآمده است. همان طور که در این شبیه‌سازی دیده می‌شود، منبع نقطه‌ای نور در فاصله‌ای کمتر از یک طول موج نسبت به بلور فوتونی قرار دارد و با این وجود بلور فوتونی هنوز قادر به بازسازی یک تصویر حقیقی کامل از آن می‌باشد. با وجود آن که خود بلور فوتونی عموماً از ترکیب هوا و دی الکتریک‌های عادی مثل نیمه‌هادی‌ها ساخته می‌شود، از آن جایی که این پدیده قابل مقایسه با محیطی است که همزمان ضریب گذردهی الکتریکی و مغناطیسی موثر آن منفی است به پدیده شکست منفی نام گرفته است. پیرامون این مطلب بحث طولی‌تری در بخش‌های آینده خواهیم داشت. نیز اخیراً کوچک‌ترین سیستم مبتنی بر بلورهای فوتونی گزارش شده است که با استفاده بسیار هوشمندانه‌ای از سه اثر آبرمنشور، شکست منفی، و گاف فوتونی قادر به تفکیک کامل کانالهایی با فاصله تنها ۵ نانومتر می‌باشد [۲۲].

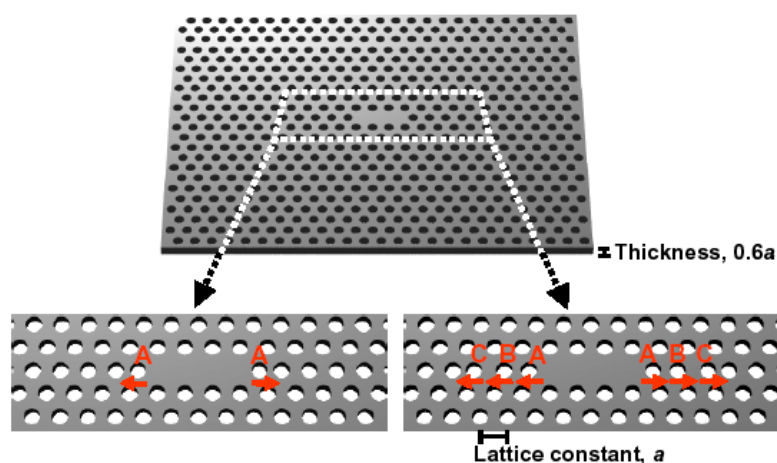
در یک گزارش جدید [۲۳] دیگر به قابلیت استفاده از بلورهای فوتونی برای تشخیص تصاویری با ابعاد ریزموج اشاره شده است. لذا با توجه به این توانایی‌ها میتوان ادعا کرد که مرز پراش کلاسیک توسط بلورهای فوتونی از میان رفته است. به عنوان نمونه‌ای بسیار در خور توجه به شکل (۱۸) توجه نمایید.



شکل (۱۸): عبور از مرز پراش کلاسیک؛ راست: تصویر میکروسکوپ الکترونی؛

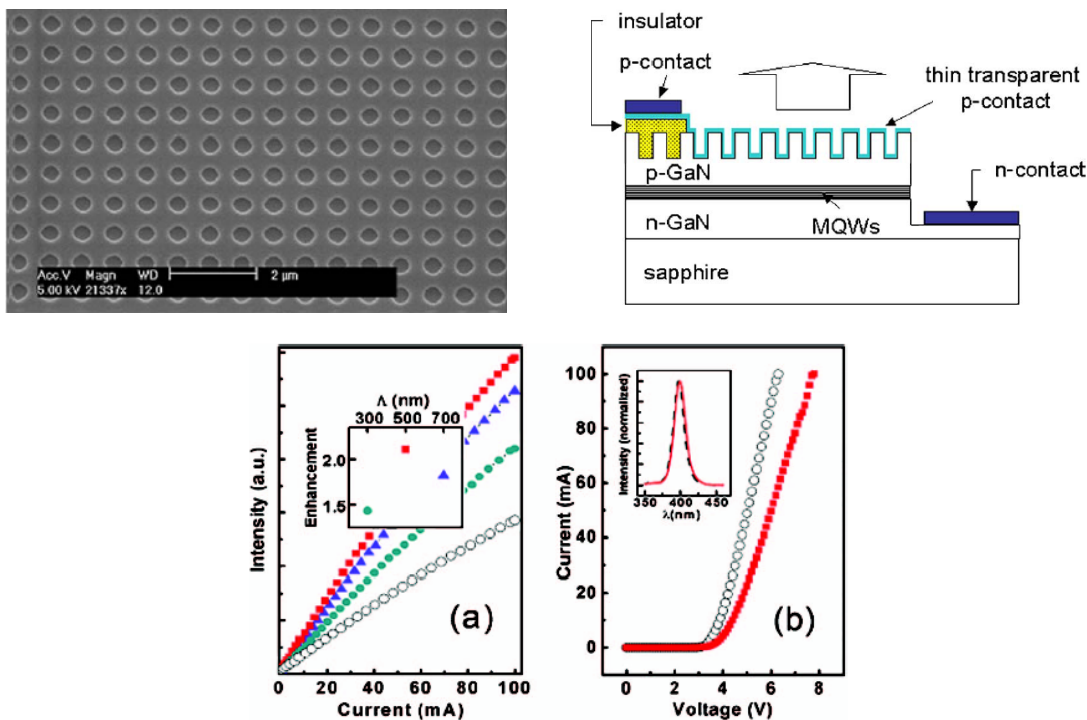
چپ: تصویر نور مرئی با کمک بلور فوتونی [۲۳].

بلورهای فوتونی نه تنها در فرم کامل و بدون نقص بلکه ضمن ایجاد نقایص گوناگون و کنترل شده به منظوره‌های گوناگون به کار می‌روند. انواع نقص‌ها در شبکه بلور فوتونی می‌توانند از نوع نقطه‌ای، خطی، و یا صفحه‌ای باشند. هر کدام از انواع این نقص‌ها منجر به خواص و ویژگی‌های قابل طراحی می‌گردند که کاربرد خاصی دارند. مثلاً نقص نقطه‌ای بصورت یک کاواک با حجم مود بسیار کوچک عمل می‌نماید. در شکل (۱۹) یک کاواک با بهینه‌سازی موقعیت سوراخهای بلور فوتونی مثلثی پیرامون یک نقص نقطه‌ای دیده می‌شود که منجر به ضریب کیفیت بزرگتر از 10^5 گردیده است [۲۴]. در این مثال و موارد مشابه حجم مود معمولاً از مرتبه‌ی بسیار کوچک $10^{-2} (n/\lambda)^3$ است که در آن n ضریب شکست دی‌الکتریک میزبان و λ طول موج می‌باشند.

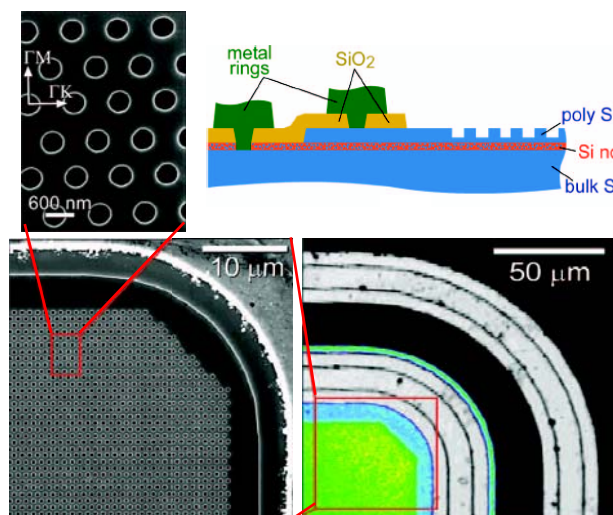


شکل (۱۹): کاواک بلور فوتونی با ضریب کیفیت بسیار بالا و حجم مود کوچک [۲۴].

بلورهای فوتونی در الکترونیک نوری هم از جایگاه ممتازی برخوردارند. این عمدتاً به دو دلیل است: انعکاس کامل و موثر از بلور فوتونی در گاف فوتونی و چگالی حالات صفر در گاف فوتونی. مورد اول موجب بازیافت موثر فوتون در کاواکها می‌گردد در حالی که به کمک چگالی حالات فوتونی صفر می‌توان اطمینان کسب نمود که آهنگ گسیل خودبخودی در گاف فوتونی دقیقاً برابر صفر است. لذا لیزرهایی با جریان آستانه بسیار کوچکتر از لیزرهای نیمه‌هادی معمول امکان‌پذیر می‌گردند. در این مورد بحث مفصل‌تری در دنباله‌ی این نوشتار خواهد آمد. شکل (۲۰) یک دیود نوری از جنس GaN را نمایش می‌دهد که اتصال شفاف آن در واقع یک بلور فوتونی با آرایش مربعی و ثابت شبکه دلخواه (قابل کنترل به هنگام ساخت) است. حضور بلور فوتونی در این ساختار موجب دوبرابر شدن شدت نور خروجی در جریان ثابت می‌گردد. به علاوه با تنظیم ثابت شبکه می‌توان طول موج را در بازه‌ی بسیار گسترده ۷۰۰-۳۰۰ نانومتر تنظیم نمود. هم‌چنین در گزارش جدیدتری با کمک ذرات نانو سیلیکون در بستر زیرین یک بلور فوتونی از جنس سیلیکون چندبلوری [۲۶] مولفین قادر به افزایش راندمان تولید نور از نانوذرات سیلیکون تا چهار مرتبه بوده‌اند. در شکل بعدی این ساختار دیده می‌شود.

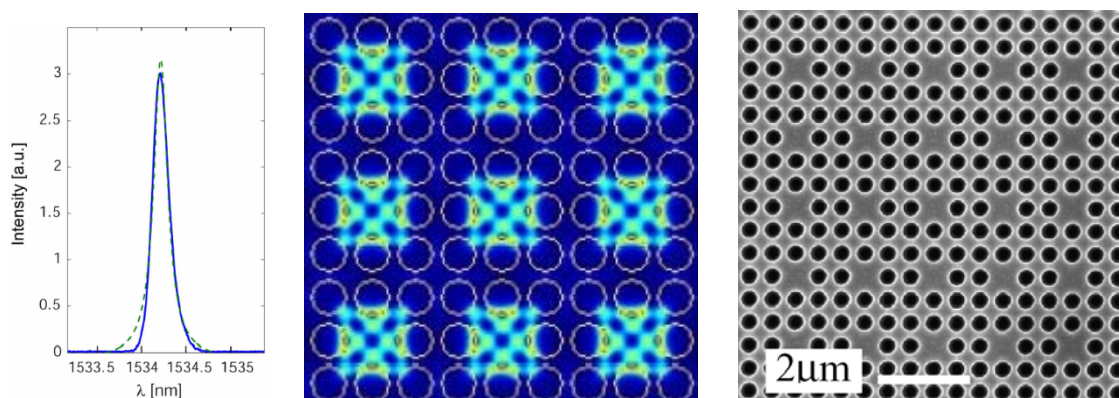


شکل (۲۰): دیود نوری GaN با بهره‌گیری از بلور فوتونی [۲۵]؛ بالا راست: ساختار دیود نوری و موقعیت بلور فوتونی؛ بالا چپ: تصویر میکروسکوپ الکترونی از بلور فوتونی بکار رفته؛ پایین: مشخصه‌های جریان-ولتاژ و شدت نور-جریان.



شکل (۲۱): دیود نوری نانوذرات سیلیکون با آینه بازایافت بلور فوتونی [۲۶].

در نهایت شکل (۲۲) ساختار جدیدی تحت عنوان آرایه‌ی کاواک‌های مزدوج بلور فوتونی را به منظور حصول یک ریزلیزر با جریان آستانه‌ی بسیار ناچیز نمایش می‌دهد که در [۲۷ و ۲۸] گزارش شده است. این ساختار اساساً دوبعدی است و در بلور فوتونی مربعی مورد آزمایش قرار گرفته است.

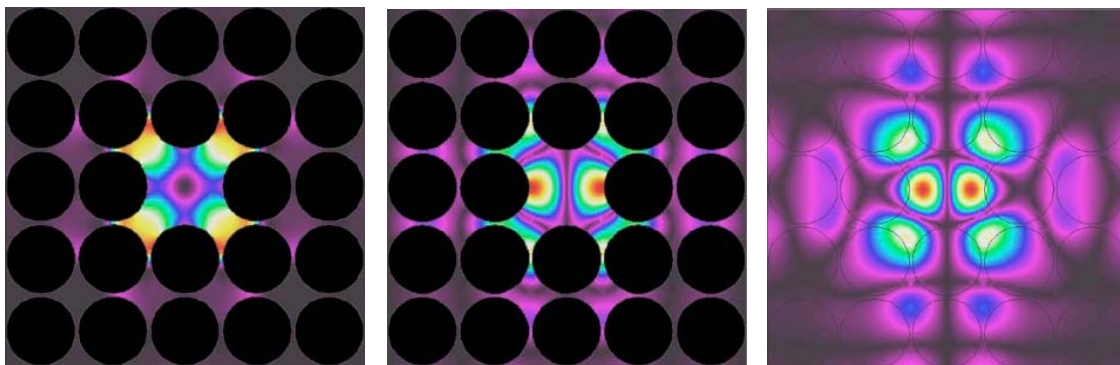


شکل (۲۲): آرایه‌ی کاواک‌های مزدوج بلور فوتونی؛ راست: ساختار دوبعدی آرایه در بلور فوتونی مربعی؛

وسط: شبیه سازی دامنه میدان الکتریکی لیزر؛ چپ: طیف تشعشع لیزر بدست آمده در $1354/2$ نانومتر [۲۷ و ۲۸].

از میان آخرین دستاوردهای قابل توجه در زمینه بلورهای فوتونی آرایه‌ی ساختاری جهت محصورسازی همزمان فوتون‌ها و فونون‌ها، یا به عبارت دیگر امواج الکترومغناطیس و فراصوت، است

[۲۹]. در این تحقیق مولفین برای اولین بار نشان داده‌اند که ساختار دو بعدی بلور فوتونی مربعی با سیلیکون به عنوان محیط میزبان و سوراخ‌های هوا قادر است گاف فوتونی و فونونی کامل ایجاد نماید و بنابراین امکان حصول یک کاواک که در آن واحد قادر به حبس فوتون‌ها و فونون‌ها در بسامدهای ویژه‌ی هر کدام می‌باشد، مشروط به آنکه نسبت شعاع سوراخ‌های استوانه‌ها به ثابت شبکه از $0/41$ کوچک‌تر نباشد. در شکل (۲) توزیع میدان‌ها و چگونگی این پدیده در کاواک مورد بحث نمایش داده شده است. با ادامه این تحقیقات و نتایج امیدوار کننده دیگر در زمینه‌ی بلورهای فوتونی امید می‌رود کاربردهای جدیدی مانند اثر نورصدا در بلورهای فوتونی-فونونی و سردسازی اپتیکی در این حیطه پا به عرصه وجود بگذارند.



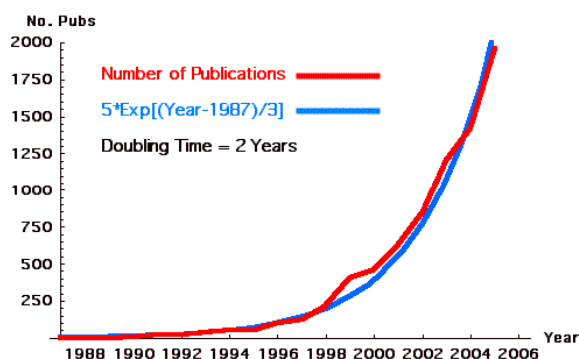
شکل (۲): نمایش توزیع میدانهای فوتون‌ها و فونون‌های کاواک بدست آمده در بلور فوتونی دو بعدی؛

راست: میدان الکتریکی مماسی مود اپتیکی با قطبش الکتریکی؛ وسط: مود ارتعاشی فونونی با قطبش مماسی؛

چپ: مود ارتعاشی فونونی با قطبش عمود [۲۹].

از نظر تعداد مقالات طبق شکل (۱) دیده می‌شود [۳۰] که تعداد مقالات منتشره‌ی داوری شده در مجلات معتبر بین المللی تقریباً از سال ۱۹۸۷ هر دو سال دو برابر شده است و تنها در سال گذشته میلادی (۲۰۰۵) بالغ بر حدود ۲۰۰۰ مقاله به چاپ رسیده است. بدین ترتیب می‌توان گفت که «قانون مور» بلورهای فوتونی در طول حدود ۲۰ سال پیاپی اعتبار خود را حفظ نموده است. بنابراین

شاید بتوان ادعا نمود که این زمینه را می‌توان از جالب‌ترین و جذاب‌ترین زمینه‌های نانوآپتیک به حساب آورد.



شکل (۱): تعداد مقالات منتشر شده سالانه در ارتباط با بلورهای فوتونی [۳۰].

مراجع

- [1] S. Khorasani, "Numerical Methods in Analysis of Photonic Crystals," *1st Workshop on Photonic Crystals*, Mashad (2005).
- [2] S. Khorasani, K. Mehrany, M. Chamanzar, B. Rashidian, A. Atabaki, "A Review of Photonic Crystal Science & Technology," *12th Conference on Optics & Photonics*, Shiraz (2006).
- [3] A. Lupu et. al., *Opt. Express* **12**, 5690 (2004).
- [4] H. Fu et. al., *Opt. Express* **13**, 7854 (2005).
- [5] Takayama et. al., *Appl. Phys. Lett.* **87**, 061107 (2005).
- [6] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 8th ed., Wiley (2004).
- [7] <http://members.shaw.ca/quadibloc/math/penint.htm>.
- [8] M. E. Zoorob et. al., *Nature* **404**, 740 (2000).
- [9] R. B. Wehrspohn and W. Hergert, *Lecture Notes on Photonic Crystals*.
- [10] S. John, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2486 (1987).
- [11] E. Yablonovitch, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059 (1987).
- [12] K. M. Ho et. al., *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3152 (1990).
- [13] E. Yablonovitch et. al., *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2295 (1991).
- [14] K. Ho et. al., *Solid State Commun.* **89**, 413 (1994).
- [15] http://www.llnl.gov/CASC/emsolve/pbg_simulation.html.

- [16] O. Toader and S. John, *Science* **292**, 1133 (2001).
- [17] L. L. Seet et. al., *Adv. Mat.* **17**, 541 (2005).
- [18] E. Yablonovitch, *Sci. Am.*, 47 (Dec. 2001).
- [19] Z. Zhu and T. Brown, *Opt. Express* **10**, 853 (2002).
- [20] H. Bensity et. al., *Proc. IEEE* **94**, 997 (2006).
- [21] X. Wang et. al., *Opt. Express* **12**, 2919 (2004).
- [22] B. Momeni and A. Adibi, *Laser Focus World* **42**, 125 (2006).
- [23] I. I. Smalyaninov et. al., *Phys. Rev. B* **72**, 085442 (2005).
- [24] Y. Akahane et. al., *Opt. Express* **13**, 1202 (2005).
- [25] D. H. Kim et. al. *Appl. Phys. Lett.* **87** 203508 (2005).
- [26] C. D. Presti et. al., *Appl. Phys. Lett.* **88**, 033501 (2006).
- [27] H. Altug and J. Vučković, *Opt. Express* **13**, 8819 (2005).
- [28] H. Altug et al., *Nature Phys.* **2**, 484 (2006).
- [29] M. Maldovan and E. L. Thomas, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 251907 (2006).
- [30] <http://phys.lsu.edu/~jdowling/pbgbib.html>

تمرین

- ۱- آیا به نظر شما پارامتر نسبت گاف m دارای یک حداکثر است؟ حداقل چطور؟ اگر بسامد پایین اولین گاف فوتونی f_1 باشد آیا لزوماً $\min\{f_1\} > 0$ ؟
- ۲- دو ساختار بلور فوتونی دو بعدی ترسیم کنید که دارای تقارن دورانی دوگون و سه‌گون باشند.
- ۳- نشان دهید که بلور فوتونی مثلثی را میتوان به مثابه‌ی یک بلور فوتونی با سلول واحد مستطیل فرض کرد. بردارهای پایه و نسبت طول آنها را نمایش دهید.
- ۴- ساختار یابلونوویت از ایجاد سه دسته سوراخ‌های متقاطع در سطح یک حجم مکعبی ایجاد می‌شود که هر دسته شامل استوانه‌های موازی با هم است. زاویه‌ی بین دسته سوراخ‌ها را بیابید.

بخش ۱

مقدمه‌ای بر الکترومغناطیس محیط‌های ناهمگن

برای بررسی بلور فوتونی باید معادلات حاکم بر حرکت نور در محیط‌های متناوب اپتیکی را مطالعه کنیم. این معادلات از جنبه‌های مختلفی شبیه به معادلات حاکم بر حرکت الکترون منفرد در یک چاه پتانسیل مستقل از زمان، یا همان معادله‌ی شرودینگر هستند. به عنوان مثال برای یک الکترون غیر نسبیتی که در پتانسیل $V(\mathbf{r})$ حرکت می‌کند داریم:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

که E انرژی و $\psi(\cdot)$ تابع موج الکترون، m جرم الکترون آزاد و \hbar ثابت کاهش یافته‌ی پلانک می‌باشد. با تعریف عملگر هامیلتونی \mathbb{H} به صورت زیر:

$$\mathbb{H} \triangleq \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \quad (2)$$

معادله (۱) بصورت زیر در می‌آید:

$$\mathbb{H} \psi = E \psi \quad (3)$$

این معادله در حقیقت مستقیماً با یک مسأله‌ی مقدار ویژه در جبر ماتریس‌ها قابل قیاس است که در آن E مقدار ویژه‌های ماتریس مربعی متناظر با عملگر هامیلتونی \mathbb{H} باشد. در حقیقت با کمک حل مستقیم معادله دیفرانسیل (۱) می‌توان این مقادیر ویژه را با روش‌های مرسوم یافت.

در مقایسه با تابع موج الکترون برای توضیح انتشار امواج نور یا حرکت فوتون‌ها در تقریب الکترومغناطیس کلاسیک از معادلات ماکسول استفاده می‌شود:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (۴-۱)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (۴-۲)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (۴-۳)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (۴-۴)$$

برای یک محیط بدون بار آزاد و چگالی جریان آزاد الکتریکی که شرایط $\rho(\mathbf{r}) \equiv 0$ و $\mathbf{J}(\mathbf{r}) \equiv 0$ در آن حاکم است معادلات ماکسول به شکل زیر ساده و در واقع خطی می‌شوند:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (۵-۱)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (۵-۲)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (۵-۳)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (۵-۴)$$

با کمی دقت می‌توان دید که برای امواج الکترومغناطیس معادلات (۵-۱) و (۵-۲) به ترتیب خود به خود معادلات (۵-۳) و (۵-۴) را ارضا می‌کنند. این مسأله موجب می‌گردد تا حل آنها احتیاج به دست کم دو معادله‌ی دیگر داشته باشد که به معادلات ساختاری مشهورند. معادلات ساختاری در حالت کلی به فرم زیر قابل نمایش هستند [۱]:

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}, \vec{S}) \quad (۶-۱)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}, \vec{S}) \quad (۶-۲)$$

که در آن \vec{S} تانسور کرنش می‌باشد. در غیاب فعالیت اپتیکی و اثر پیزوالکتریک خواهیم داشت:

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) E_k(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \chi_{ijkl}^{(3)}(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t) E_k(\mathbf{r}, t) E_l(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (7-1)$$

$$H_i(\mathbf{r}, t) = \mu_0^{-1} v_{ij}(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) + \mu_0^{-1} \zeta_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) B_k(\mathbf{r}, t) + \mu_0^{-1} \zeta_{ijkl}^{(3)}(\mathbf{r}, t) B_j(\mathbf{r}, t) B_k(\mathbf{r}, t) B_l(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (7-2)$$

در اینجا $\chi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ و $\zeta^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ تانسورهای از رتبه m و وابسته به مکان و زمان هستند که ویژگی‌های غیر خطی محیط را می‌رسانند. بدیهی است که طبق این تعریف $\chi_{ij}^{(1)} \equiv \varepsilon_{ij}$ و $\zeta_{ij}^{(1)} \equiv v_{ij}$ که در آن $[\mu_{ij}]^{-1} \equiv [v_{ij}]$ (برخی ویژگی‌های انتشار در محیط‌های ناهمسانگرد خطی در مراجع [۲-۴] مورد بحث قرار گرفته است). نیز عمل جمع برای زیرنویس‌های تکرار شده برقرار است. (طبق قاعده‌ی نمایش اینشتاین برای ضرب تانسورها می‌توان از نوشتن صریح عمل جمع (Σ))، هنگامی که یک زیرنویس تکرار می‌گردد صرف نظر کرد. موارد خاصی که با وجود تکرار زیرنویس عمل جمع نباید صورت پذیرد، به طور مشخص مستثنا خواهند شد. همان طور که دیده می‌شود این معادلات می‌توانند بسیار پیچیده و گاه حتی جملات غیر خطی شامل عملگرهای مشتق و انتگرال‌گیری زمانی (برای مواد پاشنده) نیز باشند. چنانچه در محدوده فرکانس مورد توجه از پاشندگی بتوان صرف نظر کرد برای تمامی بلورهای مکعبی مانند Si، GaAs، و InAs با توجه به گروه تقارن آنها و مقادیر عملی پارامترها خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) \equiv \varepsilon_r(\mathbf{r}, t) \delta_{ij} \quad (8-1)$$

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \equiv 0 \quad (8-2)$$

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\mathbf{r}, t) \equiv \chi^{(3)}(\mathbf{r}) [\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}], \text{ بدون جمع} \quad (8-3)$$

$$\chi^{(m)}(\mathbf{r}, t) \equiv 0, m > 3 \quad (8-4)$$

$$\zeta^{(m)}(\mathbf{r}, t) \equiv 0, m > 1 \quad (8-5)$$

که در آن δ_{ij} دلتای کرونکر است. توجه شود که در رابطه (۸-۳) جمعی روی زیرنویس‌های تکرار شده صورت نمی‌گیرد. پس معادلات (۷) به فرم زیر ساده خواهند شد:

$$\vec{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}, t) \vec{E}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\mathbf{r}, t) |\vec{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \vec{E}(\mathbf{r}, t) \quad (9-1)$$

$$\vec{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \vec{H}(\mathbf{r}, t) \quad (9-2)$$

بدیهی است برای بلورهایی که تقارن مکعبی ندارند (مثل LiNbO_3) $\chi^{(2)} \neq 0$ امکان تولید هماهنگ‌های زوج وجود دارد. در این رابطه به طور جداگانه بحث خواهیم داشت. ولی اگر بخواهیم فقط اثر خطی را در محیط غیر مغناطیسی همسانگرد در نظر بگیریم آن گاه $\vec{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}, t) \vec{E}(\mathbf{r}, t)$ در صورتی که پارامترهای محیط در زمان تغییر نکنند و یا با تقریب نرخ تغییرات آن خیلی نسبت به بسامد نوسانات میدانها کند باشد می توان نوشت:

$$\vec{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}) \vec{E}(\mathbf{r}, t) \quad (10-1)$$

$$\vec{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \vec{H}(\mathbf{r}, t) \quad (10-2)$$

برای سیستم هایی که این شرط صادق نباشد، معمولا مسأله باید به صورت عددی در حوزه زمان حل شود. در هر حال چون محیط هنوز دارای تابعیت مکانی است ناهمگن نامیده می‌شود. در غیر این حالت $\vec{\nabla} \cdot \vec{\varepsilon}_r \equiv 0$ برقرار خواهد بود و محیط را همگن می‌نامیم.

در بخش عمده این نوشتار روابط سازنده‌ی بلورهای فوتونی از معادلات (۱۰) پیروی می‌کنند. به بیان دیگر بیشتر بحث بر روی محیط‌های خطی، همسانگرد، غیر مغناطیسی، فاقد فعالیت اپتیکی، اثر پیزوالکتریک و پاشندگی، مستقل از زمان، ولی ناهمگن (و البته دارای برخی تقارنهای فضایی خاص) متمرکز خواهد بود. در حالات خاص هر کدام از اثرات فوق را به تفکیک مطالعه خواهیم نمود.

برای سیستمی که در حالت پایای سینوسی و تک بسامد قرار دارد مناسب است تحلیل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی توسط فازورها انجام پذیرد:

$$\vec{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad (11-1)$$

$$\vec{D}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{D}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad (11-2)$$

$$\vec{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \quad (11-3)$$

$$\vec{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \quad (11-4)$$

که در آن ω بسامد منبع است. بنابراین معادلات ماکسول در فضای مختلط فازورها به شکل زیر ظاهر می‌شوند:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\mu_0\omega\mathbf{H} \quad (12-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\varepsilon(\mathbf{r})\omega\mathbf{E} \quad (12-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (12-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (12-4)$$

با توجه به صفر بودن واگرایی بردارهای \mathbf{B} داریم $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. ولی واگرایی میدان \mathbf{E} به صورت زیر ظاهر خواهد شد:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{E}) = \varepsilon\nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \varepsilon \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (13)$$

پس به دست می‌آید:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \ln \varepsilon \cdot \mathbf{E} \neq 0 \quad (14)$$

که نشان می‌دهد در محیط ناهمگن واگرایی میدان \mathbf{E} اصولاً صفر نیست. حال با تقسیم طرفین (۱۲) به گذردهی الکتریکی نسبی، ε_r ، و گرفتن چرخش از دو طرف معادلات (۱۲) خواهیم داشت:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\mu_0\omega\nabla \times \mathbf{H} = -j\mu_0\omega(j\varepsilon\omega\mathbf{E}) = \omega^2\varepsilon\mu_0\mathbf{E} \quad (15-1)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) = j\varepsilon_0\omega\nabla \times \mathbf{E} = j\varepsilon_0\omega(-j\mu_0\omega\mathbf{H}) = \omega^2\varepsilon_0\mu_0\mathbf{H} \quad (15-2)$$

بنابراین با تعریف $c \triangleq 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ به عنوان سرعت فاز نور در خلأ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \quad (16-1)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H} \quad (16-2)$$

اکنون دو عملگر \mathbb{L}_E و \mathbb{L}_H را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\mathbb{L}_E \triangleq \frac{1}{\epsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \nabla \times (\cdot) \quad (17-1)$$

$$\mathbb{L}_H \triangleq \nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times (\cdot) \right) \quad (17-2)$$

و در نتیجه معادله ویژه مقدار میدان الکتریکی و مغناطیسی در قیاس با (۳) به شکل زیر ظاهر می‌شود:

$$\mathbb{L}_E \mathbf{E} = k_0^2 \mathbf{E} \quad (18-1)$$

$$\mathbb{L}_H \mathbf{H} = k_0^2 \mathbf{H} \quad (18-2)$$

که در آن $k_0 \triangleq \omega/c = 2\pi/\lambda$ متناظر با عدد موج در خلاء است. باید توجه شود که در واقع برای بدست آوردن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی لازم نیست هر دو معادله را حل کرد، بلکه کافی است یکی از آنها را حل کرد و برای بدست آوردن دیگری از معادلات ماکسول استفاده نمود. ولی در مسائل یک بعدی و دوبعدی معمولاً یکی از معادلات (۱۸) به فرم نرده‌ای ساده می‌شود و حل آن بسیار آسانتر می‌گردد. در این حال بسته به کمیت نرده‌ای شده قطبش الکتریکی یا مغناطیسی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. نیز می‌توان نشان داد که اصولاً \mathbb{L}_H عملگری خودالحاق است در حالیکه \mathbb{L}_E لزوماً این چنین نیست. در این موارد در بخش بعدی صحبت بیشتری خواهیم داشت.

مراجع

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [2] A. Yariv and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*, Wiley, New York (2003).
- [3] S. Khorasani, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **3**, 144 (2001).
- [4] S. Khorasani and B. Rashidian, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **4**, 111 (2002).

تمرین

۱- نشان دهید مجموعه معادلات (۵) برای به دست آوردن چهار میدان برداری مجهول آن کافی نیست، اگر میدانهای برداری متغیر با زمان باشند.

۲- در یک بلور فوتونی خطی، ناهمسانگرد و ناهمگن داریم $\mu(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{r})$ و $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r})$ نشان دهید:

$$\mathbb{L}_E = \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \left[\frac{1}{\mu_r(\mathbf{r})} \nabla \times (\cdot) \right]$$

$$\mathbb{L}_H = \frac{1}{\mu_r(\mathbf{r})} \nabla \times \left[\frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times (\cdot) \right]$$

آیا هنوز \mathbb{L}_H خودالحاق است؟ اگر $\nabla \varepsilon \equiv 0$ باشد در مورد \mathbb{L}_E چه می‌توان گفت؟

۳- امیدانس یک محیط ناهمگن همسانگرد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta(\mathbf{r}) \triangleq \sqrt{\mu(\mathbf{r})/\varepsilon(\mathbf{r})}$$

نشان دهید اگر $\nabla \eta \equiv 0$ باشد داریم $\mathbb{L}_E \equiv \mathbb{L}_H \triangleq \mathbb{L}$.

۴- رابطه‌ی پاشندگی (۹-۱) برای محیط مستقل از زمان به صورت زیر در می‌آید:

$$\vec{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \left[\varepsilon_r(\mathbf{r}) + \chi^{(3)}(\mathbf{r}) |\vec{E}(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \vec{E}(\mathbf{r}, t)$$

رابطه‌ای معکوس بین بردارهای $\vec{E}(\mathbf{r}, t)$ و $\vec{D}(\mathbf{r}, t)$ بیابید (راهنمایی: ابتدا ویژگی توازی

این دو بردار را ثابت کنید).

بخش ۲

انتشار موج در سیستم ناهمگن یک بعدی

در سیستم‌های ناهمگن یک بعدی مستقل از زمان و خطی $\varepsilon(\mathbf{r})$ فقط تابعیت نسبت به یک بعد مکانی مانند x را می‌پذیرد، به بیان دیگر خواهیم داشت $\frac{\partial}{\partial y} \varepsilon \equiv \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \equiv 0$ ؛ پس $\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon(x)$. باید در نظر داشت که در این حالت هنوز میدانهای الکتریکی و مغناطیسی می‌توانند به هر سه مولفه مکانی x ، y و z وابسته باشند:

$$\vec{E}(\mathbf{r}, t) = \vec{E}(x, y, z, t) \quad (1-1)$$

$$\vec{B}(\mathbf{r}, t) = \vec{B}(x, y, z, t) \quad (1-2)$$

حال فرض کنید برای محیط مفروض ε و μ به صورت زیر باشد:

$$\varepsilon = \varepsilon(x) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(x) \quad (2-1)$$

$$\mu = \mu_0 \quad (2-2)$$

از ترکیب روابط ماکسول و با فرض تحریک زمانی تک بسامد خواهیم داشت:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0^2 \varepsilon_r(x) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

حال با کمک اتحاد:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (4)$$

که در آن $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ است، و همچنین رابطه به دست آمده در بخش قبل برای واگرایی میدان الکتریکی، یعنی $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \ln \varepsilon \cdot \mathbf{E}$ خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -(\nabla_x \ln \varepsilon \hat{x}) \cdot \mathbf{E} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon(x)} E_x \quad (5)$$

و در نتیجه رابطه‌ی (۳) به فرم زیر تبدیل می‌گردد:

$$\nabla \left[-\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon(x)} E_x \right] - \nabla^2 \mathbf{E} = k_0^2 \varepsilon_r(x) \mathbf{E}(x, y, z) \quad (6)$$

در رابطه‌ی (۵) \hat{x} بردار یکه در راستای x است. در صورتی که میدان الکتریکی مولفه‌ی x نداشته باشد (میدان فقط دارای مولفه‌ی عمود باشد) و یا ε به x وابسته نباشد، جمله اول در سمت چپ حذف خواهد شد و به معادله موج زیر خواهیم رسید:

$$-\nabla^2 \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) = k_0^2 \varepsilon_r(x) \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) \triangleq \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_\parallel(\mathbf{r}) = E_y(\mathbf{r}) \hat{y} + E_z(\mathbf{r}) \hat{z} \quad (7)$$

در رابطه‌ی (۷) \mathbf{E}_\perp میدان الکتریکی عمود، و به طریق مشابه $\mathbf{E}_\parallel \triangleq E_x \hat{x}$ میدان الکتریکی موازی هستند. از این چیدمان به قطبش الکتریکی عمود یا به اختصار TE یاد می‌شود.

حال برای مثال انتشار یک موج الکتریکی عرضی در راستای x را در نظر می‌گیریم، و با استفاده از معادله فوق شکل موج را استخراج خواهیم کرد. بدیهی است که میدان الکتریکی فقط در راستای y و z مولفه خواهد داشت:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_y(x, y, z) \hat{y} + E_z(x, y, z) \hat{z} \quad (8)$$

با جای‌گذاری در معادله‌ی برداری موج (۷) برای مولفه‌های E_y و E_z دو معادله‌ی مجزا با مشتقات جزئی به دست می‌آید:

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_y(x, y, z) = k_0^2 \varepsilon_r(x) E_y(x, y, z) \quad (9-1)$$

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_z(x, y, z) = k_0^2 \varepsilon_r(x) E_z(x, y, z) \quad (9-2)$$

در این جا با کمک تعریف تبدیل فوریه نسبت به y و z به فرم:

$$A_i(x; \beta, \gamma) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint E_i(x, y, z) e^{j\beta y} e^{j\gamma z} dy dz, \quad i = y, z \quad (10)$$

مولفه‌های میدان الکتریکی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$E_i(x, y, z) = \iint A_i(x; \beta, \gamma) e^{-j\beta y} e^{-j\gamma z} d\beta d\gamma, \quad i = y, z \quad (11)$$

با جانشینی (۱۱) در (۹) و در نظر گرفتن روابط مشتق $\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow -j\gamma$ و $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -j\beta$ به معادلات زیر

خواهیم رسید:

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\beta^2 + \gamma^2) \right] A_i(x; \beta, \gamma) = k_0^2 \varepsilon_r(x) A_i(x; \beta, \gamma), \quad i = y, z \quad (12)$$

یا به بیان دیگر:

$$\mathbb{L} A_i = 0, \quad i = y, z \quad (13)$$

که در آن عملگر خطی مرتبه دوم \mathbb{L} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{L} \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x^2} + [k_0^2 \varepsilon_r(x) - (\beta^2 + \gamma^2)] \quad (14)$$

در اینجا β و γ اعداد انتشار هستند که زاویه‌ی انتشار موج با محورهای y و z را مشخص می‌کنند. از

نظر ریاضی بین β و γ ، و راستاهای y و z نمی‌توان تفاوتی قایل شد، و لذا معادله در حالت $\gamma = 0$ به

صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} + [k_0^2 \varepsilon_r(x) - \beta^2] A(x) = 0 \quad (15)$$

بنابراین برای حالت عرضی TE یا مسایل مکانیک کوانتومی یک بعدی غیر نسبیتی به معادله زیر

می‌رسیم:

$$\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} + k^2(x) A(x) = 0 \quad (16)$$

که در آن $k^2(x)$ با توجه به نوع مسأله به یکی از دو صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k^2(x) \triangleq k_0^2 \varepsilon_r(x) - \beta^2 \quad (\text{مسأله انتشار نور با قطبش عرضی الکتریکی}) \quad (17-1)$$

$$k^2(x) \triangleq \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \quad (\text{مسأله یک بعدی مکانیک کوانتوم}) \quad (17-2)$$

در حالت کلی حل صریحی برای معادله (۱۶) وجود ندارد، ولی در حالات خاصی که ϵ_r دارای تابعیت مکانی خاصی (مانند مسأله‌ی نوسانگر هماهنگ) است یا بصورت پله‌ای تغییر می‌کند، همان طور که در ادامه بحث خواهیم کرد می‌توان حل دقیقی با کمک روش ماتریس‌های انتقال برای آن یافت [۳-۱]. نشان داده شده است که با تعمیم روش ماتریس‌های انتقال می‌توان روشی را به دست آورد که حل دقیق و موثری را از مسأله (۱۶) به دست می‌دهد [۴-۶]، که در حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه بالاتر [۷] و تحلیل دقیق بلورهای فوتونی یک بعدی [۸] قابل کاربرد خواهد بود. ولی در حالات خاصی که $k^2(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد حل تقریبی مناسبی مشهور به WKB برای معادله (۱۶) به شکل زیر موجود است [۹ و ۴]:

$$A(x) \cong \frac{C_1}{\sqrt{k(x)}} \exp\left[-j \int_{x_0}^x k(x') dx'\right] + \frac{C_2}{\sqrt{k(x)}} \exp\left[+j \int_{x_0}^x k(x') dx'\right] \quad (18)$$

که در آن $C_i, i=1,2$ ثابت‌های اختیاری و x_0 یک نقطه مبدا می‌باشد. در صورتی که تغییرات $k^2(x)$ کند باشد می‌توان رابطه‌ی (۱۸) را ساده‌تر نمود:

$$A(x) \cong C_1 \exp\left[-j \int_{x_0}^x k(x') dx'\right] + C_2 \exp\left[+j \int_{x_0}^x k(x') dx'\right] \quad (19)$$

در معادله‌ی (۱۸) $C_i, i=1,2$ به مثابه‌ی ضرایب امواج رفت و برگشت در راستاهای $+x$ و $-x$ عمل می‌کنند. دیده می‌شود که تقریب (۱۸) مادامی درست است که از برهمکنش این دو موج بتوان صرف نظر کرد یا به بیان دیگر انعکاس موج در محیط خیلی ضعیف باشد. به بیان دیگر، تا وقتی تغییرات

$$k(x) \text{ در فاصله یک طول موج اندک است این تقریب معتبر خواهد بود } \left(\left|\frac{\partial k}{\partial x}\right| \ll \frac{k}{\lambda}\right).$$

حال با بازسازی میدان الکتریکی از روی تبدیل عکس فوریه‌ی آن می‌توان حل عمومی میدان الکتریکی در فضا-زمان را به دست آورد:

$$\vec{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\iint d\beta d\gamma \sum_{i=y,z} \hat{A}_i(x; \omega, \beta, \gamma) e^{-j\beta y} e^{-j\gamma z} e^{j\omega t} \right] \quad (20)$$

واضح است که در استخراج رابطه (۳) تابعیت فازور میدان الکتریکی \mathbf{E} نسبت به ω محذوف بوده است. لذا اگر در سیستم حقیقی ترکیبی یا طیف پیوسته‌ای از بسامدهای گوناگون وجود داشته باشد از رابطه زیر برای یافتن جواب عمومی در نهایت می‌بایست استفاده گردد:

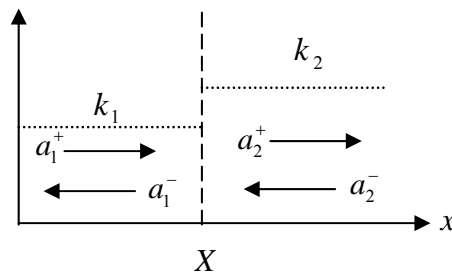
$$\vec{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\int d\omega \iint d\beta d\gamma \sum_{i=y,z} \hat{A}_i(x; \omega, \beta, \gamma) e^{-j\beta y} e^{-j\gamma z} e^{j\omega t} \right] \quad (21)$$

حل الگوریتمی معادله برای دو لایه

برای حل الگوریتمی معادله‌ی (۱۶) ابتدا حالت همگن را در نظر می‌گیریم. بدیهی است می‌توان تابع مجهول $A(x)$ را به صورت مجموع دو موج پیش‌رو و پس‌رو نوشت که خواهیم داشت:

$$A(x) = a^+ e^{-jkx} + a^- e^{+jkx} \quad (22)$$

که در آن a^+ و a^- به ترتیب دامنه‌های مختلط امواج پیش‌رو (در جهت $+x$) و پس‌رو (در جهت $-x$) می‌باشند. نیز k را عدد موج می‌نامیم. حال وقتی سیستم ناهمگنی در طرفین مرزی مانند $x = X$ همگن باشد آرایشی مانند شکل (۱) به دست می‌آید. در اینجا تابع عدد موج $k(x)$ در طرفین مرز به صورت رابطه (۲۳) تعریف می‌شود.



شکل (۱): آرایش تابع گذردهی در یک سیستم ناهمگن.

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & x < X \\ k_2 & x > X \end{cases} \quad (۲۳)$$

k_1 و k_2 برای مسایل اپتیک یا کوانتومی (طبق قرارداد) از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$k_i = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_i - \beta^2} \quad \text{or} \quad -j\sqrt{\beta^2 - k_0^2 \varepsilon_i}, \quad i = 1, 2 \quad (۲۴-۱)$$

$$k_i = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_i)} \quad \text{or} \quad -j\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_i - E)}, \quad i = 1, 2 \quad (۲۴-۲)$$

به هر حال باید $\text{Re}[k_i] > 0$ یا $\text{Re}[jk_i] > 0$. پس برای $A(x)$ برای هر سمت مرز خواهد بود:

$$A_1(x) \triangleq A(x < X) = a_1^+ e^{-jk_1 x} + a_1^- e^{+jk_1 x} \quad (۲۵-۱)$$

$$A_2(x) \triangleq A(x > X) = a_2^+ e^{-jk_2 x} + a_2^- e^{+jk_2 x} \quad (۲۵-۲)$$

در مسایل مکانیک کوانتومی $A(x)$ و مشتق آن $\frac{\partial}{\partial x} A(x)$ روی مرز $x = X$ باید پیوسته باشند. در

انتشار امواج الکترومغناطیسی با قطبش TE $A(x)$ دلالت بر دامنه میدان الکتریکی مماس بر مرز

دارد و لذا پیوسته است. شرط مرزی دومی هم با کمک پیوستگی مولفه مماسی میدان مغناطیسی

ایجاب می‌شود که باز هم منجر به پیوستگی $\frac{\partial}{\partial x} A(x)$ می‌گردد. پس به دو معادله خواهیم رسید:

$$a_1^+ e^{-jk_1 X} + a_1^- e^{+jk_1 X} = a_2^+ e^{-jk_2 X} + a_2^- e^{+jk_2 X} \quad \text{پیوستگی در مرز} \quad (۲۶-۱)$$

$$-k_1 a_1^+ e^{-jk_1 X} + k_1 a_1^- e^{+jk_1 X} = -k_2 a_2^+ e^{-jk_2 X} + k_2 a_2^- e^{+jk_2 X} \quad \text{پیوستگی مشتق در مرز} \quad (۲۶-۲)$$

بازنویسی این معادلات به شکل ماتریسی محاسبات را بسیار راحت‌تر می‌کند. بنابراین ابتدا بردارهای

دامنه را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{A}_i \triangleq \begin{bmatrix} a_i^+ \\ a_i^- \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \quad (۲۷)$$

بنابراین برای توابع موج (۲۵) به دست می‌آید:

$$A_i(x) = \begin{bmatrix} e^{-jk_i x} & e^{+jk_i x} \end{bmatrix} \mathbf{A}_i, \quad i = 1, 2 \quad (۲۸)$$

حال شرایط پیوستگی را روی آنها اعمال می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} e^{-jk_2 X} & e^{+jk_2 X} \\ k_2 e^{-jk_2 X} & -k_2 e^{+jk_2 X} \end{bmatrix} \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} e^{-jk_1 X} & e^{+jk_1 X} \\ k_1 e^{-jk_1 X} & -k_1 e^{+jk_1 X} \end{bmatrix} \mathbf{A}_1 \quad (۲۹)$$

و بنابراین به دست می‌آید:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{-2k_2} \begin{bmatrix} -k_2 e^{jk_2 X} & -e^{jk_2 X} \\ -k_2 e^{-jk_2 X} & e^{-jk_2 X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-jk_1 X} & e^{jk_1 X} \\ k_1 e^{-jk_1 X} & -k_1 e^{jk_1 X} \end{bmatrix} \mathbf{A}_1 \quad (30)$$

با توجه به روابط فوق ماتریس انتقال از محیط ۱ به ۲ $\mathbf{Q}_{1 \rightarrow 2}$ را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$\mathbf{Q}_{1 \rightarrow 2} \triangleq \frac{1}{2k_2} \begin{bmatrix} (k_2 + k_1) e^{+j(k_2 - k_1)X} & (k_2 - k_1) e^{+j(k_2 + k_1)X} \\ (k_2 - k_1) e^{-j(k_2 + k_1)X} & (k_1 + k_2) e^{-j(k_2 - k_1)X} \end{bmatrix} \quad (31)$$

پس (۳۰) را می‌توان به اختصار نوشت:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_{1 \rightarrow 2} \mathbf{A}_1 \quad (32)$$

اگر $k_1 = k_2$ باشد که به معنی همگن بودن کامل محیط است، بدیهی است که $\mathbf{Q}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{I}$. این بدان معنی است که دامنه امواج پیش‌رو و پس‌رو در مرز تغییری نمی‌کند و انعکاس یا تداخلی رخ نخواهد داد. از طرف دیگر دترمینان ماتریس انتقال برابر با نسبت بردارهای موج دو محیط است:

$$|\mathbf{Q}_{1 \rightarrow 2}| = \frac{k_1}{k_2} \quad (33)$$

پس اصولاً با دانستن دامنه امواج پیش‌رو و پس‌رو در محیط ۱ می‌توان با کمک (۳۲) حل معادله (۱۶) را در محیط ۲ یافت. بر عکس، با شناخت موج در محیط ۲ می‌توان موج را در محیط ۱ به دست آورد. بدین جهت وارون ماتریس انتقال را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{Q}_{2 \rightarrow 1} \triangleq (\mathbf{Q}_{1 \rightarrow 2})^{-1} \quad (34)$$

بنابراین:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_{2 \rightarrow 1} \mathbf{A}_2 = (\mathbf{Q}_{1 \rightarrow 2})^{-1} \mathbf{A}_2 \quad (35)$$

محاسبه ضرایب عبور و بازتاب با استفاده از ماتریس انتقال

فرض می‌کنیم موج از سمت چپ در راستای $+x$ منتشر شده و به مرز $x = X$ برسد. در سمت چپ مرز یک موج بازتاب پدید می‌آید در حالی که چون هیچ مرز دیگری در سمت راست $x = X$ نداریم،

بازتاب دیگری پس از عبور از مرز $x = X$ نخواهیم داشت؛ بدیهی است که $a_2^- = 0$. پس می‌توان (۳۲) را به شکل زیر ساده کرد:

$$\begin{bmatrix} a_2^+ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^+ \\ a_1^- \end{bmatrix} \quad (۳۶)$$

که در آن $\mathbf{Q}_{1 \rightarrow 2} = [q_{ij}]$. از سطر دوم (۳۶) داریم $q_{21}a_1^+ + q_{22}a_1^- = 0$ و بنابراین ضریب بازتاب R از رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$R \triangleq \frac{a_1^-}{a_1^+} = -\frac{q_{21}}{q_{22}} \quad (۳۷)$$

در نهایت از حل سطر اول ضریب عبور T حاصل می‌گردد:

$$T \triangleq \frac{a_2^+}{a_1^+} = \frac{|\mathbf{Q}_{1 \rightarrow 2}|}{q_{22}} \quad (۳۸)$$

با جای‌گذاری (۳۱) در (۳۷) و (۳۸) خواهیم داشت:

$$R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} e^{-2jk_1 X} \quad (۳۹-۱)$$

$$T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{j(k_2 - k_1)X} \quad (۳۹-۲)$$

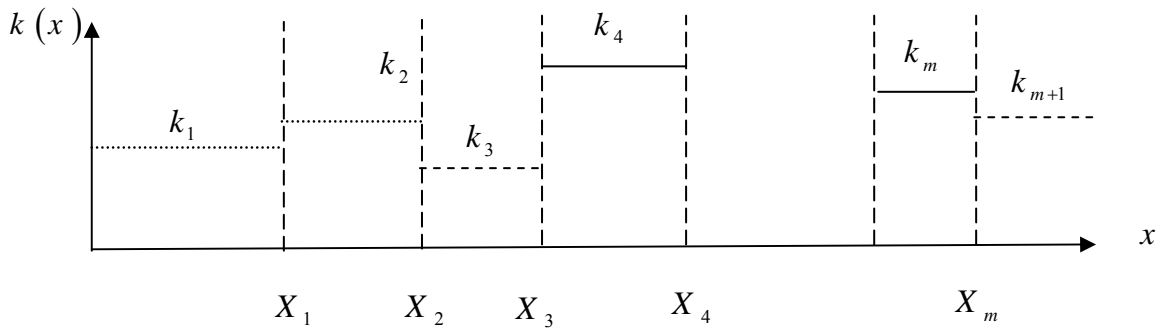
می‌توان دید که وقتی $X = 0$ ، مشابه با مسایل کوانتوم مکانیک روابط زیر بین ضرایب برقرار می‌باشد:

$$1 + R = T \quad (۴۰-۱)$$

$$|R|^2 + \frac{k_2}{k_1} |T|^2 = 1 \quad (۴۰-۲)$$

الگوریتمی برای تحلیل سیستم چند لایه

یک سیستم m لایه یک بعدی مانند شکل زیر مفروض است.



شکل (۲): آرایش ساختار چند لایه.

با داشتن موج در لایه اول و ضرب ماتریس انتقال لایه ها مابین مرزها، می توان موج در لایه ی $m+1$ ام را به شکل زیر نوشت:

$$A_{m+1} = Q_{1 \rightarrow m+1} A_1 \quad (41)$$

که در آن $Q_{1 \rightarrow m+1}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$Q_{1 \rightarrow m+1} \triangleq Q_{m \rightarrow m+1} \cdots Q_{3 \rightarrow 4} Q_{2 \rightarrow 3} Q_{1 \rightarrow 2} \quad (42)$$

در حالت کلی خواهیم داشت:

$$A_m = Q_{n \rightarrow m} A_n \quad (43)$$

که $Q_{n \rightarrow m}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$Q_{n \rightarrow m} = Q_{m-1 \rightarrow m} Q_{m-2 \rightarrow m-1} \cdots Q_{n+1 \rightarrow n+2} Q_{n \rightarrow n+1} \quad (44)$$

همواره با به دست آوردن ماتریس انتقال کل سیستم می توان ضریب بازتاب و عبور یک ساختار چند لایه را مشابه با حالت دو لایه محاسبه کرد. به عنوان مثال حالت های مقید یک سیستم N لایه را محاسبه می کنیم؛ برای داشتن حالات مقید لازم است که شرایط مرزی بی نهایت صفر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x) = 0 \quad (45)$$

یا به بیان دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} A_1(x) = 0 \quad (46-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A_N(x) = 0 \quad (46-2)$$

برای این منظور با توجه به فرم روابط (۲۵) تنها راه آن است که $a_1^+ = 0$ و $a_N^- = 0$ برای ارضای شرایط مرزی (۴۶) با توجه به $\text{Im}[k_1] < 0$ و $\text{Im}[k_N] < 0$ برقرار باشد. از سوی دیگر داریم

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{Q}_{1 \rightarrow N} \mathbf{A}_1 \quad \text{بنابراین:}$$

$$\begin{bmatrix} a_N^+ \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{1 \rightarrow N} \begin{bmatrix} 0 \\ a_1^- \end{bmatrix} \quad (۴۷)$$

با فرض $\mathbf{Q}_{1 \rightarrow N} = [q_{ij}]$ معادله‌ی مشخصه برای یافتن β (در مسایل ویژه مودهای انتشار نور در موجبرهای اپتیکی) یا E (ویژه مقدارهای انرژی در چاه‌های پتانسیل در مسایل مکانیک کوانتومی) به صورت بسیار ساده‌ای در می‌آید که با روشهای عددی به صورت مستقیم قابل حل است:

$$q_{22} = 0 \quad (۴۸)$$

لازم به یادآوری است که اگر پس از یافتن ریشه‌های (۴۸) یکی یا هر دوی k_1 و k_N فاقد جزء موهومی منفی (طبق قرارداد) باشند، آن‌گاه به جای حالت مقید به حالت غیر مقید رسیده‌ایم که قابل نرمالیزه کردن نخواهد بود و دست کم یکی از شرایط مرزی (۴۶) را ارضا نمی‌کند. در مسائل اپتیک چنین حالاتی عموماً در مودهای بستر یا نشستی موجبرها رخ می‌دهند [۱۰] و موجب فرار انرژی از موجبر به لایه‌های دیگر با ضریب شکست پایین‌تر می‌گردند. در مقابل مودهای هدایت شده موجبرها فاقد نشت انرژی بوده و بنابراین قابل نرمالیزه کردن هستند. به عنوان مثال حالات پایه‌ی نوسانگر هماهنگ [۱۱ و ۱۲] در مکانیک کوانتومی با چاه پتانسیل سهموی و مقادیر ویژه با فاصله برابر همگی حالات مقید بوده و مجذور قدرمطلق تابع موج آنها در فضا انتگرال‌پذیر است.

مراجع

- [1] A. Yariv and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*, Wiley, New York (2003).
- [2] P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media*, Wiley, New York (2005).
- [3] S. Khorasani and B. Rashidian, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **4**, 251 (2002).
- [4] K. Mehrany and S. Khorasani, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **4**, 524 (2002).
- [5] S. Khorasani and K. Mehrany, *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 91 (2003).

- [6] S. Khorasani, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **5**, 434 (2003).
- [7] S. Khorasani, and A. Adibi, *Electronic J. Diff. Eqs.* **2003** (79), 1 (2003).
- [8] S. Khorasani, and A. Adibi, *Opt. Commun.* **216**, 439 (2003).
- [9] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, New York (1994).
- [10] H. Kogelnik, "Theory of Dielectric Waveguides," in *Integrated Optics*, T. Tamir, ed., Springer-Verlag, New York (1979).
- [11] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory*, (Course of Theoretical Physics, vol. 3), 3rd ed., Butterworth-Heinemann (2001).
- [12] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, Springer, Berlin (2001).

تمرین

۱- با شروع از رابطه $\mathbb{L}_H \mathbf{H} = k_0^2 \mathbf{H}$ با $\mathbb{L}_H \triangleq \nabla \times \left[\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times (\cdot) \right]$ وقتی $\varepsilon_r(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_r(x)$ نشان

دهید معادله موج برای فازور میدان مغناطیسی عمود (قطبش TM) به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} + a(x) \frac{\partial A(x)}{\partial x} + b(x) A(x) = 0$$

توابع مجهول $a(\cdot)$ و $b(\cdot)$ را معین کنید.

۲- تبدیلی را بیابید که معادله فوق را به فرم استاندارد (۱۶) بدل نماید

$$\frac{\partial^2 B(x)}{\partial x^2} + h^2(x) B(x) = 0 \quad (*)$$

فرم تابع $h^2(\cdot)$ چیست؟

۳- نشان دهید که اگر $\beta = \gamma = 0$ ، آنگاه معادلات (*) و (۱۶) یکسان می‌شوند. تعبیر فیزیکی آن

چیست؟

۴- نشان دهید برای قطبش TE معادله (۲۶-۲) از پیوستگی میدان مغناطیسی مماسی ناشی

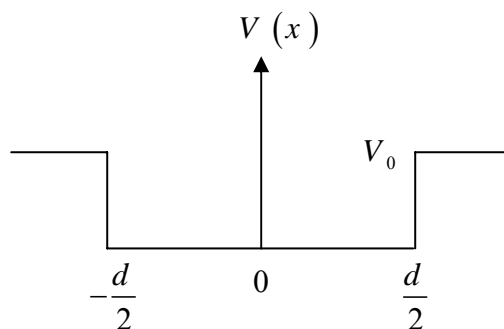
می‌شود.

۵- درستی روابط (۳۸) و (۴۰) را تحقیق کنید.

۶- نشان دهید نحوه انتخاب قرارداد علامات جزء حقیقی یا موهومی عدد موج در رابطه (۲۴) در نتیجه روابط (۴۰) بی‌تاثیر است.

۷- برنامه‌ای بنویسید که یک ساختار دلخواه را بگیرد (تعداد لایه‌ها، موقعیت مرز هر لایه، گذردهی الکتریکی و یا پتانسیل هر لایه، زاویه تابش و یا انرژی الکترون فرودی) و ضریب انعکاس و عبور را حساب کند.

۸- برای یک سیستم متقارن با تقارن زوج مطابق شکل زیر ثابت کنید حتماً و حداقل یک مد به عنوان مد ویژه وجود دارد (ماتریس انتقال را به دست آورید و q_{22} را برابر صفر قرار داده و معادله مشخصه را ساده کنید). نشان دهید اگر تقارن سیستم مسأله قبل به هم بخورد لزوماً سیستم حالت مقید نخواهد داشت.

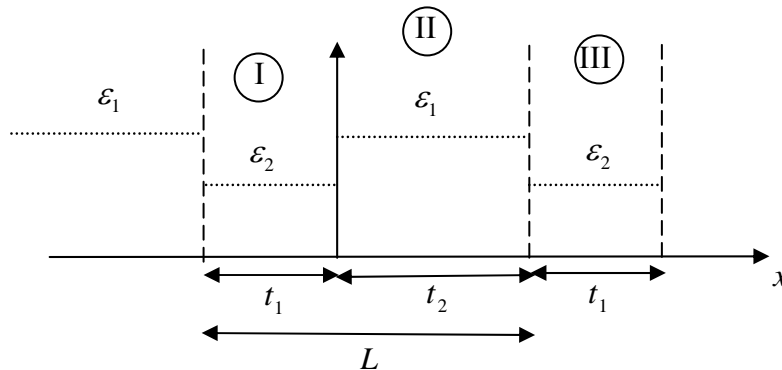


۹- با توجه به (۱۵) نشان دهید در لایه‌ی i ام و به ازای تمام مقادیر i داریم $\beta = n_i \sin(\theta_i)$ ، که در آن θ_i و n_i به ترتیب زاویه‌ی انتشار نسبت به محور عمود بر مرز (محور x) و ضریب شکست در لایه i ام می‌باشند. از آن جا درستی قانون انکسار اسنل را تحقیق کنید.

بخش ۳

ساختار یک‌بعدی متناوب

ساده‌ترین حالتی که برای یک سیستم متناوب می‌توان در نظر گرفت، از تکرار دو لایه‌ی همگن با ضخامت و ثابت گذردهی الکتریکی متفاوت به دست می‌آید که در شکل زیر نمایش داده شده است:



شکل (۱): نمایش ساختار لایه‌ای متناوب در یک بعد: مبدا $x = 0$ جدا کننده محیط‌های I و II است؛

محیط III تکرار محیط I می‌باشد.

در این جا ویژگی تناوب مکانی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x + L) \quad (1)$$

حال همانند بخش قبل عددهای موج k_1 و k_2 برای محیط با گذردهی ε_1 و ε_2 را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$k_1^2 = k_0^2 \varepsilon_1 - \beta^2 \quad (۲-۱)$$

$$k_2^2 = k_0^2 \varepsilon_2 - \beta^2 \quad (۲-۲)$$

و بر اساس آن می‌توان نوشت:

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & t_2 \leq x < t_1 + t_2 \\ k_2 & 0 \leq x < t_2 \\ k(x - L[x/L]) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (۳)$$

لذا دیده می‌شود که $k(x) = k(x + L)$ ؛ نیز در آن عملگر $[\cdot]$ نماینده‌ی جزء صحیح است.

تابع موج خود مجدداً از حل معادله ذیل قابل حصول است:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x) + k^2(x) A(x) = 0 \quad (۴)$$

قضیه‌ی بلوخ

مهم‌ترین اثر تناوب (۱) در جواب‌های معادله‌ی موج اعمال یک محدودیت اضافی به مجموعه جواب‌های معادله‌ی (۴) است. برای این منظور فعلاً بدون اثبات درستی قضیه‌ی بلوخ-فلوکه را می‌پذیریم (بعداً اثبات دقیق ریاضی این قضیه ارایه خواهد شد). بر اساس قضیه بلوخ جوابهای (۴) به همراه شرط تناوب تابع موج را می‌توان به صورت حاصل ضرب یک تابع موج تخت در یک تابع $\Phi_\kappa(x)$ نوشت:

$$A(x) = \exp(-j\kappa x) \Phi_\kappa(x) \quad (۵)$$

که در آن تابع $\Phi_\kappa(x)$ تابع بسته نامیده می‌شود و خود دارای شرط تناوبی مشابه (۱) است:

$$\Phi_\kappa(x) = \Phi_\kappa(x + L) \quad (۶)$$

همچنین κ عدد موج بلوخ نامیده می‌شود و می‌تواند مقادیر حقیقی یا موهومی را بپذیرد (حتی اگر محیط‌های I و II هر دو بدون اتلاف باشند). بعداً مفهوم دقیقتر این دو جزء روشن خواهد شد. بدیهی است که در حالی که تابع موج $A(x)$ خود لزوماً متناوب و یا حقیقی نیست، ولی چنانچه κ حقیقی باشد، آن‌گاه شدت موج $|A(x)|^2$ حتماً متناوب خواهد بود. در مکانیک کوانتوم این بدان معنی است که احتمال حضور الکترون در طول محور x متناوب باشد. در این‌گونه ساختارها اگر κ موهومی باشد میدان به شکل زیر ظاهر خواهد شد:

$$A(x) = \exp(-\alpha x) \Phi_{\kappa}(x) \quad (7)$$

که در آن $\alpha \triangleq -\text{Im}[\kappa]$. بدیهی است که این یک میدان میرا است و در محیط انتشار پیدا نمی‌کند، زیرا از یک سو دامنه‌ی موج نامحدود خواهد شد که از نظر فیزیکی بی معنی است، مگر آن که سیستم یک نیم‌فضا را پر کرده باشد.

بدیهی است که به خاطر خطی بودن معادله (۴) جواب کلی تابع موج با کمک یک ترکیب خطی از مجموعه جواب‌های بلوخ داده می‌شود:

$$E(x, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int \exp(-j\kappa x) \Phi_{\kappa}(x) \exp[j\omega_n(\kappa)t] d\kappa \right\} \quad (8)$$

که در آن زیرنویس n شماره‌ی نوار بسامد مجاز می‌باشد. (در فصول آینده در این خصوص بحث بیشتری ارائه می‌گردد.) در اینجا نکته بسیار ظریفی وجود دارد و آن این است که بسامد ω لزوماً تابعی از عدد موج بلوخ κ است. در واقع تابعیت $\omega_n(\kappa)$ کاملاً غیر بدیهی بوده و تمامی ویژگی‌های انتشار در محیط را بیان می‌دارد. این تابعیت منحصراً توسط ویژگی‌های محیط متناوب تعیین می‌شود و معادله‌ی:

$$\omega = \omega_n(\kappa), n \in \mathbb{N} \quad (9)$$

را معادله‌ی پاشندگی یا مشخصه‌ی محیط متناوب می‌نامیم. قبل از بحث بیشتر راجع به (۸) اجازه دهید رابطه (۹) را برای یک محیط همگن در سه بعد محاسبه کنیم.

از معادله‌ی موج در سه بعد داریم:

$$\mathbb{L}_E \mathbf{E} = k_0^2 \mathbf{E} \quad (10-1)$$

$$\mathbb{L}_E = \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \nabla \times (\cdot) \equiv \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla [\nabla \cdot (\cdot)] - \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla^2 (\cdot) \quad (10-2)$$

با توجه به همگن بودن محیط $\nabla \cdot \mathbf{E} \equiv 0$ و به دست می‌آید:

$$\mathbb{L}_E = -\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla^2 (\cdot) \quad (11)$$

با اعمال تبدیل فوریه در راستاهای x ، y و z خواهیم داشت:

$$\nabla \triangleq \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \rightarrow -j\kappa_x \hat{x} - j\kappa_y \hat{y} - j\kappa_z \hat{z} \quad (12)$$

در رابطه (۱۲) مولفه‌های اعداد موج در راستاهای x ، y و z نامیده می‌شوند. لذا (۱۰-۱)

(۱۰) را می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\varepsilon_r} (\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2) \Sigma = k_0^2 \Sigma \quad (13)$$

اگر بردار موج را به صورت $\mathbf{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$ تعریف کنیم آن گاه $\Sigma = \Sigma(\mathbf{\kappa})$ در (۱۳) نمایانگر

تبدیل فوریه میدان $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ خواهد بود. از معادله (۱۳) بدیهی است که باید داشته باشیم:

$$\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{\kappa} = \varepsilon_r k_0^2 \quad (14-1)$$

معادله (۱۴-۱) همان معادله پاشندگی یا مشخصه محیط همگن است و می‌توان آن را به صورت زیر

هم نوشت:

$$\kappa = n \frac{\omega}{c} \quad (14-2)$$

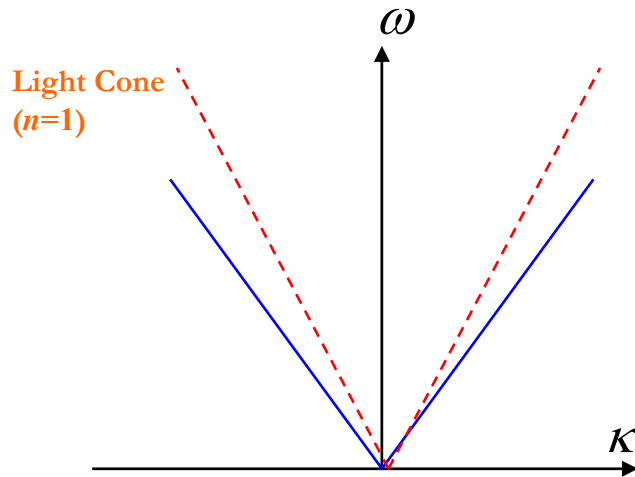
در رابطه اخیر $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ ضریب شکست و $\kappa = |\mathbf{\kappa}|$ اندازه بردار موج یا به اختصار عدد موج نامیده

می‌شود. در شکل (۲) منحنی پاشندگی (۱۴-۲) برای دو حالت $n=1$ (مربوط به خلأ) و $n > 1$

(مربوط به یک دی‌الکتریک عادی) در یک بعد مکانی ترسیم شده‌اند که با $\mathbf{\kappa} = (\kappa, 0, 0)$ مشخص

می‌شود. چنانچه تعداد ابعاد مکانی بیش از یک و مثلاً برابر دو باشد خطوط تبدیل به یک مخروط

حول محور بسامد خواهند شد.



شکل (۲): ترسیم معادله پاشندگی محیط همگن: خط چین نمایانگر مخروط نور و خط پیوسته نمایانگر مخروط دی‌الکتریک هستند.

تحلیل انتشار موج در ساختار متناوب

همانند یک ساختار دو لایه موج را در هر محیط به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A_1(x) &= a_1^+ e^{-jk_1 x} + a_1^- e^{+jk_1 x} & x \in \text{I} & \quad (15) \\ A_2(x) &= a_2^+ e^{-jk_2 x} + a_2^- e^{+jk_2 x} & x \in \text{II} & \\ A_3(x) &= a_3^+ e^{-jk_1 x} + a_3^- e^{+jk_1 x} & x \in \text{III} & \end{aligned}$$

توجه کنید که با توجه به تناوب ساختار $k_1 = k_3$. حال با استفاده از ماتریس انتقال داریم:

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{Q}_{1 \rightarrow 3} \mathbf{A}_1 \triangleq \mathbf{Q}_L \mathbf{A}_1 \quad (16-1)$$

$$\mathbf{Q}_L = \mathbf{Q}_{2 \rightarrow 3} \mathbf{Q}_{1 \rightarrow 2} \quad (16-2)$$

با توجه به تناوب تابع بسته داریم:

$$\Phi_K(x_3) = \Phi_K(x_1) \quad (17)$$

که در آن $x_3 - L = x_1 \in \text{I}$ است. با ضرب کردن دو طرف (۵) در e^{jkx} داریم:

$$\Phi_K(x) = e^{jkx} A(x) \quad (18)$$

با جای‌گذاری در (۱۷) خواهیم داشت:

$$e^{jkx_3} A(x_3) = e^{jkx_1} A(x_1) \quad (19-1)$$

$$e^{j\kappa L} A(x_3) = A(x_1) \quad (19-2)$$

با جای گذاری در رابطه (۱۶-۱) خواهیم داشت:

$$e^{j\kappa L} \left[a_3^+ e^{-jk_1(x+L)} + a_3^- e^{jk_1(x+L)} \right] \equiv a_1^+ e^{-jk_1 x} + a_1^- e^{jk_1 x}, \quad \forall x \in I \quad (20)$$

با برابر قرار دادن ضرایب به دست می آید:

$$a_3^+ = e^{-j\kappa L} e^{jk_1 L} a_1^+ \quad (21-1)$$

$$a_3^- = e^{-j\kappa L} e^{-jk_1 L} a_1^- \quad (21-2)$$

که نمایش ماتریسی آن به شکل زیر است:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \exp[j(k_1 - \kappa)L] & 0 \\ 0 & \exp[-j(k_1 + \kappa)L] \end{bmatrix} \mathbf{A}_1 \triangleq \mathbf{M} \mathbf{A}_1 \quad (22)$$

اما رابطه های (۲۲) و (۱۶-۱) نمی توانند هم زمان برقرار باشند مگر آن که داشته باشیم:

$$|\mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}_L - \mathbf{I}| = 0 \quad (23)$$

با حل (۲۳) معادله ی مشخصه ی انتشار موج در محیط متناوب به دست می آید (تمرین ۲):

$$\cos(\kappa L) = \frac{q_{11} + q_{22}}{2} \cos(k_1 L) - j \frac{q_{11} - q_{22}}{2} \sin(k_1 L) \quad (24)$$

در مقایسه با (۸) جواب معادله (۲۴) در حقیقت رابطه ی معکوس (۸) است. در واقع q_{ii} که درایه های

قطری \mathbf{Q}_L هستند خود به $k_i = k_i(\omega; \beta)$ وابسته اند و بنابراین تابعی از بسامد ω و ثابت انتشار β

می باشند. پس از (۲۴) نتیجه می شود $\kappa = \kappa(\omega; \beta)$. در بیشتر موارد ثابت انتشار β ثابت است و

بسامد ω را تغییر می دهیم، و بنابراین تابعیت نسبت به β را نمایش نخواهیم داد؛ در این حالت

$\kappa = \kappa(\omega)$. ویژگی دیگر با توجه به جواب های تابع $\cos^{-1}(\cdot)$ آن است که

$\omega = \omega_n \left(\kappa + \frac{2m\pi}{L} \right), \forall m \in \mathbb{Z}$. این بدان معنی است که بسامد ω خود تابعی متناوب از عدد موج بلوخ

κ با دور تناوب $2m\pi/L$ می باشد.

حال با فرض β ثابت (مثلا $\beta = 0$) سمت راست (۲۴) را با تابعی مانند $f(\omega)$ می توان نشان داد:

$$\cos(\kappa L) = f(\omega) \quad (25)$$

وقتی $k_i, i=1,2$ حقیقی باشند، آن گاه $f(\omega)$ حقیقی بوده (تمرین ۱) و می‌توان برای رابطه‌ی باشندگی سه حالت متمایز زیر را قایل بود:

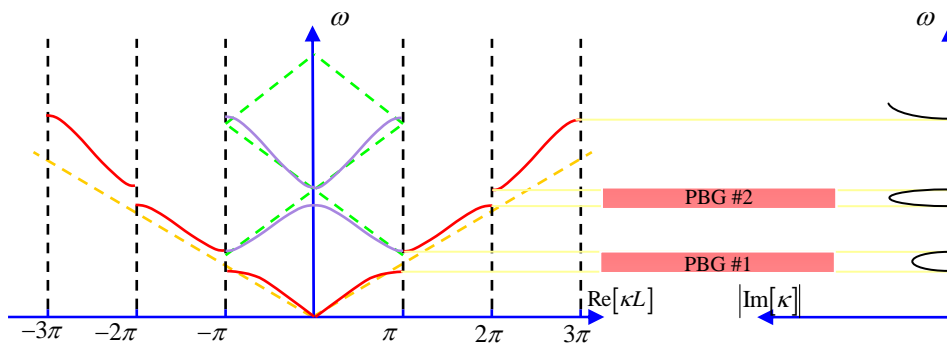
$$|f(\omega)| < 1 \Rightarrow \kappa \in \mathbb{R}, \quad \text{Im}[\kappa] = 0 \quad (26-1)$$

$$f(\omega) = \pm 1 \Rightarrow \kappa = m \frac{\pi}{L}, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (26-2)$$

$$|f(\omega)| > 1 \Rightarrow \kappa \in \mathbb{C}, \quad \text{Re}[\kappa] = m \frac{\pi}{L}, \quad \text{Im}[\kappa] \neq 0 \quad (26-3)$$

با توجه به آن که $f(\omega)$ تابع پیوسته‌ای از بسامد است می‌توان چنین نتیجه گرفت که بازه‌های پیوسته‌ای در همسایگی هم وجود دارند که در آنها $|f| \leq 1$ یا $|f| > 1$ می‌باشد. به ترتیب به بازه از نوع اول که در آن κ حقیقی و امواج بلوخ آن دارای دامنه‌ی محدود هستند نوار مجاز بسامد و به بازه از نوع دوم که در آن κ موهومی و امواج بلوخ آن دارای دامنه‌ی نامحدود از یک سو هستند نوار ممنوعه‌ی بسامد یا گاف فوتونی می‌گوییم. در گاف فوتونی امکان انتشار موج در یک بلور فوتونی وجود ندارد و چنانچه عرض بلور محدود باشد ضریب عبور بسیار ناچیز خواهد بود.

حال به بررسی ویژگی‌های تابع $\omega_n(\kappa)$ یا به عبارت دیگر ساختار باند بسامد می‌پردازیم. در شکل (۳) نمونه‌ای از حل این معادله به نمایش درآمده است.



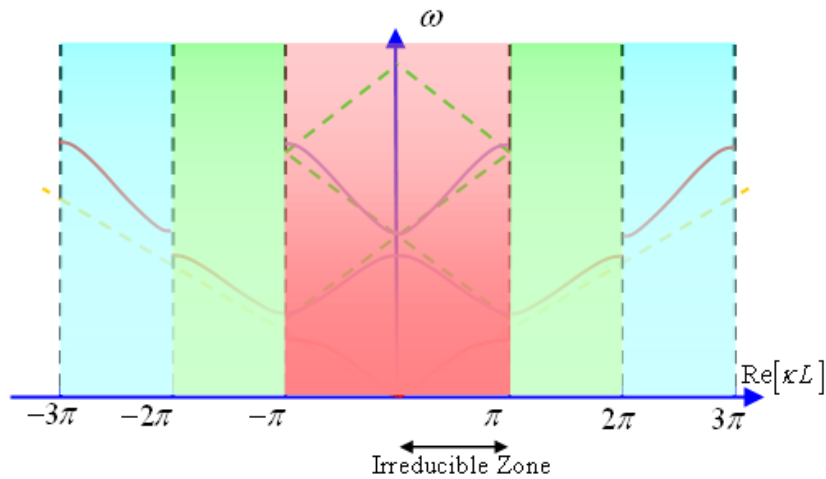
شکل (۳): نمایش ساختار باند بسامد یک بلور فوتونی یک بعدی نمونه [۱ و ۲].

خط چین نارنجی منحنی پاشندگی برای دی الکتریک همگن است. وقتی اندکی تغییرات مکانی متناوب در یک بعد به گذردهی الکتریکی اضافه کنیم یک بلور فوتونی یک‌بعدی بدست می‌آید که حل معادله پاشندگی آن مشابه منحنی شکسته خواهد بود که به موازات مخروط نور امتداد یافته است. علت عدم پیوستگی این منحنی در نقاط $\kappa = \pm m\pi/L, m \in \mathbb{N}$ آن است که در این محدوده همان طور که در منحنی سمت راست دیده می‌شود جزء موهومی عدد موج بلوخ K غیر صفر است؛ معادله (۳-۲۶) را ببینید. این محدوده‌ها را گاف فوتونی PBG می‌نامیم که با محدوده‌های پُر شده مشخص گردیده‌اند. می‌توان دید (تمرین ۴) که در نزدیکی مرزهای گافهای فوتونی همواره منحنی پاشندگی دارای شیب صفر است. دقت کنید در نزدیکی بسامد صفر منحنی پاشندگی به مخروط نور دی الکتریک همگنی که ثابت گذردهی آن برابر میانگین فضایی تابع مربوطه است، یعنی:

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{1}{L} \int_L \varepsilon_r(x) dx \quad (۲۷)$$

مجانِب گردیده است. می‌توان نشان داد هرگاه $\bar{\varepsilon}_r$ مثبت و حقیقی باشد بلور فوتونی در بسامدهای پایین همانند محیط همگن عمل می‌کند و ویژگی‌های خاص پاشندگی یا پراش خود را از دست می‌دهد. برای اثبات ریاضی این ادعا به بخش‌های بعدی رجوع فرمایید.

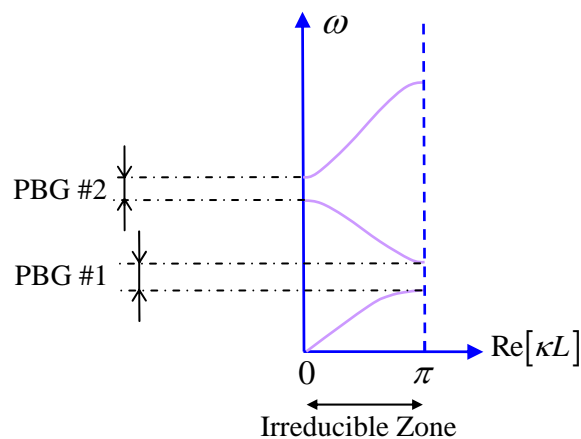
نیز با توجه به خاصیت تناوب تابع بسامد $\omega = \omega_n(\kappa + \frac{2m\pi}{L}), \forall m \in \mathbb{Z}$ می‌توان هر بازه‌ای از منحنی پاشندگی مانند $\kappa L \in [m\pi, (m+2)\pi], m \in \mathbb{Z}$ را به ناحیه‌ی $\kappa L \in [-\pi, \pi[$ منتقل نمود. به بیان دیگر بازه‌ی $\kappa L \in [-\pi, \pi[$ می‌تواند حاوی کلیه‌ی اطلاعات لازم برای شناخت پاشندگی بلور فوتونی باشد. به این گستره ناحیه‌ی اول بریلوین می‌گوییم. در شکل (۳) منحنی‌های محصور در این بازه پاشندگی را در ناحیه اول نشان می‌دهند. بطور کلی گستره‌ی پاشندگی $\kappa L \in]-m\pi, -(m-1)\pi] \cup [(m-1)\pi, m\pi[, m \in \mathbb{N}$ ناحیه‌ی m -ام بریلوین نامیده می‌شود. در شکل (۴) نواحی اول تا سوم با سایه مشخص شده‌اند.



شکل (۴): نمایش نواحی بریلوینین؛ نواحی اول تا سوم با سایه‌های مختلف مشخص گردیده‌اند.

ناحیه‌ی کاهش‌ناپذیر هم در بازه‌ی $[0, \pi]$ مشخص گردیده است.

به سادگی می‌توان دید که منحنی پاشندگی تابعی زوج از عدد موج بلوخ است، یعنی $\omega_n(\kappa) = \omega_n(-\kappa)$. پس وقتی تمام منحنی پاشندگی به ناحیه بریلوینین اول منتقل می‌شود با کمک این تقارن زوج می‌توان گفت که منحنی پاشندگی را به طور کامل از دست داشتن اطلاعات گستره‌ی $\kappa L \in [0, \pi[$ می‌توان به دست آورد. پس پاشندگی هر بلور فوتونی یک بعدی در نموداری مشابه شکل (۵) قابل نمایش خواهد بود.



شکل (۵): نمودار عمومی پاشندگی یک بلور فوتونی یک بعدی که

در ناحیه‌ی کاهش‌ناپذیر بریلوینین نمایش داده شده است.

دلیل ایجاد گاف فوتونی

برای آنکه علت ایجاد گاف نواری را بررسی کنیم، به معادله موج برای مود TE بر می گردیم:

$$\mathbb{L}_E \mathbf{E} = k_0^2 \mathbf{E} \quad (28)$$

با فرض تابش عمود ($\beta = \gamma = 0$) تنها یک مولفه عمود میدان الکتریکی نرده‌ای برای توصیف میدان الکتریکی کافی است. در نتیجه:

$$\left[\eta(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 \right] A(x) = 0 \quad (29)$$

که در آن $\eta(x) \triangleq \varepsilon^{-1}(x)$ چون $\varepsilon(x) = \varepsilon(x+L)$ بدیهی است که:

$$\eta(x) = \eta(x+L) \quad (30)$$

یعنی $\eta(x)$ نیز متناوب خواهد بود. پس $\eta(x)$ را می‌توان به صورت یک بسط سری فوریه نوشت:

$$\eta(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta_m \exp(-jmGx) \quad (31-1)$$

$$\eta_m = \frac{1}{L} \int_L e^{jmGx} \eta(x) dx \quad (31-2)$$

که در آن $G \triangleq 2\pi/L$ از طرفی میدان الکتریکی به فرم یک تابع بلوخ باید باشد که در آن $A(x) = e^{-j\kappa x} \phi_\kappa(x)$ و نیز $\phi_\kappa(x) = \phi_\kappa(x+L)$ با نوشتن تابع بلوخ به صورت یک بسط تابع فوریه خواهیم داشت:

$$A(x) = e^{-j\kappa x} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m \exp(-jmGx) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m \exp[-j(mG + \kappa)x] \quad (32)$$

و برای مشتق مرتبه دوم آن نسبت به x داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} (mG + \kappa)^2 \phi_m \exp[-j(mG + \kappa)x] \quad (33)$$

با جای‌گذاری (۳۳) و (۳۱) در (۲۹) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & -\sum_l \sum_m (mG + \kappa)^2 \phi_m \eta_l \exp\{-j[(m+l)G + \kappa]x\} \\
 & + k_0^2 \sum_m \phi_m \exp[-j(mG + \kappa)x] = 0
 \end{aligned} \tag{۳۴}$$

حال با اعمال تبدیل $m+l \rightarrow m'$ در سمت راست (۳۴) و $m \rightarrow m'$ در سمت چپ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m'} \sum_m (mG + \kappa)^2 \phi_m \eta_{m'-m} \exp[-j(m'G + \kappa)x] \\
 & = k_0^2 \sum_{m'} \phi_{m'} \exp[-j(m'G + \kappa)x]
 \end{aligned} \tag{۳۵}$$

با اعمال تبدیل زیر نویس $m' \rightarrow l$ در طرفین و مقایسه سمت چپ و راست نتیجه می‌شود:

$$\sum_m (mG + \kappa)^2 \eta_{l-m} \phi_m = k_0^2 \phi_l, \quad \forall l \in \mathbb{Z} \tag{۳۶}$$

با فرض آنکه بسط فوریه در گستره $m \in [-M, M]$ محدود شود می‌توان (۳۶) را به صورت معادله‌ی ویژه مقدار ماتریسی زیر بازنویسی نمود:

$$\mathbf{R}(\kappa) \Phi = k_0^2 \Phi \tag{۳۷}$$

که در آن داریم:

$$\Phi \triangleq [\phi_i]_{N \times 1}, \quad i = -M \dots M \tag{۳۸-۱}$$

$$\mathbf{R}(\kappa) \triangleq [r_{ij}]_{N \times N}, \quad r_{ij} = (iG + \kappa)^2 \eta_{j-i}, \quad i, j = -M \dots M \tag{۳۸-۲}$$

و نیز $N = 2M + 1$ تعداد کل هماهنگ‌ها در بسط می‌باشد. با حل مسأله (۳۷) تابع پاشندگی $\omega_n(\kappa) = ck_0(\kappa)$ از دترمینان زیر به دست می‌آید:

$$\left| \mathbf{R} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{I} \right| = 0 \tag{۳۹}$$

این روش همان روش بسط امواج تخت در تحلیل بلورهای فوتونی یک بعدی است. معمولاً با انتخاب حدود ۱۱ هارمونیک و بیشتر جواب‌های بسیار خوبی برای بسامدهای تا گاف سوم بدست می‌آید. دقت

کنید که ماتریس ضرایب $\mathbf{R}(\kappa)$ تَنُک نیست و اصولاً هر قدر N بزرگتر باشد محاسبه‌ی $\omega_n(\kappa)$ هم دشوارتر خواهد بود.

ولی برای تشریح علت تشکیل گاف معادله (۳۷) را به ازای $i, j = 0, 1$ در نظر می‌گیریم (در واقع این صرفاً تقریبی برای نشان دادن چگونگی برهمکنش امواج است). به دست خواهیم آورد:

$$\begin{bmatrix} \kappa^2 \eta_0 & (\kappa + G)^2 \eta_{-1} \\ \kappa^2 \eta_{+1} & (\kappa + G)^2 \eta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} = k_0^2 \begin{bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

دقت کنید که طبق (۳۲) ϕ_0 دامنه‌ی موجی به فرم $e^{-j\kappa x}$ و ϕ_1 دامنه‌ی موجی به فرم $e^{-j(\kappa+G)x}$ است. اگر فرض کنیم که عدد موج بلوخ در بازه‌ی کاهش‌ناپذیر $\kappa \in]-\frac{\pi}{L}, 0]$ اختیار شود آنگاه موج متناظر با ϕ_0 و ϕ_1 در امتداد محور x به ترتیب پس‌رو و پیش‌رو خواهند بود. حال اگر $\eta(x) \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\eta_n = \eta_{-n}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (41)$$

نهایتاً با حل (۴۰) میتوان مرزهای گاف اول را یافت. گاف فوتونی اول طبق شکل (۴) در $\kappa L = \pm\pi$ تشکیل می‌شود. چون بازه‌ی کاهش‌ناپذیر در اینجا $\kappa \in]-\frac{\pi}{L}, 0]$ اختیار شده است به ازای $\kappa = -\frac{\pi}{L} = -\frac{G}{2}$ گاف رخ می‌دهد. در این حالت گاف فوتونی اول در بازه:

$$\frac{cG}{2} \sqrt{|\eta_0| - |\eta_1|} < \omega < \frac{cG}{2} \sqrt{|\eta_0| + |\eta_1|} \quad (42)$$

قرار خواهد گرفت (تمرین ۸) [۳]. بدیهی است شرط صحت این تحلیل آن است که $|\eta_1| \ll |\eta_0|$ ؛ یعنی ناهمگنی محیط ضعیف باشد به گونه‌ای که بتوان از هماهنگ‌های فضایی مرتبه‌ی بالاتر $\eta(x)$ صرف‌نظر نمود. از نظر فیزیکی به بیان ساده می‌توان گفت که موج در هنگام پیشروی در محیط ناهمگن کم کم منعکس می‌شود. در بازه‌های بسامد خاصی بین امواج تابنده و بازتاب تداخل سازنده رخ می‌دهد و در نتیجه انتشار موج تداوم می‌یابد. در این حالت بسامد در نوار مجاز قرار دارد. در مقابل

وقتی بین امواج تابنده و بازتاب تداخل مخرب رخ می‌دهد موج مجبور به بازتاب کلی گشته و انتشار غیرممکن می‌گردد. این حالت به گاف فوتونی اشاره دارد.

لازم به ذکر است که توجیه فوق برای درک عمیق بسیاری از پدیده‌ها کافی نیست. بدین منظور ارایه یک تحلیل دقیق و مستحکم ریاضی از امواج بلوخ ضروری است. در بخش آینده خواهیم دید که سر منشأ ایجاد نوارهای مجاز و ممنوعه بسامد، صرفاً تناوب محیط انتشار موج می‌باشد.

مراجع

- [1] S. Khorasani, "Numerical Methods in Analysis of Photonic Crystals," *1st Workshop on Photonic Crystals*, Mashad (2005).
- [2] S. Khorasani, K. Mehrany, M. Chamanzar, B. Rashidian, A. Atabaki, "A Review of Photonic Crystal Science & Technology," *12th Conference on Optics & Photonics*, Shiraz (2006).
- [3] K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

تمرین

۱- نشان دهید دترمینان ماتریس انتقال یک دوره‌ی تناوب \mathbf{Q}_L برای یک ساختار متناوب دلخواه

متشکل از N لایه همواره برابر با واحد است.

۲- معادلات (۲۳) و (۲۴) را از روابط ماقبل استنتاج نمایید.

۳- نشان دهید اگر در ساختار نمایش داده شده در شکل (۱) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ آنگاه لزوماً $\mathbf{Q}_L = \mathbf{I}$. در

این صورت معادله‌ی (۲۴) را ساده کرده و جواب را با معادله‌ی (۲-۱۴) مقایسه کنید. علت

اختلاف چیست؟

۴- نشان دهید پارامتر سرعت گروه $v_g \triangleq \partial\omega/\partial k$ در مرزهای نوارهای مجاز بسامد برابر صفر

است (راهنمایی: از بسط تیلور حول مرز نوار بسامد استفاده کنید).

۵- نشان دهید در بلور فوتونی یک بعدی پاشندگی بسامد تابعی زوج از عدد موج بلوخ است.

۶- الف) نشان دهید ماتریس انتقال $\mathbf{Q}_{n \rightarrow n+1}$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{Q}_{n \rightarrow n+1} = \mathbf{P}_{n+1} \tilde{\mathbf{Q}}_{n \rightarrow n+1} \mathbf{P}_n^{-1}$$

که در آن \mathbf{P}_n یک ماتریس قطری است و $\tilde{\mathbf{Q}}$ به X_n بستگی ندارد.

ب) نشان دهید اگر از هر لایه‌ی دیگری غیر از لایه‌ی اول شروع کنیم و یک دوره‌ی تناوب را

اندازه بگیریم، مثلاً در (۲-۱۶) ماتریس انتقال دوره‌ی تناوب

$\mathbf{Q}_L = \mathbf{Q}_{n+1 \rightarrow n+2} \mathbf{Q}_{n \rightarrow n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}$ انتخاب شود، در جوابهای معادله (۲۴) برای تابع

$\kappa(\omega; \beta)$ تغییری ایجاد نخواهد شد.

۷- معادله‌ی (۳۹) وقتی $\beta \neq 0$ است چه تغییری می کند؟

۸- درستی (۴۲) را نشان دهید و با استفاده از آن عبارتی تقریبی برای نسبت گاف استنتاج

نمایید.

۹- اگر در رابطه‌ی (۴۰) از هماهنگ‌های ϕ_{-1} و ϕ_0 به جای ϕ_0 و ϕ_{+1} استفاده می کردیم آیا (۴۲)

تغییر می کرد؟ حال مسأله مقدار ویژه (۴۲) را برای ماتریس 3×3 مربوط به هماهنگ‌های ϕ_{-1}

، ϕ_0 و ϕ_{+1} بازنویسی نمایید و حل‌های آن را بیابید.

۱۰- نشان دهید در رابطه (۲۵)، $f(\omega)$ تابعی حقیقی از بسامد است اگر داشته باشیم $\forall m \in \mathbb{Z}$

$k_m \in \mathbb{R}$ یا به بیان دیگر، در تمام لایه‌ها امواج غیر میرا باشند. (راهنمایی: نشان دهید تحت

این شرایط $q_{11} = q_{22}^*$.)

بخش ۴

ساختار دوبعدی متناوب

همانطور که در بخش‌های قبل دیدیم در ساختار متناوب یک بعدی داریم:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x + nL), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

در قیاس با (۱) در ساختار متناوب دو بعدی خواهیم داشت:

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + m\mathbf{a} + n\mathbf{b}), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

که در آن \mathbf{a} و \mathbf{b} دو بردار پایه شبکه نامیده می‌شوند و شرط زیر را ارضا می‌کنند:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0 \quad (3)$$

همان طور که در بخش ۱ دیدیم هرگاه:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \quad |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \quad (4)$$

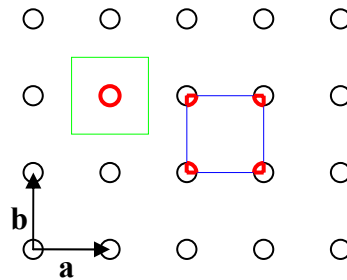
برقرار باشد شبکه‌ی مربعی و هرگاه:

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 60^\circ \text{ or } 120^\circ, \quad |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \quad (5)$$

شبکه‌ی مثلثی داریم. برای شبکه مربعی (مثلثی) سلول واحد غیر منحصر به فرد شبکه یک مربع (یک لوزی) است که اضلاع آن بردارهای پایه شبکه باشند. شبکه‌های متناوب از تکرار یک سلول واحد به دست می‌آیند و شبکه‌ها با توجه به آن که از تکرار چه نوع سلول واحدی ساخته شده‌اند، نام گذاری

می‌شوند. پس در شبکه مربعی سلول واحد آن از دو بردار هم اندازه و عمود بر یکدیگر ساخته می‌شود، لذا مطابق شکل زیر هر راس سلول واحد از هر نقطه شبکه $\frac{1}{4}$ سهم می‌برد که در مجموع به هر سلول واحد برابر یک نقطه شبکه سهم می‌رسد. این مطلب در مورد شبکه مثلثی نیز صادق است (تمرین ۱):

$$N = 4 \times \frac{1}{4} = 1 \quad (۶)$$

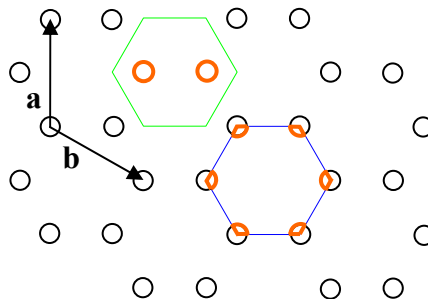


شکل (۱): شبکه‌ی مربعی: دو سلول واحد هم‌ارز در وسط و بالا دیده می‌شود؛ چهار ربع دایره ضخیم در سلول واحد وسط (مجموعاً یک دایره) و یک دایره‌ی کامل ضخیم در سلول واحد بالا جای می‌گیرند.

در شبکه‌ی گرافیت سلول واحد آن از دو بردار هم اندازه که با یکدیگر زاویه 120° درجه می‌سازند ساخته می‌شود. می‌توان به سادگی دید که سلول واحد آن به شکل شش‌ضلعی منتظم بوده و هر نقطه

از سلول واحد آن $\frac{1}{3}$ نقطه سهم می‌برد. بنابراین تعداد کل نقاط یک سلول واحد برابر است با:

$$N = 6 \times \frac{1}{3} = 2 \quad (۷)$$



شکل (۲): شبکه گرافیت: دو سلول واحد هم‌ارز در وسط و بالا دیده می‌شود؛ شش ثلث دایره ضخیم در سلول وسط

(مجموعاً دو دایره) و دو دایره کامل ضخیم در سلول بالایی جای می‌گیرند.

برای به دست آوردن سلول واحد شبکه راهی هندسی وجود دارد و سلولی که از آن به دست می‌آید به سلول ویگنر-سایتز شبکه مشهور است. بدین منظور یک نقطه مبدأ در شبکه تعریف می‌کنیم و بر حسب فواصل هندسی سایر نقاط در شبکه تا نقطه مبدأ آن‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم؛ نقاطی را که کوتاهترین فاصله را تا مبدأ دارند اصطلاحاً نزدیکترین همسایه می‌نامند. سپس از نزدیکترین همسایگان تا مبدأ پاره‌خطوطی را ترسیم و در دو بعد (سه بعد) خط (صفحه) عمودمنصف آن‌ها را رسم می‌کنیم. سطح (حجم) محصور مابین خطوط (سطوح) عمود منصف‌ها در واقع همان سلول ویگنر-سایتز شبکه خواهد بود.

معادله‌ی موج در ساختار دو بعدی متناوب

برای بدست آوردن معادله‌ی موج در سیستم دوبعدی متناوب ابتدا توجه می‌کنیم که طبق تعریف داریم:

$$\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial z} \varepsilon \equiv 0 \quad (8)$$

اما همان طور که قبلاً هم دیدیم این لزوماً موجب عدم حضور مولفه‌ی میدان در راستای z نیست و برای تبدیل فوریه مکانی میدان‌های \mathbf{E} و \mathbf{H} داریم $-j\beta \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}$ ؛ خواهیم دید که حالت $\beta = 0$ معمولاً مورد علاقه قرار می‌گیرد. حال گرادیان عمود و موازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\nabla_{\perp} \triangleq \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} \quad (9-1)$$

$$\nabla_{\parallel} \triangleq \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \quad (9-2)$$

همچنین از ترکیب معادلات ماکسول در حالت تک بسامد یا هماهنگ خواهیم داشت:

$$\mathbb{L}_E \mathbf{E} = k_0^2 \mathbf{E} \quad (10-1)$$

$$\mathbb{L}_E \triangleq \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \nabla \times (\cdot) = \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla [\nabla \cdot (\cdot)] - \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla^2 (\cdot) \quad (10-2)$$

نیز از معادله‌ی سوم ماکسول داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \ln \varepsilon \cdot \mathbf{E} \quad (11)$$

برای معادله موج در قطبش میدان الکتریکی عرضی (E-polarization) داریم

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}) = E_z(\mathbf{r}) \hat{z} \quad \text{و} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = H_x(\mathbf{r}) \hat{x} + H_y(\mathbf{r}) \hat{y} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_\perp = -j\beta \mathbf{E}_\perp \quad (12)$$

چنانچه تابش عمود ($\beta = 0$) را در نظر بگیریم آن گاه $E_z(\mathbf{r}) = E_z(\mathbf{r}_\perp) = E_z(x, y)$ و معادله

(۱۰) به فرم زیر ساده می‌گردد:

$$\mathbb{L}_E E_z = k_0^2 E_z, \quad E_z = E_z(\mathbf{r}_\perp) = E_z(x, y) \quad (13-1)$$

$$\mathbb{L}_E = -\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla_\perp^2 = -\frac{1}{\varepsilon_r} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (13-2)$$

نیز با توجه به معادله نظیر (۱۰) برای میدان مغناطیسی و معادله چهارم ماکسول $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ برای

محیط غیر مغناطیسی $\mu = \mu_0$ داریم:

$$\mathbb{L}_H \mathbf{H} = k_0^2 \mathbf{H} \quad (14-1)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_H \triangleq \nabla \times \left[\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times (\cdot) \right] &= \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla \times \nabla \times (\cdot) + \left(\nabla \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \times \nabla \times (\cdot) \equiv \\ &= \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla^2 (\cdot) + \left(\nabla \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \times \nabla \times (\cdot) \end{aligned} \quad (14-2)$$

حال برای قطبش میدان مغناطیسی عرضی (H-polarization) داریم $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_\perp(\mathbf{r}) = H_z(\mathbf{r}) \hat{z}$ و

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_x(\mathbf{r}) \hat{x} + E_y(\mathbf{r}) \hat{y} \quad \text{چون در تابش عمود } \beta = 0, \text{ به ناچار } \nabla \equiv \nabla_\perp \text{ و بنابراین:}$$

$$\mathbb{L}_H H_z = k_0^2 H_z, \quad H_z = H_z(\mathbf{r}_\perp) = H_z(x, y) \quad (15-1)$$

$$\mathbb{L}_H = -\nabla_\perp \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla_\perp (\cdot) \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial y} (\cdot) \right] \quad (15-2)$$

از این نقطه به بعد در طول این متن از نمایش علامت \perp و یا \parallel در زیرنویس بردارها جز در موارد

غیربديهی و به عنوان تاکید خودداری خواهیم کرد.

به عنوان یک نتیجه‌گیری مهم می‌توان گفت که هرگاه در یک ساختار دو بعدی خطی همسانگرد و

غیرمغناطیسی راستای انتشار در صفحه (x, y) قرار بگیرد (به زبان ریاضی $\beta = 0$)، آن گاه حل

عمومی معادلات برداری (۱۰-۱) و (۱۴-۱) را می‌توان از ترکیب خطی حل معادلات نرده‌ای (۱۳-۱) و (۱۵-۱) یافت. بنابراین بررسی حالت تابش عمود از این نظر با ارزش است که امکان حل معادلات برداری ماکسول را در قالب دو معادله‌ی جداگانه‌ی نرده‌ای فراهم آورده است. پس در شرایط فوق معادله‌ای نظیر:

$$\mathbb{L}A = k_0^2 A, \quad A = A(\mathbf{r}) \quad (16)$$

برقرار است که \mathbb{L} در آن یک عملگر نرده‌ای دوتناوبی (یا به طریق مشابه سه‌تناوبی در بلورهای سه‌بعدی) به فرم زیر است:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}(\mathbf{r}) = \mathbb{L}(x, y) = \mathbb{L}(\mathbf{r} + m\mathbf{a} + n\mathbf{b}), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (17)$$

و جواب‌های $A(\cdot)$ طبق قضیه بلوخ-فلوکه به فرم توابع بلوخ دو بعدی با تابع بسته $\Phi(\cdot)$ دوتناوبی هستند:

$$A(\mathbf{r}) = \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (18-1)$$

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \Phi_{\mathbf{k}}(x, y) = \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + m\mathbf{a} + n\mathbf{b}), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (18-2)$$

در روابط (۱۸) برای بردار موج دو بعدی بلوخ داریم $\mathbf{k} = (\kappa_x, \kappa_y)$. نیز در رابطه (۱۶) بسته به نوع قطبش $\mathbb{L} = \mathbb{L}_E$ و $A = E_z$ ، یا $\mathbb{L} = \mathbb{L}_H$ و $A = H_z$. در نتیجه رابطه‌ی (۷) بخش ۳ به صورت کلی‌تر زیر درمی‌آید:

$$A(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \iint \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp[j\omega_n(\mathbf{k})t] d^2\kappa \right\} \quad (19)$$

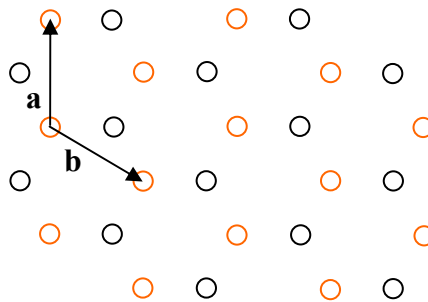
که در آن $\omega_n(\mathbf{k})$ تابعی غیر بدیهی و وابسته به ویژگی‌های ناهمگنی بلور فوتونی است که مشابه سیستم یک بعدی آن را ساختار باند بلور فوتونی می‌نامیم. در بخش بعد این مطلب به تفصیل مورد بحث قرار می‌گیرد.

تمرین

۱- ضمن ترسیم شکل نشان دهید سلول صحیح واحد شبکه مثلثی دارای یک نقطه شبکه است.

۲- آیا در شبکه‌ی مثلثی می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی که دو ضلع آن بردارهای پایه‌ی شبکه هستند به عنوان سلول واحد در نظر گرفت؟ چرا؟

۳- سلول ویگنر-سایترز را برای شبکه‌ی مربعی و مثلثی در دو بعد و مکعبی ساده در سه بعد به دست آورید. آیا می‌توانید در مورد شبکه‌ی گرافیت روش نامبرده را به کار ببرید؟ دقت کنید که شبکه‌ی گرافیت از ادغام دو دسته نقاط A و B مانند نقاط سیاه و قرمز در شکل زیر به دست می‌آید.



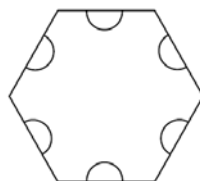
۴- درستی (۱۳) و (۱۵) را وقتی $\beta = 0$ است تحقیق کنید.

۵- معادله (۱۳-۱) در واقع دارای یک تناظر با معادله‌ی شرودینگر غیر نسبیتی برای الکترون منفرد در پتانسیل الکتروستاتیک دارد. پارامترهای این تناظر را یک به یک مشخص نمایید.

۶- آیا نتیجه‌گیری ذیل (۱۵) وقتی $\mu(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r}_\perp) = \mu(x, y)$ و $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}_\perp) = \varepsilon(x, y)$ هنوز معتبر است؟ در صورت پاسخ مثبت معادلات (۱۳) و (۱۵) را بازنویسی کنید.

۷- نشان دهید وقتی $\beta \neq 0$ باشد امکان تفکیک معادله (۱۰) و (۱۴) به دو معادله‌ی نرده‌ای وجود ندارد.

۸- شبکه‌ی Kagomé دارای سلول واحد به صورت زیر است. با تکرار سلول واحد، شبکه را ترسیم نمایید و نقاط آن را همانند تمرین (۳) دسته‌بندی کنید. تفاوت آن با شبکه‌ی گرافیت در چیست؟



بخش ۵

شبکه‌ی معکوس

یک تابع متناوب یک بعدی مانند:

$$A(x) = A(x + mL), \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (۱)$$

که در آن L دوره تناوب است را می‌توان در فضای فوریه نمایش داد:

$$A(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(-jmGx) \quad (۲-۱)$$

$$a_m = \frac{G}{2\pi} \int_L \exp(jmGx) A(x) dx \quad (۲-۲)$$

در این جا:

$$G \triangleq 2\pi/L \quad (۳)$$

ثابت شبکه‌ی وارون نامیده می‌شود. در دو (سه) بعد یک ساختار متناوب به ترتیب با دو (سه) بردار

پایه شبکه مانند \mathbf{a} و \mathbf{b} ، (و \mathbf{c}) مشخص می‌شود. تابع دوتناوبی (سه) تناوبی مربوطه از قاعده (۴-۱) یا

(۴-۲) پیروی خواهد نمود:

$$A(\mathbf{r}) = A(x, y) = A(\mathbf{r} + m\mathbf{a} + n\mathbf{b}), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z} \quad (۴-۱) \text{ (دو بعد)}$$

$$A(\mathbf{r}) = A(x, y, z) = A(\mathbf{r} + m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c}), \quad \forall m, n, p \in \mathbb{Z} \quad (۴-۲) \text{ (سه بعد)}$$

و همان طور که قبلاً گفتیم بایستی در دو بعد سطح سلول واحد $S \triangleq \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \hat{z} \neq 0$ یا در سه بعد حجم سلول واحد $V \triangleq \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \neq 0$ غیر صفر باشند. حال برای آن که بتوانیم یک تابع دو یا سه تناوبی مانند (۴) را به صورت سری فوریه بنویسیم لازم است که بردارهای شبکه معکوس \mathbf{a}^* و \mathbf{b}^* را به صورت زیر برای دو بعد:

$$\mathbf{a}^* \triangleq \frac{2\pi}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \hat{z}} \mathbf{b} \times \hat{z} = \frac{2\pi}{S} \mathbf{b} \times \hat{z} \quad (۵-۱)$$

$$\mathbf{b}^* \triangleq \frac{2\pi}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \hat{z}} \hat{z} \times \mathbf{a} = \frac{2\pi}{S} \hat{z} \times \mathbf{a} \quad (۵-۲)$$

و \mathbf{a}^* ، \mathbf{b}^* و \mathbf{c}^* را برای سه بعد تعریف نماییم:

$$\mathbf{a}^* \triangleq \frac{2\pi}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}} \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \frac{2\pi}{V} \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (۶-۱)$$

$$\mathbf{b}^* \triangleq \frac{2\pi}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}} \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \frac{2\pi}{V} \mathbf{c} \times \mathbf{a} \quad (۶-۲)$$

$$\mathbf{c}^* \triangleq \frac{2\pi}{\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{2\pi}{V} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (۶-۳)$$

روابط تعامد زیر همواره بین بردارهای پایه و وارون یک شبکه حاکم است:

$$\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{c} = 2\pi \quad (۷-۱)$$

$$\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (۷-۲)$$

تعاریف (۴) و (۵) بطور خاص هنگامی که شبکه مربعی و یا مکعبی داریم خیلی ساده می‌شوند:

$$\mathbf{a}^* = \frac{2\pi}{a^2} \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}^* = \frac{2\pi}{a^2} \mathbf{b} \quad (۸-۱) \text{ (دو بعد)}$$

$$\mathbf{a}^* = \frac{2\pi}{a^3} \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}^* = \frac{2\pi}{a^3} \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}^* = \frac{2\pi}{a^3} \mathbf{c} \quad (۸-۲) \text{ (سه بعد)}$$

که در آن $a \triangleq |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$ ثابت شبکه می‌باشد. واضح است که بردارهای شبکه‌ی وارون نیز در این حالت هنوز دو به دو متعامد باقی مانده‌اند، و لذا ویژگی زیر علاوه بر (۷) برقرار خواهد بود:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b}^* = \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{c}^* = \mathbf{c}^* \cdot \mathbf{a}^* = 0 \quad (۹)$$

حال تابع دوتناوبی را می‌توان به شکل زیر بسط داد:

$$A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r} + p\mathbf{a} + q\mathbf{b}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} \exp(-j\mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r}), \quad \forall p, q \in \mathbb{Z} \quad (10-1)$$

$$A_{mn} = \frac{1}{S} \iint_S A(\mathbf{r}) \exp(j\mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r}) d^2r \quad (10-2)$$

که در آن:

$$\mathbf{G}_{mn} \triangleq m\mathbf{a}^* + n\mathbf{b}^*, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (10-3)$$

یک بردار شبکه‌ی وارون است. به طریق مشابه در سه بعد داریم:

$$A(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r} + q\mathbf{a} + r\mathbf{b} + s\mathbf{c}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_{mnp} \exp(-j\mathbf{G}_{mnp} \cdot \mathbf{r}), \quad \forall q, r, s \in \mathbb{Z} \quad (11-1)$$

$$A_{mnp} = \frac{1}{V} \iiint_V A(\mathbf{r}) \exp(j\mathbf{G}_{mnp} \cdot \mathbf{r}) d^3r \quad (11-2)$$

$$\mathbf{G}_{mnp} \triangleq m\mathbf{a}^* + n\mathbf{b}^* + p\mathbf{c}^*, \quad m, n, p \in \mathbb{Z} \quad (11-3)$$

به طور نمادین روابط فوق را مانند زیر می‌توان نوشت:

$$A(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} A_{\mathbf{G}} \exp(-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (12-1)$$

$$A_{\mathbf{G}} = \frac{1}{V} \iiint_V A(\mathbf{r}) \exp(j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) d^3r \quad (12-2)$$

پس از این جا به بعد مفهوم رابطه‌ای مانند (۱۲-۱) در حقیقت یکی از روابط (۱۰-۱) یا (۱۱-۱) بسته به تعداد ابعاد مکانی مسئله است.

حال مجموعه نقاطی در صفحه یا فضا را که با کلیه بردارهای مانند (۱۰-۳) یا (۱۱-۳) مشخص می‌شوند شبکه وارون می‌نامیم. در شبکه وارون تقارنهای هندسی شبکه اصلی مانند دوران و تناوب وجود دارد. به عنوان مثال شبکه وارون شبکه مربعی یا مکعبی خود تبدیل به یک شبکه مربعی یا مکعبی مشابه می‌گردد که دقیقاً دارای همان ویژگی‌های هندسی می‌باشد. نیز در قیاس با (۱۰-۳) و (۱۱-۳) به ترتیب بردارهای شبکه \mathbf{R}_{mnp} و \mathbf{R}_{mn} را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{R}_{mn} \triangleq m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (13-1)$$

$$\mathbf{R}_{mnp} \triangleq m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c}, \quad m, n, p \in \mathbb{Z} \quad (13-2)$$

با کمک روابط تعامد می‌توان به سادگی نشان داد که:

$$\forall m, n, m', n' \in \mathbb{Z}, \exists p \in \mathbb{Z}; \quad \mathbf{R}_{mn} \cdot \mathbf{G}_{m'n'} = 2\pi p \quad (14-1)$$

$$\forall m, n, p, m', n', p' \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}; \quad \mathbf{R}_{mnp} \cdot \mathbf{G}_{m'n'p'} = 2\pi q \quad (14-2)$$

و از آن جا برای هر دو بردار دلخواه شبکه \mathbf{R} و شبکه وارون \mathbf{G} اتحاد زیر به دست می‌آید:

$$\exp(j\mathbf{R} \cdot \mathbf{G}) \equiv 1 \quad (15)$$

توجه نمایید که منظور از \mathbf{R} رابطه (۱۳) و $\mathbf{r} \triangleq x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ بردار مکان می‌باشد و لذا جز در نقاط

خاصی (کدام نقاط؟) اصولاً $\mathbf{R} \neq \mathbf{r}$.

نواحی بریلوین در شبکه معکوس

شبکه‌ی معکوس از مجموعه نقاطی مانند $\{\forall \mathbf{G}_{mnp} \mid \mathbf{G}_{mnp} = m\mathbf{a}^* + n\mathbf{b}^* + p\mathbf{c}^*; m, n, p \in \mathbb{Z}\}$

تشکیل می‌شود که خود یک مجموعه نقاط متناوب فضایی را به وجود می‌آورد. مشابه با شبکه

مستقیم بلور فوتونی شبکه معکوس را می‌توان با کمک انتقال و تکرار یک سلول واحد به دست آورد.

هرگاه سلول واحد شبکه معکوس را با روش ویگنر-سایتز حول مبدأ به دست آوریم در واقع به ناحیه

اول بریلوین خواهیم رسید. در واقع با این تعریف ناحیه‌ی اول بریلوین همان سلول ویگنر-سایتز

شبکه معکوس می‌باشد. نواحی بریلوین دوم و مراتب بالاتر را نیز می‌توان به همین روش تعریف و

تبیین نمود. به عنوان مثال حجم (سطح) سلول ویگنر-سایتز که با کمک نقاط همسایه مرتبه یک و

دو در شبکه معکوس سه بعدی (دو بعدی) ایجاد می‌شود را در نظر بگیرید. اختلاف این حجم (سطح)

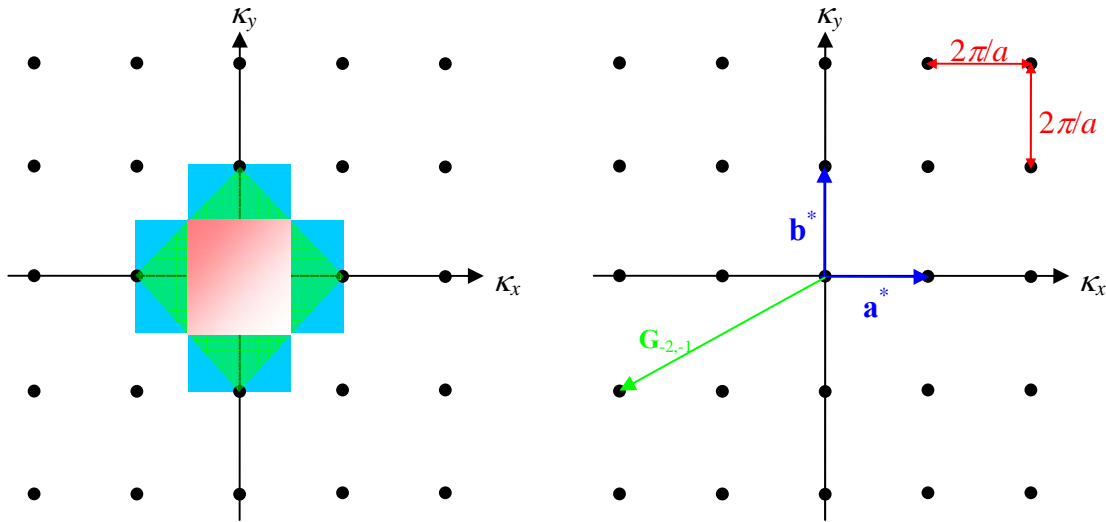
با سلول ویگنر-سایتز همان ناحیه‌ی بریلوین دوم خواهد بود. به همین ترتیب می‌توان ناحیه‌ی

بریلوین سوم و مراتب بالاتر را نیز یافت. آن چه در این جا اهمیت دارد آن است که حجم (سطح)

نواحی بریلوین از مرتبه‌ی مختلف با همدیگر یکسانند. لذا با توجه به این که کلیه اطلاعات ساختار

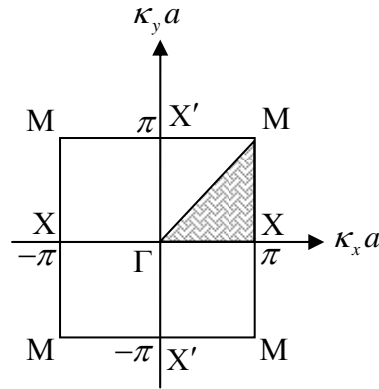
نوارهای بسامد $\omega(\mathbf{k})$ را می‌توان همانند ساختارهای یک بعدی تنها در ناحیه‌ی بریلوین اول خلاصه نموده و نمایش داد دانستن شکل و محدوده‌ی ناحیه‌ی بریلوین اول اصولاً برای کلیه‌ی محاسبات و شناسایی تمامی ویژگیهای انتشار، پراش، و پراکنش نور در بلور فوتونی کافی است.

در شکل (۱) شبکه‌ی معکوس یک بلور فوتونی مربعی و نواحی اول تا سوم بریلوین آن دیده می‌شوند. توجه کنید که بردارهای \mathbf{G} در حوزه \mathbf{k} ترسیم گردیده‌اند.



شکل (۱): شبکه‌ی معکوس یک بلور فوتونی مربعی؛ راست: نمایش نقاط شبکه معکوس، بردارهای پایه شبکه معکوس، و یک بردار \mathbf{G} در شبکه معکوس؛ چپ: نمایش نواحی اول تا سوم بریلوین.

در نتیجه منطقه‌ی اول بریلوین مربعی به ابعاد $\frac{2\pi}{a} \times \frac{2\pi}{a}$ خواهد بود که مرکز آن با مرکز شبکه‌ی معکوس، یا بردار $\mathbf{G}_{0,0}$ منطبق است. بر اساس ویژگی‌های تقارن شبکه مربعی می‌توان نشان داد که اطلاعات تنها بخشی کوچکی از ناحیه اول بریلوین برای حصول ساختار نوارهای بسامد در ناحیه اول بریلوین کافی است.



شکل (۲): نمایش ناحیه اول بریلوین و ناحیه کاهش ناپذیر؛ ناحیه کاهش ناپذیر با مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هاشور خورده مشخص شده است و گوشه‌های آن با نمادهای یونانی Γ ، X ، M و مشخص می‌گردند.

برای توضیح بیشتر مجدداً به شکل (۱) نگاه کنید. همانطور که دیده می‌شود ساختار شبکه معکوس غیر از ویژگی تقارن انتقالی نسبت به هر بردار شبکه‌ی معکوس دلخواه مانند \mathbf{G} که همان ویژگی تناوب آن است با اعمال دورانه‌ی $\frac{\pi}{2}$ (یا مضارب آن) حول مبدأ، تقارن آینه‌ای نسبت به محورهای k_x و k_y و اقطار صفحه که با محورهای یاد شده زاویه $\frac{\pi}{4}$ می‌سازند ناوردا است. لذا مثلث $\Gamma X M$ در شکل (۲) کوچکترین جزیی از ناحیه‌ی بریلوین اول است که با تبدیلات یاد شده قادر است کلیه اطلاعات ناحیه‌ی بریلوین اول را بازسازی نماید. به عنوان مثال مثلث $\Gamma X M$ در شکل (۱) که با ناحیه کاهش ناپذیر $\Gamma X M$ در ضلع ΓM مشترک است با کمک تقارن آینه‌ای نسبت به محور ΓM بدست می‌آید. طبق قرارداد مختصات نقاط مشخص شده در ناحیه‌ی اول بریلوین عبارت است از:

$$\Gamma \triangleq \mathbf{G}_{0,0,0} \quad (۱۶-۱)$$

$$M \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{G}_{1,1} \quad (۱۶-۲)$$

$$X \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{G}_{1,0} \quad (۱۶-۳)$$

$$X' \triangleq \frac{1}{2} \mathbf{G}_{0,1} \quad (۱۶-۴)$$

شایان ذکر است که کلیه‌ی نقاطی مانند Ξ و Λ که فاصله آنها یک بردار شبکه‌ی کامل باشد:

$$\Xi - \Lambda = \mathbf{G}_{mn}; \quad \exists m, n \in \mathbb{Z} \quad (۱۷)$$

هم ارز شمرده شده و معمولاً با یک نام مشخص می‌گردند. بدین ترتیب به عنوان مثال داریم:

$$M \triangleq \frac{1}{2}(+\mathbf{a}^* + \mathbf{b}^*) \equiv \frac{1}{2}(+\mathbf{a}^* - \mathbf{b}^*) \equiv \frac{1}{2}(-\mathbf{a}^* + \mathbf{b}^*) \equiv \frac{1}{2}(-\mathbf{a}^* - \mathbf{b}^*) \quad (18-1)$$

$$X \triangleq +\frac{1}{2}\mathbf{a}^* \equiv -\frac{1}{2}\mathbf{a}^* \quad (18-2)$$

ضمناً نام‌های نقاط در شبکه معکوس عموماً از حروف بزرگ یونانی انتخاب می‌گردد.

ساختار نوارهای بسامد

به منظور مطالعه‌ی پاشندگی بلور فوتونی، ساختار مربعی در دو بعد را بررسی می‌کنیم. چنانچه محیط کاملاً همگن باشد رابطه‌ی پاشندگی به صورت زیر خواهد بود:

$$\kappa \equiv |\mathbf{\kappa}| = n \frac{\omega}{c} \quad (19-1)$$

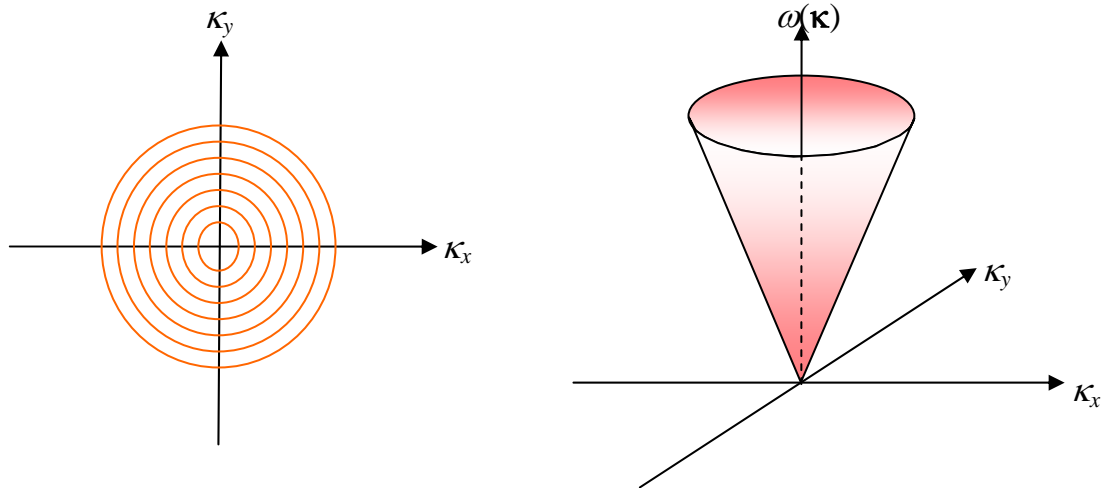
$$|\mathbf{\kappa} - \mathbf{G}| = n \frac{\omega}{c}; \quad \forall \mathbf{G} \quad (19-2)$$

رابطه‌ی (۱۹-۱) برای دی‌الکتریک همگن بوده و (۱۹-۲) برای دی‌الکتریک همگنی که ناهمگنی با دامنه بینهایت کوچکی مانند $\delta\varepsilon(\mathbf{r})$ به گذردهی الکتریکی آن اضافه شده (شبکه‌ی تهی) معتبر است. پس تنها فرض تناوب در ساختار موجب ایجاد تناوب در شبکه‌ی معکوس نیز می‌گردد، به گونه‌ای که همواره:

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \Rightarrow \omega(\mathbf{\kappa}) = \omega(\mathbf{\kappa} + \mathbf{G}); \quad \forall \mathbf{R}, \mathbf{G} \quad (20)$$

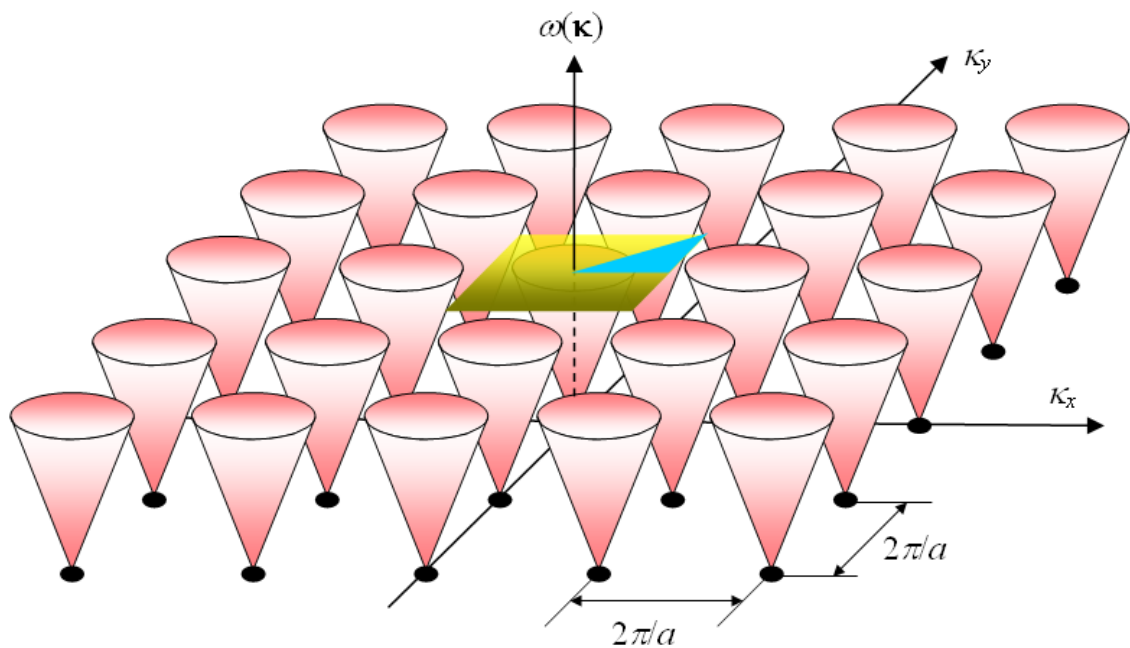
در رابطه‌ی (۲۰) مجموعه نقاط شبکه اصلی با بردارهای \mathbf{R} و شبکه معکوس با بردارهای \mathbf{G} مشخص می‌گردند.

پس رابطه‌ی (۱۹-۲) مجموعه‌ای از مخروط‌های نور (۱۹-۱) را نشان می‌دهد که رئوس آنها بر نقاط شبکه‌ی معکوس تطابق دارد. در شکل (۳) مخروط نور (۱۹-۱) و در شکل (۴) پاشندگی (۱۹-۲) نمایش داده شده است. همان طور که ملاحظه می‌شود دسته منحنی‌های بسامد ثابت برای (۱۹-۱) به شکل دوایر هم‌مرکز می‌باشند که مرکز تمامی آنها منطبق بر مبدا صفحه‌ی (κ_x, κ_y) قرار دارد.



شکل (۳): نمایش مخروط نور برای محیط همگن دوبعدی:

(راست) نمای جانبی مخروط؛ (چپ) منحنی‌های بسامد ثابت.

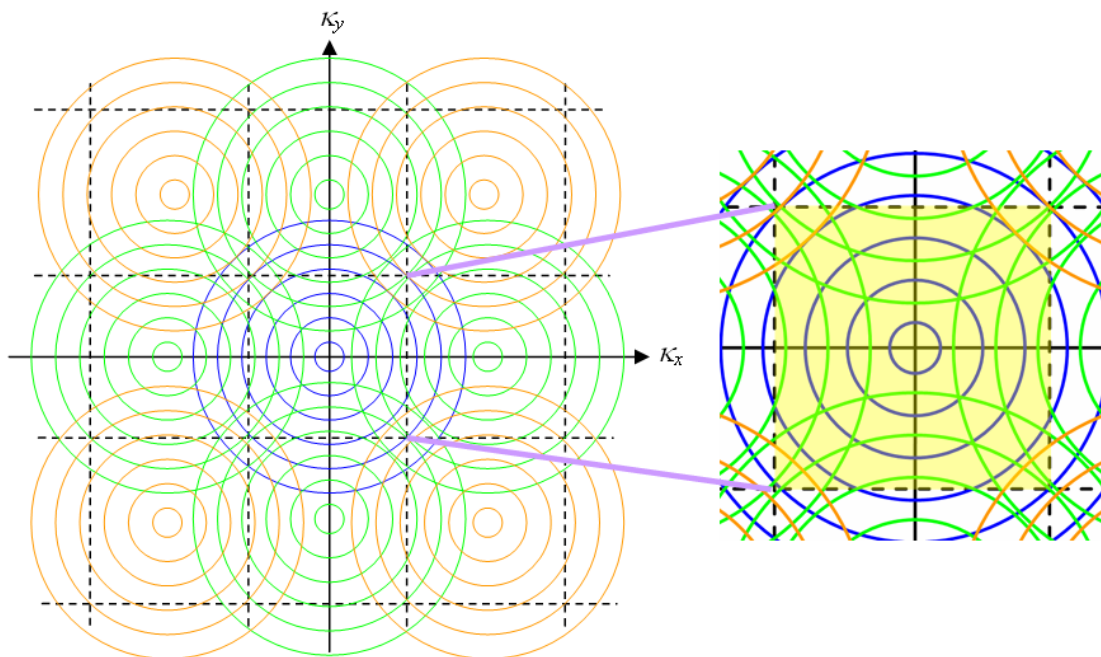


شکل (۴): نمایش منحنی پاشندگی برای محیط همگن دوبعدی با

ناهمگنی افزوده متناوب و بسیار کوچک (شبکه‌ی تهی):

ناحیه بریلوین اول با مربع سایه خورده و ناحیه کاهش ناپذیر با مثلث تیره‌تر مشخص گردیده‌اند.

حال چنانچه به منحنی‌های بسامد ثابت در شکل (۴) نگاه کنیم شکل زیر به دست خواهد آمد:



شکل (۵): منحنی‌های بسامد ثابت برای بلور فوتونی حاصل از دی‌الکتریک همگن با تغییرات بی‌نهایت کوچک در تابع گذردهی (شبکه‌ی تهی)؛ (چپ): منحنی‌های ثابت؛ (راست) ناحیه‌ی بریلوین اول.

همان‌طور که دیده می‌شود منحنی‌های بسامد ثابت در گروه‌های دوایر هم‌مرکز قابل تفکیک هستند که مرکز آنها بر یکی از نقاط شبکه معکوس منطبق است. مثلاً گروه آبی رنگ با نقطه‌ی $G_{0,0}$ ، گروه سبز با نقاط $G_{\pm 1,0}$ و $G_{0,\pm 1}$ ، و گروه نارنجی با نقاط $G_{\pm 1,\pm 1}$ و $G_{\pm 1,\mp 1}$ هم‌مرکز می‌باشند. ورود هر گروه به ناحیه‌ی بریلوین اول موجب ترسیم سطوح پاشندگی بسامد می‌گردند.

در بالا شکل راست شکل (۵) ناحیه بریلوین اول با بزرگ‌نمایی بیشتر دیده می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رود نوار اول بسامد از مخروط منطبق بر $G_{0,0}$ به وجود آمده است، در حالی که ورود مخروط‌های هم‌مرکز با نزدیک‌ترین همسایگان $G_{0,0}$ ، یعنی $G_{\pm 1,0}$ و $G_{0,\pm 1}$ ، نوار دوم را ایجاد می‌نماید. به همین ترتیب نزدیک‌ترین همسایگان در رتبه‌ی بعد نقاط $G_{\pm 1,\pm 1}$ و $G_{\pm 1,\mp 1}$ هستند که ورود مخروط‌های آنان به ناحیه‌ی بریلوین اول در بسامدهای بزرگتر رخ داده و نوار سوم را ایجاد

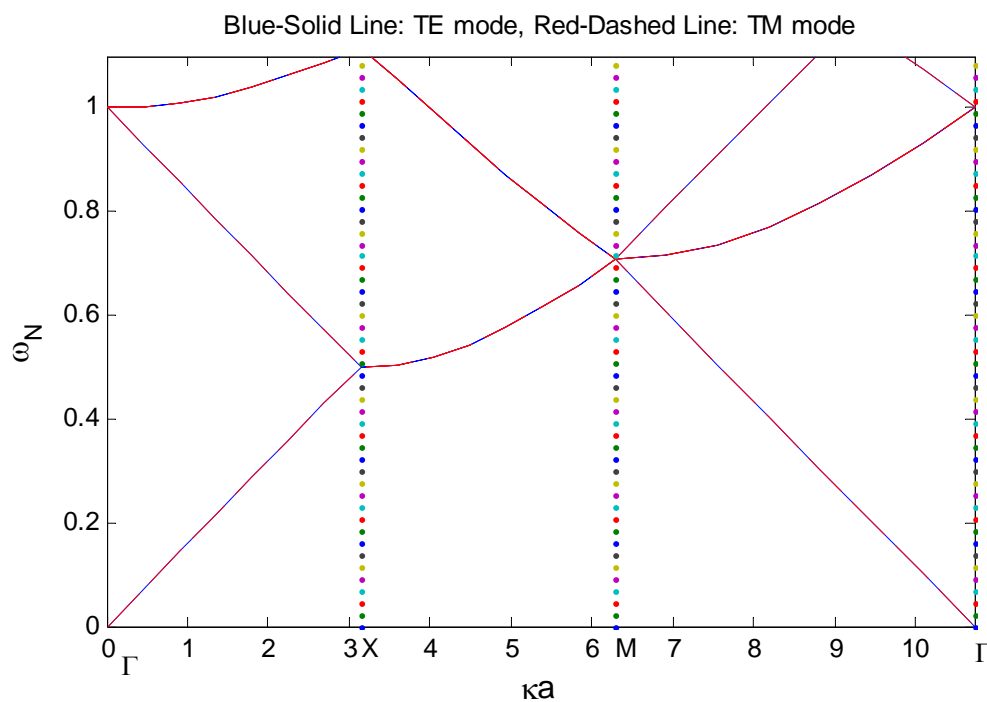
می‌نماید. برای تجسم دقیق‌تر چگونگی این آرایش به شکل بعدی توجه نمایید که در آن مقاطع نوارهای بسامد در امتداد محیط اضلاع ناحیه کاهش‌ناپذیر ترسیم شده‌اند.

نیز ممکن است این سؤال پیش بیاید که چرا ساختار باند را روی اضلاع ناحیه‌ی بریلوین کاهش‌ناپذیر ترسیم می‌کنیم. برای پاسخ به این سؤال ابتدا یک دی‌الکتریک همگن یا شبکه‌ی تهی را در نظر بگیرید. هر تقارن با یک تبهگنی متناظر می‌باشد؛ بدین مفهوم که در نقاط با تقارن بالا مانند کلیه نقاطی که روی اضلاع ناحیه‌ی بریلوین کاهش‌ناپذیر قرار دارند، ساختار باند $\omega(\mathbf{k})$ تبهگن می‌شود. یعنی متناظر با یک بسامد داده شده $\omega(\mathbf{k})$ و یک بردار موج \mathbf{k} بیش از یک مود ویژه وجود خواهد داشت. درجه‌ی تبهگنی برای هر قطبش حداکثر به ۲ می‌رسد (چرا؟)، می‌توان این پدیده را با تبهگنی ساختار باند انرژی الکترونی در بلورهای نیمه‌هادی نسبت به اسپین بالا و پایین مقایسه کرد. در حقیقت هر ظرفیت انرژی و تابع موج داده شده می‌تواند دو الکترون با اسپین‌های مختلف ولی انرژی‌های یکسان را بپذیرد.

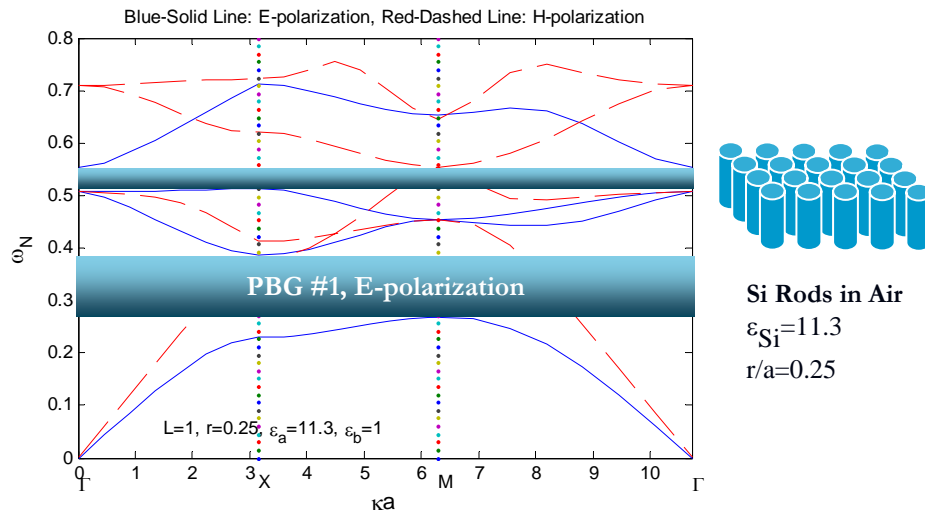
حال با اعمال اندکی اختلال متناوب در ثابت دی‌الکتریک شبکه‌ی تهی به یک بلور فوتونی می‌رسیم. اعمال اختلال معمولاً منجر به رفع تبهگنی و ایجاد شکاف بین مقادیر ویژه‌ی یکسان می‌گردد. چنانچه این شکاف یا اختلاف بسامد به حد کافی بزرگ باشد، گاف فوتونی پدید خواهد آمد. پس به عنوان نتیجه‌ی کلی می‌توان ادعا کرد که چنانچه اختلال بسیار بزرگ نباشد، آن گاه گاف فوتونی را لزوماً با مقایسه‌ی ساختار باند روی نقاط با تقارن بالا (که همان اضلاع ناحیه‌ی بریلوین کاهش‌ناپذیر هستند) باید جستجو کرد. به همین دلیل معمولاً اطلاعات ساختار باند در بلورهای فوتونی یک، دو یا سه بعدی تنها در امتداد اضلاع ناحیه‌ی بریلوین کاهش‌ناپذیر کافی است و بدیهی است که در حالت بلور فوتونی مربعی منظور همان مسیر گردش $\Gamma \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow \Gamma$ می‌باشد. در شکل (۶) بسامد نرمالیزه طبق رابطه‌ی:

$$\omega_N \triangleq \frac{\omega a}{2\pi c} = \frac{a}{\lambda} \quad (21)$$

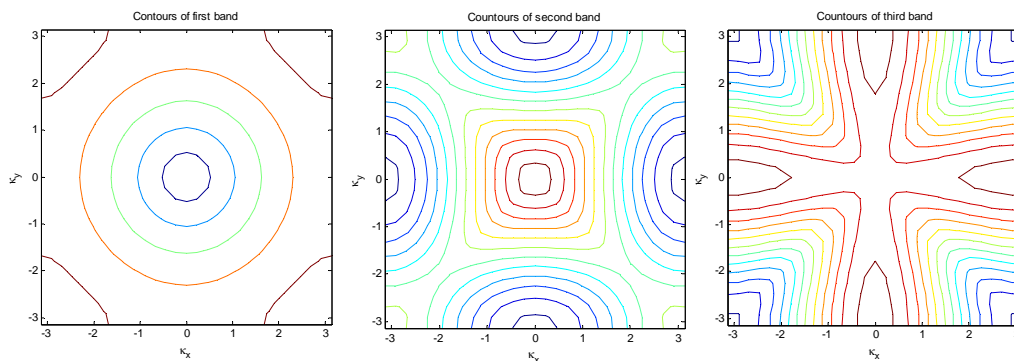
تعریف می‌شود که در آن λ طول موج در خلأ است. بدیهی است در این حالت ساختار باند قطبش‌های الکتریکی و مغناطیسی بر هم‌دیگر منطبق باشند. حال افزودن کمی تغییرات $\delta\epsilon(\mathbf{r})$ متناهی و دارای تناوب مکانی مربعی به دی‌الکتریک میزبان که می‌تواند خود خلأ، هوا، یک نیمه هادی، یا هر دی‌الکتریک دیگری باشد موجب جدا شدن ساختارهای نوار قطبش‌های الکتریکی و مغناطیسی و نیز ایجاد گاف فوتونی در مرزهای X ، M ، و Γ می‌گردد. شکل زیر ساختار نواری را برای میله‌های از جنس Si با $\epsilon_r = 11.3$ و نسبت شعاع به ثابت شبکه $\frac{r}{a} = 0.25$ رسم شده است. خطوط خط چین قرمز قطبش مغناطیسی و خطوط پر آبی قطبش مغناطیسی را نشان می‌دهند. برای قطبش الکتریکی دو گاف اول و دوم مشخص شده‌اند. در این ساختار برای قطبش مغناطیسی دست کم تا بسامدهای کمتر از 0.75 گاف وجود ندارد. در شکل (۸) نیز دسته منحنی‌های بسامد ثابت ساختار نواری بسامد شکل (۷) نشان داده شده است.



شکل (۶): ساختار باند بلور فوتونی مربعی با دی‌الکتریک همگن و ضریب شکست واحد (شبهه‌ی تهی) [۱۲ و ۱].

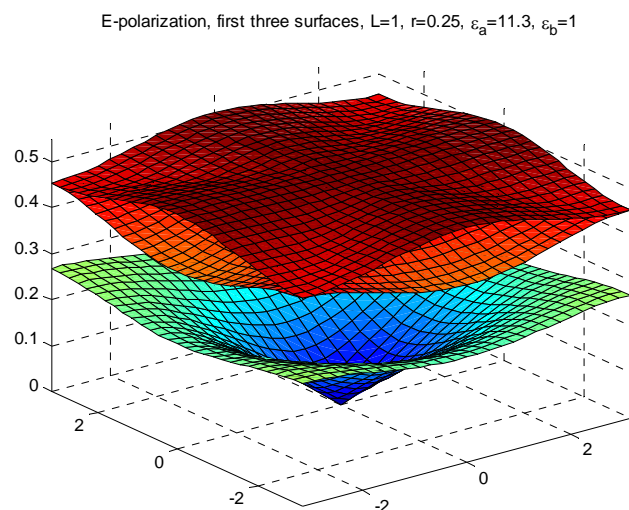


شکل (۷): ساختار نواری بسامد برای بلور فوتونی مربعی میله‌های سیلیکون در هوا [۱ و ۲].

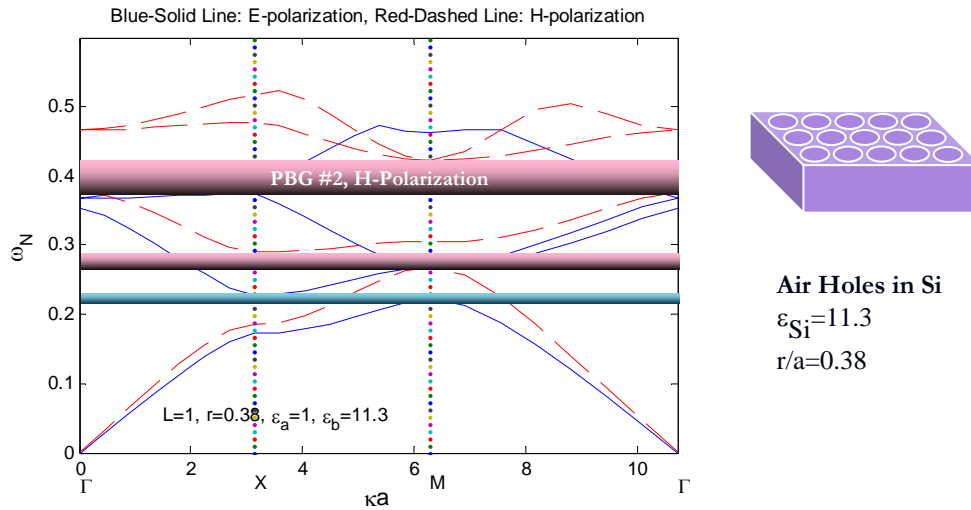


شکل (۸): دسته منحنی‌های بسامد ثابت ساختار نواری بسامد قطبش الکتریکی برای بلور فوتونی میله‌های سیلیکون در

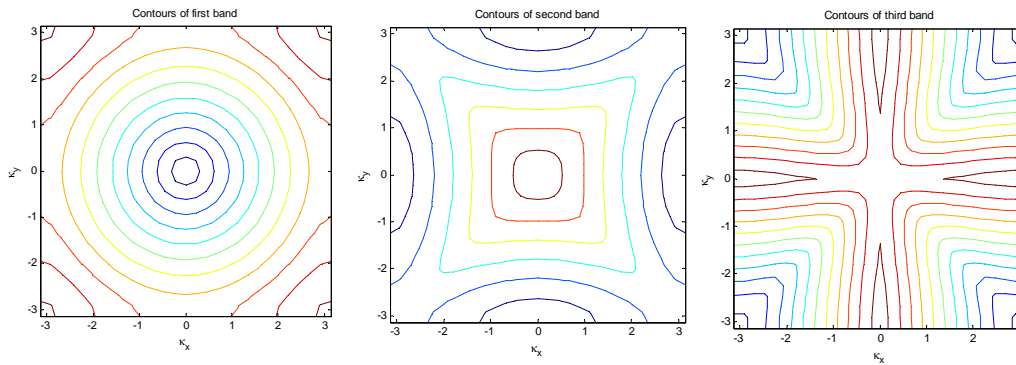
هوا؛ (چپ): نوار مجاز بسامد اول؛ (وسط): نوار مجاز بسامد دوم؛ (راست): نوار مجاز بسامد سوم [۱ و ۲].



شکل (۹): نمای سه‌بعدی از ساختار نواری بسامد قطبش الکتریکی برای بلور فوتونی شکل (۷) [۱ و ۲].

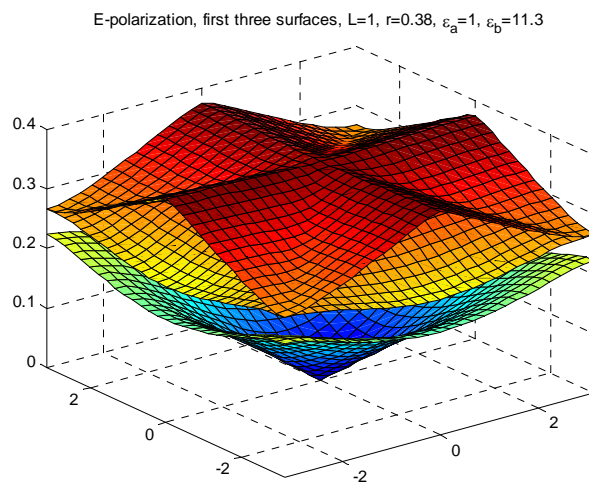


شکل (۱۰): ساختار نواری بسامد برای بلور فوتونی مربعی سوراخ‌های هوا در سیلیکون [۱۰].

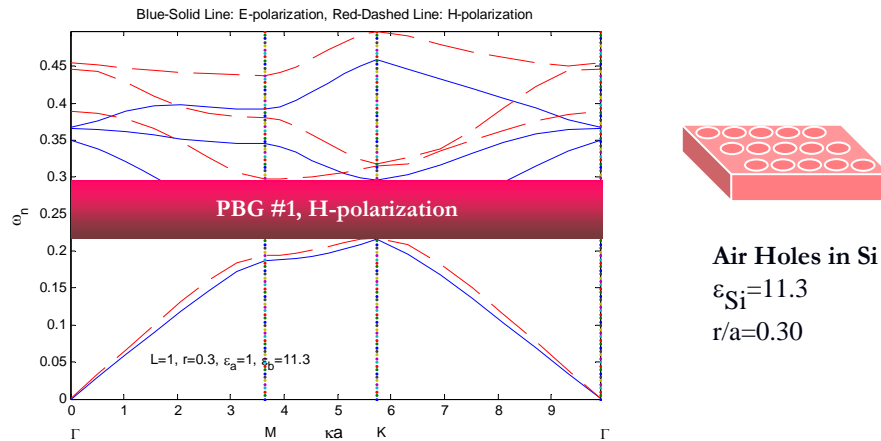


شکل (۱۱): دسته منحنی‌های بسامد ثابت ساختار نواری بسامد قطبش الکتریکی برای بلور فوتونی سوراخ‌های هوا در

سیلیکون؛ (چپ): نوار مجاز بسامد اول؛ (وسط): نوار مجاز بسامد دوم؛ (راست): نوار مجاز بسامد سوم [۱۰].

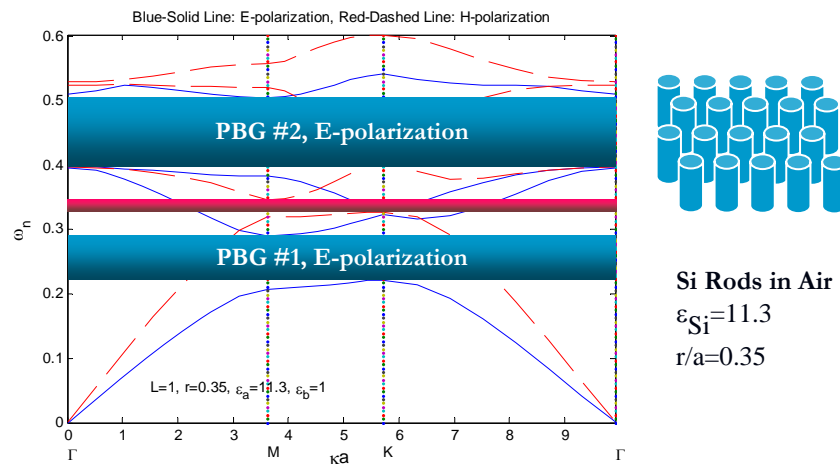


شکل (۱۲): نمای سه‌بعدی از ساختار نواری بسامد قطبش الکتریکی برای بلور فوتونی شکل (۱۰) [۱۰].



شکل (۱۳): ساختار نواری بسامد برای بلور فوتونی مثلثی سوراخ‌های هوا در سیلیکون [۱۰۲]

(برای مشاهده شکل ناحیه کاهش ناپذیر به تمرین ۸ رجوع کنید.)



شکل (۱۴): ساختار نواری بسامد برای بلور فوتونی مثلثی میله‌های سیلیکون در هوا [۱۰۲].

شکل (۹) نوارهای بسامد اول تا سوم را در منطقه‌ی بریلوین اول بلور مربعی شکل (۷) برای قطبش الکتریکی در نمایی سه‌بعدی نشان می‌دهد. به همین ترتیب مجموعه اشکال (۱۰) تا (۱۲) ساختار نوارهای بسامد بلور فوتونی مربعی با سوراخ‌های هوا در سیلیکون به عنوان دی‌الکتریک میزبان نشان می‌دهد. در مقایسه با ساختار قبلی سه گاف فوتونی در بسامدهای کوچک‌تر از ۰.۸ دیده می‌شود که دوتای آنها دارای قطبش مغناطیسی هستند. این در حالی است که ساختار شکل (۷) فاقد گاف مغناطیسی بود. از سوی دیگر همان طور که از شکل به خوبی بر می‌آید ساختار شکل (۷) گاف بزرگتری (یا نسبت عرض گاف به بسامد میانی بزرگتری) ایجاد نموده است. در مقابل ساختار مربعی

میله‌ای شکل (۷) که تنها گاف فوتونی الکتریکی دارد ساختار مثلثی سوراخدار شکل (۱۳) تنها گاف مغناطیسی در بسامدهای میانی و کوچک دارد. نیز ساختار مثلثی میله‌ای شکل (۱۴) دارای گاف‌های الکتریکی و مغناطیسی است، و ضمناً گاف دوم الکتریکی آن نسبتاً بزرگ می‌باشد. در مقایسه با سه ساختار قبلی این تنها آرایشی است که گاف بزرگی را در حدود $\omega_N \sim 0.5$ ایجاد نموده است. به عنوان آخرین نکته در این بخش بایستی به علت نرمالیزه کردن بسامد اشاره نمود. اگر از پاشندگی ذاتی مواد یا وابستگی ثابت گذردهی الکتریکی و مغناطیسی آنها نسبت به بسامد بتوان صرف نظر کرد آن گاه بلورهای فوتونی دارای قابلیت مقیاس‌بندی خواهند بود، بدین مفهوم که می‌توان با مقیاس مشخصی تمامی ابعاد را کوچکتر یا بزرگتر کرده و همان ساختار نواری بسامد را بدون تغییر بر بلور مقیاس شده حاکم فرض کرد. به عنوان مثال می‌توان آزمایش‌های مربوط به ساختارهای سه‌بعدی را با دقت بسیار بیشتر و هزینه بسیار کمتر در طیف ریزموج و با ابعاد از مرتبه سانتیمتر به جای طیف نوری با ابعاد از مرتبه زیر میکرون انجام داد.

مراجع

- [1] S. Khorasani, "Numerical Methods in Analysis of Photonic Crystals," *1st Workshop on Photonic Crystals*, Mashad (2005).
- [2] S. Khorasani, K. Mehrany, M. Chamanzar, B. Rashidian, A. Atabaki, "A Review of Photonic Crystal Science & Technology," *12th Conference on Optics & Photonics*, Shiraz (2006).
- [3] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*

تمرین

۱- درستی روابط (۷) و (۸) را نشان دهید.

۲- با کمک اتحادهای برداری رابطه‌ای میان $V \triangleq \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ و $V_{BZ} \triangleq \mathbf{a}^* \times \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{c}^*$ بیابید.

۳- برای یک شبکه‌ی دو بعدی مفروض است $\mathbf{a} = \frac{a}{2}(\hat{x} + \sqrt{3}\hat{y})$ و $\mathbf{b} = \frac{a}{2}(\hat{x} - \sqrt{3}\hat{y})$. بردارهای

پایه را در صفحه رسم نمایید. هندسه‌ی این شبکه چیست؟ بردارهای شبکه‌ی معکوس را محاسبه و ترسیم کرده و زاویه میان آنها را بیابید.

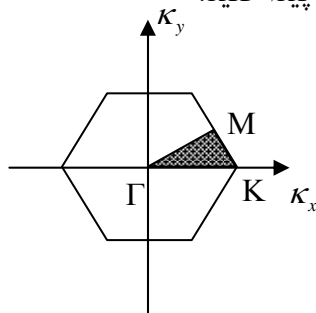
۴- روابط (۱۴) و (۱۵) را ثابت نمایید و سپس نشان دهید که توابع مشخص شده با بسط دو یا سه‌گانه‌ی فوریه در (۱-۱۰) و (۱-۱۱) به ترتیب دو و سه تناوبی هستند.

۵- آیا نقاط X و X' در ناحیه‌ی بریلوین اول شبکه معکوس بلور فوتونی مربعی هم‌ارزند؟ چرا؟

۶- در شکل (۶) نشان دهید بسامد نرمالیزه در مرز نوارهای بسامد اول و دوم در نقاط X و M به ترتیب برابر $\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. اگر ضریب شکست دی‌الکتریک میزبان برابر $n > 1$ باشد نتیجه چه فرقی خواهد نمود؟

۷- با تغییر دادن برنامه SharifPWE_BZplotTri.m در پیوست ب ساختار باند بلورهای فوتونی گرافیت و Kagomé را آنالیز کنید. (راهنمایی: از قضیه جابه‌جایی مکانی در بسط فوریه استفاده کنید).

۸- در شکل روبرو مثلث هاشور خورده منطقه کاهش یافته یک شبکه مثلثی را نشان می‌دهد. با فرض این که ثابت شبکه اصلی a باشد، ابعاد اضلاع این مثلث را پیدا کنید.



۹- ضمن مقایسه با مفهوم گاف مستقیم و غیرمستقیم در نیمه‌هادی‌ها [۳] نشان دهید که گاف فوتونی در بلور یک بعدی همواره مستقیم است. نیز نشان دهید که در بلور فوتونی دو بعدی اگر گاف فوتونی بین نوارهای بسامد اول و دوم جای گرفته باشد، آن گاه گاف فوتونی به دست آمده لزوماً غیرمستقیم است.

بخش ۶

قضیه بلوخ و بسط امواج تخت

در این قسمت ابتدا به ارایه‌ی اثباتی برای قضیه بلوخ-فلوکه می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا معادله‌ی عملگری زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbb{L}\Psi = \lambda\Psi \quad (۱)$$

که در آن Ψ تابع ویژه، λ مقدار ویژه، و \mathbb{L} عملگری خطی و تابع مکان است که با عملگر جابجایی شبکه که بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbb{T}_{mnp} \hat{=} \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{R}_{mnp} \quad (۱-۲)$$

$$\mathbf{R}_{mnp} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} \quad (۲-۲)$$

به صورت زیر جابجا می‌شود:

$$[\mathbb{L}, \mathbb{T}_{mnp}] = \mathbb{L}\mathbb{T}_{mnp} - \mathbb{T}_{mnp}\mathbb{L} = 0 \quad (۳)$$

تحت این شرایط اصطلاحاً \mathbb{L} را عملگری متناوب می‌نامیم. همانطور که در پیوست الف نشان داده شده است وقتی که دو عملگر جابجا می‌شوند، دارای توابع ویژه‌ی همانند خواهند بود، لذا خواهیم داشت:

$$\mathbb{T}_{mnp} \Psi = \chi_{mnp} \Psi \quad (۴)$$

در رابطه‌ی اخیر χ_{mnp} مقدار ویژه‌ی عملگر جابجایی شبکه \mathbb{T}_{mnp} است. توجه شود که با وجود آنکه \mathbb{T}_{mnp} و \mathbb{L} دارای توابع ویژه‌ی مشترک Ψ هستند ولی رابطه‌ی مقادیر ویژه‌ی آنها یعنی λ و χ_{mnp} رابطه‌ای غیر بدیهی است. خواهیم دید که مفهوم ساختار باند فوتونی همان نگاشتی است که این دو مجموعه مقادیر ویژه را به هم مرتبط می‌سازد.

حال عملگر انتقال شبکه \mathbb{T}_{mnp} را به صورت ضرب سه عملگر می‌توان تفکیک نمود:

$$\mathbb{T}_{mnp} = \mathbb{T}_{00p} \mathbb{T}_{0n0} \mathbb{T}_{m00} \quad (۵)$$

از تمرین ۱ چنین استفاده می‌شود که (۵) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$\mathbb{T}_{mnp} = (\mathbb{T}_{001})^p (\mathbb{T}_{010})^n (\mathbb{T}_{100})^m \quad (۶)$$

توجه نمایید که ترتیب نوشتن عملگرهای جابجایی واحد \mathbb{T}_{100} ، \mathbb{T}_{010} ، و \mathbb{T}_{001} در (۶) بی‌اثر است؛ به بیان دیگر کل $m+n+p$ جمله که در (۶) در هم ضرب می‌شوند را می‌توان به هر ترتیب دلخواه جابجا کرد (چرا؟). حال طبق (۴) خواهیم داشت:

$$\mathbb{T}_{100} \Psi = \chi_{100} \Psi \triangleq \exp(-j 2\pi \delta_x) \Psi \quad (۱-۷)$$

$$\mathbb{T}_{010} \Psi = \chi_{010} \Psi \triangleq \exp(-j 2\pi \delta_y) \Psi \quad (۲-۷)$$

$$\mathbb{T}_{001} \Psi = \chi_{001} \Psi \triangleq \exp(-j 2\pi \delta_z) \Psi \quad (۳-۷)$$

که در آن δ_x ، δ_y ، و δ_z فازهای اختیاری هستند و می‌توانند دارای مقادیر حقیقی یا موهومی باشند. پس می‌توان نتیجه گرفت که کلی‌ترین شکل مقادیر ویژه عملگر جابجایی شبکه \mathbb{T}_{mnp} عبارتست از:

$$\chi_{mnp} = \exp\left[-j 2\pi (m \delta_x + n \delta_y + p \delta_z)\right] \quad (۸)$$

حال با توجه به تعریف بردار شبکه \mathbf{R}_{mnp} در (۲-۲) بردار $\mathbf{\kappa}$ را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که

$$\chi_{mnp} = \exp\left[-j \mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{R}_{mnp}\right] \quad (۹)$$

برقرار باشد. در این حالت \mathbf{k} را بردار موج بلوخ-فلوکه می‌نامیم که در فصول قبل مفهوم آن بازتر شده است. برای این منظور لازم است که داشته باشیم:

$$\mathbf{k} \triangleq \delta_x \mathbf{a}^* + \delta_y \mathbf{b}^* + \delta_z \mathbf{c}^* \quad (10)$$

در اینجا \mathbf{a}^* ، \mathbf{b}^* و \mathbf{c}^* بردارهای پایه‌ی شبکه‌ی معکوس می‌باشند که در بخش ۵ تعریف گردیده‌اند. پس دیده می‌شود که بردار \mathbf{k} دارای بُعد عکس مکان است، ولی باید توجه گردد که می‌تواند مقادیر مختلط هم بپذیرد.

اکنون تنها کافی است که نشان دهیم برای توابع ویژه Ψ می‌توان نوشت

$$\Psi \equiv \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (11)$$

که در آن $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ تابعی متناوب است، یعنی:

$$\mathbb{T}_{mnp} \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}_{mnp}) = \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (12)$$

به بیان دیگر $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ تابع ویژه‌ی \mathbb{T}_{mnp} با مقدار ویژه‌ی تبهگن (چرا؟) واحد می‌باشد. توجه نمایید که با وجود آنکه $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ تابعی متناوب است لزوماً امواج بلوخ-فلوکه $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ متناوب نیستند. به همین دلیل امواج بلوخ-فلوکه $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ را شبه‌متناوب می‌نامیم.

علیرغم آنکه $\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ خود متناوب نیست چنانچه \mathbf{k} دارای مقدار حقیقی باشد می‌توان نوشت:

$$\mathbb{T}_{mnp} |\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 = \mathbb{T}_{mnp} |\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 = |\mathbb{T}_{mnp} \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 = |\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 = |\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 \quad (13)$$

که نشان می‌دهد شدت میدان در بلور فوتونی (یا چگالی حضور الکترون در شبکه الکترونی) هنوز برای امواج بلاخ در مکان کاملاً متناوب است. تحت شرایطی که \mathbf{k} حقیقی است انتشار موج بلاخ در بلور بدون انعکاس امکان پذیر است و بنابراین مقدار ویژه λ نیز در نوارهای مجاز بسامد (یا انرژی) قرار می‌گیرد. اما اگر دست کم یکی از سه مولفه‌ی \mathbf{k} موهومی باشد (۱۳) برقرار نخواهد بود و بنابراین مقدار ویژه λ در نوارهای ممنوعه بسامد (یا انرژی) قرار خواهد داشت.

نگاشت غیر بدیهی مقادیر ویژه‌ی \mathbb{L} و \mathbb{T}_{mnp} برای بلورهای فوتونی که در آنها $\lambda \equiv \omega^2/c^2$ است بصورت $\omega \equiv \omega(\mathbf{k})$ ، و برای بلورهای الکترونی که $\lambda \equiv E$ همان انرژی الکترون است، به فرم $E \equiv E(\mathbf{k})$ قابل نمایش می‌باشد که ما آنرا قبلاً با نام ساختار باند بسامد یا انرژی به تفصیل دیده‌ایم.

ساختار نواری در دو بعد

برای محاسبه ساختار باند فوتونی در این بخش اقدام به ارایه مدلی از یک سیستم با تناوب دو بعدی می‌کنیم [۱] که در آن تابع متناوب گذردهی در خلأ:

$$\mathbb{T}_{mn} \varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) \quad (14)$$

دارای تقارن مربعی است. پس بردارهای شبکه عبارتند از:

$$\mathbf{R}_{mn} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \quad |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = a \quad (15)$$

در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که ضریب گذردهی را بتوانیم بصورت مجموع دو تابع وابسته به x و y بنویسیم:

$$\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv X(x) + Y(y) \quad (16)$$

بدیهی است برای یک بلور فوتونی معمول هرگز (۱۶) دقیقاً برقرار نیست، ولی می‌توان نشان داد [۱] که فرم (۱۶) برای دست یافتن به یک تقریب عالی برای توصیف انتشار قطبش الکتریکی در بلورهای فوتونی دوبعدی مربعی و دست کم در سه نوار اول بسامد بسیار مناسب است. ضمناً همان‌طور که نشان داده خواهد شد مسئله‌ی انتشار موج و ساختار باند برای این خانواده‌ی خاص از تغییرات گذردهی الکتریکی که با (۱۶) مشخص می‌گردد به شکل تحلیلی و صریح و به سادگی قابل حل است.

معادله‌ی انتشار موج را برای قطبش الکتریکی در دو بعد می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\nabla^2 E_z(x, y) + k_0^2 \varepsilon(x, y) E_z(x, y) = 0 \quad (1-17)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (۲-۱۷)$$

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (۳-۱۷)$$

با تفکیک E_z به شکل:

$$E_z(x, y) = \chi(x)\psi(y) \quad (۱۸)$$

و با استفاده از (۱۷) به دست می‌آید:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] [\chi(x)\psi(y)] + \frac{\omega^2}{c^2} [X(x) + Y(y)] [\chi(x)\psi(y)] = 0 \quad (۱۹)$$

یا

$$\chi''(x)\psi(y) + \chi(x)\psi''(y) + \frac{\omega^2}{c^2} [X(x) + Y(y)] [\chi(x)\psi(y)] = 0 \quad (۲۰)$$

با تقسیم طرفین رابطه بر $\chi(x)\psi(y)$ خواهیم داشت:

$$\frac{\chi''}{\chi} + \frac{\psi''}{\psi} + \frac{\omega^2}{c^2} [X + Y] = 0 \quad (۲۱)$$

اکنون جملات وابسته به x را یک طرف تساوی قرار می‌دهیم:

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} + \frac{\omega^2}{c^2} X(x) = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} - \frac{\omega^2}{c^2} Y(y) \quad (۲۲)$$

با تعریف β به شکل زیر:

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} + \frac{\omega^2}{c^2} X(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} \beta^2 \quad (۱-۲۳)$$

$$\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} + \frac{\omega^2}{c^2} Y(y) = \frac{\omega^2}{c^2} \beta^2 \quad (۲-۲۳)$$

به دو دسته معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\mathbb{L}_x \chi = \chi'' + \frac{\omega^2}{c^2} [X(x) - \beta^2] \chi = 0 \quad (۱-۲۴)$$

$$\mathbb{L}_y \psi = \psi'' + \frac{\omega^2}{c^2} [Y(y) + \beta^2] \psi = 0 \quad (۲-۲۴)$$

اما در چون معادلات (۲۴) عملگرهای \mathbb{L}_y و \mathbb{L}_x متناوب هستند (چرا؟) جوابهای (۲۴) بصورت امواج بلوخ-فلوکه خواهند بود:

$$\chi(x) = \chi_{\kappa_x}(x) = \exp(-j\kappa_x x) \Phi_{\kappa_x}(x) \quad (1-25)$$

$$\psi(y) = \chi_{\kappa_y}(y) = \exp(-j\kappa_y y) \Theta_{\kappa_y}(y) \quad (2-25)$$

لذا جواب بلوخ معادله (۱۷) عبارتست از:

$$E_z(\mathbf{r}) = \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \Phi_{\kappa_x}(x) \Theta_{\kappa_y}(y) \quad (26)$$

که در آن بردار دوبعدی مکان و $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ و $\mathbf{k} = \kappa_x\hat{x} + \kappa_y\hat{y}$ بردار موج بلوخ-فلوکه هستند. اما همان‌طور که در بخش ۵ دیدیم اعداد موج بلوخ در مسائل یک بعدی (۱-۲۴) و (۲-۲۴) به فرم توابعی همانند

$$\kappa_x = \kappa_x(\omega; \beta) \quad (1-27)$$

$$\kappa_y = \kappa_y(\omega; \beta) \quad (2-27)$$

خواهند بود. پس با انتخاب بسامد ثابت ω و تغییر دادن ثابت تفکیک در بازه $\beta^2 \in (-\infty, +\infty)$ می‌توان به منحنی‌های بسامد ثابت دست یافت. پس مجموعه معادلات (۲۷) را می‌توان نگاشت وارون ساختار باند بسامد دوبعدی $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\kappa_x, \kappa_y)$ دانست.

محاسبه‌ی ساختار باند به روش بسط امواج تخت

از جمله روش‌های عددی مرسوم برای تحلیل ساختار باند، روش بسط امواج تخت است که در این بخش به آن خواهیم پرداخت. برای سادگی ابتدا یک سیستم دو بعدی با قطبش الکتریکی را در نظر می‌گیریم.

$$\mathbb{L}_E E_z = k_0^2 E_z \quad (1-28)$$

$$\mathbb{L}_E = -\eta \nabla^2(\cdot) \quad (2-28)$$

در اینجا تابع نشت‌ناپذیری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta(\mathbf{r}) \triangleq \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \quad (29)$$

که همانند $\varepsilon(\mathbf{r})$ متناوب است:

$$\mathbb{T}_{mnp} \eta(\mathbf{r}) = \eta(\mathbf{r}) \quad (30)$$

حال با استفاده از قضیه بلاخ مولفه z میدان الکتریکی را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$E_z(\mathbf{r}) = e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (31)$$

که در آن $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ یک تابع متناوب است:

$$\mathbb{T}_{mnp} \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (32)$$

لذا معادله موج با کمک تعاریف فوق به شکل زیر ظاهر می‌شود:

$$\eta \nabla^2 E = k_0^2 E \quad (33)$$

اکنون توجه می‌کنیم که بر اساس اتحاد زیر

$$\nabla [e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f(\mathbf{r})] = e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} [\nabla - j\mathbf{k}] f(\mathbf{r}) \quad (34)$$

برای هر تابع دلخواه $f(\mathbf{r})$ ، رابطه (۳۳) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\eta(\mathbf{r}) [\nabla - j\mathbf{k}]^2 \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (35)$$

در این مرحله از بسط‌های فوریه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\eta(\mathbf{r}) = \sum_{mn} \eta_{mn} \exp[-j\mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r}] \quad (1-36)$$

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{mn} \phi_{mn}(\mathbf{k}) \exp[-j\mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r}] \quad (2-36)$$

که در آن $\mathbf{G}_{mn} = m\mathbf{a}^* + n\mathbf{b}^*$ بردار شبکه‌ی وارون است. با جایگذاری بسط‌های فوریه خواهیم داشت:

$$\sum_{mn} \eta_{mn} \exp[-j\mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r}] (\nabla - j\mathbf{k})^2 \sum_{pq} \phi_{pq}(\mathbf{k}) \exp[-j\mathbf{G}_{pq} \cdot \mathbf{r}] + \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{pq} \phi_{pq}(\mathbf{k}) \exp[-j\mathbf{G}_{pq} \cdot \mathbf{r}] = 0 \quad (37)$$

یا:

$$\sum_{mnpq} \eta_{mn} \phi_{pq}(\mathbf{\kappa})(\mathbf{G}_{pq} + \mathbf{\kappa})^2 \exp[-j(\mathbf{G}_{pq} + \mathbf{G}_{mn}) \cdot \mathbf{r}] = \quad (38)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{pq} \phi_{pq}(\mathbf{\kappa}) \exp[-j\mathbf{G}_{pq} \cdot \mathbf{r}]$$

اما طبق تعریف بردار شبکه‌ی وارون داریم:

$$\mathbf{G}_{mn} + \mathbf{G}_{pq} = \mathbf{G}_{m+p, n+q} \quad (39)$$

با استفاده از (۳۹) و با انجام تغییر متغیرهای زیر

$$m + p \rightarrow r \quad \text{و} \quad n + q \rightarrow s \quad (\text{در سمت راست}) \quad (1-40)$$

$$p \rightarrow r \quad \text{و} \quad q \rightarrow s \quad (\text{در سمت چپ}) \quad (2-40)$$

خواهیم داشت:

$$\sum_{rspq} \eta_{r-p, s-q} \phi_{pq}(\mathbf{\kappa})(\mathbf{G}_{pq} + \mathbf{\kappa})^2 \exp[-j\mathbf{G}_{rs} \cdot \mathbf{r}] = \quad (41)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} \sum_{rs} \phi_{rs}(\mathbf{\kappa}) \exp[-j\mathbf{G}_{rs} \cdot \mathbf{r}]$$

اکنون طرفین را در $\exp(j\mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r})$ ضرب کرده و روی یک دوره‌ی تناوب انتگرال می‌گیریم. با کمک اتحاد

$$\frac{1}{S} \iint_S \exp(j\mathbf{G}_{mn} \cdot \mathbf{r}) d^2r = \delta_{m0} \delta_{n0} \quad (42)$$

که در آن S سطح سلول واحد و δ_{rs} دلتای کرونکر می‌باشد، نتیجه عبارتست از:

$$\sum_{pq} \eta_{m-p, n-q} \phi_{pq}(\mathbf{\kappa})(\mathbf{G}_{pq} + \mathbf{\kappa})^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \phi_{mn}(\mathbf{\kappa}) \quad (43)$$

ویژه‌مقادیر این معادله، رابطه پاشندگی $\omega(\mathbf{\kappa})$ را برای قطبش الکتریکی یک محیط متناوب دوبعدی مشخص می‌کنند. این معادله در حالت یک بعدی به معادله‌ی زیر ساده می‌شود:

$$\sum_p \eta_{m-p} \left| \frac{2\pi}{L} p + \kappa \right|^2 \phi_p(\kappa) = \frac{\omega^2(\kappa)}{c^2} \phi_m(\kappa) \quad (44)$$

بر اساس محدودیت‌های محاسباتی چنانچه در (۴۳) تعداد جملات بسط‌های فوریه را بین $[-N, N]$

محدود کنیم، با توجه به تقریب $\sum_{mn} \approx \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N$ مشخص می‌شود که $\{\phi_{pq}\}$ یک ماتریس مربعی

است که $(2N+1)^2$ درایه دارد. بنابراین تانسور رتبه چهار

را $\{S_{mpq}\} \triangleq \left\{ \eta_{m-p, n-q} |\mathbf{G}_{pq} + \mathbf{k}|^2 \right\} = \{S_{mpq}(\mathbf{k})\}$ دارای $(2N+1)^4$ درایه است. پس (۴۳) را

می‌توان به شکل معادله‌ی ویژه‌مقدار تانسوری بازنویسی کرد

$$\{S_{mpq}\} \{\phi_{pq}\} = \frac{\omega^2(\mathbf{k})}{c^2} \{\phi_{mn}\} \quad (45)$$

که دارای حل زیر برای ساختار باند فوتونی است:

$$\omega(\mathbf{k}) = c \sqrt{\text{eig}\{S(\mathbf{k})\}} \quad (46)$$

محاسبه مقادیر ویژه (۴۶) با توجه به رتبه چهارم تانسور در عمل نیازمند عمل تسطیح تانسور $\{S\}$ از

رتبه ۴ به ۲ است. برای نشان دادن چگونگی این عمل به تسطیح یک ماتریس مربع به شکل یک بردار

عمودی توجه نمایید:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}_{2^2 \times 1} \quad (47)$$

پس برای محاسبه‌ی ماتریسهای ویژه تانسور $\{S\}$ باید ماتریس $\{\phi_{pq}\}_{(2N+1) \times (2N+1)}$ را به بردار

$\{\phi_m\}_{(2N+1)^2 \times 1}$ تسطیح کرد. به طریق مشابه یک تانسور رتبه‌ی چهار $2 \times 2 \times 2 \times 2$ پس از تسطیح

خواهد بود:

$$\{S_{mpq}\}_{2 \times 2 \times 2 \times 2} \rightarrow \begin{pmatrix} S_{1111} & S_{1211} & S_{1112} & S_{1212} \\ S_{2111} & S_{2211} & S_{2112} & S_{2212} \\ S_{1121} & S_{1221} & S_{1122} & S_{1222} \\ S_{2121} & S_{2221} & S_{2122} & S_{2222} \end{pmatrix}_{2^2 \times 2^2} \quad (48)$$

بُعد ماتریس‌ها به ازای $N=3$ ، پس از تسطیح برای بردار ویژه $[\phi]_{49 \times 1}$ و برای ماتریس ناشی از تسطیح

تانسور رتبه چهار $[S]_{49 \times 49}$ خواهد بود (چرا؟). از آنجاییکه بُعد ماتریس مسطح $[S]$ با افزایش N به

سرعت رشد می کند و نیز معمولاً تمام درایه‌های آن غیر صفر است، افزایش دقت ناشی از در نظر گرفتن تعداد جملات بیشتر در بسط فوریه با خطای محاسبه‌ی مقادیر ویژه ماتریس بسیار بزرگ‌تر جبران می‌شود. لذا در عمل برای محاسبه دقیق ۵ الی ۷ باند اول فوتونی یک بلور فوتونی دوبعدی، مقادیر بهینه برای N بین ۵ تا ۱۲ قرار می‌گیرند.

حال مساله را برای قطبش مغناطیسی مجدداً حل می‌کنیم. معادله‌ی حاکم بدین صورت است:

$$\nabla \cdot [\eta(\mathbf{r}) \nabla H_z(\mathbf{r})] + k_0^2 H_z(\mathbf{r}) = 0 \quad (49)$$

برای بسط فوریه η می‌نویسیم:

$$\eta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \eta_{\mathbf{G}} \exp[-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}] \quad (50)$$

توجه شود که در (۵۰) $\sum_{\mathbf{G}} \equiv \sum_{\mathbf{G}_{mn}} \equiv \sum_{mn}$ نمایش فشرده‌تری از جمع روی زیرنویسها می‌باشد. نیز با

استفاده از قضیه بلوخ داریم:

$$H_z(\mathbf{r}) = \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sum_{\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) \exp(-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (51)$$

حال با جای‌گذاری (۵۰) و (۵۱) در (۴۹) خواهیم داشت:

$$\sum_{\mathbf{G}'} \sum_{\mathbf{G}} \eta_{\mathbf{G}'} \phi_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G} + \mathbf{G}') e^{-j(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} = k_0^2 \sum_{\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) e^{-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \quad (52)$$

با اعمال تغییر زیرنویسها به فرم

$$\mathbf{G} + \mathbf{G}' \rightarrow \mathbf{G}'' \quad (در سمت چپ) \quad (1-53)$$

$$\mathbf{G}' \rightarrow \mathbf{G}'' - \mathbf{G} \quad (در سمت چپ) \quad (2-53)$$

داریم:

$$\sum_{\mathbf{G}'} \sum_{\mathbf{G}} \eta_{\mathbf{G}' - \mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}'') e^{-j\mathbf{G}'' \cdot \mathbf{r}} = k_0^2 \sum_{\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}}(\mathbf{k}) e^{-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}} \quad (54)$$

با تغییرات مشابه خواهیم داشت:

$$\sum_{\mathbf{G}'} \sum_{\mathbf{G}} \eta_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\kappa})(\mathbf{\kappa}+\mathbf{G}) \cdot (\mathbf{\kappa}+\mathbf{G}') e^{-j\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} = k_0^2 \sum_{\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\kappa}) e^{-j\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \quad (55)$$

به شکل مشابه برای قطبش الکتریکی می‌توان ضرایب بسط فوریه را در سمت چپ و راست برابر قرار داد و برای معادله نهایی قطبش مغناطیسی چنین نتیجه گرفت:

$$\sum_{\mathbf{G}'} \eta_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} (\mathbf{\kappa}+\mathbf{G}) \cdot (\mathbf{\kappa}+\mathbf{G}') \phi_{\mathbf{G}'}(\mathbf{\kappa}) = k_0^2 \phi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\kappa}) \quad (56)$$

جهت مقایسه با قطبش الکتریکی معادله (۴۳) را مجدداً با نمایش جدید بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{\mathbf{G}'} \eta_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} (\mathbf{\kappa}+\mathbf{G}) \cdot (\mathbf{\kappa}+\mathbf{G}') \phi_{\mathbf{G}'}(\mathbf{\kappa}) = k_0^2 \phi_{\mathbf{G}}(\mathbf{\kappa}) \quad (57)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود اختلاف (۵۶) و (۵۷) تنها در یک جمله \mathbf{G} و \mathbf{G}' داخل پرانتز است. در پیوست ب برنامه‌هایی برای محاسبه‌ی ساختار باند فوتونی در دو بعد و برای قطبشهای الکتریکی و مغناطیسی ارائه شده است که جهت خوانندگان علاقه‌مند در نظر گرفته شده است.

مراجع

[1] S. Khorasani and A. Adibi, *Opt. Lett.* **28**, 1472 (2003).

تمرین

۱- ابتدا نشان دهید $[\mathbb{T}_{00p}, \mathbb{T}_{m00}] = [\mathbb{T}_{0n0}, \mathbb{T}_{00p}] = [\mathbb{T}_{00p}, \mathbb{T}_{m00}] = 0$ و سپس از آنجا درستی

رابطه‌ی (۵) را تحقیق نمایید (راهنمایی: ابتدا نشان دهید $\mathbb{T}_{m00} = (\mathbb{T}_{100})^m$ ، $\mathbb{T}_{0n0} = (\mathbb{T}_{010})^n$ و

$\mathbb{T}_{00p} = (\mathbb{T}_{001})^p$).

۲- نشان دهید برای برقراری (۱۳) بردار موج بلوخ-فلوکه $\mathbf{\kappa}$ باید لزوماً دارای مولفه‌های حقیقی

باشد. اگر این شرط برقرار نباشد راجع به وجود امواج بلوخ چه می‌توان گفت؟

۳- روابط (۳۴) و (۳۵) را ثابت نمایید.

۴- رابطه (۴۲) را ثابت کنید. تعمیم آنرا به سه بعد نمایش دهید. آیا لازم است که بردارهای

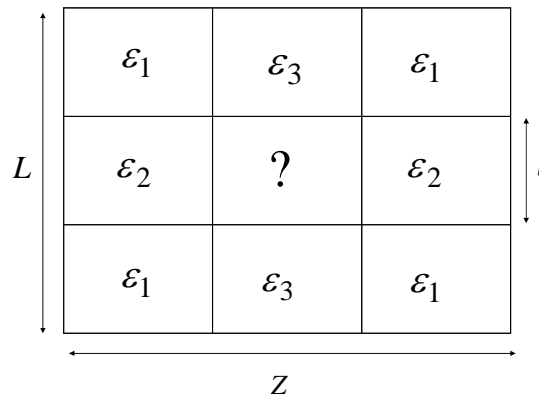
شبکه بر یکدیگر عمود باشند؟

۵- همانند (۴۸) چگونگی تسطیح یک تانسور رتبه‌ی شش را با $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ درایه

به یک ماتریس مربع 8×8 نشان دهید.

۶- با توجه به شکل زیر گذردهی الکتریکی را در میان چنان پیدا کنید که تابع $\varepsilon(\mathbf{r})$ در (۱۶)

صدق کند. توابع $X(x)$ و $Y(y)$ را نیز بدست آورید. آیا جواب‌ها یکتا هستند؟



۷- در شکل بالا فرض کنید $Z = L$ ، $s = L/3$ ، $\varepsilon_1 = 2$ ، و $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 6$. ضمن نوشتن برنامه‌ای

ساختار باند و عرض گاف فوتونی اول را برای قطبش الکتریکی بیابید.

بخش ۷

بسط امواج تخت اصلاح شده و تفاضل‌های متناهی

در این بخش به معرفی دو روش مهم دیگر در تحلیل بلورهای فوتونی می‌پردازیم. در روش بسط امواج تخت قبلاً دیدیم که مسئله یافتن بسامد به عنوان مقدار ویژه ساختار باند برای حالتی که دی‌الکتریک‌ها پاشنده و تابع بسامد باشند به یک مسئله‌ی مقدارویژه‌ی غیرخطی تبدیل می‌گردد که جز در حالات خاص به سادگی قابل تحلیل نیست. بدین منظور می‌توان برای جبران این نقیصه در روش بسط امواج تخت اصلاحی ایجاد نمود و آن را برای تحلیل ساختارهای پاشنده نیز تعمیم داد.

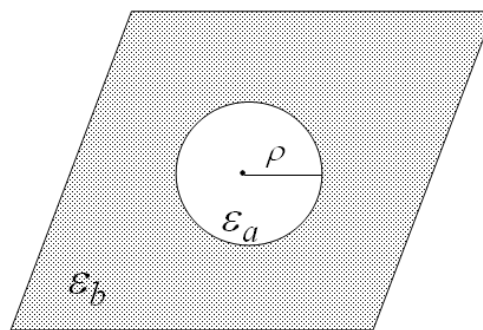
روش مهم دیگری که بدان اشاره خواهد شد روش تفاضل‌های متناهی در زمان است که به تعبیری رایج‌ترین ابزار تحلیل بلورهای فوتونی است و سایر روش‌های تحلیلی یا عددی دیگر را با آن می‌سنجند. در ساختارهای سه بعدی می‌توان ادعا کرد که در حال حاضر تقریباً هیچ روش دیگری به غیر از تفاضل‌های متناهی در زمان بکار نمی‌رود. گونه‌ای بسیار نزدیک به این روش، تفاضل‌های متناهی در بسامد نام دارد که نحوه گسسته‌سازی فضا در آن همانند تفاضل‌های متناهی در زمان است، ولی محیط را در حوزه‌ی بسامد به جای زمان تحلیل می‌نماید. راجع به سایر روش‌های عددی

مرسوم در این زمینه از جمله روش ممان، المان های محدود، توابع ونیر، و غیره نیز در فصل بعدی صحبت خواهیم کرد.

ضرایب بسط فوریه دوبعدی برای بلورهای فوتونی ساده

حال یک دایره به شعاع r با ثابت گذردهی ϵ_a درون یک مربع با ثابت گذردهی ϵ_b مانند شکل زیر را در نظر بگیرید. این ساختار نمایان گر سلول واحد بلور فوتونی دو بعدی مثلثی است. تابع گذردهی الکتریکی $\epsilon(\mathbf{r})$ را می توان به شکل زیر بسط داد:

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \epsilon_{\mathbf{G}} e^{-j\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}} \quad (1)$$



شکل ۱- سلول واحد بلور فوتونی مثلثی ساده.

به سادگی میتوان با کمک تبدیل فوریه ی دو بعدی دید که (تمرین ۲):

$$\epsilon_{\mathbf{G}} = \epsilon_b \Delta(G\rho) + (\epsilon_b - \epsilon_a) \frac{2\pi\rho^2}{A_{WSC}} \times \frac{J_1(G\rho)}{G\rho} \quad (2)$$

که در آن $G = |\mathbf{G}|$ اندازه ی بردار شبکه وارون و A_{WSC} مساحت سلول ویگنر-سایتز یا سلول واحد شبکه است. به طریق مشابه داریم $r = |\mathbf{r}|$. تابع $\Delta(x)$ نیز به شکل زیر تعریف می شود:

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \forall x \in R \quad (3)$$

اما در مرکز شبکه ی معکوس $G = 0$ با توجه به حد زیر

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_1(x)}{x} = \frac{1}{2} \quad (۴)$$

برای ε_{00} بدست می‌آید:

$$\varepsilon_{00} = \varepsilon_b + (\varepsilon_b - \varepsilon_a) \frac{\pi \rho^2}{A_{WSC}} \quad (۵)$$

اگر فاکتور پُرشدگی را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$f \triangleq \frac{\pi \rho^2}{A_{WSC}} \quad (۶)$$

رابطه (۵) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\varepsilon_{00} = \varepsilon_b + f(\varepsilon_b - \varepsilon_a) \quad (۷)$$

روش بسط امواج تخت اصلاح شده

طبق رابطه (۴۵) از فصل ششم می‌دانیم که مسئله‌ی تحلیل ساختار باند فوتونی در یک بلور فوتونی دوبعدی هم‌ارز حل مسئله مقدار ویژه‌ای مانند زیر است:

$$\{S_{mnpq}\} \{\phi_{pq}\} = \frac{\omega^2(\mathbf{\kappa})}{c^2} \{\phi_{mn}\} \quad (۸)$$

که در آن تانسور:

$$\{S\} = \{S_{mnpq}\} \triangleq \left\{ \eta_{m-p, n-q} |\mathbf{G}_{pq} + \mathbf{\kappa}|^2 \right\} = \{\eta\} \otimes \left\{ |\mathbf{G} + \mathbf{\kappa}|^2 \right\} \quad (۹)$$

تابعی خطی از عکس تابع گذردهی الکتریکی $\eta(\mathbf{r}) = \varepsilon^{-1}(\mathbf{r})$ است، و داریم:

$$\omega(\mathbf{\kappa}) = c \sqrt{\text{eig}\{S\}} \quad (۱۰)$$

در حالتی که دی‌الکتریکها پاشندگی ندارند $\frac{\partial}{\partial \omega} \{S\} \equiv 0$ بوده و (۸) یک مسئله استاندارد مقدارویژه خواهد بود. ولی وقتی که $\frac{\partial}{\partial \omega} \{S\} \neq 0$ باشد، (۸) یک مسئله مقدارویژه‌ی غیرخطی است که اصولاً حل آن کاری بسیار دشوار و معمولاً غیر ممکن است.

برای ایضاح مطلب فرض کنید داشته باشیم:

$$\eta(\mathbf{r}; \omega) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \eta_{\lambda}(\mathbf{r}) \omega^{\lambda} \quad (11)$$

آنگاه (۸) بصورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\left[\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \omega^{\lambda}(\mathbf{k}) \{S_{\lambda}\} \right] \{\phi\} = \frac{\omega^2(\mathbf{k})}{c^2} \{\phi\} \quad (12)$$

که در آن:

$$\{S_{\lambda}\} \triangleq \{\eta_{\lambda}\} \otimes \{|\mathbf{G} + \mathbf{k}|^2\} \quad (13)$$

دیده می شود که مسئله ی مقدارویژه بصورت تحلیل یک مسئله غیر خطی بگرنج در می آید:

$$\left| c^2 \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \omega^{\lambda} \{S_{\lambda+2}\} - [\mathbf{I}] \right| = 0 \quad (14)$$

چنانچه تعداد جملات و مرتبه ی بسط چندجمله ای بر حسب بسامد محدود باشد می توان با کمک زیرروال ها یا الگوریتم های موجود، مانند دستور polyeig در MATLAB اقدام به حل (۱۴) نمود. با این وجود کارآیی این الگوریتم ها در عمل به چند جمله ای هایی با مرتبه ۲ یا ۳ محدود می گردد. برای جبران این نقیصه می توان روش بسط امواج تخت را به گونه ای اصلاح کرد که مقدارویژه به جای بسامد ω یکی از دو مولفه ی بردارهای موج بلوخ κ_x و κ_y باشد [۱]. بنابراین به جای تحلیل ساختار باند بصورت $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\kappa_x, \kappa_y)$ ، مسئله ی مقدارویژه را به شکل $\kappa_x(\omega, \kappa_y)$ و یا $\kappa_y(\omega, \kappa_x)$ تحلیل می کنیم. برای توضیح بیشتر در این خصوص توجه خواننده به مرجع [۱] جلب می گردد.

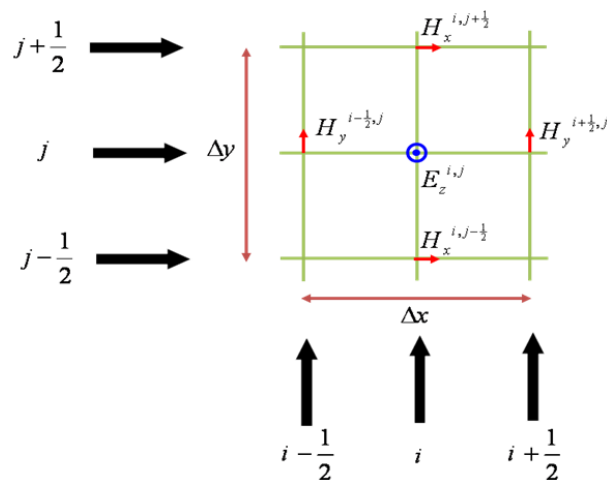
روش تفاضل های محدود در حوزه زمان

روش تفاضل های محدود در زمان در سه بعد در سال ۱۹۶۶ توسط Yee ابداع شد، ولی بدلیل عدم دسترسی به سخت افزارهای مناسب برای محاسبات عددی به این روش تا اواسط دهه ۱۹۷۰ توجهی

نگردید. امروزه این روش به عنوان روشی عمده در محاسبات بلورهای فوتونی بکار می‌رود. از میان ویژگی‌های بارز این روش می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- با یک بار اجرای برنامه و تحلیل اطلاعات حوزه‌ی زمان می‌توان کلیه اطلاعات بازه‌ی بسیار گسترده‌ای از بسامد را با کمک تحلیل فوریه بدست آورد.
- روش تفاضل‌های متناهی در زمان قادر است با اتخاذ شرایط مرزی مناسب و ادغام با تبدیل فوریه آنالیز مودال برای جستجوی موده‌های ویژه‌ی ساختارهای گوناگون بنماید.
- در این روش قابلیت پیش‌روی در زمان بدون احتیاج به معکوس کردن ماتریسها وجود دارد.
- روش تفاضل‌های متناهی در زمان برای اجرا بصورت پردازش موازی بسیار ایده‌آل است.
- ویژگی‌های انتگرالی و دیفرانسیلی معادلات ماکسول هم‌زمان ارضا می‌گردند.
- معادلات سوم و چهارم ماکسول به دلیل نحوه قرار گرفتن مولفه‌های میدان‌ها تماماً ارضا می‌شوند.

برای توضیح روش اجزای محدود در حوزه‌ی زمان ابتدا به مدل ساده‌تر آن برای یک فضای دوبعدی نگاه می‌کنیم. در این روش فضا را روی یک صفحه مانند شکل زیر شبکه‌بندی می‌کنیم.



شکل ۲- گسسته‌سازی فضای دوبعدی در روش تفاضل‌های محدود؛

در اینجا قطبش الکتریکی در نظر گرفته شده است.

در این روش دو معادله اول ماکسول

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (15-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (15-2)$$

به صورت همزمان و تزویج شده با یکدیگر حل می شوند. ابتدا برای سادگی فرض می کنیم انتشار در صفحه $x-y$ قرار داشته و میدان الکتریکی تنها دارای مولفه z است. بدین ترتیب قطبش الکتریکی مد نظر قرار می گیرد. پس از مجموع شش معادله ی نرده ای در (۱۵)

$$-\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (16-1)$$

$$-\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (16-2)$$

$$-\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (16-3)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (16-4)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (16-5)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (16-6)$$

برای توصیف قطبش الکتریکی تنها به سه معادله ی (۱۶-۱)، (۱۶-۲) و (۱۶-۶) احتیاج داریم:

$$-\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (17-1)$$

$$-\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (17-2)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (17-3)$$

به همین ترتیب برای قطبش مغناطیسی می‌توان به تحلیل معادله (۱۶-۳)، (۱۶-۴) و (۱۶-۵) اکتفا نمود:

$$-\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (18-1)$$

$$\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (18-2)$$

$$\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (18-3)$$

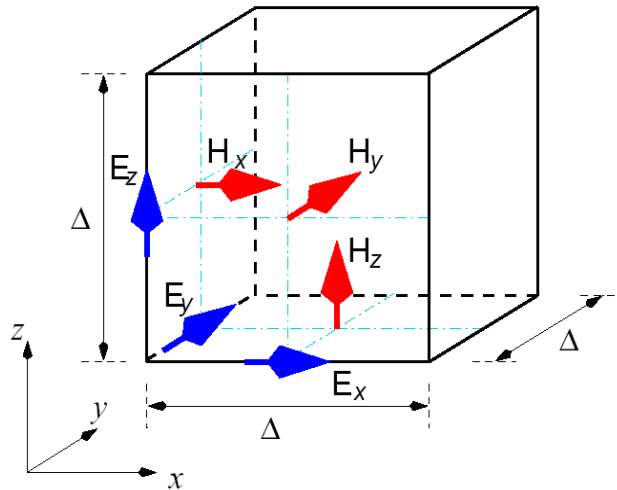
نحوه گسسته‌سازی فضا برای قطبش مغناطیسی دقیقاً مطابق با شکل ۲ است با این تفاوت که جای E و H را عوض می‌کنیم.

در قطبش الکتریکی برای آنکه E_z جدید در گام زمانی بعد را بدست آوریم به مشتق‌های مکانی H_x و H_y نیاز داریم. به طریق مشابه در قطبش مغناطیسی اگر بخواهیم مشتق زمانی H_z را بدست آوریم به مشتق‌های مکانی E_x و E_y نیاز خواهیم داشت. برای حصول یک نسخه‌ی عددی پایدار بر طبق روش Yee می‌بایست مشتق‌های مکانی و زمانی هر دو مرکزی باشند. این بدان معنی است که به ترتیب در روابط (۱۷) و (۱۸) برای محاسبه‌ی گام بعدی زمانی میدان الکتریکی یا مغناطیسی عمود از جدیدترین مقادیر موجود میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی در صفحه استفاده می‌کنیم، و بر عکس. جهت پیش‌روی در زمان برای میدان الکتریکی (مغناطیسی) مشتق مکانی میدان مغناطیسی (الکتریکی) مورد نیاز است که با کمک مولفه‌های موجود میدان مغناطیسی (الکتریکی) طرفین نقطه مورد نظر در شبکه میدان الکتریکی (مغناطیسی) محاسبه می‌گردد. پس لازم است که:

- شبکه‌های فضایی میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی درهم تنیده قرار بگیرند و منطبق نباشند.

- میدان الکتریکی در نیم گام زمانی نخست و میدان مغناطیسی در نیم گام زمانی بعدی به روز شوند.

در سه بعد نحوه ی گسسته سازی فضا برای معادلات (۱۶) همانند دو بعد در شکل ۲ است و شبکه های میدان های الکتریکی و مغناطیسی به شکل درهم تنیده قرار می گیرند.



شکل ۳- گسسته سازی میدان های الکتریکی و مغناطیسی در شبکه Yee در سه بعد [۲].

در تحلیل (۱۷) برای قطبش الکتریکی اگر از مشتق مرکزی استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu_0} \left[\frac{E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad (19-1)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) + \frac{\Delta t}{\mu_0} \left[\frac{E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j)}{\Delta x} \right] \quad (19-2)$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon} \times \left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad (19-3)$$

که در آن بالانویس n برای زمان و i و j برای مکان بکار می روند. به طریق مشابه مجموعه ی معادلات قطبش مغناطیسی عبارتند از:

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = E_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon (i, j + \frac{1}{2})} \left[\frac{H_z^n(i, j+1) - H_z^n(i, j)}{\Delta y} \right] \quad (20-1)$$

$$E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) = E_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \varepsilon\left(i+\frac{1}{2}, j\right)} \left[\frac{H_z^n\left(i+1, j\right) - H_z^n\left(i, j\right)}{\Delta x} \right] \quad (20-2)$$

$$H_z^{n+1}\left(i, j\right) = H_z^n\left(i, j\right) + \frac{\Delta t}{\mu_0} \times \left[\frac{E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j\right) - E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j\right)}{\Delta x} - \frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}\right) - E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right] \quad (20-3)$$

همانطور که دیده می‌شود معادلات مربوط به قطبش‌های الکتریکی (۱۹) و مغناطیسی (۲۰) تنها با تبدیلات $E \leftrightarrow H$ و $\mu_0 \leftrightarrow \varepsilon_0 \varepsilon$ به سادگی به یکدیگر بدل می‌شوند. از این ویژگی جهت تسهیل در برنامه نویسی تحلیل این دو قطبش می‌توان برای کوچکتر و موثرتر کردن نرم افزار استفاده‌ی فراوان برد.

در سه بعد نحوه‌ی گسسته‌سازی معادلات ماکسول کاملاً مشابه دو بعد است. برای رعایت اختصار تنها یک معادله‌ی نرده‌ای (۶-۱۶) از مجموع شش معادله را ذکر می‌کنیم و بقیه را به عنوان تمرین به خواننده وامی‌گذاریم:

$$E_z^{n+1}\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) = E_z^n\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon_0 \varepsilon\left(i, j, k+\frac{1}{2}\right)} \times \left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \right] \quad (21)$$

روش تفاضل‌های متناهی در زمان بطور مشروط پایدار است. می‌توان نشان داد که برای پایداری عددی گام زمانی نباید از حد زیر تجاوز نماید:

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (22)$$

اگر شبکه‌ی فضایی همگن باشد برای محیط‌های غیر پاشنده، خطی، و بدون اتلاف می‌توان نوشت $c \leq c_N \triangleq \sqrt{N} \Delta / \Delta t$ که در آن c_N سرعت انتشار عددی نامیده می‌شود. به بیان دیگر شرط پایداری آنست که سرعت انتشار عددی از سرعت فاز نور در خلاء کمتر نباشد. نیز N تعداد ابعاد فضایی و $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$ گام مکانی است. معمولاً هنگامی محیط مورد تحلیل خطی است می‌توان برای سهولت قرار داد $\epsilon_0 = \mu_0 = c = \Delta = L = 1$ ، و از کمیات و ابعاد نرمالیزه استفاده کرد (در اینجا L ثابت شبکه می‌باشد). بدین ترتیب دامنه‌ی میدانها از مرتبه‌ی واحد قابل انتخاب کردن بوده و معمولاً $\Delta t \sim 0.25$ مناسب خواهد بود. نیز در بلورهای فوتونی، سلول واحد در هر بُعد مکانی آن معمولاً باید دست کم به ۲۰ بخش تقسیم گردد.

تفاضل های متناهی در بسامد

در این روش همانند تفاضل های متناهی در زمان فضا را گسسته می‌کنیم، ولی به جای حرکت در زمان سیستم در یک بسامد خاص تحلیل می‌شود. از این روش عموماً در تحلیل مودهای انتشار (مثلاً فیبر بلور فوتونی) می‌توان استفاده کرد. برای این منظور کفایت در (۱۶) قرار دهیم $\omega \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$. در دو بعد معادلات (۱۹) و (۲۰) برای قطبش‌های الکتریکی و مغناطیسی و برای حالت انتشار در صفحه، و در سه بعد معادلات شبیه (۲۱) با همین تبدیل مجدداً قابل استفاده‌اند. جهت پرهیز از اطاله‌ی کلام برای توضیحات بیشتر به [۳] مراجعه فرمایید.

شرایط مرزی

در مسایل عددی مورد بررسی در بلورهای فوتونی عموماً با چهار خانواده مواجه می‌شویم [۴ و ۵]:

۱- محاسبه‌ی ساختار باند

۲- ساختار باند یا نمودار پاشندگی نقص خطی یا صفحه‌ای

۳- محاسبه‌ی مقدار ویژه و مود نقص

۴- انتشار

بسته به آنکه کدامیک از خانواده‌های فوق را در دست مطالعه داریم، شرایط مرزی گوناگونی برای بستن ناحیه‌ی حل به کار گرفته می‌شود. مهم‌ترین شرایط عبارتند از

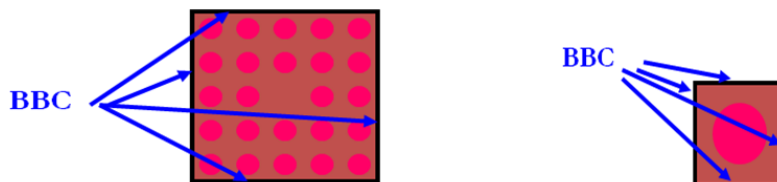
الف) شرط مرزی متناوب یا بلوخ (Bloch Boundary Condition) BBC: که قادر است محیط را بطور مجازی تا بی‌نهایت تکرار کند.

ب) شرط مرزی صفر یا تقارن (Symmetry Boundary Condition) SBC: بسته به نحوه‌ی اعمال آن از نوع دیریکله یا نیومان، می‌توان تقارن آینه‌ای زوج یا فرد را اختیار کرد.

ت) شرط مرزی شفاف (Transparent Boundary Condition) TBC: معمولاً لایه‌ی کاملاً جاذب PML (Perfectly Matched Layer) استفاده می‌شود که مرز ناحیه‌ی حل عددی را

بطور مصنوعی تا بی‌نهایت به عقب می‌راند و موج بدون انعکاس از مرز خارج می‌شود.

در خانواده‌ی ۱ مطابق شکل زیر در چهار طرف ناحیه‌ی حل از شرط BBC استفاده می‌کنیم.



شکل ۴- سلول واحد مورد تحلیل در خانواده‌ی ۱ از مسایل بلورهای فوتونی؛ راست: بلور فوتونی کامل، چپ: آرایه‌ی

کاواک‌های مزدوج بلور فوتونی. در دو حالت در هر چهار سمت شرط مرزی متناوب اعمال می‌شود.

در این حالت بر اساس قضیه‌ی بلوخ-فلوکه داریم

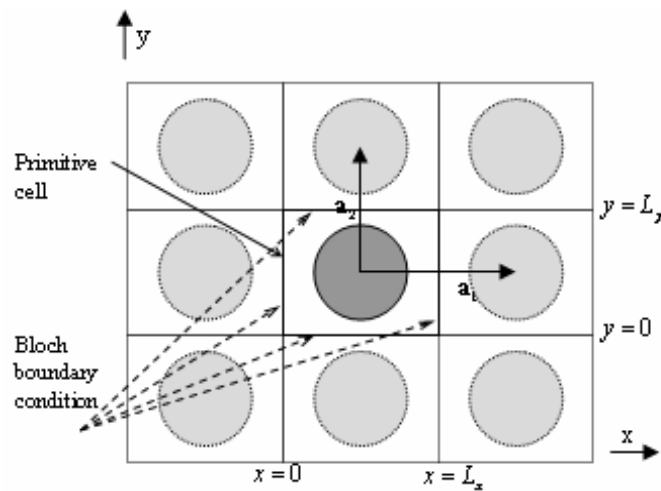
$$A_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) A_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (23)$$

پس برای اعمال شرط مرزی متناوب در دو بعد از دو معادله‌ی زیر می‌توان سود جست:

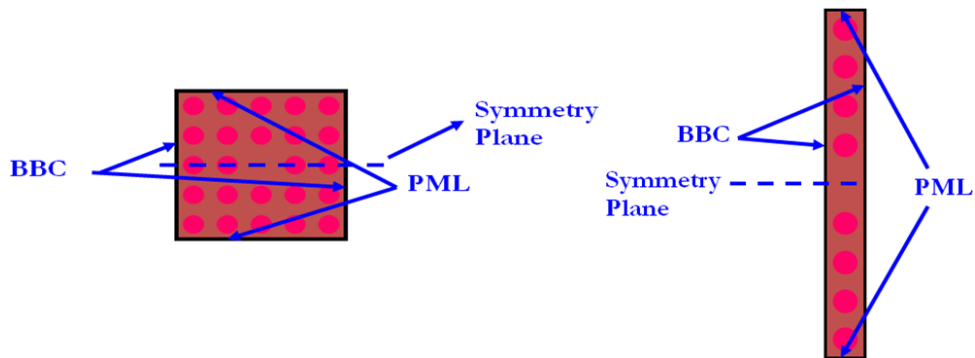
$$A_{\mathbf{k}}(x = 0, y) = \exp(j\kappa_x L_x) A_{\mathbf{k}}(x = L_x, y) \quad (24-1)$$

$$A_{\mathbf{k}}(x, y = 0) = \exp(j\kappa_y L_y) A_{\mathbf{k}}(x, y = L_y) \quad (24-2)$$

سایر پارامترهای (۲۴) در شکل بعد دیده می شوند. در خانواده ی ۲ از شرط مرزی شفاف در دو سو و شرط مرزی متناوب در دو سوی دیگر می توان استفاده کرد. چنانچه محور تقارنی هم وجود داشته باشد با اعمال شرط مرزی متقارن به جای شرط مرزی شفاف در نیمه ی متقارن آن تحلیل مسئله ساده تر و سریع تر خواهد بود.

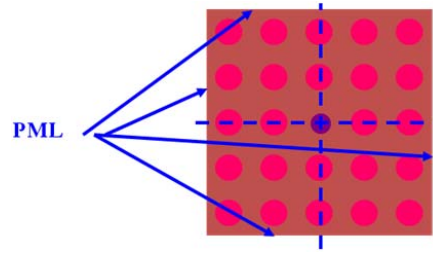


شکل ۵- نمایش مرزها و نحوه ی اعمال شرط مرزی متناوب.



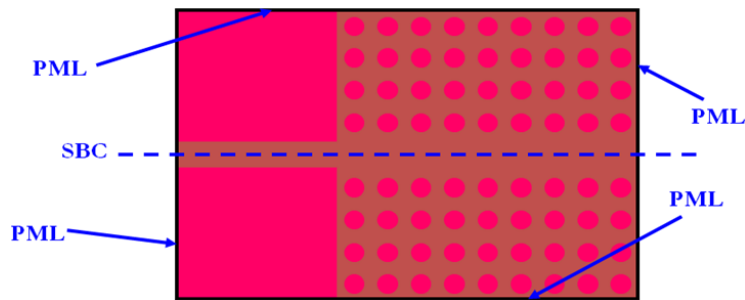
شکل ۶- نمایش دو مثال از خانواده ی ۲؛ راست: موجبر بلور فوتونی، چپ: موجبر کاواک های مزدوج.

در خانواده ی ۳ معمولاً مود نقص یک کاواک بلور فوتونی محاسبه می گردد، و در چهار سمت شرط مرزی شفاف استفاده می شود.



شکل ۷- شرط مرزی شفاف در چهار سوی یک کاواک در خانواده‌ی ۳ اعمال می‌شود. نیز دو محور تقارن وجود دارند که استفاده از آنها برای کاهش حجم محاسبه ممکن است.

در خانواده‌ی ۴ از مسایل بلورهای فوتونی معمولاً انتشار و پراکنش از ساختارها مورد مطالعه است. در این صورت باز هم به شرط مرزی شفاف در اطراف مثل شکل ۸ نیاز داریم.



شکل ۸- شرط مرزی شفاف در چهار سوی یک موجبر بلور فوتونی در خانواده‌ی ۴ اعمال می‌شود. نیز یک محور تقارن وجود دارد که استفاده از آن برای کاهش حجم محاسبه ممکن است.

انواع منابع

برای شبیه‌سازی انتشار موج در بلورهای فوتونی لازم است که منبعی برای تولید موج الکترومغناطیس داشته باشیم. بدین منظور برای مسایل خانواده‌های ۱ تا ۳ معمولاً از میدان اولیه و برای خانواده ۴ می‌توان از منبع نقطه‌ای یا منبع هویگنس استفاده نمود. برای اعمال میدان اولیه (مثلاً در بخش الکتریکی) کفایست به شکل زیر اقدام شود:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}; t = 0^-) = \mathbf{0} \quad (25-1)$$

$$\mathbf{H}_k(\mathbf{r}; t = 0^-) = \mathbf{0} \quad (25-2)$$

$$\mathbf{E}_k(\mathbf{r}; t = 0^+) = \mathbf{E}_0 \exp[-\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{R}_0|^2] \quad (25-3)$$

سپس شبیه سازی را از لحظه $t = 0^+$ دنبال می کنیم. دقت شود که نقطه ی \mathbf{R}_0 که در مرکز توزیع گوسی قرار می گیرد باید در یک نقطه با تقارن کمینه باشد، یعنی تنها نسبت به عمل دوران 360° ناوردا باشد. این موجب می شود که میدان اولیه نسبت به تمامی مودهای مختلف که دارای تقارن های ممکن هستند دارای تصویری غیر صفر باشد و در عمل میدان گوسی در فضا بتواند تمام مودها را تحریک نماید. در غیر این صورت امکان از دست رفتن برخی اطلاعات راجع به مودها امکان پذیر است. انتخاب پارامتر تضعیف α نسبتاً در جواب بی اثر است مشروط به آنکه خیلی بزرگ یا کوچک نباشد. به عنوان یک انتخاب نمونه می توان $\alpha = e/L$ را برگزید. توجه شود که امکان انجام محاسبه با کمک منابع وابسته به زمان نیز موجود است به شرط آنکه تابعیت کاملاً سینوسی و یا متناوب زمانی نداشته باشند. در هر حال استفاده از میدان اولیه به مراتب آسان تر است.

در مورد منابع مورد استفاده در خانواده ۴ می توان به دو گروه منابع نقطه ای و یا غیر نقطه ای اشاره کرد. در دو بعد، منبع نقطه ای همان منبع دو قطبی است که معمولاً قطبش آن در امتداد عمود قرار می گیرد، و وابستگی زمانی آن در حالت کلی سینوسی کامل و تک بسامد، و یا سینوسی کامل و تک بسامد با یک بسته ی گوسی در زمان انتخاب می گردد. بدیهی است که انتخاب دوم امکان تحریک مودهای با بسامدهای بی شماری را فراهم می آورد، ولی برای تمام مودها الگوی تشعشعی یکسان و مستقل از راستا بدست می آید.

هنگامی که با مسئله ای از نوع انعکاس یا گذردهی مواجه هستیم باید منبعی داشته باشیم که قادر باشد تا امواج الکترومغناطیس را تنها در یک سمت بتاباند تا امکان عبور موج بازتاب را از خود فراهم سازد (چرا؟). در این شرایط با قرار دادن یک صفحه ی مجازی در پشت منبع و مشاهده ی میزان انرژی

عبوری بر واحد زمان می‌توان به ضریب انعکاس از ساختار پی برد. نام منبع هویگنس (و یا روش میدان کامل - میدان پراکنش) به چنین دسته از منابع اطلاق می‌گردد.

منابع هویگنس نیز می‌توانند در زمان سینوسی کامل و یا دارای بسته‌ی گوسی باشند، و مقطع فضایی آن بسته به نوع کاربرد می‌تواند یکی از سه حالت رایج تر تخت یکنواخت، تخت گوسی، و یا تخت با مود انتشار موجبر تخت تیغه‌ای باشد. ولی چون در عمل پیاده سازی این نوع از منابع دارای نکات و پیچیدگی‌هایی است توضیح بیش‌تر در این خصوص را به مراجع وامی‌گذاریم [۶].

مراجع

- [1] S. Shi, C. Chen, and D. W. Prather, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 043104 (2005).
- [2] Y. Xu, *PhD Thesis*, Department of Electrical Engineering, California Institute of Technology, Pasadena, 2001.
- [3] C.-P. Yu and H.-C. Chang, *Opt. Express* **12**, 6165 (2004).
- [4] S. Khorasani, "Numerical Methods in Analysis of Photonic Crystals," *1st Workshop on Photonic Crystals*, Mashad (2005).
- [5] S. Khorasani, K. Mehrany, M. Chamanzar, B. Rashidian, A. Atabaki, "A Review of Photonic Crystal Science & Technology," *12th Conference on Optics & Photonics*, Shiraz (2006).
- [6] A. Taflove, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain*, 2nd ed., Artech House, Boston, 2000.

تمرین

۱- برای تابع دوبعدی $f(\mathbf{r}) = f(x, y)$ و مستقل از سمت $f(\mathbf{r}) \equiv f(r)$ ، چنانچه $F(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{f(\mathbf{r})\}(\mathbf{k})$ و $f(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\mathbf{k})\}(\mathbf{r})$ زوج تبدیلات فوریه باشند، ابتدا نشان دهید تبدیل فوریه نیز مستقل از سمت است، یعنی $F(\mathbf{k}) \equiv F(k)$. سپس درستی روابط زیر را تحقیق کنید.

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \iint \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d^2r = \int_0^\infty 2\pi r J_0(2\pi kr) f(r) dr$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \iint \exp(+j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) F(\mathbf{k}) d^2k = \int_0^\infty 2\pi k J_0(2\pi kr) F(k) dk$$

(راهنمایی: ابتدا ضرایب a_n را در بسط فوری $\exp(ja \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(jn\theta)$ بدست

آورید.)

۲- با کمک زوج تبدیلات بسل-فوری در تمرین ۱، درستی رابطه (۲) را تایید کنید.

۳- درستی (۱۴) را نشان دهید.

۴- برای یک بلور فوتونی فلزی با سلول واحد مطابق شکل (۱) داریم $\varepsilon_a = 1$ و

$$\varepsilon_b = \varepsilon_r \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

که در آن ω_p بسامد پلاسما نامیده میشود. نشان دهید مسئله‌ی

مقدار ویژه‌ی غیرخطی (۱۴) هنوز به فرم استاندارد (۱۰) قابل نمایش است.

۵- همانند (۲۱)، سایر معادلات (۱۶) را در سه بعد بر اساس سلول Yee و مشتق‌های مرکزی

گسسته نمایید.

۶- برای تحلیل ساختار باند بلورهای فوتونی مثلی با کمک روش تفاضل‌های متناهی چه

پیشنهادی دارید؟ توجه کنید که سلول واحد دیگر اضلاع متعامد ندارد. (راهنمایی: سلول

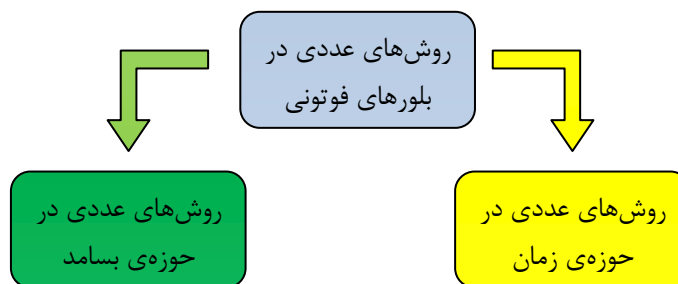
دیگری با دو نقطه در شبکه انتخاب نمایید.)

بخش ۸

سایر روش‌های عددی و نقص در شبکه

در تحلیل بلورهای فوتونی به غیر از روش‌های یاد شده در فصول گذشته روش‌های عددی متنوع دیگری نیز وجود دارند که هر یک دارای مزایا و معایبی هستند. در این بخش به تشریح و توضیح هر کدام از آنها می‌پردازیم.

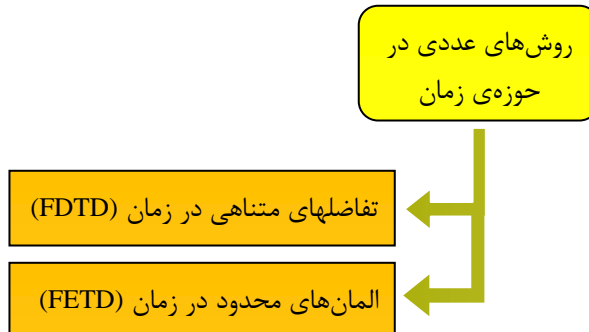
به طور کلی روشهای عددی را می‌توان به دو دسته‌ی کلی مطابق نمودار شکل ۱ تفکیک نمود.



شکل ۱- دو گروه اصلی در روش‌های عددی.

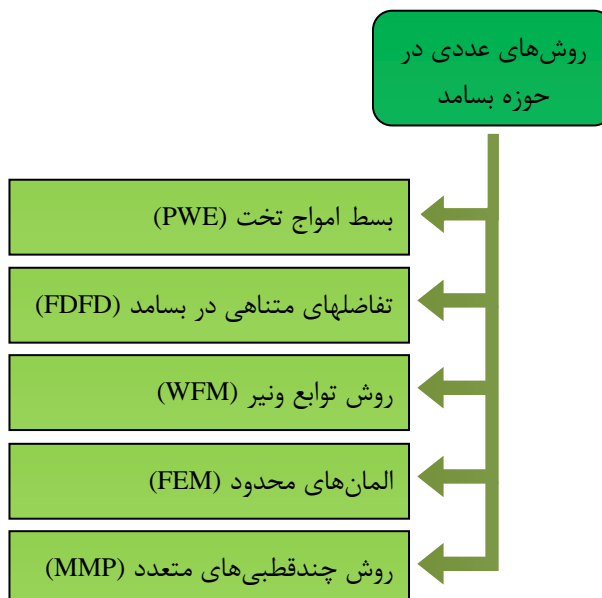
روش‌های عددی در حوزه زمان دارای تنوع کمتری نسبت به روش‌های عددی در حوزه بسامد هستند، ولی عموماً با پردازش موازی سازگارترند. از میان روش‌های حوزه‌ی زمان مطابق شکل ۲ می‌توان به دو روش تفاضل‌های متناهی در زمان و المانه‌ی محدود در زمان اشاره نمود. همان‌طور که در فصل قبل

هم دیدیم معمولاً روش‌های حوزه‌ی زمان احتیاج به زمان محاسبه‌ی بسیار بیشتری نسبت به سایر روش‌ها دارند، ولی در عوض اطلاعات انتشار در طیف گسترده‌ای از طول موج‌ها را بدست می‌دهند.



شکل ۲- روش‌های عددی حوزه‌ی زمان.

چنانچه در جستجوی ویژگی‌های انتشار یا پراکنش و پراش در طول موج خاصی باشیم، بایستی از روش‌های حوزه‌ی بسامد استفاده کنیم که بدین منظور طراحی شده و بسط می‌یابند. از میان روش‌های عددی حوزه‌ی بسامد می‌توان به دست کم پنج روش اصلی اشاره نمود که در شکل بعدی مشاهده می‌شود. در اینجا به غیر از روش‌های مذکور در فصول قبل، و روش توابع ونیر که در فصل بعد بطور مبسوط و جداگانه تشریح خواهد گردید، به شرح مختصری از هر یک از روش‌های نامبرده می‌پردازیم.



شکل ۳- روش‌های عددی حوزه‌ی بسامد.

المان‌های محدود

در روش المان‌های محدود با آغاز از معادله موج بصورت

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

و ضرب داخلی طرفین در تابع وزن دلخواه مانند $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ و انتگرال‌گیری با استفاده از قضیه‌ی گرین به معادله‌ی انتگرالی زیر می‌رسیم (تمرین ۱):

$$\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \cdot \nabla \times \mathbf{E} d\Omega - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \varepsilon \mathbf{E} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{W} \times \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2)$$

که در آن Ω ناحیه‌ی حل و $\partial\Omega$ نمایان‌گر مرز آن می‌باشد. اگر مرز به محیط رسانای الکتریکی یا مغناطیسی ایده‌آل ختم شود میتوان از جمله‌ی انتگرال مرزی صرف نظر کرد. بدیهی است که این برای شرایط مرزی صفر، متقارن، و لایه شفاف PML دقیقاً برقرار است (خود PML لازم است که با شرط مرزی دیگری محدود گردد).

حال با تفکیک ناحیه‌ی حل به المان‌های محدود و اعمال تقریب تغییرات خطی (یا مرتبه‌ی دو) در مکان می‌توان ضمن رعایت شرط پیوستگی تابع روی مرزهای آن به تقریبی درون‌یاب مانند زیر دست یافت:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^M a_i \mathbf{w}_i(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N f_j(\mathbf{r}) \mathbf{v}_j \quad (3)$$

که در آن $\mathbf{w}_i(\mathbf{r})$ توابع درون‌یاب در هر المان و a_i ضرایب بسط آنها می‌باشند؛ تعداد کل المان‌ها M خواهد بود. اما المان‌ها در رئوس خود که گره نامیده می‌شوند دارای اشتراک هستند. چنانچه در مجموع دارای N گره باشیم، و مقدار بردار میدان در گره‌ها را با \mathbf{v}_j نشان دهیم، آنگاه $f_j(\mathbf{r})$ توابع درون‌یاب مرتبط با بسط میدان نسبت به مقدار گره‌های آن خواهد بود. حال با کمی محاسبه می‌توان دید که (۳) به دستگاه معادلات خطی زیر تبدیل می‌گردد:

$$[Q]\{a\} = \frac{\omega^2}{c^2} [F]\{a\} \quad (۴)$$

که در آن درایه‌های ماتریس‌های $[Q]$ و $[F]$ در زیر داده شده‌اند:

$$q_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w}_i \cdot \nabla \times \mathbf{w}_j d\Omega \quad (۵-۱)$$

$$f_{ij} = \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j d\Omega \quad (۵-۲)$$

دستگاه معادلات (۴) بر حسب بسامد قابل حل است و به خصوص با توجه به اینکه ماتریس‌های $[Q]$ و $[F]$ عموماً تَنگ هستند محاسبه مقادیر ویژه یا وارون ماتریس‌ها با دقت و سرعت خوب، حتی هنگامی که تعداد المان‌ها زیاد باشد، امکان پذیر است.

اما برای محاسبه‌ی ساختار باند چون شرایط مرزی متفاوت است بهتر است به جای معادله (۱)، از معادله هم ارز آن برای بسته موج بلوخ $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ استفاده شود که روی مرزهای سلول واحد متناوب است (چرا؟):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (۶)$$

پس بدست می‌آید:

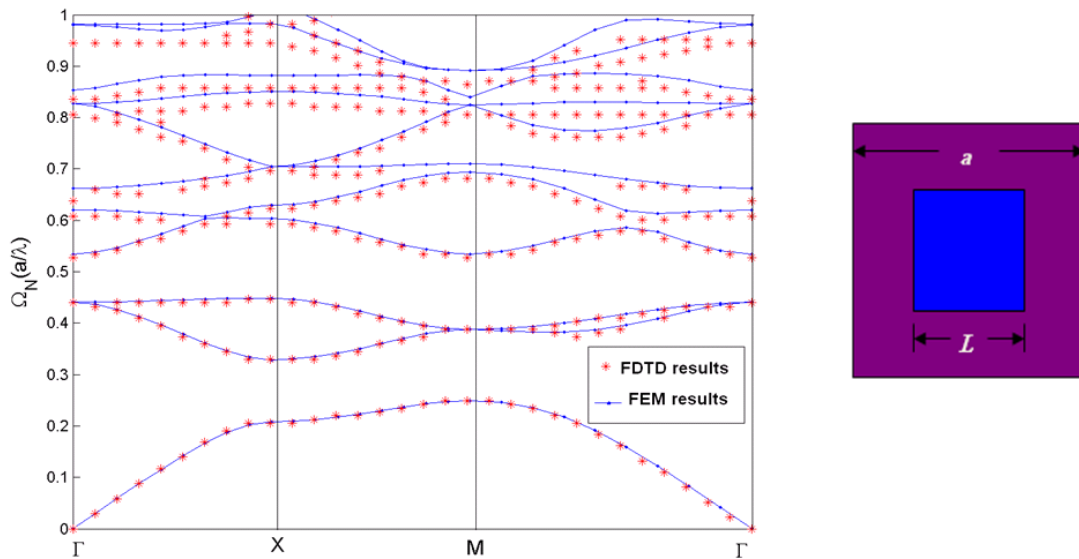
$$(\nabla - j\mathbf{k}) \times [(\nabla - j\mathbf{k}) \times \Phi_{\mathbf{k}}] = \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \Phi_{\mathbf{k}} \quad (۷)$$

که مجدداً با کمک اتحاد گرین به فرم انتگرالی زیر بدل می‌گردد (تمرین ۳):

$$\int_{\Omega} [(\nabla - j\mathbf{k}) \times \mathbf{W}] \cdot \nabla \times \Phi_{\mathbf{k}} d\Omega - \kappa^2 \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \Phi_{\mathbf{k}} d\Omega - j \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{W} \cdot (\mathbf{k} \times \Phi_{\mathbf{k}}) d\Omega = \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{W} \cdot \Phi_{\mathbf{k}} d\Omega \quad (۸)$$

اما حل (۸) به عنوان یک مساله‌ی مقدارویژه بصورت $\omega = \omega(\mathbf{k})$ با دقت و سرعت قابل توجه امکان‌پذیر است. در شکل ۴ نتایج عددی محاسبه‌ی ساختار باند یک بلور فوتونی مربعی که از آرایه‌ی دو بعدی استوانه‌های مربعی با گذردهی الکتریکی ۱۱ که در محیط میزبان هوا قرار گرفته‌اند مشاهده

می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رود تطبیق بسیار خوبی با نتایج روش تفاضل‌های متناهی در زمان وجود دارد.



شکل ۴- ساختار باند محاسبه شده (چپ) توسط روش المان‌های محدود و مقایسه با تفاضل‌های متناهی در زمان برای

بلور فوتونی مربعی با سلول واحد مربعی (راست)؛ در اینجا $a = 0.5L$ و $\epsilon_{\text{rod}} = 11$ [۱۲].

روش المان‌های محدود را در زمان هم می‌توان بکار برد. برای این منظور مجدداً محیط حل را به المان‌های محدود تفکیک کرده و از درون‌یابی (۳) استفاده می‌کنیم. ضمناً با تفکیک میدان به جزء زمانی سریع و کند آن به شکل:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \exp(j\omega_0 t) \quad (9)$$

معادله (۱) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{c^2} \epsilon(\mathbf{r}) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2j\omega_0 \frac{\partial}{\partial t} - \omega_0^2 \right] \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

تنها تفاوت باقی‌مانده با المان‌های محدود در بسامد، به شیوه‌ی انتگرال‌گیری زمانی آن باز می‌گردد که از روابط مشتق زیر بدست می‌آید:

$$\left. \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right|_{t=n\Delta t} \approx \frac{1}{\Delta t^2} [\mathbf{A}^{n+1} - 2\mathbf{A}^n + \mathbf{A}^{n-1}] \quad (11-1)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right|_{t=n\Delta t} \approx \frac{1}{2\Delta t} [\mathbf{A}^{n+1} - \mathbf{A}^{n-1}] \quad (11-2)$$

برای حصول یک نسخه پایدار عددی هنوز تغییر کوچک دیگری در (۱۰) لازم است:

$$\mathbf{A}|_{t=n\Delta t} \approx [\beta \mathbf{A}^{n+1} + (1-2\beta) \mathbf{A}^n + \beta \mathbf{A}^{n-1}] \quad (12)$$

حال با انتخاب $\beta \geq 0.25$ نسخه‌ی عددی بطور غیر مشروط پایدار خواهد بود. این روش انتگرال‌گیری زمانی به روش β -نیومارک نیز مشهور است.

تفاضل‌های متناهی در بسامد

در این روش معادلات ماکسول را در حوزه بسامد تحلیل می‌کنیم. با آغاز از معادلات ماکسول در بسامد داریم و نمایش میدانها به فرم $e^{j(\omega t - \beta z)}$ برای شش مولفه‌ی میدانهای مغناطیسی و الکتریکی خواهیم داشت:

$$-jk_0 H_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y \quad (13-1)$$

$$-jk_0 H_y = -\frac{\partial E_z}{\partial x} - j\beta E_x \quad (13-2)$$

$$-jk_0 H_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (13-3)$$

$$-jk_0 \varepsilon_r E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y \quad (13-4)$$

$$jk_0 \varepsilon_r E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} - j\beta H_x \quad (13-5)$$

$$jk_0 \varepsilon_r E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (13-6)$$

که در آن داریم $k_0 = \omega\mu_0$. در این حالت نیز مجدداً ناحیه‌ی حل را مانند تفاضل‌های متناهی در زمان مشبک می‌کنیم با این فرق که دیگر شبکه‌های میدانها درهم‌تنیده نیستند، زیرا میدانها هم‌زمان تحلیل می‌شوند. در اینجا برای حفظ پایداری تنها لازم است که برای میدانهای الکتریکی و

مغناطیسی به ترتیب از تفاضل‌های پیش‌رو و پس‌رو استفاده نماییم. لذا برای مثال معادلات (۱۳-۱) و (۱۳-۶) به فرم‌های زیر تبدیل می‌شوند:

$$-jk_0 H_x(j, l) = \frac{E_z(j, l+1) - E_z(j, l)}{\Delta y} + j\beta E_y(j, l) \quad (14-1)$$

$$jk_0 \bar{\epsilon}_r E_z(j, l) = \frac{H_y(j, l) - H_y(j-1, l)}{\Delta x} - \frac{H_x(j, l) - H_x(j, l-1)}{\Delta y} \quad (14-2)$$

اگر در راستای x و y به ترتیب M و N تقسیم داشته باشیم در کل $6M \times N$ مجهول و $M \times N$ گره خواهیم داشت. با تسطیح ماتریس‌های مربوط به میدان‌ها بدست می‌آید:

$$[E_x(j, l)]_{M \times N} \rightarrow \{E_x\}_{MN \times 1} \quad (15)$$

با نوشتن سایر مولفه‌ها به فرم (۱۵) داریم:

$$\begin{bmatrix} \bar{0} & j\beta\{I\} & \{u_y\} \\ -j\beta\{I\} & 0 & -\{u_x\} \\ -\{u_y\} & \{u_x\} & \bar{0} \end{bmatrix}_{3MN \times 3MN} \begin{bmatrix} \{E_x\} \\ \{E_y\} \\ \{E_z\} \end{bmatrix}_{3MN \times 1} = -j\beta\mu_0 \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \\ \{H_z\} \end{bmatrix}_{3MN \times 1} \quad (16-1)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{0} & j\beta\{I\} & \{v_y\} \\ -j\beta\{I\} & 0 & -\{v_x\} \\ -\{v_y\} & \{v_x\} & \bar{0} \end{bmatrix}_{3MN \times 3MN} \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \\ \{H_z\} \end{bmatrix}_{3MN \times 1} = \quad (16-2)$$

$$jk_0 \begin{bmatrix} \{\epsilon_{rx}\} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \{\epsilon_{ry}\} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \{\epsilon_{rz}\} \end{bmatrix}_{3MN \times 3MN} \begin{bmatrix} \{E_x\} \\ \{E_y\} \\ \{E_z\} \end{bmatrix}_{3MN \times 1}$$

اگر ϵ متناظر با یک محیط همسانگرد باشد، ماتریس مربوطه در سمت راست (۱۶-۲) قطری و همسانگرد می‌شود، و ماتریس‌های $\{\epsilon_{rj}\}$, $j = x, y, z$ یکسان خواهند بود.

می‌توان به سادگی دید که ماتریس‌های $\{u_x\}$ و $\{v_x\}$ به صورت ماتریس‌های دوقطری زیر قابل تعریف می‌باشند (تمرین ۴):

$$\{u_x\}_{MN \times MN} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{MN \times MN} \quad (17-1)$$

$$\{v_x\}_{MN \times MN} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{MN \times MN} \quad (17-2)$$

$\{u_y\}$ و $\{v_y\}$ را به طور مشابه به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[u_y] = \frac{1}{\Delta y} \begin{bmatrix} \overbrace{-1 \ 0 \ \cdot \ 1 \ \cdot \ \cdot}^{M+1} \\ 0 \ -1 \ \cdot \ \cdot \ 1 \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ -1 \ \cdot \ \cdot \ 1 \\ 1 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ 1 \ \cdot \ \cdot \ -1 \ 0 \\ \cdot \ \cdot \ 1 \ \cdot \ 0 \ -1 \end{bmatrix} \quad (18-1)$$

$$[v_y] = \frac{1}{\Delta y} \begin{bmatrix} \overbrace{1 \ 0 \ \cdot \ -1 \ \cdot \ 0}^{M+1} \\ 0 \ 1 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ 1 \ \cdot \ \cdot \ -1 \\ -1 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 1 \ 0 \\ 0 \ \cdot \ -1 \ \cdot \ 0 \ 1 \end{bmatrix} \quad (18-2)$$

در این جا بین هر دو عضو غیر صفر در هر سطر و ستون $M+1$ عضو فاصله است. با ادغام این ماتریس‌ها، اگر به دنبال ویژه‌سامدها باشیم به اندازه‌ی $3MN$ ویژه‌مقدار از حل معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \{E\} = \{\varepsilon^{-1}\} [C_H] \{E\} \quad (19)$$

در صورتی که مساله‌ی انتشار در فیبر نوری باشد و به دنبال β بگردیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \{P_{xx}\} & \{P_{xy}\} \\ \{P_{yx}\} & \{P_{yy}\} \end{bmatrix}_{2MN \times 2MN} \begin{bmatrix} \{E_x\} \\ \{E_y\} \end{bmatrix}_{2MN \times 1} = \beta^2 \begin{bmatrix} \{E_x\} \\ \{E_y\} \end{bmatrix}_{2MN \times 1} \quad (20)$$

یا بطور هم ارز خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \{Q_{xx}\} & \{Q_{xy}\} \\ \{Q_{yx}\} & \{Q_{yy}\} \end{bmatrix}_{2MN \times 2MN} \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \end{bmatrix}_{2MN \times 1} = \beta^2 \begin{bmatrix} \{H_x\} \\ \{H_y\} \end{bmatrix}_{2MN \times 1} \quad (21)$$

می‌توان دید که روابط هم‌پاسخی بین زیرماتریس‌های ضریب در سمت چپ به شکل ذیل وجود دارد:

$$Q_{xx} = P_{yy}^T \quad (22-1)$$

$$Q_{xy} = -P_{xy}^T \quad (22-2)$$

$$Q_{yx} = -P_{yx}^T \quad (22-3)$$

$$Q_{yy} = P_{xx}^T \quad (22-4)$$

روش چند قطبی‌های متعدد

روش چندقطبی‌های متعدد برای ساختارهای دو بعدی عموماً بکار می‌رود و اساس آن مبتنی بر تفکیک ناحیه‌ی حل به K زیردامنه‌ی $\{D_i\}, i=1 \dots K$ است. آن‌گاه میدان کل را در هر ناحیه بصورت جمع میدان منبع و میدان پراکنش در نظر می‌گیریم:

$$\Phi_{approx}^{D_i}(\mathbf{r}) = \Phi_{excitation}^{D_i}(\mathbf{r}) + \Phi_{scattered, approx}^{D_i}(\mathbf{r}) = \Phi_{excitation}^{D_i}(\mathbf{r}) + \sum_{l=1}^{N^{D_i}} x_l^{D_i} \varphi_l^{D_i}(\mathbf{r}) \quad (23)$$

همانطور که دیده می‌شود میدان پراکنش روی توابع پایه موسوم به چندقطبی، که مانند زیر معمولاً بر حسب توابع بسل نسبت به نقاط ثابتی \mathbf{r}_{O_i} در زیردامنه‌ها که مانند مراکز استوانه‌ها عمل می‌کنند، نوشته می‌شوند و بسط داده می‌گردد:

$$\varphi_l^{D_i}(\mathbf{r}) = \varphi_l^{D_i}(r, \phi) = H_{n_i}^{(1)}(\kappa^{D_i} r_l) \times \begin{cases} \sin(n_l \phi_l) \\ \cos(n_l \phi_l) \end{cases} \quad (24)$$

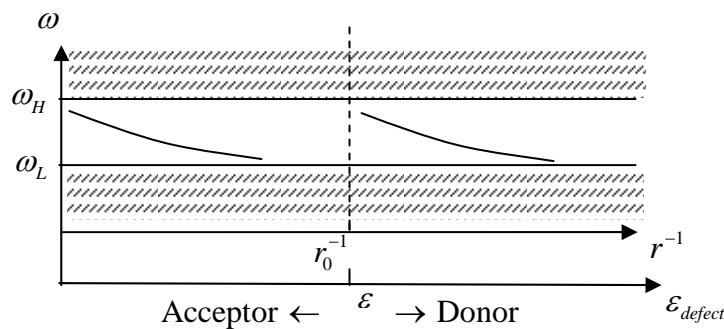
در اینجا داریم $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{O_i}$ ، به بیان دیگر هر مجموعه از چندقطبی‌ها نسبت به مرکز جداگانه‌ای در زیردامنه $\{D_i\}$ نوشته می‌شود.

نقص در بلورهای فوتونی

تاکنون در مورد بلورهای فوتونی پیوسته و کامل صحبت کردیم. در این قسمت می‌خواهیم وجود نقص در آن را بررسی کنیم. بسته به شکل هندسی نقص می‌توان آنرا به دو دسته کلی نقطه‌ای (نقص صفر بعدی)، خطی (نقص یک بعدی)، و یا صفحه‌ای (نقص دو بعدی) تقسیم نمود.

در مقایسه با بلور الکترونی، می‌توان هر سوراخ یا استوانه‌ی دی‌الکتریک را یک اتم نامید. آنگاه در حالت عمومی نقص نقطه‌ای می‌تواند نوعی ناخالصی باشد که در شبکه جای گرفته است، و یا اتمی که از شبکه کریستالی برداشته شده یا از جای خود حرکت نموده است. تغییر شعاع یا جنس دی‌الکتریک و یا شکست تقارن انتقالی به هر نحوی باز هم منجر به ایجاد نقص نقطه‌ای می‌گردد.

اگر تغییراتی که منجر به ایجاد نقص می‌گردد تدریجاً افزایش یابد، مود نقص نیز از لبه‌ی بالا یا پایین گاف فوتونی جدا شده و به درون گاف حرکت می‌کند. اگر مود نقص از لبه بالای گاف جدا شده باشد آن‌گاه نقص را دهنده (Donor) می‌نامیم. به همین شکل اگر مود نقص از لبه‌ی پایین گاف جدا شود آن‌گاه نقص را پذیرنده (Acceptor) می‌نامیم. بطور مثال مود نقص ناشی از افزایش شعاع یک سوراخ هوا در یک بلور فوتونی منجر به یک نقص پذیرنده می‌شود، زیرا افزایش شعاع سوراخ هوا موجب کاهش ضریب شکست میانگین سلول دربرگیرنده‌ی نقص شده و این پدیده موجب حرکت نوارهای فوتونی ساختار باند به بسامدهای بالاتر می‌گردد. در نتیجه مود نقص از لبه‌ی پایین گاف (نقطه M در بلور فوتونی مربعی) جدا شده و از نوع پذیرنده خواهد بود. در شکل بعدی اثر تغییرات شعاع سوراخ هوا یا ثابت دی‌الکتریک محیط میزبان را در یک بلور فوتونی مربعی نمایش داده شده است. اگر نقص نقطه‌ای ناشی از ایجاد اختلال در تنها یک سلول واحد باشد آنرا نقص نقطه‌ای ساده می‌نامیم.

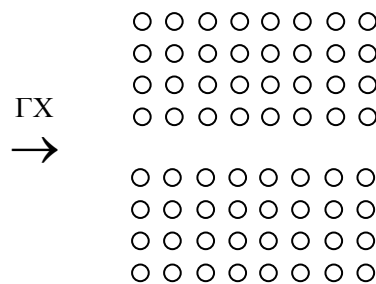


شکل ۵- اثر ایجاد مود نقص در بلور فوتونی.

در حالت کلی یک نقص دهنده‌ی ساده در بلور فوتونی مربعی قادر است دو مود متعامد تبهگن ایجاد کند که عموماً الگوی تشعشی آنها به فرم دو دوقطبی متعامد است. این پدیده بدلیل تشابه نقاط X و X' در شبکه معکوس است که با دوران 90° به یکدیگر تبدیل می‌شوند؛ در واقع مود نقص دهنده از لبه بالای گاف فوتونی جدا می‌شود که منطبق بر نقطه X است. به طریق مشابه نقص گیرنده که از نقطه M جدا می‌شود عموماً دارای یک مود نقص غیرتبهگن با الگوی تشعشی تک‌قطبی است. چنانچه نقص خیلی اختلال بزرگی در شبکه ایجاد کرده باشد امکان حضور تعداد بیشتری از مدهای نقص خواهد بود اما به هر حال درجه‌ی تبهگنی مدهای نقص بلورهای فوتونی دوبعدی از ۲ تجاوز نخواهد کرد.

به عنوان نقص خطی می‌توان یک آرایه‌ی خطی از نقص‌های نقطه‌ای را در نظر گرفت. شکل بعد یک موجبر که از یک دنباله‌ی جای تهی در راستای ΓX ایجاد شده است را نشان می‌دهد. در این موجبر، تقارن انتقالی در راستای عمودی به هم خورده است و به جای آن یک (یا چند) نوار اضافی در ساختار باند ایجاد می‌شود. اگر باندهای اضافی در گاف فوتونی قرار بگیرند آنگاه تبدیل به یک باند موجبری خواهد شد که امکان هدایت انرژی نورانی را در درون موجبر بدون نشت به خارج آن فراهم می‌کند.

دلیل اصلی آنکه هنوز ساختار باند معنی‌دار وجود دارد آن است که تناوب انتقالی در یک بعد هنوز برقرار است. به طور کلی در یک موجبر احتمال ایجاد هر دو شاخه‌ی مودهای با تقارن زوج و فرد وجود دارد که اصولاً شاخه با بسامدهای کوچکتر دارای تقارن زوج است. گاهی برای تک‌مود شدن موجبر باید مود فرد را از داخل گاف به بیرون راند تا در درون گاف تنها یک شاخه وجود داشته باشد.



شکل ۶- موجبر ساده در بلور فوتونی دو بعدی مربعی.

اما از نظر چگونگی انتشار در موجبر، موجبرهای بلور فوتونی از یکی از سه مکانیسم زیر استفاده می‌کنند:

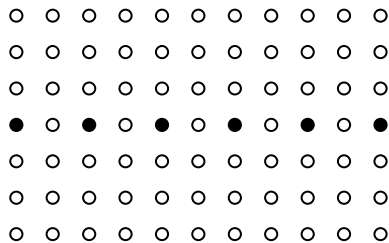
۱- بازتاب کلی داخلی

۲- بازتاب براگ یا بازتاب از گاف فوتونی

۳- تزویج از طریق کاواک‌های مزدوج

روش سوم به CROW (Coupled Resonator Optical Waveguide) معروف است. در این مدل همانطور که خواهیم دید تزویج بین کاواک‌ها عامل تشکیل باند است. هر کاواک به تنهایی بسامد تشدیدی مانند ω_0 دارد، که در مجاورت کاواک‌های دیگر به میزان اندکی دچار تغییر می‌شود. مجموعه‌ی این تغییرات برای تعداد بی‌شماری از کاواک‌ها نواری با سرعت گروه خیلی کم ایجاد می‌کند که به باند CROW موسوم است. لازم به ذکر است که باند CROW همواره در درون گاف فوتونی واقع می‌شود (چرا؟). به هنگام انتشار انرژی درون کاواک‌ها خیلی آهسته به کاواک‌های مجاور

نشت می‌کند و به کاواک بعدی تزویج می‌شود. در بلور فوتونی مربعی اگر مود نقص هر کدام از کاواک‌ها به تنهایی دارای تقارن تک‌قطبی یا چهارقطبی باشد، می‌توان خم ۹۰ درجه نیز بدون اتلاف ایجاد کرد.



شکل ۷- موج‌بر کاواک‌های مزدوج در یک بلور فوتونی مربعی؛

فاصله‌ی جدایی میان هر دو نقص متوالی برابر دو ثابت شبکه است.

برای بدست آوردن سرعت گروه، دامنه میدان الکتریکی یا مغناطیسی را a_i نامگذاری می‌کنیم. در حالت بدون اتلاف داریم:

$$\frac{da_i}{dt} = j\omega_0 a_i \quad (25)$$

ولی در حالتی که اتلاف داریم خواهیم داشت:

$$\frac{da_i}{dt} = j\omega_0 a_i + \gamma a_i + j\frac{\alpha}{2}(a_{i+1} + a_{i-1}) \quad (26)$$

هر چه فاصله دو کاواک بیشتر باشد α به صورت نمایی کاهش می‌یابد. اگر α منفی باشد، کاواک کناری در فاز مخالف قرار می‌گیرد، و بر عکس هنگامی که α مثبت است، کاواک کناری در فاز یکسان قرار خواهد داشت. اگر موج منتشر شونده داشته باشیم، لزوماً بدلیل تناوب مکانی در راستای انتشار باید به فرم موج بلوخ باشد، و بنابراین می‌توان نوشت:

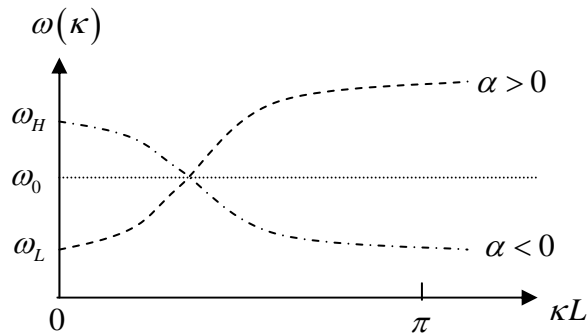
$$a_{i\pm 1} = a_i e^{\mp j\kappa mL} \quad (27)$$

در رابطه فوق L ثابت شبکه و m مضرب ثابت شبکه است که فاصله دو کاواک را معین می‌کند؛ به عنوان مثال در شکل ۷ داریم $m=2$. حال با جای‌گذاری در رابطه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$\frac{da_i}{dt} = [(j\omega_0 + \gamma) + j\alpha \cos(\kappa mL)] a_i \quad (28)$$

که در آن صورت رابطه‌ی پاشندگی به شکل زیر ظاهر خواهد شد (چرا؟):

$$\omega(\kappa) = [\omega_0 + \alpha \cos(\kappa mL)] - j\gamma \quad (29)$$



شکل ۸- باندهای CROW برای دو حالت مختلف.

در شکل بالا $\omega_H = \omega_0 + |\alpha|$ و $\omega_L = \omega_0 - |\alpha|$ است و برای سرعت گروه خواهیم داشت:

$$v_g = \left| \frac{\partial \omega}{\partial \kappa} \right| = mL |\alpha| \sin(\kappa mL) \quad (30)$$

در نتیجه بیشینه‌ی سرعت گروه در باندهای CROW عبارتست از $v_g|_{\max} = mL |\alpha|$.

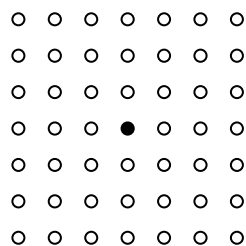
مراجع

- [1] S. Khorasani, "Numerical Methods in Analysis of Photonic Crystals," *1st Workshop on Photonic Crystals*, Mashad (2005).
- [2] S. Khorasani, K. Mehrany, M. Chamanzar, B. Rashidian, A. Atabaki, "A Review of Photonic Crystal Science & Technology," *12th Conference on Optics & Photonics*, Shiraz (2006).

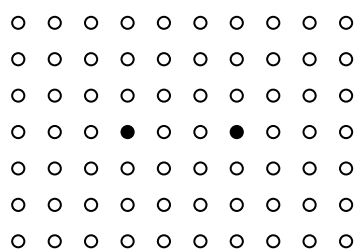
تمرین

۱- درستی (۲) را با استفاده از (۱)، اتحادهای برداری و قضیه‌ی گرین تحقیق کنید.

- ۲- با استفاده از تعریف موج بلوخ (۶) درستی (۷) را نشان دهید، و از آنجا به طریق مشابه با مساله‌ی قبل، (۸) را بدست آورید.
- ۳- در روش تفاضل‌های متناهی در بسامد معادلات تفاضلی مربوط به سایر مولفه‌های میدان‌ها را همانند (۱۴) بنویسید.
- ۴- صحت روابط (۱۷) و (۱۸) را تحقیق نمایید.
- ۵- نشان دهید روابط (۲۲) برقرار است و ویژه‌مقادیر این دو ماتریس با هم برابر هستند. عناصر ماتریس $\{P_{xx}\}$ را بدست آورید.
- ۶- روابط (۱۷) و (۱۸) را برای حالتی که شرط مرزی بلوخ به جای شرط مرزی صفر حاکم است بازنویسی نمایید.
- ۷- مود نقص ناشی از افزایش یا کاهش شعاع و یا ثابت دی‌الکتریک یک بلور فوتونی دوبعدی مربعی با استوانه‌های دی‌الکتریک در میزبان هوا از کدام نوع دهنده یا پذیرنده است؟ چرا؟
- ۸- فرض کنید در یک بلور فوتونی مربعی بی‌اتلاف با ابعاد نامحدود یک کاواک تک مود با الگوی تشعشی تک قطبی، و با بسامد تشدید ω_0 مطابق شکل زیر ایجاد کرده‌ایم:



- اگر دو کاواک مانند فوق را با m ثابت شبکه فاصله از هم (مانند شکل زیر با $m=3$) تزویج کنیم و آهنگ تزویج α_m باشد آنگاه بسامد و الگوی تشعشی موده‌های کاواک جدید چیست؟



فرض کنید $\alpha_m = \alpha_0 \exp(-m\zeta)$ که در آن α_0 و ζ ثابت هستند.

بخش ۹

موجبر کاواک‌های تزویج‌شده و توابع ونیر

در این بخش ابتدا به آنالیز CROW بر اساس مدلی کامل تر از آنچه در فصل قبل دیدیم خواهیم پرداخت. بطور جداگانه دو حالت تبهگن و غیر تبهگن مورد بررسی قرار خواهند گرفت، و سپس توابع ونیر را برای تحلیل بلورهای فوتونی معرفی خواهیم نمود.

حالت غیر تبهگن

در این حالت فرض می‌شود که کاواک‌ها تک مود هستند. فرض کنید به دنبال موج میدان الکتریکی که با عدد موج بلوخ K منتشر می‌شود می‌گردیم. ابتدا می‌پذیریم که یک کاواک منفرد و منطبق بر مبدا مختصات دارای الگوی تشعشی $\mathbf{E}_v(\mathbf{r})$ باشد. آنگاه به سادگی می‌توان دید که بسط زیر دارای ویژگی‌های یک موج بلوخ است:

$$\mathbf{E}_K(\mathbf{r}) \cong \sum_n e^{-jn\kappa\Lambda} \mathbf{E}_v(\mathbf{r} - n\Lambda\mathbf{x}) \quad (1)$$

رابطه‌ی فوق به شرط دور بودن کاواک‌ها از یکدیگر نوشته شده است، و در آن $\Lambda = mL$ فاصله‌ی دو کاواک متوالی است. بنابراین می‌توان رابطه عملگری زیر را نوشت:

$$\mathbb{T}_\Lambda \mathbf{E}_\kappa = \mathbf{E}_\kappa(\mathbf{r} + \Lambda \hat{x}) = e^{-j\kappa\Lambda} \mathbf{E}_\kappa(\mathbf{r}) \quad (۲)$$

حال معادله‌ی موج حاکم بر CROW را در نظر بگیرید:

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_\kappa] = \varepsilon_r(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_\kappa \quad (۳)$$

که در آن $\varepsilon_r(\mathbf{r})$ گذردهی الکتریکی CROW است. به طور مشابه برای یک کاواک منفرد خواهیم داشت:

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_\nu] = \xi_r(\mathbf{r}) \frac{\nu^2}{c^2} \mathbf{E}_\nu \quad (۴)$$

که در آن $\xi_r(\mathbf{r})$ نفوذپذیری الکتریکی یک کاواک منفرد و ν بسامد تشدید آن است. نیز برای سادگی فرض می‌کنیم که ویژه مود کاواک در بسامد ν از شرط نرمالیزاسیون تبعیت می‌کند.

$$\int_{\text{AllSpace}} \xi_r(\mathbf{r}) |\mathbf{E}_\nu(\mathbf{r})|^2 d^2r = 1 \quad (۵)$$

اکنون معادله مربوط به تحلیل میدان الکتریکی (۳) را در نظر گرفته و جواب تقریبی (۱) را در آن جانشین می‌کنیم:

$$\nabla \times \left[\nabla \times \sum_n e^{-jn\kappa\Lambda} \mathbf{E}_\nu(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) \right] = \varepsilon_r(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} \sum_n e^{-jn\kappa\Lambda} \mathbf{E}_\nu(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) \quad (۶)$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$\nu^2 \sum_n e^{-jn\kappa\Lambda} \xi_\nu(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) \mathbf{E}_\nu(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) = \varepsilon_r(\mathbf{r}) \omega^2 \sum_n e^{-jn\kappa\Lambda} \mathbf{E}_\nu(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) \quad (۷)$$

توجه نمایید که در روابط فوق ω تابعی از κ است ولی ν بسامد تشدید و ثابت یک کاواک تنها می‌باشد. سپس طرفین را در $\mathbf{E}_\nu^*(\mathbf{r})$ ضرب داخلی کرده و انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \nu^2 \sum_n e^{-jn\kappa\Lambda} \int_{R^2} \xi_\nu(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) \mathbf{E}_\nu^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_\nu(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) d^2r = \\ \omega^2(\kappa) \sum_n e^{-jn\kappa\Lambda} \int_{R^2} \varepsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}_\nu^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_\nu(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) d^2r \end{aligned} \quad (۸)$$

در مرحله بعد با تعریف دو پارامتر α_n و β_n

$$\alpha_n = \int_{R^2} \varepsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}_\nu^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_\nu(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) d^2r \quad (۹-۱)$$

$$\beta_n = \int_{R^2} \xi_v(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) \mathbf{E}_v^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_v(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) d^2r \quad (9-2)$$

و α_0 و β_0 برای $n=0$ آنها خواهیم داشت:

$$\alpha_0 = \int_{R^2} \varepsilon_r(\mathbf{r}) |\mathbf{E}_v(\mathbf{r})|^2 d^2r \quad (10-1)$$

$$\beta_0 = \int_{R^2} \xi_v(\mathbf{r}) |\mathbf{E}_v(\mathbf{r})|^2 d^2r \quad (10-2)$$

بدیهی است که داریم (چرا؟):

$$\alpha_0 = 1 + \int_{R^2} [\varepsilon_r(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{r})] |\mathbf{E}_v(\mathbf{r})|^2 d^2r \triangleq 1 + \Delta\alpha \quad (11)$$

اکنون می‌توان رابطه (۸) را به شکل ساده‌تر زیر نوشت:

$$v^2 \left[\sum_{n \neq 0} e^{-jn\kappa\Lambda} \beta_n + 1 \right] = \omega^2(\kappa) \left[\sum_{n \neq 0} e^{-jn\kappa\Lambda} \alpha_n + 1 + \Delta\alpha \right] \quad (12)$$

در صورتی که تزویج بین کاواک‌های غیر مجاور را بسیار ضعیف فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$|\alpha_n| \approx 0, \quad |n| > 1 \quad (13-1)$$

$$|\beta_n| \approx 0, \quad |n| > 1 \quad (13-2)$$

پس رابطه‌ی (۱۲) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$v^2 [\beta_1 e^{-j\kappa\Lambda} + \beta_{-1} e^{j\kappa\Lambda} + 1] \approx \omega^2(\kappa) [\alpha_{-1} e^{-j\kappa\Lambda} + \alpha_1 e^{j\kappa\Lambda} + 1 + \Delta\alpha] \quad (14)$$

اکنون با در نظر گرفتن $\alpha_1 = \alpha_{-1}^*$ و $\beta_1 = \beta_{-1}^*$ برای محیط بی‌اتلاف خواهیم داشت:

$$\omega^2(\kappa) = v^2 \frac{1 + 2\operatorname{Re}\{e^{-j\kappa\Lambda} \beta_1\}}{2\operatorname{Re}\{e^{j\kappa\Lambda} \alpha_1\} + 1 + \Delta\alpha} \quad (15)$$

با کمک تمرین ۵ می‌توانید نشان دهید که رابطه فوق را می‌توان به شکل استاندارد (و تقریبی) زیر

نوشت:

$$\omega(\kappa) \approx v [\chi_0 + \chi_1 \cos(\kappa\Lambda)] \quad (16)$$

حالت تبهگن

فرض کنید که کاواک‌ها دارای یک بسامد تشدید با تبهگنی N گانه باشند. در کاواک‌های ساده بلور فوتونی همانطور که قبلا هم اشاره کردیم معمولا درجه‌ی تبهگنی بزرگتر از ۲ نیست. در برخی موارد اما ممکن است که کاواک بیش از یک مود داشته باشد که برخی تبهگن و باقی غیر تبهگن باشد. به هر حال معادله در حالت تبهگن به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_l(\mathbf{r})] = \varepsilon_r(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_l(\mathbf{r}) \quad (17-1)$$

$$\mathbf{E}_\kappa(\mathbf{r}) = \sum_n \sum_{l=1}^N b_l e^{-jn\kappa\Lambda} \mathbf{E}_l(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) \quad (17-2)$$

که $l = 1 \dots N$ شماره‌ی مود تبهگن است. حال بدون از دست رفتن کلیت مسئله فرض می‌کنیم که مودهای تبهگن متعامد هستند، زیرا در حالتی که حتی تعامد هم برقرار نباشد همواره تبدیلی وجود دارد که از آنها یک پایه‌ی متعامد بسازد. در هر صورت داریم:

$$\int_{\text{AllSpace}} \xi_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}_l^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{l'}(\mathbf{r}) d^3r = \delta_{ll'} \quad (18)$$

حال با انجام عملیاتی مشابه حالت غیر تبهگن خواهیم داشت:

$$v^2 \sum_l b_l \left[\delta_{ml} + \sum_{n \neq 0} \beta_{ml}^n e^{-jn\kappa\Lambda} \right] = \omega^2(\kappa) \sum_l b_l \left[\delta_{ml} + \Delta\alpha_{ml} + \sum_{n \neq 0} \alpha_{ml}^n e^{-jn\kappa\Lambda} \right] \quad (19)$$

که در آن داریم:

$$\Delta\alpha_{ml} = \int_{R^2} [\xi_r(\mathbf{r}) - \varepsilon(\mathbf{r})] \mathbf{E}_m^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_l(\mathbf{r}) d^2r \quad (20-1)$$

$$\alpha_{ml}^n = \int_{R^2} \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}_m^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_l(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) d^2r \quad (20-2)$$

$$\beta_{ml}^n = \int_{R^2} \xi_r(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) \mathbf{E}_m^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_l(\mathbf{r} - n\Lambda\hat{x}) d^2r \quad (20-3)$$

با کمک تعاریف

$$a_{ml} = \left[\delta_{ml} + \Delta\alpha_{ml} + \sum_{n \neq 0} \alpha_{ml}^n e^{-jn\kappa\Lambda} \right] \quad (20-4)$$

$$c_{ml} = \left[\delta_{ml} + \sum_{n \neq 0} \beta_{ml}^n e^{-jn\kappa\Lambda} \right] \quad (20-5)$$

و بعد از ساده‌سازی (۱۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\omega^2 [a] \{b\} = v^2 [c] \{b\} \quad (21)$$

یا:

$$[M] \{b\} = \omega^2 (\kappa) \{b\} \quad (22-1)$$

$$[M]_{N \times N} \triangleq v^2 [a]^{-1} [c] \quad (22-2)$$

که نشان می‌دهد باند CROW تبهگن اصولاً دارای تعداد N شاخه است که برابر با درجه تبهگنی مودهای شکل‌دهنده‌ی آن است.

آنالیز بلورهای فوتونی با کمک توابع ونیر

ایده‌ی روش توابع ونیر WFM (Wannier Functions' Method) ابتدا در فیزیک حالت جامد پا به عرصه‌ی ظهور گذارد، ولی تا اواخر قرن بیستم کاربرد آن در بلورهای فوتونی به تاخیر افتاد. کار با توابع ونیر دارای مزایای زیر است:

۱- کار با توابع ونیر موجب بهبود قابل توجه در دقت و سرعت محاسبات می‌گردد.

۲- توابع ونیر به طور ذاتی با توابع متناوب سر و کار دارد.

۳- محاسبات به جای شبکه معکوس در فضای اصلی انجام می‌شود.

۴- فرمولاسیون توابع ونیر از نظر ریاضی دقیق است.

تنها دشواری کار با توابع ونیر آن است که برای یک بلور فوتونی میزبان مورد نظر قبل از مطالعه‌ی هر ساختار دلخواه، بایستی توابع ونیر آن بلور فوتونی مادر را بدست آورد و ذخیره نمود. متأسفانه توابع ونیر منحصر به فرد نیستند ولی می‌توان با افزودن یک شرط کمکی در محاسبه به توابع منحصر به فرم و بهینه از نظر پراکندگی فضایی رسید.

حال قطبش الکتریکی در دو بعد را در نظر بگیرید:

$$\left[\nabla_{\perp}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}) \right] E_z(\mathbf{r}) = 0 \quad (23-1)$$

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (23-2)$$

که در آن $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ بردار جابجایی دوبعدی است. با توجه به رابطه عملگری زیر

$$\mathbb{L}_E E_z = k_0^2 E_z \quad (24)$$

که در آن $k_0 = \omega/c$ است، همانطور که قبلا دیده‌ایم برای یک شبکه‌ی کامل جابجایی با عملگر انتقال برقرار است:

$$[\mathbb{L}_E, \mathbb{T}_{pq}] = 0 \quad (25)$$

در اینجا عملگر انتقال به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{T}_{pq} \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{R}_{pq} \quad (26-1)$$

$$\mathbf{R}_{pq} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b} \quad (26-2)$$

بدیهی است که طبق تعریف داریم $\mathbb{T}_{pq} \varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})$. بنابراین مولفه‌ی میدان الکتریکی را می‌توان به شکل تابع بلوخ نوشت:

$$E_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \phi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad n \geq 1 \quad (27-1)$$

$$\mathbb{T}_{pq} \phi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \phi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (27-2)$$

در رابطه‌ی (۲۷-۱) زیرنویس n نمایان‌گر شماره‌ی باند در ناحیه بریلوین اول است. پس داریم:

$$\mathbb{T}_{pq} E_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \exp(-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_{pq}) E_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (28)$$

اما $E_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ یک دسته توابع متعامد را می‌سازند:

$$\iint_{R^2} \varepsilon(\mathbf{r}) E_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) E_{n'\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) d^2r = \delta_{nn'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (29)$$

که \mathbf{k} و \mathbf{k}' در ناحیه اول بریلوین واقع شده‌اند.

توابع ونیر را با نماد $W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r})$ و در فضای اصلی نشان می‌دهیم و همانطور که دیده می‌شود هیچ گونه وابستگی به بردار موج بلوخ $\mathbf{\kappa}$ ندارد. از سوی دیگر $W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r})$ تابع شماره‌ی باند n و مجموعه‌ی نقاط شبکه $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}_{pq}$ هستند، که به شکل زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r}) \triangleq \frac{V_{UC}}{(2\pi)^2} \iint_{\text{BZ}} \exp(j\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{R}) E_{n\mathbf{\kappa}}(\mathbf{r}) d^2\kappa \quad (30)$$

توجه شود که توابع ونیر دارای خواص زیر هستند:

$$\iint_{\mathfrak{R}^2} \varepsilon(\mathbf{r}) W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r}) W_{n'\mathbf{R}'}^*(\mathbf{r}) d^2r = \delta_{nn'} \delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} \quad (\text{تعامد}) \quad (31-1)$$

$$W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = W_{n0}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \equiv W_n(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \quad (\text{تقارن انتقالی}) \quad (31-2)$$

$$E_{n\mathbf{\kappa}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{R}} \exp(-j\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{R}) W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r}) \quad (\text{خاصیت وارون‌پذیری}) \quad (31-3)$$

و بالاخره در صورت داشتن تقارن مرکزی $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(-\mathbf{r})$ ، این توابع حقیقی هستند:

$$\text{Im}\{W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r})\} = 0 \quad (\text{حقیقی بودن به شرط وجود تقارن مرکزی}) \quad (31-4)$$

توابع ونیر به علت منحصر به فرد نبودن توابع بلوخ منحصر به فرد نیستند، زیرا در تعریف (۳۰) می‌توان یک فاز حقیقی $\theta(\mathbf{\kappa})$ وابسته به بردار موج بلوخ را در هر موج به فرم زیر ضرب کرد، بدون آنکه شرط تعامد (۲۹) تغییر نماید:

$$W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r}) \triangleq \frac{V_{UC}}{(2\pi)^2} \iint_{\text{BZ}} \exp[j\theta(\mathbf{\kappa})] \exp(j\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{R}) E_{n\mathbf{\kappa}}(\mathbf{r}) d^2\kappa \quad (32)$$

عدم امکان‌پذیری تعیین فاز $\theta(\mathbf{\kappa})$ موجب می‌گردد که نه تنها توابع ونیر منحصر به فرد نباشند، بلکه توزیع فضایی احیانا بسیار گسترده‌ای را حول مبدا در بر بگیرند که تعداد بسیاری سلول واحد را می‌پوشاند. برای رفع این مشکل تابعی تعریف می‌شود که با کمینه کردن آن توابع ونیر متراکم‌ترین فرم ممکن را حول مبدا اتخاذ نمایند. این تابع عبارتست از [۲]:

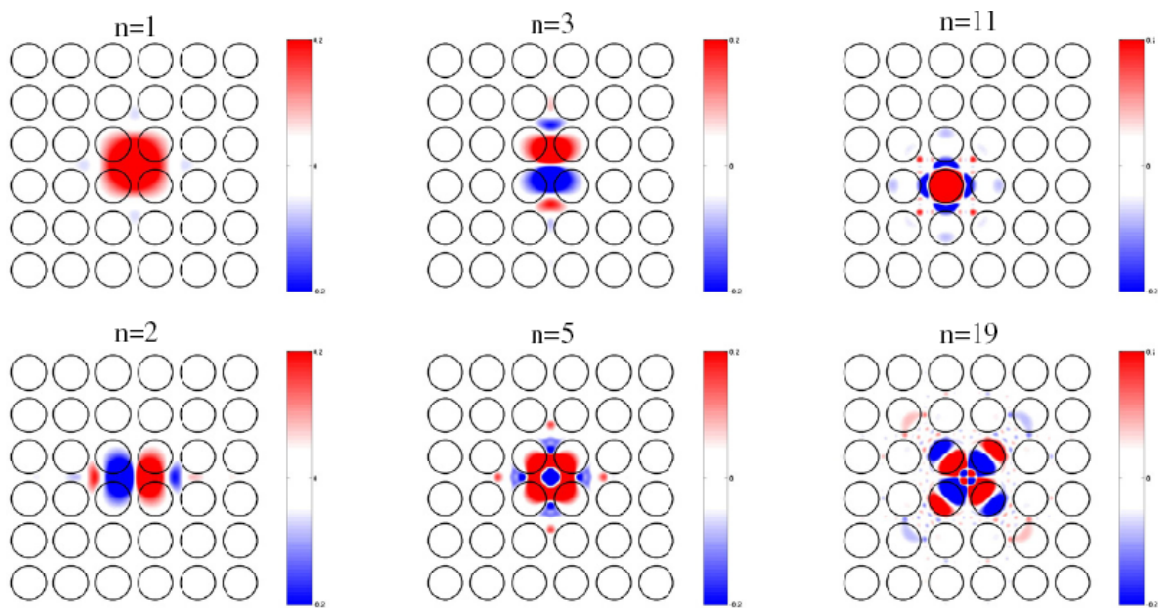
$$\Omega \triangleq \sum_{n=1}^{N_w} \langle r^2 \rangle_n - |\langle \mathbf{r} \rangle_n|^2 \quad (33-1)$$

که در آن N_W تعداد نوارهای بسامد مورد نیز در محاسبات، و همچنین

$$\langle r^2 \rangle_n \triangleq \iint_{R^2} r^2 \varepsilon_r(\mathbf{r}) |W_{nR}(\mathbf{r})|^2 d^2r \quad (33-2)$$

$$\langle \mathbf{r} \rangle_n \triangleq \iint_{R^2} \mathbf{r} \varepsilon_r(\mathbf{r}) |W_{nR}(\mathbf{r})|^2 d^2r \quad (33-3)$$

بدیهی است هر چه Ω کوچک‌تر باشد توابع ونیر فشرده‌تر می‌شوند. در شکل ۱ چند تابع ونیر اول یک بلور فوتونی مربعی محاسبه و ترسیم گردیده‌اند.



شکل ۱- چند تابع ونیر متعلق به شماره نوارهای مختلف بلور فوتونی مربعی با استوانه‌های دی‌الکتریک در هوا [۱].

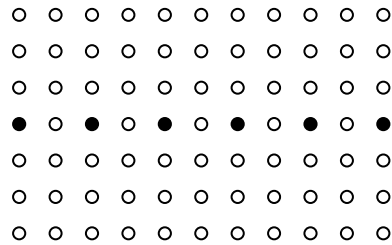
مراجع

- [1] K. Bush et. al., "On the solid-state theoretical description of photonic crystals," in *Photonic Crystals: Advances in Design, Fabrication, and Characterization*, Wiley-VCH, Berlin, 2004, Chap. 1.
- [2] A. Klöckner, *PhD Thesis*, "On the Computation of Maximally Localized Wannier Functions," Universität Karlsruhe, 2004.

تمرین

۱- بر اساس داده‌های مسئله‌ی ۸ از فصل قبل باند CROW را برای ساختار زیر با $m=2$ بدست

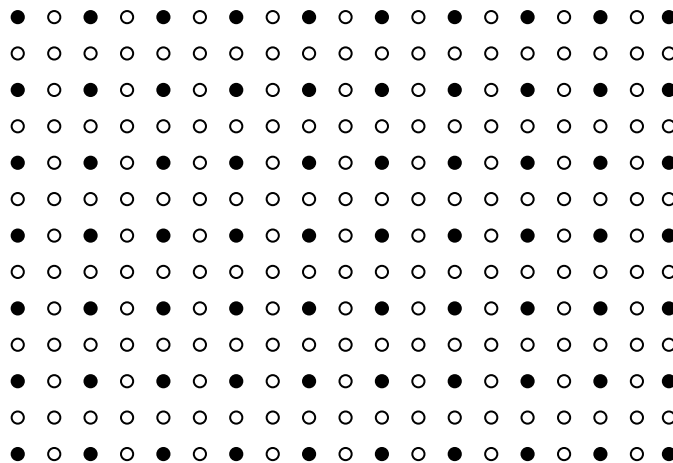
آورید. نتیجه را برای حالتی که $m > 2$ است تعمیم دهید.



۲- اگر در مسئله‌ی ۸ داشته باشیم $\alpha_m = 0, m > 2$ ، آنگاه ساختار باند دوبعدی $\omega(\mathbf{k})$ را برای

آرایه‌ی مسطح کاواک‌های بلور فوتونی (Coupled Photonic Crystal Resonator Array)

CPCRA زیر محاسبه کنید.



۳- تمامی خواص توابع ونیر را اثبات کنید.

۴- نرخ تبادل انرژی بین دو کاواک متوالی را در یک CROW بدست آورید، و از روی آن معیاری

برای تخمین سرعت حرکت انرژی در CROW بدست آورید.

۵- درستی (۱۶) را تحقیق کنید و χ_0 و χ_1 را بدست آورید.

۶- در تعاریف (۱-۲۰) الی (۳-۲۰) چنانچه تقریب‌های (۱۳) قابل بکار بردن باشند، و درجه‌ی

تبهگنی N برابر دو باشد، ضمن حل مسئله مقدارویژه‌ی (۲۲) باند CROW را بدست آورده و

به فرم استاندارد مشابه (۱۶) بدل کنید. چند شاخه در باندهای CROW خواهیم داشت؟

۷- کاواکی را در نظر بگیرید که دارای M مود و هر مود دارای درجه تبهگنی $N_m, m = 1 \dots M$

می‌باشد. بدیهی است که $N_m \geq 1$. این کاواک در مجموع دارای چند مود است؟

۸- رابطه (۲۲) را برای یک CROW که از زنجیره‌ای از کاواک‌های مسئله‌ی ۶ و با فاصله Λ

ساخته شده است مجدداً بدست آورید.

بخش ۱۰

تحلیل ساختارهای بلور فوتونی با توابع ونیر و ویژه‌مودها

در این فصل به بررسی چگونگی تحلیل شبکه دارای نقص بوسیله توابع ونیر می‌پردازیم [۱] و سپس ویژگی‌های موده‌های بلوخ در بلورهای فوتونی را مطالعه خواهیم نمود [۲]. از جمله سایر مزایای توابع ونیر می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ۱- همگرایی سریع و یکنواخت در محاسبات بر حسب ابعاد ماتریس‌ها
- ۲- کاربرد آسان در مدارهای بلور فوتونی
- ۳- توانایی محاسبه موده‌های انتشاری، میرا، و نشتی
- ۴- حفظ دقت در محاسبات عددی حتی در لبه‌های باند
- ۵- قابلیت محاسبه باندهای تبهگن

ابتدا حالت قطبش الکتریکی در دو بعد را در نظر بگیرید و فرض کنید یک نقص در شبکه به صورت اختلال موضعی در تابع گذردهی الکتریکی بصورت $\delta\epsilon_r(\mathbf{r})$ اعمال شده باشد. بایستی معادله‌ی مشخصه را که به شکل زیر ظاهر می‌شود، تحلیل کنیم:

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_r(\mathbf{r}) + \delta\varepsilon_r(\mathbf{r})] E(\mathbf{r}) = 0 \quad (1)$$

حال تابع میدان الکتریکی را روی توابع ونیر بسط می‌دهیم:

$$E(\mathbf{r}) = \sum_n \sum_{\mathbf{R}} E_{n\mathbf{R}} W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r}) \quad (2)$$

که در آن n شماره باند، \mathbf{R} بردار شبکه، $E_{n\mathbf{R}}$ ضرایب بسط، و $W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r})$ توابع ونیر می‌باشند. حال میدان الکتریکی را در معادله‌ی مشخصه قرار می‌دهیم:

$$\sum_n \sum_{\mathbf{R}} E_{n\mathbf{R}} \left\{ \nabla^2 W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon_r(\mathbf{r}) + \delta\varepsilon_r(\mathbf{r})] W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r}) \right\} = 0 \quad (3)$$

طرفین رابطه را در $W_{n'\mathbf{R}'}^*(\mathbf{r})$ ضرب می‌کنیم و سپس روی کل فضای دوبعدی انتگرال می‌گیریم:

$$\sum_n \sum_{\mathbf{R}} E_{n\mathbf{R}} \iint_{R^2} \left\{ W_{n'\mathbf{R}'}^* \nabla^2 W_{n\mathbf{R}} + \frac{\omega^2}{c^2} [W_{n'\mathbf{R}'}^* \varepsilon_r + W_{n'\mathbf{R}'}^* \delta\varepsilon_r] W_{n\mathbf{R}} \right\} d^2 r = 0 \quad (4)$$

با توجه به رابطه‌ی تعامد

$$\iint_{R^2} \varepsilon_r(\mathbf{r}) W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r}) W_{n'\mathbf{R}'}^*(\mathbf{r}) d^2 r = \delta_{nm'} \delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} \quad (5)$$

و تعریف

$$D_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{nm'} \triangleq \iint_{R^2} W_{n'\mathbf{R}'}^*(\mathbf{r}) \delta\varepsilon_r(\mathbf{r}) W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r}) d^2 r \quad (6)$$

رابطه‌ی (۴) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\sum_n \sum_{\mathbf{R}} (\delta_{nm'} \delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} + D_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{nm'}) E_{n\mathbf{R}} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_n \sum_{\mathbf{R}} A_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{nm'} E_{n\mathbf{R}} \quad (7)$$

که در آن داریم:

$$A_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{nm'} \triangleq \iint_{R^2} W_{n'\mathbf{R}'}^*(\mathbf{r}) \nabla^2 W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r}) d^2 r \quad (8)$$

باید در نظر داشت که ماتریس‌هایی که در توابع ونیر تشکیل می‌شوند، همانند روش المان‌های محدود قطری یا تقریباً قطری هستند. این موجب افزایش سرعت همگرایی و دقت عددی در محاسبات می‌شود. حال تعریف توابع ونیر را در رابطه فوق جانشین می‌کنیم:

$$A_{RR'}^{mm'} = \iint_{R^2} W_{nR'}^*(\mathbf{r}) \nabla^2 \left\{ \frac{V_{WSC}}{(2\pi)^2} \iint_{BZ} \exp(j\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{R}) E_{n\mathbf{\kappa}}(\mathbf{r}) d^2\kappa \right\} d^2r \quad (9)$$

$$= \frac{V_{WSC}}{(2\pi)^2} \iint_{R^2} \left\{ \iint_{BZ} \exp(j\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{R}) W_{nR'}^*(\mathbf{r}) \nabla^2 E_{n\mathbf{\kappa}}(\mathbf{r}) d^2\kappa \right\} d^2r$$

مزدوج تابع ونیر را نیز جایگزین می‌کنیم:

$$A_{RR'}^{mm'} = \left[\frac{V_{WSC}}{(2\pi)^2} \right]^2 \iint_{BZ} e^{j\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{R}} \iint_{BZ} e^{-j\mathbf{\kappa}' \cdot \mathbf{R}'} \iint_{R^2} E_{nR'}^*(\mathbf{r}) \nabla^2 E_{n\mathbf{\kappa}}(\mathbf{r}) d^2\kappa d^2\kappa' d^2r \quad (10)$$

حال به سادگی می‌توان دید که (۱۰) به فرم زیر ساده می‌شود (چگونه؟):

$$A_{RR'}^{mm'} = \frac{V_{WSC}}{(2\pi)^2} \frac{\omega_n^2(\mathbf{\kappa})}{c^2} \delta_{mn'} \delta_{RR'} \quad (11)$$

بنابراین سمت راست معادله (۷) را هنوز می‌توان به میزان قابل توجهی ساده‌تر نمود (تمرین ۱).

گاهی اوقات تبدیلی روی توابع میدان ایجاد می‌کنند تا برای برخی محاسبات خاص این انتگرال را کلی‌تر بنویسیم. تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$E_{n\mathbf{\kappa}}(\mathbf{r}) = \sum_m u_{mn}(\mathbf{\kappa}) E_{m\mathbf{\kappa}}(\mathbf{r}) \quad (12)$$

در نتیجه روابط بالا به شکل زیر تغییر خواهند کرد:

$$\iint_{R^2} E_{n\mathbf{\kappa}'}^*(\mathbf{r}) \nabla^2 E_{n\mathbf{\kappa}}(\mathbf{r}) d^2r = \sum_{m'} \iint_{R^2} u_{n'm'}^*(\mathbf{\kappa}') E_{m'\mathbf{\kappa}'}^*(\mathbf{r}) \nabla^2 E_{n\mathbf{\kappa}}(\mathbf{r}) d^2r \quad (13)$$

$$= \sum_{mm'} \iint_{R^2} u_{m'n'}^*(\mathbf{\kappa}') E_{m'\mathbf{\kappa}'}^*(\mathbf{r}) u_{mn}(\mathbf{\kappa}) \nabla^2 E_{m\mathbf{\kappa}}(\mathbf{r}) d^2r$$

$$= \sum_{mm'} u_{m'n'}^{\dagger}(\mathbf{\kappa}') \frac{\omega_n^2(\mathbf{\kappa})}{c^2} \delta_{mm'} \delta(\mathbf{\kappa} - \mathbf{\kappa}') u_{mn}(\mathbf{\kappa})$$

$$= \sum_m u_{mn'}^{\dagger}(\mathbf{\kappa}') \frac{\omega_n^2(\mathbf{\kappa})}{c^2} \delta(\mathbf{\kappa} - \mathbf{\kappa}') u_{mn}(\mathbf{\kappa})$$

با توجه به روابط پیشین برای $A_{RR'}^{mm'}$ خواهیم داشت:

$$A_{RR'}^{mm'} = \left[\frac{V_{WSC}}{(2\pi)^2} \right]^2 \iint_{BZ} e^{j\mathbf{\kappa}(\mathbf{R}-\mathbf{R}')} \sum_m u_{mn'}^{\dagger}(\mathbf{\kappa}') \frac{\omega_n^2(\mathbf{\kappa})}{c^2} u_{mn}(\mathbf{\kappa}) d^2\kappa \quad (14)$$

تبدیل یکانی

تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$E_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_m u_{mn}(\mathbf{k}) E_{m\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (15)$$

که در آن u_{mn} یک ماتریس هرمیتی است:

$$u_{mn} = u_{nm}^* = u_{mn}^\dagger \quad (16)$$

اگر از این تبدیل استفاده کنیم ماتریس A به شکل زیر ظاهر می‌شود.

$$A_{RR'}^{mm'} = \left[\frac{V_{WSC}}{(2\pi)^2} \right]^2 \delta_{mm'} \iint_{BZ} e^{j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{R}')} \frac{\omega_n^2(\mathbf{k})}{c^2} d^2K \quad (17)$$

در اینجا نکات زیر قابل توجه است:

۱- المان‌های ماتریس $A_{RR'}^{mm'}$ وقتی که $|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|$ بزرگ است به سرعت افت می‌کنند، بنابراین

$A_{RR'}^{mm'}$ کاملاً به طرز موثری قطری می‌شود. همچنین متقارن و مثبت خواهد بود.

۲- $D_{RR'}^{mm'}$ یک ماتریس هرمیتی و تُنک است.

۳- برای ساختار متقارن معکوس $A_{RR'}^{mm'}$ و $D_{RR'}^{mm'}$ ماتریس‌هایی حقیقی هستند.

توجه نمایید که اصولاً اعمال یک تبدیل یکانی تاثیری بر جواب ندارد، ولی ما بدنبال آن تبدیل یکانی

از توابع ونیر بطور هم‌زمان هم هستیم که پراکندگی آنها را در مکان همانطور که قبلاً اشاره کردیم به

حداقل برساند. لذا با گنجانیدن این تبدیل در فرمول‌بندی بدون تغییر دادن الگوریتم و یا کاهش

سرعت اجرا می‌توان به جواب صحیح دست یافت.

مود تک نقص

حال یک تک نقص ساده در شبکه به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\delta\epsilon_r(\mathbf{r}) = \Delta\epsilon \Theta(\mathbf{r}) \quad (18-1)$$

$$\Theta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{inside defect} \\ 1 & \text{outside defect} \end{cases} \quad (18-2)$$

در این حالت $D_{RR'}^{mn'}$ به شکل زیر ساده می‌شود:

$$D_{RR'}^{mn'} = \Delta\epsilon \iint_{\text{defect}} W_{nR'}^*(\mathbf{r}) W_{nR}(\mathbf{r}) d^2r \quad (19)$$

با دانستن پارامترهای بلور فوتونی ماتریس $A_{RR'}^{mn'}$ نیز مشخص می‌شود، بنابراین می‌توان این دستگاه معادلات را تشکیل داد:

$$\sum_{n=1}^{N_W} \sum_{\mathbf{R}} \left(\delta_{mn'} \delta_{RR'} + D_{RR'}^{mn'} \right) E_{nR} = \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{n=1}^{N_W} \sum_{\mathbf{R}} A_{RR'}^{mn'} E_{nR} \quad (20)$$

در اینجا N_W تعداد باندهای شرکت کننده در بسط هستند.

آرایه‌ی نقص‌ها

در قسمت بعد یک آرایه از نقص‌های نقطه‌ای در حالت قبل را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\delta\epsilon_r(\mathbf{r}) = \Delta\epsilon \sum_m \Theta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) \quad (21)$$

در اینجا \mathbf{R}_m نقاط شبکه هستند. حال اگر معادله‌ی مشخصه آنرا تشکیل دهیم برای $D_{RR'}^{mn'}$ خواهیم داشت:

$$D_{RR'}^{mn'} = \Delta\epsilon \sum_m \iint_{\text{defect}} W_{nR'}^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) W_{nR}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) d^2r \quad (22)$$

با تعریف $B_{RR'}^{mn'}$ به شکل زیر

$$B_{RR'}^{mn'} = \iint_{\text{defect}} W_{nR'}^*(\mathbf{r}) W_{n\bar{R}}(\mathbf{r}) d^2r \quad (23)$$

خواهیم داشت (چرا؟):

$$D_{RR'}^{mn'} = \Delta\epsilon \sum_m B_{\mathbf{R}-\mathbf{R}_m, \mathbf{R}'-\mathbf{R}_m}^{mn'} \quad (24)$$

بنابراین اگر مساله تک نقص حل شود، قادر به حل کردن آرایه‌ای از نواقص خواهیم بود. این بدان معنی است که از نظر عددی حل یک کاواک یا تعدادی از کاواک‌ها که بصورت دلخواه در صفحه قرار

گرفته‌اند توسط توابع ونیر به یک میزان پیچیدگی الگوریتمی و عددی دارد. این امتیاز فوق‌العاده برجسته کار با توابع ونیر می‌باشد و از سازگاری ذاتی آنها با محیط متناوب نتیجه می‌گردد.

حال فرض کنید که آرایه‌ی نقص‌ها یک موج‌بر بلور فوتونی یا CROW در راستای x می‌سازند. پس داریم:

$$\delta\epsilon_r(\mathbf{r}) = \Delta\epsilon \sum_m \Theta(\mathbf{r} - m\Lambda\hat{x}) \quad (25)$$

کافی است که ماتریس $D_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{m'}$ آنرا بسازیم:

$$D_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{m'} = \Delta\epsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\mathbf{R}-m\Lambda\hat{x}, \mathbf{R}'-m\Lambda\hat{x}}^{m'} \quad (26)$$

اگر ماتریس $M_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{m'}$ را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$M_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{m'} = \delta_{m'} \delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} + \Delta\epsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{\mathbf{R}-m\Lambda\hat{x}, \mathbf{R}'-m\Lambda\hat{x}}^{m'} - \frac{\omega^2}{c^2} A_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{m'} \quad (27)$$

به معادله‌ی مشخصه زیر خواهیم رسید:

$$\frac{c^2}{\omega^2} \sum_n \sum_{\mathbf{R}} M_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{m'} E_{n\mathbf{R}} = 0 \quad (28)$$

از لحاظ جبری می‌توان فرمول‌بندی را با تسطیح تانسور رتبه ۳ $\{E_{n\mathbf{R}}\}$ به شکل زیر ساده‌تر کرد:

$$\{E_{n\mathbf{R}}\} \rightarrow \{E_{n\mathbf{R}_m}\}_{N_R N_W \times 1} \quad (29)$$

که در آن N_R تعداد نقاط همسایه‌ای است که در محاسبه وارد می‌شوند، و \mathbf{R}_m به شکل زیر است:

$$\mathbf{R}_m \triangleq \mathbf{R}_0 + m\Lambda\hat{x} + jL\hat{y} \quad (30)$$

می‌توان تانسور $M_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{m'}$ را پس از تسطیح به یک ماتریس مربع $N_R N_W \times N_R N_W$ به شکل زیر به زیرماتریس‌های کوچکتری تفکیک نمود:

$$M_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{m'} \equiv \{M\} \xrightarrow{\text{partition}} \{[M_{i,j}]\} \equiv \{[M_{i-j}]\} \quad (31)$$

حال اگر بخواهیم امواج بلوخ را پیدا کنیم، ماتریس زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\{F_i\} \triangleq \left\{ \sum_i, \sum_{i+1}, \dots, \sum_{i+2N_L-1} \right\}_{(2N_L N_R N_W) \times 1} \quad (32)$$

با استفاده از روش ماتریس انتقال تعمیم یافته خواهیم داشت:

$$\{F_{i-1}\} = [T_{i \rightarrow i-1}] \{F_i\} \quad (33)$$

در محاسبه موج بلوخ باید (۳۳) و رابطه زیر به طور همزمان برقرار باشند:

$$\{F_{i-1}\} = \exp(j\kappa\Lambda) \{F_i\} \quad (34)$$

در نتیجه داریم:

$$[[T_{i \rightarrow i-1}] - \exp(j\kappa\Lambda)[I]] = 0 \quad (35-1)$$

یا:

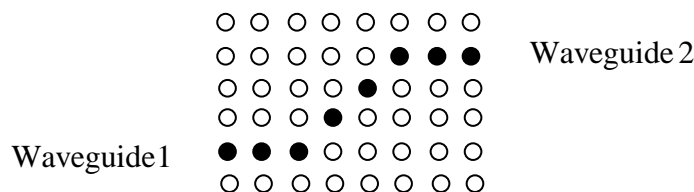
$$\kappa = -\frac{j}{\Lambda} \text{eig} \{ [T_{i \rightarrow i-1}] \} \quad (35-2)$$

چون $[T_{i \rightarrow i-1}]$ تابعی از ω است، با تغییر دادن ω می‌توان κ های مختلف را بدست آورد.

مدار فوتونی

به عنوان مثال بعدی یک مدار بلور فوتونی را در نظر بگیرید که شامل دو موجبر و یک تزویج‌گر زاویه‌دار مطابق شکل زیر است. در اینجا $u_{1,2}^{+,-}$ با علامت مثبت و منفی و زیرنویس ۱ و ۲ نشانگر دامنه‌های مختلط موج ورودی و خروجی در موجبر شماره ۱ و ۲ هستند و زیرنویس i نشانگر شماره موجبر است. پس داریم:

$$F_i = \sum_{p=1}^N u_{i,p}^+ \mathbf{A}_{i,p} + \sum_{p=N+1}^{2N} u_{i,p}^- \mathbf{A}_{i,p} \quad (36)$$



شکل ۱- یک مدار بلور فوتونی نمونه جهت محاسبه با توابع ونیر.

که در آن $N = N_R N_W N_L$ و N_L نمایانگر تعداد نقاطی از شبکه است که در امتداد عمود بر موج‌برها در نظر گرفته میشوند. F_i میدان کل مربوط به موج‌بر i ام است که از بسط روی مودهای پایه موج‌بر در نقاط شبکه بدست می‌آید. برای ضرایب عبور طبق تعریف داریم:

$$t_{ij}^{++} \triangleq \frac{u_{2,i}^+}{u_{1,j}^+} \quad (37-1)$$

$$t_{ij}^{--} \triangleq \frac{u_{1,i}^-}{u_{2,j}^-} \quad (37-2)$$

و برای ضرایب بازتاب داریم:

$$r_{ij}^{-+} \triangleq \frac{u_{1,i}^-}{u_{1,j}^+} \quad (37-3)$$

$$r_{ij}^{+-} \triangleq \frac{u_{2,i}^+}{u_{1,j}^-} \quad (37-4)$$

اکنون ماتریس پراکنش $[S]$ را تعریف می‌کنیم:

$$[S] = \begin{bmatrix} [T^{++}] & [R^{+-}] \\ [R^{-+}] & [T^{--}] \end{bmatrix} \quad (38)$$

و با توجه به تعریف آن خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \{u_2^+\} \\ \{u_1^-\} \end{bmatrix} = [S] \begin{bmatrix} \{u_1^+\} \\ \{u_2^-\} \end{bmatrix} \quad (39)$$

زیر ماتریس‌های عبور و بازتاب در (۳۸) را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$[T^{++}] = [t_{i,j}^{++}]_{N \times N} \quad (40-1)$$

$$[T^{--}] = [t_{i,j}^{--}]_{N \times N} \quad (40-2)$$

$$[R^{+-}] = [r_{i,j}^{+-}]_{N \times N} \quad (40-3)$$

$$[R^{-+}] = [r_{i,j}^{-+}]_{N \times N} \quad (40-4)$$

اگر موج بر تک‌مُد باشد می‌توان با صرف‌نظر از مدهای غیر انتشاری ماتریس پراکندگی را به شکل $[S]_{2 \times 2}$ ساده نمود که موجب افزایش چشم‌گیری در سرعت و سادگی محاسبات می‌گردد.

در نهایت اگر چند گره در مسیر باشد و یا ادوات مختلفی مثل کاواک، موجبر، تزویج‌گر، و غیره در مسیر وجود داشته باشد، در هر مسیر یک ماتریس پراکنش لازم داریم، و برای بدست آوردن ماتریس پراکنش کل ما بین دو یا چند دهانه مورد نظر باید این ماتریس‌ها را ادغام نمود.

مودهای بلوخ در بلور فوتونی

برای بررسی ویژگی‌های مودهای بلوخ یا مدهای ویژه در بلورهای فوتونی از معادلات ماکسول در یک محیط بدون بار و جریان آزاد شروع می‌کنیم:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (41-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (41-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (41-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (41-4)$$

برای بردارهای جابجایی الکتریکی و مغناطیسی داریم:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (42-1)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E} \quad (42-2)$$

اگر $\varepsilon_r(\mathbf{r})$ تابعی سه تناوبی مانند زیر باشد:

$$\varepsilon_r(\mathbf{r}) = \mathbb{T}_{l_1, l_2, l_3} \varepsilon_r(\mathbf{r}) = \varepsilon_r(\mathbf{r} + l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3), \quad \forall l_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3 \quad (43)$$

با تعریف $\eta(\mathbf{r}) = 1/\varepsilon_r(\mathbf{r})$ می‌توان نوشت:

$$\eta(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} \eta_{\mathbf{G}} \exp(-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (44)$$

که بردار شبکه وارون \mathbf{G} به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{G} = l_1 \mathbf{b}_1 + l_2 \mathbf{b}_2 + l_3 \mathbf{b}_3 = \mathbf{G}_{l_1, l_2, l_3}, \quad \forall l_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (45)$$

مشابه با حالت دو بعدی، بردارهای پایه شبکه وارون در سه بعد به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{b}_1 \triangleq 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} \quad (46-1)$$

$$\mathbf{b}_2 \triangleq 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} \quad (46-2)$$

$$\mathbf{b}_3 \triangleq 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3} \quad (46-3)$$

که در آن $\mathbf{a}_i, i = 1, 2, 3$ بردارهای پایه شبکه مستقیم هستند. با جایگزینی‌های زیر

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega \quad (47-1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \quad (47-2)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \quad (47-3)$$

به روابط عملگری زیر خواهیم رسید:

$$\mathbb{L}_E \mathbf{E} = \eta(\mathbf{r}) \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (48-1)$$

$$\mathbb{L}_H \mathbf{H} = \nabla \times [\eta(\mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = k_0^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (48-2)$$

با توجه به امواج بلوخ میدان الکتریکی برای یک بلور فوتونی داریم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \boldsymbol{\varphi}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{G}) \exp(-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (49)$$

که در آن $\boldsymbol{\varphi}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ یک تابع سه تناوبی مانند (۴۳) است. به طریق مشابه میدان مغناطیسی به صورت

زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \boldsymbol{\psi}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{H}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{G}) \exp(-j\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) \quad (50)$$

حال میدان‌ها را در (۴۸) جای‌گذاری می‌کنیم و پس از کمی محاسبات جبری بدست می‌آید (تمرین

$$-\sum_{\mathbf{G}'} \eta(\mathbf{G}-\mathbf{G}')(\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}') \times [(\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}') \times \mathbf{E}_{n\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{G}')] = \frac{\omega_n(\boldsymbol{\kappa})^2}{c^2} \mathbf{E}_{n\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{G}) \quad (51-1)$$

$$-\sum_{\mathbf{G}'} \eta(\mathbf{G}-\mathbf{G}')(\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}') \times [(\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}') \times \mathbf{H}_{n\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{G}')] = \frac{\omega_n(\boldsymbol{\kappa})^2}{c^2} \mathbf{H}_{n\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{G}) \quad (51-2)$$

اگر از معادله‌ی $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ استفاده کنیم می‌توان یکی از سه مولفه‌ی \mathbf{H} را حذف کرد و داریم:

$$\mathbf{H}_{n\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{G}) \cdot (\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}) = 0 \quad (52)$$

بخاطر تعامد $\mathbf{H}_{n\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{G})$ و $\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}$ همواره می‌توان $\mathbf{H}_{n\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{G})$ را به دو مولفه تجزیه کرد:

$$\mathbf{H}_{n\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{G}) = h_{n\boldsymbol{\kappa}}^{G_1} \hat{e}_{G_1} + h_{n\boldsymbol{\kappa}}^{G_2} \hat{e}_{G_2} \quad (53)$$

که شرایط زیر بر بردارهای یکه‌ی بسط حاکم است (چرا؟):

$$\hat{e}_{G_1} \cdot \hat{e}_{G_2} = 0 \quad (54-1)$$

$$\hat{e}_{G_3} = \pm \frac{\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}}{|\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}|} \quad (54-2)$$

در (54-2) علامت مثبت یا منفی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که کنج $(\hat{e}_{G_1}, \hat{e}_{G_2}, \hat{e}_{G_3})$ راست‌گرد

باشد. بنابراین به طور فشرده داریم:

$$\hat{e}_{G_i} \cdot \hat{e}_{G_j} = \delta_{ij} \quad (55)$$

حال با استفاده از بسط

$$(\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}) \times [(\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}') \times \mathbf{H}_{n\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{G}')] = (\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}) \times \left[(\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}') \hat{e}_{G_3} \times (h_{n\boldsymbol{\kappa}}^{G_1} \hat{e}_{G_1} + h_{n\boldsymbol{\kappa}}^{G_2} \hat{e}_{G_2}) \right] \quad (56)$$

معادله‌ی (51-2) به شکل معادله‌ی مشخصه زیر برای بسامدهای ویژه‌ی بلور فوتونی بدل می‌شود:

$$\sum_{\mathbf{G}'} \sum_{j=1}^2 M_{\boldsymbol{\kappa}}^{ij}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') h_{n\boldsymbol{\kappa}}^{G_j'} = \frac{\omega_n^2(\boldsymbol{\kappa})}{c^2} h_{n\boldsymbol{\kappa}}^{G_i}, \quad i=1,2 \quad (57)$$

که در آن:

$$M_{\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \triangleq |\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}| |\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{G}'| \eta(\mathbf{G}-\mathbf{G}') \times \begin{bmatrix} \hat{e}_{G_2} \cdot \hat{e}_{G_2'} & -\hat{e}_{G_2} \cdot \hat{e}_{G_1'} \\ -\hat{e}_{G_1} \cdot \hat{e}_{G_2'} & \hat{e}_{G_1} \cdot \hat{e}_{G_1'} \end{bmatrix} \quad (58-1)$$

$$M_{\mathbf{k}}^{ij}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = [M_{\mathbf{k}}^{ji}(\mathbf{G}', \mathbf{G})]^* \quad (58-2)$$

بنابراین $M_{\mathbf{k}}$ هرمیتی بوده و دارای ویژه‌مقادیر حقیقی خواهد بود (تمرین ۴). به علاوه ویژه‌بردارهای $\{h_{n\mathbf{k}}\}$ متعامد هستند، یعنی:

$$\sum_{\mathbf{G}'} \sum_{i=1}^2 h_{n\mathbf{k}}^{G_i} h_{n'\mathbf{k}'}^{G_i} = \delta_{nn'} \quad (59)$$

اکنون رابطه‌ای را که در فضای تبدیل فوریه نوشته شده بود را به فضای حقیقی باز می‌گردانیم. بدست خواهد آمد:

$$\iiint_{R^3} \mathbf{H}_{n\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{n'\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) d^3r = \iiint_{R^3} \sum_{\mathbf{G}} \sum_{\mathbf{G}'} \mathbf{H}_{n\mathbf{k}}^*(\mathbf{G}) \cdot \mathbf{H}_{n'\mathbf{k}'}(\mathbf{G}') e^{-j(\mathbf{G}'-\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} d^3r \quad (60)$$

اما بر مبنای (۵۹) از طرفی داریم:

$$V \sum_{\mathbf{G}} \mathbf{H}_{n\mathbf{k}}^*(\mathbf{G}) \cdot \mathbf{H}_{n'\mathbf{k}'}(\mathbf{G}) = V \delta_{nn'} \quad (61)$$

حال اگر ناحیه انتگرال‌گیری مضرب صحیحی از حجم سلول واحد باشد $N_{cell} \times V_{wsc} = V$ ، و بنابراین توابع H نسبت به یکدیگر متعامد هستند، چرا که اگر $n \neq n'$ باشد، ضرب داخلی آنها صفر می‌شود.

در صورتیکه $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$ باشد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \iiint_{R^3} d^3r \mathbf{H}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{n'\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) &= \iiint \Psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \cdot \Psi_{n'\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) e^{-j(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^3r \\ &= \iiint u_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{nm'}(\mathbf{r}) e^{-j\mathbf{h}\cdot\mathbf{r}} d^3r \\ &= \iiint \sum_{\mathbf{G}} u_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{nm'}(\mathbf{G}) e^{-j(\mathbf{G}+\mathbf{h})\cdot\mathbf{r}} d^3r \\ &= \sum u_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{nm'}(\mathbf{G}) \iiint e^{-j(\mathbf{G}+\mathbf{h})\cdot\mathbf{r}} d^3r \end{aligned} \quad (62)$$

اگر \mathbf{k} و \mathbf{k}' با هم برابر باشند آنگاه شرط تعامد از حالت قبلی نتیجه می‌شود. ولی اگر \mathbf{k} و \mathbf{k}' در ناحیه اول بریلوین باشند تفاضل آنها یک بردار شبکه وارون نخواهد بود و در نتیجه هر چه حجم بزرگتر باشد، این انتگرال بیشتر به صفر میل می‌کند. در نتیجه تعامد زیر در حالت کلی بدست می‌آید:

$$\iiint \mathbf{H}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_{n'\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) d^3r = \delta_{nn'} \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \quad (63)$$

که در آن دلتای مرتبه سوم دیراک از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{\kappa} - \mathbf{\kappa}') = \delta(\kappa_x - \kappa'_x) \delta(\kappa_y - \kappa'_y) \delta(\kappa_z - \kappa'_z) \quad (64)$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد که تعامد موده‌های بلوخ میدان الکتریکی $\mathbf{E}_{n\mathbf{\kappa}}$ نسبت به تابع ε_r برقرار است:

$$\iiint_{R^3} \varepsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{n\mathbf{\kappa}}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{n'\mathbf{\kappa}'}(\mathbf{r}) d^3r = \delta_{nn'} \delta^{(3)}(\mathbf{\kappa} - \mathbf{\kappa}') \quad (65)$$

مراجع

- [1] K. Bush et. al., "On the solid-state theoretical description of photonic crystals," in *Photonic Crystals: Advances in Design, Fabrication, and Characterization*, Wiley-VCH, Berlin, 2004, Chap. 1.
- [2] K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer, Berlin, 2001.

تمرین

۱- معادله‌ی (۷) را با استفاده از (۱۱) ساده نمایید.

۲- ثابت کنید $M_{\mathbf{R}-m\Lambda\hat{x}, \mathbf{R}'-m\Lambda\hat{x}}^{nn'} = M_{\mathbf{R}\mathbf{R}'}^{nn'}$.

۳- درستی روابط (۵۱) را نشان دهید.

۴- در (۵۷) ثابت کنید که ماتریس $M_{\mathbf{\kappa}}(\mathbf{G}, \mathbf{G}')$ به شکل (۵۸) نوشته می‌شود و یک ماتریس

هرمیتی است.

۵- صحت شرط تعامد (۶۵) را برای موده‌های بلوخ میدان الکتریکی نشان دهید.

بخش ۱۱

سرعت فاز و گروه و تابع گرین تاخیری

سرعت گروه (Group Velocity) در بلور فوتونی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v}_{gn} \triangleq \nabla_{\mathbf{k}} \omega_n(\mathbf{k}) = \mathbf{v}_{gn}(\mathbf{k}) \quad (۱)$$

سرعت انرژی (Energy Velocity)، سرعت انتشار انرژی الکترومغناطیسی است و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v}_{en} \triangleq \frac{\langle \mathbf{S}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \rangle}{\langle u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \rangle} \quad (۲)$$

که در آن $S_{n\mathbf{k}}$ میانگین زمانی بردار پویینتینگ است که به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \left\{ \text{Re} \left[\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{j\omega_n(\mathbf{k})t} \right] \times \text{Re} \left[\mathbf{H}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{j\omega_n(\mathbf{k})t} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{n\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (۳)$$

همچنین $u_{n\mathbf{k}}$ میانگین زمانی چگالی انرژی الکترومغناطیسی است که به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
 u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r})}{2} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left\{ \operatorname{Re} \left[\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{j\omega_n(\mathbf{k})t} \right] \right\}^2 dt + \\
 &\quad \frac{\mu_0}{2} \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left\{ \operatorname{Re} \left[\mathbf{H}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) e^{j\omega_n(\mathbf{k})t} \right] \right\}^2 dt \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}) |\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 \right\}
 \end{aligned} \tag{۴}$$

نیز متوسط یک میدان در سلول ویگنر سایتز به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle \triangleq \frac{1}{V_{WSC}} \iiint_{WSC} f(\mathbf{r}) d^3r \tag{۵}$$

اما این دو مقدار متوسط باید متناوب باشند (چرا؟) و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathbf{S}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}_{mnp}) \tag{۶-۱}$$

$$u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}_{mnp}) \tag{۶-۲}$$

در این حالت \mathbf{k} نباید موهومی باشد، زیرا در حالت موهومی بودن \mathbf{k} انرژی الکترومغناطیسی در محیط منتشر نمی‌شود و شرط تناوب دو مقدار متوسط (۳) و (۴) منتفی خواهد بود.

سرعت فاز (Phase Velocity) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v}_p \triangleq \frac{\omega_n(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} \mathbf{k} \tag{۷}$$

در صورتی که محیط همگن و غیر پاشنده باشد، این سه سرعت با هم برابر می‌شوند. اگر محیط همگن و پاشنده باشد، فقط سرعت گروه و انرژی با هم برابر می‌شوند، و آنگاه راستا و اندازه سرعت گروه نسبت به سرعت فاز میتواند کاملاً متفاوت باشد. در حالت کلی هیچ شرط خاصی در مورد ارتباط راستاها و اندازه‌ها نمی‌توان بیان نمود. ولی می‌توان نشان داد که چنانچه در یک محیط متناوب با $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R}_{mnp})$ که در آنها میدان‌ها به شکل امواج بلوخ هستند [۱]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\varphi}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \tag{۸-۱}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\psi}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \tag{۸-۲}$$

سرعت انرژی و گروه در یک باند با هم دقیقاً برابر هستند:

$$\mathbf{v}_{gn}(\mathbf{k}) = \mathbf{v}_{en}(\mathbf{k}) \quad (9)$$

قضیه‌ی هلمن-فاینمن (Hellmann-Feynman's Theorem)

قضیه‌ی هلمن-فاینمن بیان می‌دارد که برای یک ماتریس (یا عملگر) هرمیتی مانند $[A]$ با وابستگی

$$\text{به پارامتری مانند } u \text{ برای مشتق مقادیر ویژه داریم } \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \langle x | \frac{\partial A}{\partial u} | x \rangle$$

اثبات: یک مساله‌ی ویژه‌مقداری با ماتریس هرمیتی $[A]$ در نظر بگیرید:

$$[A]\{x\} = \lambda\{x\} \quad (10)$$

گاهی $[A]$ به پارامتری مثل u وابسته است که در نتیجه ویژه‌مقادیر و بردارها نیز چنین

تابعیتی پیدا می‌کنند:

$$[A(u)]\{x(u)\} = \lambda(u)\{x(u)\} \quad (11)$$

اگر $\{x(u)\}$ بهنجار شده باشد، داریم:

$$\lambda(u) = \langle x_\lambda(u) | A(u) | x_\lambda(u) \rangle \equiv \{x_\lambda(u)\}^T [A(u)] \{x_\lambda(u)\} \quad (12)$$

حال از دو طرف رابطه نسبت به u مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} \langle x_\lambda | \right) A | x_\lambda \rangle + \langle x_\lambda | \left(\frac{\partial}{\partial x} A \right) | x_\lambda \rangle + \langle x_\lambda | A \left(\frac{\partial}{\partial u} | x_\lambda \rangle \right) \\ &= \lambda \left(\frac{\partial}{\partial u} \langle x_\lambda | \right) | x_\lambda \rangle + \lambda \langle x_\lambda | \left(\frac{\partial}{\partial u} | x_\lambda \rangle \right) + \langle x_\lambda | \left(\frac{\partial}{\partial u} A \right) | x_\lambda \rangle \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial u} (\langle x_\lambda | x_\lambda \rangle) + \langle x_\lambda | \left(\frac{\partial}{\partial u} A \right) | x_\lambda \rangle \end{aligned} \quad (13)$$

بنابراین (چرا؟):

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \langle x | \frac{\partial A}{\partial u} | x \rangle \equiv \left[\{x(u)\}^* \right]^T \left[\frac{\partial A(u)}{\partial u} \right] \{x(u)\} \quad (14)$$

این پایان اثبات قضیه است. ■

محاسبه‌ی سرعت گروه

با استفاده از قضیه‌ی اخیر در مورد میدان الکتریکی عرضی در دو بعد، می‌توان سرعت گروه را محاسبه نمود. در معادله موج برای میدان الکتریکی عرضی داریم:

$$[\mu_{\mathbf{k}}]\{A_{n\mathbf{k}}\} = \frac{\omega_n^2(\mathbf{k})}{c^2}\{A_{n\mathbf{k}}\} \quad (15)$$

که آن را می‌توان بدین شکل نمایش داد:

$$\sum_{\mathbf{G}'} M_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') A_{n\mathbf{k}}(\mathbf{G}') = \frac{\omega_n^2}{c^2} A_{n\mathbf{k}}(\mathbf{G}) \quad (16)$$

که در آن:

$$M_{\mathbf{k}}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = |\mathbf{k} + \mathbf{G}|^2 \eta(\mathbf{G}) \times \begin{pmatrix} \hat{e}_{G_2} \cdot \hat{e}_{G'_2} & -\hat{e}_{G_2} \cdot \hat{e}_{G'_1} \\ -\hat{e}_{G_1} \cdot \hat{e}_{G'_2} & \hat{e}_{G_1} \cdot \hat{e}_{G'_1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

اگر $A_{n\mathbf{k}}$ ها متعامد باشند، برای سرعت گروه داریم:

$$\mathbf{v}_{gn} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega_n(\mathbf{k}) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left(\frac{\omega_n^2(\mathbf{k})}{c^2} \right) \right\} \times \frac{c^2}{2} \times \frac{1}{\omega_n(\mathbf{k})} \quad (18)$$

طبق قضیه‌ی بالا می‌توان سرعت گروه را محاسبه کرد:

$$\mathbf{v}_{gn} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega_n(\mathbf{k}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \left(\frac{\omega_n^2(\mathbf{k})}{c^2} \right) = \{A_{n\mathbf{k}}\}^T \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} [\mu_{\mathbf{k}}] \right) \{A_{n\mathbf{k}}\} \quad (19)$$

مجموعه‌ی کامل توابع ویژه

در این مرحله به دنبال تابع گرین تشعشع در بلور فوتونی می‌گردیم. بهتر است مجموعه‌ی توابع پایه به فرم توابع بلوخ باشند. می‌توان با توابع پسیل و هَنکِل نیز کار کرد، ولی چون این توابع ویژه توابع بلور فوتونی نیستند کار کردن با آنها مشکل است.

از مباحث قبل داشتیم:

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbb{L}_E \right\} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (20-1)$$

$$\mathbb{L}_E = \eta(\mathbf{r}) \nabla \times \nabla \times (\cdot) \quad (20-2)$$

حال تبدیل زیر را انجام می‌دهیم:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (21)$$

اگر میدان الکتریکی به فرم موج بلوخ باشد، چون ε متناوب است، بدیهی است که $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ نیز به شکل موج بلوخ خواهد بود.

در اینجا عملگر \mathbb{H} را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{H} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \nabla \times \left\{ \nabla \times \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} (\cdot) \right] \right\} \quad (22)$$

به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که معادله‌ی دیفرانسیل زیر برقرار خواهد بود:

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbb{H} \right\} \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (23)$$

حال در زیر نشان می‌دهیم که عملگر \mathbb{H} خودالحاق است.

قضیه: عملگر \mathbb{H} در رابطه‌ی (۲۲) خودالحاق است.

اثبات: با تعریف ضرب داخلی به فرم:

$$\langle \mathbf{Q}_1 | \mathbf{Q}_2 \rangle \triangleq \int \mathbf{Q}_1^*(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{Q}_2(\mathbf{r}, t) d^3 r \quad (24)$$

اگر نشان دهیم که رابطه‌ی زیر برقرار است اثبات مسئله کامل خواهد شد

$$\langle \langle \mathbf{Q}_1 | \mathbb{H} | \mathbf{Q}_2 \rangle \rangle = \langle \mathbf{Q}_1 | (\mathbb{H} | \mathbf{Q}_2) \rangle \quad (25)$$

توجه نمایید که طبق تعریف دوگان عملگر \mathbb{H}^\dagger داریم

$$\langle \mathbf{Q}_1 | (\mathbb{H} | \mathbf{Q}_2) \rangle \equiv \langle \langle \mathbf{Q}_1 | \mathbb{H}^\dagger | \mathbf{Q}_2 \rangle \rangle \quad (26)$$

بدیهی است که اگر (۲۵) برای هر \mathbf{Q}_1 و \mathbf{Q}_2 دلخواه برقرار باشد داریم $\mathbb{H} = \mathbb{H}^\dagger$ ، یعنی \mathbb{H} عملگری خودالحاق است. حال طبق تعریف:

$$\begin{aligned} \langle \langle \mathbf{Q}_1 | \mathbb{H} | \mathbf{Q}_2 \rangle \rangle &= \iiint d^3r \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \left\{ \nabla \times \left[\nabla \times \frac{\mathbf{Q}_1^*(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right] \right\} \cdot \mathbf{Q}_2(\mathbf{r}) \\ &= \iiint d^3r \nabla \times \left[\nabla \times \frac{\mathbf{Q}_1^*(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right] \cdot \frac{\mathbf{Q}_2(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \end{aligned} \quad (27)$$

با استفاده از اتحاد برداری:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (28)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle \langle \mathbf{Q}_1 | \mathbb{H} | \mathbf{Q}_2 \rangle \rangle &= \iiint d^3r \nabla \cdot \left[\left\{ \nabla \times \frac{\mathbf{Q}_1^*(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right\} \times \frac{\mathbf{Q}_2(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right] + \\ &\quad \iiint d^3r \left[\nabla \times \frac{\mathbf{Q}_1^*(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right] \cdot \left[\nabla \times \frac{\mathbf{Q}_2(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

با تبدیل انتگرال حجمی اول به انتگرال سطحی، اعمال مجدد (۲۸) به انتگرال حجمی دوم، و استفاده مجدد از تبدیل انتگرال حجمی به سطحی داریم:

$$\begin{aligned} \langle \langle \mathbf{Q}_1 | \mathbb{H} | \mathbf{Q}_2 \rangle \rangle &= \oint \left[\left(\nabla \times \frac{\mathbf{Q}_1^*(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right) \times \frac{\mathbf{Q}_2(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right] \cdot d\mathbf{S} + \\ &\quad \oint \frac{\mathbf{Q}_1^*(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \times \left\{ \nabla \times \frac{\mathbf{Q}_2(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right\} \cdot d\mathbf{S} + \iiint d^3r \frac{\mathbf{Q}_1^*(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \cdot \left\{ \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{Q}_2(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

اما انتگرال‌های سطحی هر دو برابر صفر خواهند بود (تمرین ۲) و بنابراین:

$$\langle \langle \mathbf{Q}_1 | \mathbb{H} | \mathbf{Q}_2 \rangle \rangle = \iiint d^3r \mathbf{Q}_1^*(\mathbf{r}) \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{Q}_2(\mathbf{r})}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right) \right\} = \langle \mathbf{Q}_1 | (\mathbb{H} | \mathbf{Q}_2) \rangle \quad (31)$$

پس $\mathbb{H} = \mathbb{H}^\dagger$ ، که اثبات قضیه را کامل می‌کند. ■

از قضیه‌ی فوق می‌توان نتیجه گرفت که \mathbb{H} دارای مقادیر ویژه‌ی حقیقی است و بردارهای ویژه‌ی آن متعامد خواهند بود. در نتیجه بردارهای ویژه یا توابع ویژه $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ متعامد هستند. توجه نمایید که به طریق مشابه عملگر \mathbb{L}_H نیز خودالحاق است، ولی \mathbb{L}_E لزوماً خودالحاق نیست (تمرین ۴).

حال می‌خواهیم بدانیم آیا تمام جواب‌های (۱-۲۰) معادلات ماکسول را ارضا می‌کند. معادله‌ی سوم ماکسول را در نظر بگیرید:

$$\nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (32)$$

بر اساس تعریف میدان برداری $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot \left[\varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \right] = \nabla \cdot [\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})} \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (33)$$

برای یک موج تخت ساده داریم:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})} \hat{q} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] &= [\nabla \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}] \cdot \hat{q} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})} \hat{q} \cdot \nabla e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \left[\frac{\nabla \varepsilon(\mathbf{r})}{2\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} - j\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})} \hat{k} \right] \cdot \hat{q} \neq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

پس معادله‌ی سوم لزوماً حتی در حالتی $\nabla \varepsilon = 0$ باشد لزوماً برقرار نیست مگر آنکه $\hat{q} \cdot \hat{k} = 0$ ، یعنی بردار موج بر بردار قطبش عمود باشد. به چنین موجی موج عمود (Transverse) می‌گوییم و داریم $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(T)}(\mathbf{r}, t)$. اما اگر $\hat{q} \parallel \hat{k}$ آنگاه (۳۲) ارضا نمی‌شود و $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ جواب فیزیکی مساله نیست. به چنین امواجی امواج موازی (Longitudinal) می‌گوییم و می‌نویسیم $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{(L)}(\mathbf{r}, t)$. با این که $\{\mathbf{Q}^{(L)}\}$ جواب فیزیکی نیستند، اما از نظر ریاضی وجود آنها برای تشکیل یک مجموعه‌ی پایه‌ی کامل ضروری است:

$$\{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{Q}^{(T)}\} \cup \{\mathbf{Q}^{(L)}\} \quad (35)$$

در مجموعه‌ی $\{\mathbf{Q}^{(T)}\}$ شرایط زیر حاکم است:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \omega \neq 0 \quad (36-1)$$

در حالی که در $\{\mathbf{Q}^{(L)}\}$ برعکس آن است و داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} \neq 0, \quad \omega = 0 \quad (36-2)$$

حال می‌توان به ساخت تابع گرین اقدام کرد. داریم:

$$\mathbb{H}\mathbf{Q}_{n\kappa}(\mathbf{r})^{(L)} = 0 \quad (37-1)$$

$$\mathbb{H}\mathbf{Q}_{n\kappa}(\mathbf{r})^{(T)} = \frac{\omega_n^2(\boldsymbol{\kappa})}{c^2} \mathbf{Q}_{n\kappa}(\mathbf{r})^{(T)} \quad (37-2)$$

$$\iiint \mathbf{Q}_{n\kappa}^*(\mathbf{r})^{(\alpha)} \cdot \mathbf{Q}_{n'\kappa'}(\mathbf{r})^{(\beta)} d^3r = \delta_{\alpha\beta} \delta_{nn'} \delta_{\kappa\kappa'}, \quad \alpha, \beta = L, T \quad (37-3)$$

در (۳۷-۳) α و β نشانگر مدهای طولی و عرضی هستند. اگر حجم انتگرال گیری V کل بلور فوتونی را بپوشاند، انتگرال حجمی به شکل زیر در می‌آید:

$$\iiint_V \mathbf{Q}_{n\kappa}^*(\mathbf{r})^{(\alpha)} \cdot \mathbf{Q}_{n'\kappa'}(\mathbf{r})^{(\beta)} d^3r = V \delta_{\alpha\beta} \delta_{nn'} \delta(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}') \quad (38)$$

حال برای ساخت تابع گرین از رابطه تمامیت زیر استفاده می‌کنیم (تمرین ۵):

$$\sum_{\alpha=L,T} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\kappa} \mathbf{Q}_{n\kappa}^*(\mathbf{r})^{(\alpha)} \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}(\mathbf{r}')^{(\alpha)} = V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bar{\mathbf{I}} \quad (39)$$

که $\bar{\mathbf{I}} = [\delta_{ij}]$ است. نیز رابطه زیر چگونگی عمل ضرب تانسوری \otimes را نشان می‌دهد:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = [a_i b_j]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

که در آن \mathbf{A} و \mathbf{B} دو بردار به شکل زیر هستند:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (41-1)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (41-2)$$

با استفاده از تبدیل جمع به انتگرال داریم:

$$\sum_{\kappa} \equiv \frac{1}{V_{\text{BZ}}} \iiint_{\text{BZ}} d^3 \kappa \quad (42)$$

به عنوان مثال برای مُد عرضی در دو بعد روابط تعامد زیر بدست می‌آید:

$$\iint d^2 r Q_{n'\kappa'}^*(\mathbf{r})^{(\alpha)} Q_{n\kappa}(\mathbf{r})^{(\alpha)} = V^{(2)} \delta_{nn'} \delta_{\kappa\kappa'} \quad (43-1)$$

$$\iint_{\text{BZ}} d^2 \kappa Q_{n'\kappa'}^*(\mathbf{r})^{(\alpha)} Q_{n\kappa}(\mathbf{r}')^{(\alpha)} = V^{(2)} \delta_{nn'} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (43-2)$$

تابع گرین

معادله‌ی عملگری زیر مفروض است:

$$\mathbb{L}f(\mathbf{r}) = 0 \quad (44)$$

عملگر پیچش $h = f * g$ بین دو تابع را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$f(\mathbf{r}) * g(\mathbf{r}) \triangleq \iiint_{R^3} f(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3 r' \quad (45)$$

بدیهی است که دلتای دیراک عضو خنثی برای این عملگر است (چرا؟):

$$\delta * f = f \quad (46)$$

حال یک تابع ورودی مانند $h(\mathbf{r})$ برای (44) در نظر بگیرید:

$$\mathbb{L}f(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}) \quad (47)$$

می‌خواهیم بدانیم مساله غیر همگن را چگونه حل کنیم. به همین علت به دنبال تابع گرین هستیم.

تابع گرین مسئله (44) تابعی مانند $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ است که در معادله‌ی زیر صدق میکند:

$$\mathbb{L}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (48)$$

حال طرفین را در $h(\mathbf{r}')$ ضرب می‌کنیم:

$$h(\mathbf{r}') \mathbb{L}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') h(\mathbf{r}') \quad (49)$$

چون عملگر \mathbb{L} فقط روی \mathbf{r} اثر می‌کند می‌توان $h(\mathbf{r}')$ را داخل عملگر ببریم. سپس با انتگرال‌گیری روی فضا بدست می‌آید:

$$\mathbb{L} \left[\iiint_{R^3} h(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' \right] = h(\mathbf{r}) \quad (50)$$

بنابراین یک جواب برای تابع $f(\mathbf{r})$ در رابطه (۴۷) بدست می‌آید:

$$f(\mathbf{r}) = \iiint_{R^3} h(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' \quad (51)$$

از آنجایی که برای مسایل خطی $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ پس داریم:

$$f = h * G \quad (52)$$

بدیهی است که تابع $f(\mathbf{r})$ منحصر به فرد نیست. در واقع هر تابعی به شکل $f = h * G + u$ که در آن $u(\mathbf{r})$ در (۴۴) به شکل $\mathbb{L}u = 0$ صدق کند پاسخی برای (۴۷) خواهد بود. همانطور که بعداً خواهیم دید قطب‌های تابع گرین همواره بر مودهای ویژه‌ی سیستم منطبق هستند.

تابع گرین تاخیری

در این قسمت تابع گرین میدان الکتریکی را محاسبه می‌کنیم. طبق تعریف داریم:

$$-\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbb{H} \right) \vec{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \vec{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (53)$$

چون در سیستم علی پاسخ بعد از اعمال ورودی آغاز می‌شود تابع را قبل از آن صفر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = 0, \quad t \leq t' \quad (54)$$

حال تابع گرین را می‌توان بر حسب مودهای ویژه $\{\mathbf{Q}\}$ و با استفاده از عملگر یکه نمایش داد. ابتدا زوج تبدیل فوریه زمانی را در نظر بگیرید:

$$\vec{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') e^{-j\omega t} dt \quad (55-1)$$

$$\vec{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (55-2)$$

در نتیجه بدست می‌آید:

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbb{H}\right) \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \bar{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (56)$$

و با استفاده از رابطه تمامیت (۳۹) بدست می‌آوریم (چرا؟):

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbb{H}\right) \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{1}{V} \sum_{n\alpha\kappa} \mathbf{Q}_{n\kappa}^*(\mathbf{r})^{(\alpha)} \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}(\mathbf{r}')^{(\alpha)} \quad (57)$$

حال باید برای یافتن $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ عملگر $\mathbb{H} - (\omega/c)^2$ را معکوس کنیم. خواهیم داشت:

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbb{H}\right)^{(-1)} \frac{1}{V} \sum_{n\alpha\kappa} \mathbf{Q}_{n\kappa}^*(\mathbf{r})^{(\alpha)} \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}(\mathbf{r}')^{(\alpha)} \quad (58)$$

و در نتیجه (تمرین ۹):

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \frac{c^2}{V} \sum_{n\alpha\kappa} \frac{\mathbf{Q}_{n\kappa}^*(\mathbf{r})^{(\alpha)} \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}(\mathbf{r}')^{(\alpha)}}{\left[\omega - \omega_n(\boldsymbol{\kappa})^{(\alpha)} - j\delta\right] \left[\omega + \omega_n(\boldsymbol{\kappa})^{(\alpha)} - j\delta\right]} \quad (59)$$

که در آن $\delta \rightarrow 0^+$ ثابتی برای حصول پاسخ علی است و دلیل افزودن آن روشن خواهد شد. حال با

تبدیل عکس فوریه داریم:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = & \frac{c^2}{2\pi V} \sum_{n\kappa} \frac{\mathbf{Q}_{n\kappa}^*(\mathbf{r})^{(T)} \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}(\mathbf{r}')^{(T)}}{2\omega_n(\boldsymbol{\kappa})^{(T)}} \oint \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_n(\boldsymbol{\kappa})^{(T)} - j\delta} - \frac{1}{\omega + \omega_n(\boldsymbol{\kappa})^{(T)} - j\delta} \right\} e^{j\omega t} d\omega \\ & + \frac{c^2}{2\pi V} \sum_{n\kappa} \mathbf{Q}_{n\kappa}^*(\mathbf{r})^{(L)} \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}(\mathbf{r}')^{(L)} \oint \frac{e^{j\omega t}}{(\omega - j\delta)^2} d\omega \end{aligned} \quad (60)$$

پس تابع گرین در نهایت به شکل زیر بدست خواهد آمد (تمرین ۱۰):

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \begin{cases} \frac{c^2}{V} \sum_{n\alpha\kappa} t \left\{ \text{sinc} \left[\omega_n(\boldsymbol{\kappa})^{(\alpha)} t \right] \mathbf{Q}_{n\kappa}^*(\mathbf{r})^{(\alpha)} \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}(\mathbf{r}')^{(\alpha)} \right\} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (61)$$

مراجع

- [1] K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer, Berlin, 2001.

تمرین

- ۱- نشان دهید (۹) وقتی $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r} + \mathbf{R}_{mnp})$ و $\mu(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r} + \mathbf{R}_{mnp})$ برقرار است.
- ۲- در معادله‌ی (۳۰) نشان دهید انتگرال‌های سطحی همواره برابر با صفر هستند.
- ۳- با استفاده از تعامد توابع $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ نشان دهید که توابع میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ نسبت به گذردهی الکتریکی $\varepsilon(\mathbf{r})$ متعامدند.
- ۴- به طریق مشابه قضیه‌ی بیان شده برای عملگر \mathbb{H} ، نشان دهید عملگر \mathbb{L}_H خودالحاق است، ولی \mathbb{L}_E لزوماً خودالحاق نیست.
- ۵- درستی رابطه‌ی (۳۹) را با استفاده از خودالحاق (یا هرمیتی) بودن عملگر \mathbb{H} نشان دهید.
- ۶- برای مدهای عرضی نشان دهید $\nabla \cdot \mathbf{D}^{(T)} = 0$.
- ۷- نشان دهید مجموعه‌ی کلیه‌ی توابع مانند $\{f(\mathbf{r})\}$ به همراه عمل پیش توابع و ضرب اسکالر یک گروه را می‌سازند (برای تعریف گروه به بخش بعد مراجعه نمایید).
- ۸- تابع گرین را برای قطبش مغناطیسی در دو بعد طبق مراحل روبرو بدست آورید: ابتدا تعامد مدهای بلوخ $\{H_z\}$ را با کمک تمرین ۴ بدست آورید. سپس رابطه‌ی تمامیت را برای آن بنویسید. حال از تبدیل فوریه برای محاسبه‌ی تابع گرین استفاده کنید.
- ۹- با اعمال عملگر \mathbb{H} به تابع ویژه $\mathbf{Q}_{nk}^{(\alpha)}(\mathbf{r})$ نشان دهید که رابطه‌ی (۵۹) برقرار است. بدین منظور از اتحاد

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbb{H}\right)^{(-1)} = \frac{c^2}{\omega^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{c^2}{\omega^2} \mathbb{H}\right)^m$$

استفاده نموده و پس از اعمال عملگر \mathbb{H} به فرم

$$\text{H}\mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\omega_n^2(\mathbf{k})}{c^2} \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$$

و ساده سازی جواب، ثابت δ در مخرج را اضافه نمایید.

۱۰- با ساده سازی انتگرال‌های (۶۰) رابطه (۶۱) را نتیجه بگیرید.

بخش ۱۲

نظریه‌ی گروه در دو بعد

تعریف گروه

مجموعه S و عمل ستاره $*$ را در نظر بگیرید. اگر تمام شرایط زیر بطور همزمان برقرار باشد، زوج مرتب $(S, *)$ را یک گروه می‌نامیم:

$$\forall A, B \in S, A * B \in S \quad (1-1) \text{ (بسته بودن)}$$

$$\forall A, B, C \in S, (A * B) * C = A * (B * C) = A * B * C \quad (1-2) \text{ (اشتراک پذیری)}$$

$$\exists ! 1 \in S, \forall A \in S, 1 * A = A * 1 = A \quad (1-3) \text{ (عضو خنثی)}$$

$$\forall A \in S, \exists ! A^{-1} \in S, A * A^{-1} = A^{-1} * A = 1 \quad (1-4) \text{ (عضو وارون)}$$

به عنوان مثال مجموعه‌ی ماتریس‌های مربع $S = \{[M]_{N \times N}\}$ را به همراه عمل ضرب ماتریسها \times در نظر بگیرید. دوگانه مرتب (S, \times) یک گروه تشکیل می‌دهد (چرا؟). به همین ترتیب مجموعه‌ی ماتریس‌های مربع $S = \{[M]_{N \times N}\}$ را به همراه عمل جمع ماتریسها $+$ ، یک گروه مانند $(S, +)$ تشکیل می‌دهد.

اگر یک گروه مانند $(S, *)$ شرط زیر را ارضا نماید بدان گروه آبدلی یا جابجایی گویند:

$$\forall A, B \in S, \quad A * B = B * A \quad (۱-۵) \text{ (جابجایی)}$$

به عنوان مثال اگر $S = \{[M]_{N \times N}\}$ مجموعه‌ی ماتریس‌های قطری باشد، (S, \times) یک گروه آبدی است.

عملگر تقارن

به یک تبدیل ریاضی یا هندسی که سیستم را ناوردا باقی بگذارد عملگر تقارن می‌گویند. از جمله تبدیل‌های هندسی می‌توان به انتقال، دوران، تقارن آینه‌ای، و تقارن مرکزی اشاره کرد. همواره در مقابل یک نوردایی نسبت به یک تقارن دیفرانسیلی، قانون بقایی وجود خواهد داشت. مثلاً در خلاء راستاهای مختلف همه هم‌ارزند، پس خلاء نسبت به دوران ناورداست. از آن جا قانون بسیار کلی بقای اندازه حرکت زاویه‌ای به وجود می‌آید. بطور مشابه در خلاء، تقارن انتقالی در تمام راستاها برقرار است، بدان معنی که خلاء نسبت به انتخاب مبداء بدون تغییر باقی می‌ماند. از آنجا می‌توان قانون بقای اندازه حرکت را استخراج نمود. تقارن انتقالی نسبت به مبداء زمان نیز موجب پیدایش قانون بقای انرژی است. اما مطالعه‌ی تقارن در بلورهای فوتونی بدلائل زیر حائز اهمیت است:

۱- مشخص و طبقه بندی کردن موده‌های ویژه بلور فوتونی

۲- تعیین کردن تعداد و مکان باندهای بسامد

۳- مطالعه‌ی قواعد انتخاب در فرایندهای اپتیک غیر خطی

۴- مطالعه‌ی اتلاف در پراش

۵- استخراج قواعدی برای طراحی تزویج‌گرهای بلور فوتونی

عملگرهای تقارن در بلورهای فوتونی

برای سادگی بحث را فعلاً به بلورهای فوتونی دوبعدی محدود می‌کنیم. در شکل زیر چند عمل تقارن در یک بلور فوتونی مربعی نمایش داده شده است.

مطابق شکل ۱ عملگرهای تقارن بدین شرح می‌باشند:

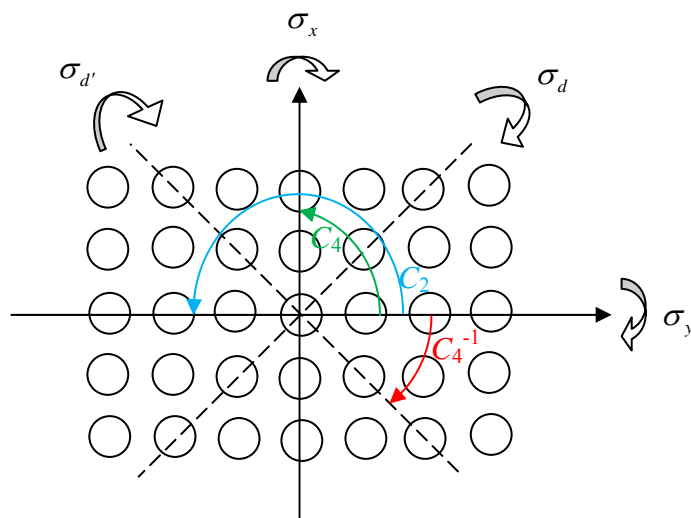
۱- σ_x : دوران حول محور x و σ_y دوران حول محور y

۲- σ_d : دوران حول قطر اصلی و $\sigma_{d'}$ دوران حول قطر فرعی

۳- C_4 : دوران ۹۰ درجه

۴- C_4^{-1} : دوران ۹۰- یا ۲۷۰ درجه

۵- C_2 : دوران ۱۸۰ درجه



شکل ۱- نمایش عملگرهای پایه تقارن آینه‌ای در بلور فوتونی مربعی.

به همین ترتیب C_n نمایانگر دوران $\frac{2\pi}{n}$ درجه خواهد بود، بنابراین $C_4^{-1} = C_4^3$.

حال مجموعه‌ی S_{4v} زیر را در نظر بگیرید:

$$S_{4v} = \{\hat{E}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_d, \hat{\sigma}_{d'}, \hat{C}_2, \hat{C}_4, \hat{C}_4^{-1}\} \quad (2)$$

که در آن E عمل تقارن همانی یا بدیهی است. می‌توان نشان داد (تمرین ۱) که S_{4v} به همراه ضرب

عملگرها یک گروه $(S_{4v}, \cdot) \triangleq C_{4v}$ را تشکیل می‌دهد. توجه داشته باشید که C_{4v} گروهی غیر آبلی

است.

چنانچه برای دو عملگر دلخواه مانند $\hat{a}, \hat{b} \in C_{4v}$ بتوان عملگری مانند $\{\hat{a}, \hat{b}\} \in C_{4v}$ پیدا کرد که رابطه $\hat{c}\hat{a}\hat{c}^{-1} = \hat{b}$ بین آنها برقرار باشد، آنگاه دو عملگر \hat{a} و \hat{b} را مزدوج (یا هم‌یوغ) یکدیگر گویند. برای مثال دو عملگر $\hat{\sigma}_x$ و $\hat{\sigma}_y$ مزدوج یکدیگرند چون:

$$\hat{\sigma}_y = \hat{C}_4 \hat{\sigma}_x \hat{C}_4^{-1} \quad (۳)$$

مزدوج بودن از آن جهت مهم است که دو عملگر تحت تبدیل مختصات یکسان عمل می‌کنند. به زبان ریاضی همانطور که خواهیم دید دو عملگر مزدوج اصطلاحاً دارای مشخصه‌های یکسان می‌باشند.

نمایش ماتریسی عملگرها

برای هر عملگری یک نمایش ماتریسی غیر منحصر به فرد مانند ذیل می‌توان اتخاذ نمود:

$$\hat{E} \doteq \vec{R}_E \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴-۱)$$

$$\hat{C}_2 \doteq \vec{R}_{C_2} \triangleq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (۴-۲)$$

$$\hat{C}_4 \doteq \vec{R}_{C_4} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴-۳)$$

$$\hat{C}_4^{-1} \doteq \vec{R}_4^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴-۴)$$

$$\hat{\sigma}_x \doteq \vec{R}_{\sigma_x} \triangleq \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۴-۵)$$

$$\hat{\sigma}_y \doteq \vec{R}_{\sigma_y} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (۴-۶)$$

$$\hat{\sigma}_{d''} \doteq \vec{R}_{\sigma_{d''}} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴-۷)$$

$$\hat{\sigma}_{d'} \doteq \vec{R}_{\sigma_{d'}} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۴-۸)$$

که در آن تمام ماتریس‌های \vec{R} متعامد هستند و دترمینان آنها ± 1 است:

$$\vec{R}\vec{R}^\dagger = \vec{R}^\dagger\vec{R} = I \quad (5-1)$$

$$|\vec{R}| = 1 \quad (5-2)$$

طبق تعریف نتیجه‌ی اعمال عملگر دوران \hat{R} بر یک میدان نرده‌ای $f(\mathbf{r})$ را با کمک نمایش ماتریسی \vec{R} آن مانند زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{R}f(\mathbf{r}) \equiv f(\vec{R}^{-1}\mathbf{r}) \quad (6)$$

توجه کنید که نحوه اعمال عملگر دوران \hat{R} بر یک میدان برداری متفاوت است و بعداً بدان اشاره می‌شود. اکنون فرض کنید دو عملگر داشته باشیم که هم‌زمان روی $f(\mathbf{r})$ اثر می‌کنند:

$$(\hat{R}_1\hat{R}_2)f(\mathbf{r}) = \hat{S}f(\mathbf{r}), \quad \hat{S} = \hat{R}_1\hat{R}_2 \quad (7-1)$$

خواهیم داشت:

$$\hat{R}_1[\hat{R}_2f(\mathbf{r})] = \hat{R}_2f(\vec{R}_1^{-1}\mathbf{r}) = f(\vec{R}_2^{-1}\vec{R}_1^{-1}\mathbf{r}) \quad (7-2)$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

$$f\left[\left(\vec{R}_1\vec{R}_2\right)^{-1}\mathbf{r}\right] = f\left(\vec{S}^{-1}\mathbf{r}\right) = \hat{S}f(\mathbf{r}) \quad (7-3)$$

لذا دیده می‌شود که علت آنکه در (۶) نحوه‌ی اعمال عملگر تقارن بصورت $\hat{R}f(\mathbf{r}) \equiv f(\vec{R}\mathbf{r})$ ظاهر نشده آنست که بتوان سازگاری را با نمایش ماتریسی از نظر ترتیب اثر کردن عملگرها حفظ نمود.

قضیه: فرض کنید برای یک عملگر تقارن در دو بعد داشته باشیم:

$$\hat{R}\varepsilon(\mathbf{r}) \triangleq \varepsilon(\vec{R}^{-1}\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) \quad (8)$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$[\hat{R}, \mathbb{L}_E] = 0 \quad (9-1)$$

$$[\hat{R}, \mathbb{L}_H] = 0 \quad (9-2)$$

اثبات: از متعامد بودن ماتریس‌های \vec{R} داریم

$$\begin{bmatrix} R_{11}^2 + R_{12}^2 & R_{11}R_{21} + R_{12}R_{22} \\ R_{21}R_{11} + R_{22}R_{12} & R_{21}^2 + R_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

از این تساوی به سه معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$R_{21}^2 + R_{22}^2 = 1 \quad (11-1)$$

$$R_{11}^2 + R_{12}^2 = 1 \quad (11-2)$$

$$R_{11}R_{21} + R_{12}R_{22} = 0 \quad (11-3)$$

حال با توجه به رابطه‌ی

$$\left[\hat{R} \frac{\partial}{\partial x} \hat{R}^{-1} \right] f(\mathbf{r}) = \hat{R} \frac{\partial}{\partial x} f(\vec{R}\mathbf{r}) \quad (12)$$

می‌خواهیم عبارتی برای سمت چپ (۱۲) بدست آوریم. از آنجایی که $f(\mathbf{r}) = f(x, y)$ ، پس:

$$\hat{R}^{-1} f(x, y) = f(\vec{R}\mathbf{r}) = f(R_{11}x + R_{12}y, R_{21}x + R_{22}y) \quad (13)$$

با توجه به تعریف زیر

$$\vec{R}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (14)$$

بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{R} \left\{ R_{11} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\vec{R}\mathbf{r}} + R_{21} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\vec{R}\mathbf{r}} \right\} &= R_{11} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\vec{R}^{-1}\vec{R}\mathbf{r}} + R_{21} \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\vec{R}^{-1}\vec{R}\mathbf{r}} \\ &= R_{11} \frac{\partial f}{\partial x} + R_{21} \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \quad (15)$$

و بطور مشابه خواهیم داشت:

$$\left[\hat{R} \frac{\partial}{\partial y} \hat{R}^{-1} \right] f(\mathbf{r}) = R_{12} \frac{\partial f}{\partial x} + R_{22} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (16)$$

حال با توجه به روابط بالا می‌توان (۹-۱) را اثبات کرد:

$$\hat{R} \mathbb{L}_E \hat{R}^{-1} = \hat{R} \frac{1}{\varepsilon} \nabla_{\parallel}^2 \hat{R}^{-1} = \left(\hat{R} \frac{1}{\varepsilon} \hat{R}^{-1} \right) \left(\hat{R} \nabla_{\parallel}^2 \hat{R}^{-1} \right) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \left[\hat{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{R}^{-1} + \hat{R} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{R}^{-1} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon} \left[\hat{R} \frac{\partial}{\partial x} \hat{R}^{-1} \hat{R} \frac{\partial}{\partial x} \hat{R}^{-1} + \hat{R} \frac{\partial}{\partial y} \hat{R}^{-1} \hat{R} \frac{\partial}{\partial y} \hat{R}^{-1} \right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\hat{R} \frac{\partial}{\partial x} \hat{R}^{-1} \right)^2 + \left(\hat{R} \frac{\partial}{\partial y} \hat{R}^{-1} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\hat{R} \mathbb{L}_E \hat{R}^{-1} \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(\overbrace{R_{11}^2 + R_{12}^2}^1 \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \left(\overbrace{R_{11}R_{21} + R_{12}R_{22}}^0 \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \left(\overbrace{R_{21}^2 + R_{22}^2}^1 \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \quad (17) \\
&= \mathbb{L}_E
\end{aligned}$$

پس عملگرها ویژه‌توابع یکسان دارند و در نتیجه هر تقارنی که در ε مشاهده شود در موج

بلوخ هم دیده می‌شود.

کاربرد گروه‌های تقارن در بلورهای فوتونی

فرض کنید \mathcal{M}_k زیرگروهی از C_{4v} باشد به گونه‌ای که تحت تبدیلات آن، بردار \mathbf{k} در شبکه معکوس ناوردا باقی بماند، آنگاه برای نقطه X داریم:

$$\mathcal{M}_X = \{ \hat{E}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{C}_2 \} \triangleq C_{2v} \quad (18-1)$$

گروه تقارن نقطه‌ای (18-1) را اصطلاحاً C_{2v} می‌نامیم. همچنین طبق شکل زیر گروه‌های C_{1h} و C_{2v} را برای نوردایی نقاط Δ ، Σ ، Z و X' خواهیم داشت:

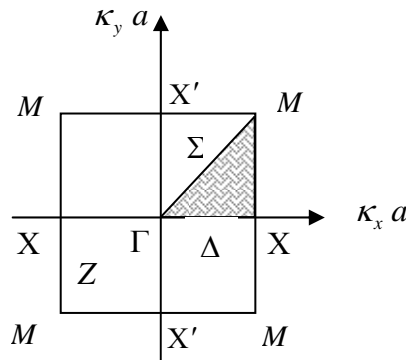
$$\mathcal{M}_\Delta = \{ \hat{E}, \hat{\sigma}_y \} \triangleq C_{1h} \quad (18-2)$$

$$\mathcal{M}_\Sigma = \{ \hat{E}, \hat{\sigma}_{d'} \} \triangleq C_{1h} \quad (18-3)$$

$$\mathcal{M}_Z = \{ \hat{E}, \hat{\sigma}_x \} \triangleq C_{1h} \quad (18-4)$$

$$\mathcal{M}_{X'} = \{ \hat{E}, \hat{\sigma}_{x'}, \hat{\sigma}_{y'}, \hat{C}_2 \} \triangleq C_{2v} \quad (18-5)$$

در یک بلور فوتونی با توجه به اینکه مود ویژه متناظر با بسامد ویژه $\omega(\mathbf{k})$ چه مقداری دارد، هندسه‌ی تقارن‌ها را می‌توان به ۵ گروه تقسیم‌بندی کرد. اگر $f_{d\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ نمایش میدان با تقارن‌های d ، $(d = A_1, B_1, A_2, B_2, C)$ باشد در نتیجه برای هر عملگری مانند $\hat{R} \in \mathcal{M}_{\mathbf{k}}$ خواهیم داشت (چرا؟):



شکل ۲- نمایش ناحیه‌ی بریلوین اول و نقاط با تقارن بالا برای بلور فوتونی مربعی.

$$\hat{R} f_{d\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \chi_{d\hat{R}} f_{d\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \tag{19}$$

در حالتی که $d = C$ است مود انتشاری ما تبه‌گن بوده و داریم:

$$\hat{R} f_{c\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r}) = e_{11} f_{c\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r}) + e_{12} f_{c\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r}) \tag{20-1}$$

$$\hat{R} f_{c\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r}) = e_{21} f_{c\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r}) + e_{22} f_{c\mathbf{k}}^{(2)}(\mathbf{r}) \tag{20-2}$$

و طبق تعریف داریم:

$$\chi_{c\hat{R}} \triangleq e_{11} + e_{22} \tag{20-3}$$

اصطلاحاً به $\chi_{d\hat{R}}$ شاخص مود d با توجه به عملگر \hat{R} می‌گویند. برای مثال شاخص دوران‌های صفر و ۳۶۰ درجه $\chi_{d\hat{R}} = 1$ است و شاخص دوران‌های ۹۰ و ۱۸۰ درجه بسته به آن که تقارن مود d مربوطه چگونه است $\chi_{d\hat{R}} = \pm 1$ می‌باشد.

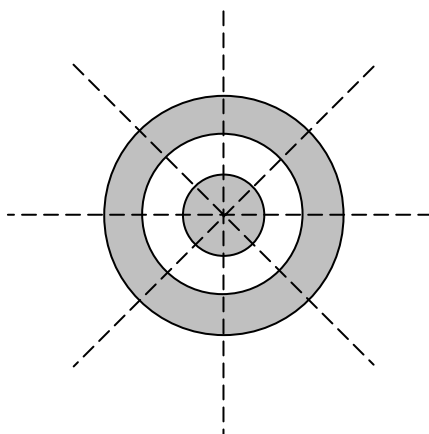
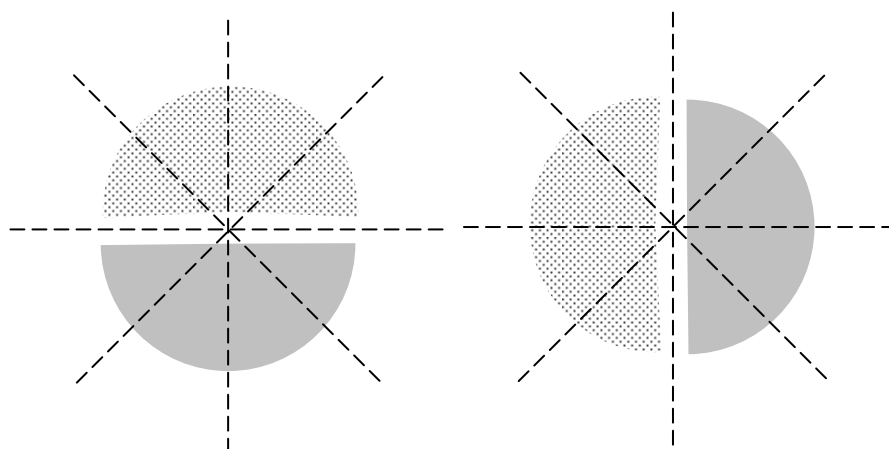
جدول شاخص‌های $C_{2v} = \{\hat{E}, \hat{\sigma}_{x'}, \hat{\sigma}_{y'}, \hat{C}_2\}$ به صورت زیر است:

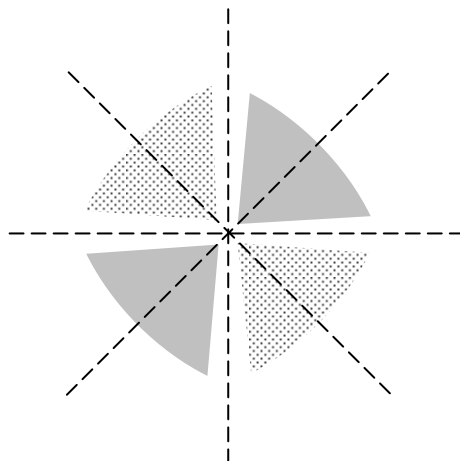
	\hat{E}	\hat{C}_2	$\hat{\sigma}_y$	$\hat{\sigma}_d$
A_1	۱	۱	۱	۱
A_2	۱	۱	-۱	-۱
B_1	۱	-۱	۱	-۱
B_2	۱	-۱	-۱	۱

جدول ۱- شاخص‌های گروه تقارن نقطه‌ای C_{2v} .

در این صفحه شکل ۳ نمایش مود A_1 را به فرم تک‌قطبی، شکل ۴ نمایش گروه‌های B_1 (راست) و B_2 (چپ) را که دو قطبی و متعامد هستند، و در شکل ۵ گروه A_2 که چهار قطبی است را نشان

می‌دهد.

شکل ۳- نمایش مود A_1 در گروه C_{2v} .شکل ۴- نمایش مودهای B_1 (راست) و B_2 (چپ) در گروه C_{2v} .



شکل ۵- نمایش مود A_2 به فرم چهارقطبی در گروه C_{2v} .

شاخص‌های گروه C_{1h} در جدول ۲ آمده است. همانند شکل ۳ و ۴ در گروه C_{1h} نمایش گروه A یک تک قطبی و نمایش گروه B دوقطبی خواهد بود (چرا؟). شاخص‌های C_{4v} هم در جدول ۳ فهرست شده‌اند:

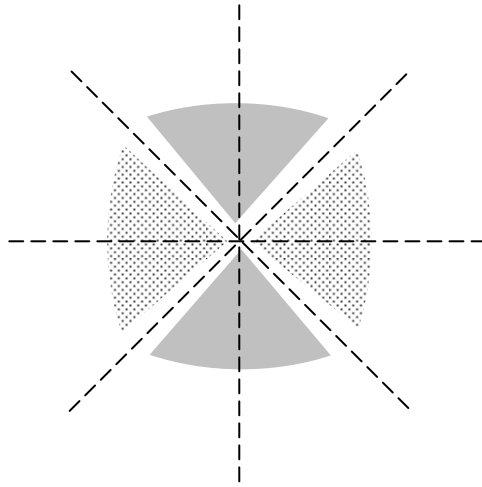
	\hat{E}	$\hat{\sigma}$
A	۱	۱
B	۱	-۱

جدول ۲- شاخص‌های گروه تقارن نقطه‌ای C_{1h} .

	\hat{E}	$2\hat{C}_4$	\hat{C}_2	$2\hat{\sigma}_y$	$2\hat{\sigma}_d$
A_1	۱	۱	۱	۱	۱
A_2	۱	۱	۱	-۱	-۱
B_1	۱	-۱	۱	۱	-۱
B_2	۱	-۱	۱	-۱	۱
C	۲	۰	-۲	۰	۰

جدول ۳- شاخص‌های گروه تقارن نقطه‌ای C_{4v} .

در گروه تقارن نقطه‌ای C_{4v} نمایش گروه A_1 تک قطبی و نمایش گروه B_1 و B_2 چهار قطبی است (چرا؟). شکل زیر نمایش گروه B_1 را نشان می‌دهد:



شکل ۶- نمایش الگوی تقارن مود B_1 در گروه C_{4v} .

اگر بخواهیم مودی را روی ساختار نواری تحریک کنیم، از نظر تقارن باید هم‌خوانی داشته باشند، مثلاً نقاط منطبق بر نقاط Δ ، فقط با مد A یا B تحریک می‌شوند.

تمرین

۱- نشان دهید که در (۲)، S_{4v} به همراه ضرب عملگرها یک گروه $(S_{4v}, \cdot) \cong C_{4v}$ غیر آبدلی تشکیل می‌دهد.

۲- نشان دهید در یک بلور فوتونی داریم به طور مشابه رابطه $\mathbb{L}_H \hat{R}^{-1} = \mathbb{L}_H \hat{R}$ برقرار است.

۳- آیا می‌توانید از روی جدول شاخص‌ها الگوی تقارن هندسی مودها را تخمین بزنید؟ با توجه به جدول ۳ راجع به الگوی هندسی مودهای A_1 و A_2 گروه تقارن C_{4v} قضاوت نمایید.

بخش ۱۳

گروه‌بندی بلورهای فوتونی و تابش دوقطبی در آنها

در این بخش به کاربرد نظریه گروه در بلورهای فوتونی می‌پردازیم، و سپس مدل ریاضی تابش دوقطبی در بلور فوتونی را ارائه خواهیم داد. قبل از آنکه چگونگی کاربرد نظریه گروه‌ها را ببینیم لازم است که مفاهیم و تعاریف تکمیلی را پیرامون نظریه گروه‌ها معرفی نماییم [۱۲].

مرتبه و رتبه

تعریف: ۱- مرتبه‌ی یک گروه مانند \mathcal{G} عبارتست از تعداد اعضاء آن گروه $g = |\mathcal{G}|$.

۲- رتبه‌ی یک عضو مانند $x \in \mathcal{G}$ برابر با عددی طبیعی مانند m است به گونه‌ای که $x^m = 1$ ، که در آن 1 عضو خنثی گروه \mathcal{G} می‌باشد. اگر چنین عددی وجود نداشته باشد آنگاه x دارای رتبه بی‌نهایت خواهد بود.

سازگاری و کاهش

تعریف: مجموعه‌ی تمامی اعضاء یک گروه را که دودو مزدوج هستند خانواده می‌نامیم.

قضیه: ۱- عملگر بدیهی \hat{E} همواره یک خانواده‌ی تک عضوی را با خود می‌سازد.

۲- هر عضو گروهی مانند \mathcal{G} تنها می‌تواند عضو یک و فقط یک خانواده باشد.

۳- اگر \mathcal{G} گروه جابجایی باشد آنگاه هر عضو آن به تنهایی با خود یا خانواده خواهد ساخت.

مثال: در گروه تقارن نقطه ای C_{4v} می‌توان خانواده‌ها را به شکل زیر نوشت:

$$C_{4v} = \left\{ (\hat{E}), (\hat{C}_4, \hat{C}_4^{-1}), (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y), (\hat{\sigma}'_d, \hat{\sigma}''_d), (\hat{C}_2) \right\} \quad (1)$$

جورریختی و هم‌ریختی

دو گروه مانند $\mathcal{G} = (\{a, b, c, \dots\}, *)$ و $\mathcal{G}' = (\{a', b', c', \dots\}, *)$ را جورریخت می‌نامیم اگر

۱- در مقابل هر عضو $x \in \mathcal{G}$ تنها یک عضو مانند $x' \in \mathcal{G}'$ وجود داشته باشد، و

$$\text{می‌نویسیم } x \rightarrow x'$$

۲- اگر $x \rightarrow x'$ و $y \rightarrow y'$ آنگاه $x * y \rightarrow x' * y'$

یک نگاشت جورریخت را هم‌ریخت می‌نامیم اگر و فقط اگر نگاشت یک به یک باشد.

مثال: - نگاشت عملگرهای دوران به ماتریسهای 3×3 یک نگاشت هم‌ریخت است (چرا؟).

- نگاشت عملگرها به شاخص آنها یک نگاشت جورریخت است (چرا؟).

نمایش ماتریسی گروه

گروه ماتریس‌های مربع $l \times l$ به همراه ضرب ماتریس‌ها یک نمایش l -بعدی یک گروه مانند \mathcal{G} است

اگر با \mathcal{G} جورریخت باشد. در اینصورت می‌نویسیم: $\mathcal{M} = \Gamma(\mathcal{G})$, $\hat{A} \in \mathcal{G} \rightarrow \vec{A} \equiv \Gamma(\hat{A}) \in \mathcal{M}$,

بنابراین

$$\forall \hat{A}, \hat{B} \in \mathcal{G}, \quad \vec{A}\vec{B} \equiv \Gamma(\hat{A}\hat{B}) \quad (2-1)$$

$$\vec{E} \equiv \Gamma(\hat{E}) \quad (2-2)$$

$$\vec{A}^{-1} = [\Gamma(\hat{A})]^{-1} = \Gamma(\hat{A}^{-1}) \quad (2-3)$$

در نتیجه هر تبدیل تشابه مانند $\vec{S}\vec{A}\vec{S}^{-1}$ وقتی $\vec{A} = \Gamma(\hat{A})$ و \vec{S} غیرتکین باشند $\Gamma(\hat{A})$ را به یک نمایش هم‌ارز و جورریخت دیگر مانند $\Gamma'(\hat{A})$ تصویر می‌نماید.

جمع مستقیم

حال اگر Γ^1 و Γ^2 دو نمایش ماتریسی \mathcal{G} با ابعاد l_1 و l_2 باشد آنگاه

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma^1_{l_1 \times l_1} & 0_{l_1 \times l_2} \\ 0_{l_2 \times l_1} & \Gamma^2_{l_2 \times l_2} \end{bmatrix}_{(l_1+l_2) \times (l_1+l_2)} \triangleq \Gamma^1 \oplus \Gamma^2 \quad (4)$$

را یک جمع مستقیم Γ^1 و Γ^2 می‌نامیم. به علاوه هرگاه یک نمایش ماتریسی مانند Γ را بتوان بصورت جمع مستقیم دو یا چند نمایش نوشت می‌گوییم Γ نمایشی کاهش‌پذیر است، و در غیر اینصورت Γ را کاهش‌ناپذیر می‌نامیم.

مثال: نمایش 3×3 گروه تقارن نقطه‌ای C_{4v} به یک نمایش دوبعدی و یک نمایش یک‌بعدی

کاهش‌پذیر است. برای اثبات این منظور به ماتریس‌های مربوط نگاه می‌کنیم:

$$\vec{E} = \Gamma(\hat{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

$$\vec{C}_2 = \Gamma(\hat{C}_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

$$\vec{C}_4 = \Gamma(\hat{C}_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

$$\vec{C}_4^{-1} = \Gamma(\hat{C}_4^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

$$\vec{\sigma}_x = T(\hat{\sigma}_x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

$$\vec{\sigma}_y = \Gamma(\hat{\sigma}_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-6)$$

$$\vec{\sigma}'_d = \Gamma(\hat{\sigma}'_d) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

$$\vec{\sigma}''_d = \Gamma(\hat{\sigma}''_d) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

شاخص

شاخص یک عملگر مانند \hat{A} طبق تعریف برابر است با:

$$\chi(\hat{A}) \triangleq \text{tr}\{\Gamma(\hat{A})\} = \text{tr}\{\vec{A}\} \quad (6)$$

شاخص دارای چندین ویژگی بسیار مهم است که آنها را در نظریه‌ی گروه در جایگاه خاصی قرار می‌دهد:

- ۱- شاخص یک عملگر تحت تبدیل تشابه تغییر نمی‌کند.
- ۲- تعداد نمایش‌های کاهش ناپذیر یک گروه \mathcal{G} همواره برابر تعداد خانواده‌های \mathcal{G} است.
- ۳- شاخص‌های اعضای یک خانواده همواره برابرند.
- ۴- مجموع مربعات ابعاد تمام نمایش‌های کاهش ناپذیر همواره برابر مرتبه گروه است.
- ۵- دو نمایش هم ارزند اگر سیستم شاخص‌های آنها یکسان باشد.
- ۶- یک نمایش کاهش ناپذیر است اگر:

$$\sum_{A \in \mathcal{G}} |\chi(\hat{A})|^2 = \sum_{A \in \mathcal{M}} |\text{tr}\{\vec{A}\}|^2 = |\mathcal{G}|, \quad \mathcal{M} = \Gamma(\mathcal{G}) \quad (7)$$

۷- تعداد نمایش‌های کاهش ناپذیر Γ^i (یک تعداد نمایش‌های هم‌ارزهای آنها) در یک کاهش نمایش کاهش پذیر Γ برابر است با:

$$N = \frac{1}{g} \sum_{\hat{A} \in \mathcal{G}} \chi(\hat{A}) \chi^i(\hat{A})^* \quad (8)$$

که در آن $\chi(\hat{A})$ و $\chi^i(\hat{A})$ به ترتیب شاخص‌های \hat{A} در نمایش‌های کاهش پذیر Γ و کاهش ناپذیر Γ^i می‌باشند.

۸- قضیه اول تعامد شاخص‌ها:

$$\sum_k \chi^i(C_k)^* \chi^j(C_k) N_k = g \delta_{i,j} \quad (9)$$

که در آن جمع روی تمام خانواده‌های گروه بسته می‌شود. همچنین N_k برابر تعداد اعضای خانواده k ام است.

۹- قضیه دوم تعامد شاخص‌ها:

$$\sum_i \chi^i(C_k) \chi^i(C_l)^* N_k = g \delta_{kl} \quad (10)$$

که در آن جمع روی تمام نمایش‌های کاهش ناپذیر و غیر هم‌ارز بسته می‌شود.

توابع پایه‌ی یک نمایش کاهش ناپذیر

فرض کنید که $\vec{A} = \Gamma(\hat{A})$, ($\vec{A} \in \mathcal{M}$, $\hat{A} \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M}$) یک زیرگروه l -بعدی \mathcal{M} و همچنین

$$\{\phi\} = \{\phi_m(\mathbf{r}), m = 1 \dots l\}$$

$$\hat{A} \phi_n(\mathbf{r}) = \sum a_{mn} \phi_m(\mathbf{r}), \vec{A} = [a_{mn}] = \Gamma(\hat{A}) \quad (11)$$

آنگاه مجموعه‌ی $\{\phi\}$ را شریک می‌نامیم و می‌گوییم که $\phi_m(\mathbf{r})$ مانند ردیف m ام نمایش تبدیل می‌شود. بنابراین برای هر تابع اختیاری مانند $\psi(\mathbf{r})$ خواهیم داشت:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_p \sum_{m=1}^{L_p} \phi_m^p(\mathbf{r}) \quad (12)$$

که در آن زیرنویس p روی نمایش‌های کاهش ناپذیر جمع بسته می‌شود، L_p بُعد زیرگروه مربوطه و توابع پایه $\{\phi_m^p(\mathbf{r})\}$ نمایش کاهش ناپذیر p ام Γ^p هستند.

عملگرهای تصویر

ما یک عملگر تصویر را بصورت تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{P}_{mn}^p \triangleq \frac{L_p}{g} \sum_{\hat{R} \in \mathcal{G}} \Gamma^p(\hat{R})_{mn}^* \hat{R} \quad (13)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbb{P}_{mn}^p \Psi(\mathbf{r}) = \Phi_n^p(\mathbf{r}) \quad (14-1)$$

$$\mathbb{P}_{mn}^p \Phi_i^q(\mathbf{r}) = \delta_{pq} \delta_{ni} \Phi_m^p(\mathbf{r}) \quad (14-2)$$

$$\mathbb{P}_{mn}^p \Phi_n^p(\mathbf{r}) = \Phi_m^q(\mathbf{r}) \quad (14-3) \quad (\text{ویژگی تولید توابع پایه})$$

همچنین می‌توان عملگر دیگری بصورت زیر تعریف نمود:

$$\mathbb{P}^p \triangleq \sum_n \mathbb{P}_{mn}^p \quad (15)$$

بنابراین به سادگی میتوان از (14-1) و (15) نتیجه گرفت که:

$$\mathbb{P}^p = \frac{L_p}{g} \sum_{\hat{R} \in \mathcal{G}} \chi^p(\hat{R})^* \hat{R} \quad (16)$$

قضیهی تعامد بزرگ

قضیه: بدون اثبات می‌پذیریم که می‌توان برای تمام نمایش‌های کاهش ناپذیر و غیر هم‌ارز یک گروه مانند \mathcal{G} داریم:

$$\sum_{\hat{R} \in \mathcal{G}} \Gamma^i(\hat{R})_{mn}^* \Gamma^j(\hat{R})_{pq} = \frac{g}{L_i} \delta_{ij} \delta_{mp} \delta_{nq} \quad (17)$$

نتیجه: از قضیهی تعامد بزرگ می‌توان مستقیماً نتیجه گرفت که:

$$\sum_{\hat{R} \in \mathcal{G}} \Gamma^j(\hat{R})_{mn}^* \mathbb{P}_R \Phi_i^q(\mathbf{r}) = \frac{g}{L_q} \delta_{jq} \delta_{ni} \Phi_m^q(\mathbf{r}) \quad (18)$$

که در آن:

$$\mathbb{P}_R \Phi_i^q(\mathbf{r}) \triangleq \sum_{n=1}^{L_q} \Phi_n^q(\mathbf{r}) \Gamma_{ni}^q(\hat{R}) \quad (19)$$

روابط سازگاری و کاهش‌ها

با توجه به گروه‌های تقارن نقاط با تقارن بالا و مقایسه جدول شاخص‌هایشان می‌توان دریافت که مُدهای ویژه شاخه‌های ساختار باند بلور فوتونی در هر قسمت دارای چه تقارنی است و هر شاخه به چه تقارنی روی نقاط مرزی ناحیه بریلوین کاهش ناپذیر ختم می‌شود. بعلاوه می‌توان تعداد مودها را نیز بررسی کرد.

به عنوان مثال نقاط زیر را همراه با زیرگروه‌های مربوطه در نظر بگیرید:

$$\mathcal{M}_\Delta = \{ \hat{E}, \hat{\sigma}_y \} = C_{1h} \quad (20-1)$$

$$\mathcal{M}_\Sigma = \{ \hat{E}, \hat{\sigma}'_d \} = C_{1h} \quad (20-2)$$

$$\mathcal{M}_\Gamma = \mathcal{M}_M = C_{4v} \quad (20-3)$$

ضمن رجوع به خانواده‌های گروه‌های C_{1h} و C_{4v} می‌توان به سادگی دید که تعداد مودها، که همان نمایش‌های کاهش ناپذیر آنها هستند دقیقاً برابر با تعداد خانواده‌های آنهاست. به عنوان مثال تعداد خانواده‌های C_{1h} و C_{4v} به ترتیب برابر ۵ و ۲ می‌باشد (چرا؟! و هر کدام به ترتیب دارای ۵ و ۲ مود با تقارن‌های مختلف می‌باشند. نیز با مقایسه جدول شاخص‌های گروه‌های C_{1h} و C_{4v} در می‌یابیم که مُدهای A_1 و B_1 در C_{4v} به مُد A در C_{1h} متصل می‌شوند. به همین ترتیب مُدهای A_2 و B_2 در C_{4v} به مُد B در C_{1h} متصل می‌شوند، زیرا دارای شاخص‌های یکسان هستند. پس اگر Δ را به Γ نزدیک کنیم مُد A به یکی از دو مُد A_1 و B_1 متصل می‌گردد، و مُد B به یکی از دو مُد A_2 و B_2 متصل می‌گردد. به طریق مشابه می‌توان دید که اگر Σ را به Γ نزدیک کنیم مُد A به یکی از دو مُد A_1 و

B_2 متصل می‌گردد، در حالی که مُد B به یکی از دو مُد A_2 و B_1 متصل می‌گردد (چرا؟). با تعمیم این

بحث به سایر نقاط به جدولی مانند جدول زیر می‌رسیم:

Γ		Σ	Δ
	A_1	A	A
	A_2	B	B
	B_1	B	A
	B_2	A	B
	C	$A+B$	$A+B$
M	A_1, B_1	A	\times
	A_2, B_1	B	
	C	$A+B$	
X	A_1, B_1	\times	A
	A_2, B_2		B

جدول ۱- نحوه تبدیل مُدها و سازگاری تقارن‌های نقاط مختلف در ساختار باند بلور فوتونی مربعی.

طبق تعریف مجموعه‌ی نقاط $\{\mathbf{k}^{(n)}\}$ نقاط هم‌ارزی هستند که منطبق بر نقاط شبکه معکوس می‌باشند و از نظر فاصله تا مبدا در مرتبه n ام قرار می‌گیرند. به عنوان مثال تنها یک نقطه‌ی $\Gamma^{(1)}$ ، چهار نقطه‌ی $\Gamma^{(2)}$ ، و چهار نقطه‌ی $\Gamma^{(3)}$ وجود دارد. حال مجموعه‌ی کلیه‌ی نقاط $\Gamma^{(1)}: \Gamma^{(1)} \in C_{4v}$ را در شبکه معکوس در نظر می‌گیریم. تعداد نمایش‌های کاهش ناپذیر با تقارن A_1 منطبق بر $\Gamma^{(1)}$ عبارتست از:

$$\# \text{ of } A_1 \text{ representations on } \Gamma^{(1)} = \frac{\sum_{\hat{R} \in C_{4v}} N_{\hat{R}} \chi^{A_1}(\hat{R})}{|C_{4v}|} \tag{21}$$

که در آن $N_{\hat{R}}$ تعداد نقاط ناوردا در شبکه‌ی معکوس است که نسبت به عملگر \hat{R} دقیقاً بر $\Gamma^{(1)}$ منطبق می‌شوند. با رجوع به آرایش قرار گرفتن نقاط شبکه‌ی معکوس به سادگی می‌توان $N_{\hat{R}}$ را

تعیین نمود. با تعمیم این بحث به سایر مُدها (یا نمایش‌های کاهش ناپذیر) برای $\Gamma^{(1)}$ و $\Gamma^{(2)}$ به جدولی مانند جدول زیر می‌رسیم:

	\hat{E}	$2\hat{C}_4$	\hat{C}_2	$2\hat{\sigma}_x$	$2\hat{\sigma}_d$
$N_{\hat{R}}[\Gamma^{(1)}]$	1	1	1	1	1
$N_{\hat{R}}[\Gamma^{(2)}]$	4	0	0	2	0
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1
B_1	1	-1	1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	1
C	2	0	-2	0	0

1	1
0	0
0	1
0	0
0	1

$\times 2$ $\Gamma^{(1)}$ $\Gamma^{(2)}$ $\times 2$

جدول ۲- شمارش تعداد مُدها و نقاط ناوردا برای $\Gamma^{(1)}$ و $\Gamma^{(2)}$ در شبکه‌ی مربعی.

شبکه‌ی مثلثی

در شبکه‌ی مثلثی گروه تقارنی اصلی $C_{6v} = (S_{6v}, \cdot)$ به فرم زیر بیان می‌گردد:

$$S_{6v} = \{ \hat{E}, \hat{C}_6, \hat{C}_6^{-1}, \hat{C}_3, \hat{C}_3^{-1}, \hat{C}_2, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_{x'}, \hat{\sigma}_{x''}, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_{y'}, \hat{\sigma}_{y''} \} \quad (22)$$

و خانواده‌های آن به شکل زیر دسته بندی می‌شوند:

$$S_{6v} = \{ (\hat{E}), (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_{x'}, \hat{\sigma}_{x''}), (\hat{C}_6, \hat{C}_6^{-1}), (\hat{C}_3, \hat{C}_3^{-1}), (\hat{C}_2), (\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_{y'}, \hat{\sigma}_{y''}) \} \quad (23)$$

با رجوع به شبکه‌ی معکوس می‌توان دریافت که گروه‌های تقارن نقطه‌ای بصورت زیر قابل بیان

هستند:

$$\mathcal{M}_{\Gamma} = C_{6v} \quad (24-1)$$

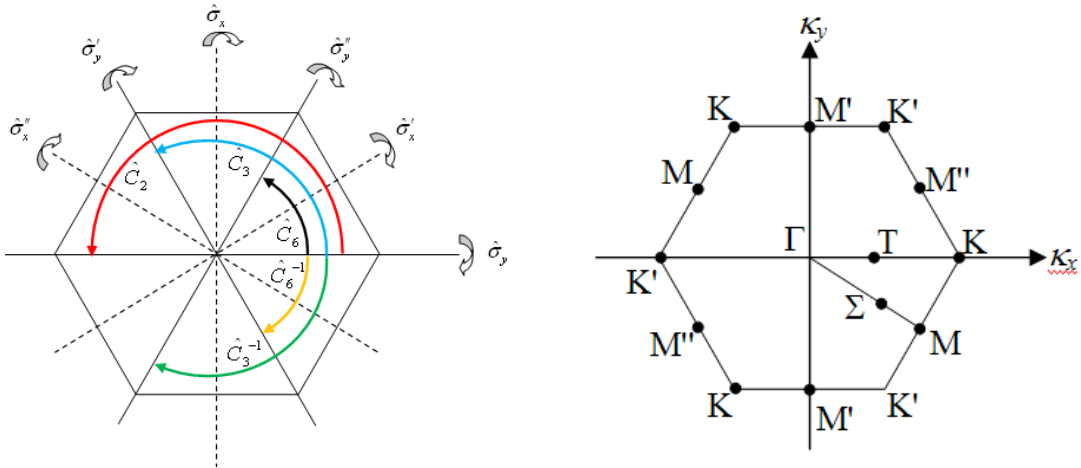
$$\mathcal{M}_{\text{K}} = \{ \hat{E}, \hat{C}_3, \hat{C}_3^{-1}, 3\hat{\sigma}_x \} = C_{3v} \quad (24-2)$$

$$\mathcal{M}_\Sigma = \{ \hat{E}, \hat{\sigma}_{y''} \} = C_{1h} \quad (24-3)$$

$$\mathcal{M}_M = \{ \hat{E}, \hat{C}_2, \hat{\sigma}_{y''}, \hat{\sigma}_{x''} \} = C_{2v} \quad (24-4)$$

$$\mathcal{M}_T = \{ \hat{E}, \hat{\sigma}_x \} = C_{1h} \quad (24-5)$$

در شکل بعد ناحیه‌ی بریلوین اول شبکه‌ی دو بعدی مثلثی به همراه نقاط با تقارن بالا دیده می‌شوند.



شکل ۲- نقاط با تقارن بالا در شبکه‌ی معکوس بلور فوتونی مربعی (راست) و عملگرهای تقارن (چپ).

جدول شاخص‌های گروه‌های C_{3v} و C_{6v} در زیر آمده است.

C_{3v}	\hat{E}	$2\hat{C}_3$	$3\hat{\sigma}_x$
A_1	1	1	1
A_2	1	1	-1
C	2	-1	0

جدول ۳- شاخص‌های گروه C_{3v} .

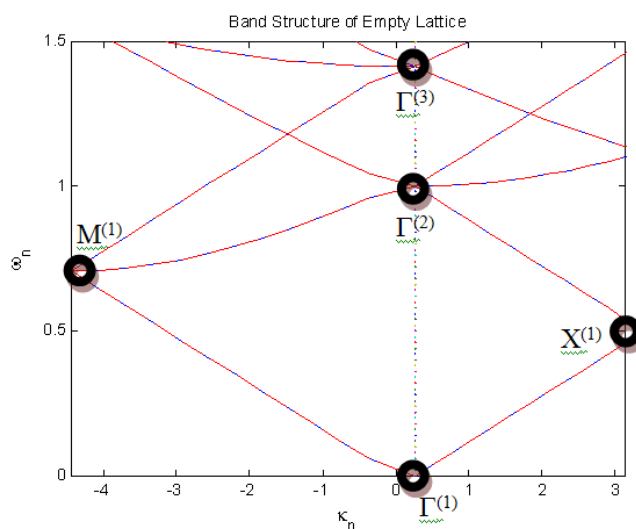
C_{6v}	\hat{E}	$2\hat{C}_6$	$2\hat{C}_3$	\hat{C}_2	$3\hat{\sigma}_y$	$3\hat{\sigma}_x$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
C_1	2	1	-1	-2	0	0
C_2	2	-1	-1	2	0	0

جدول ۴- شاخص‌های گروه C_{6v} .

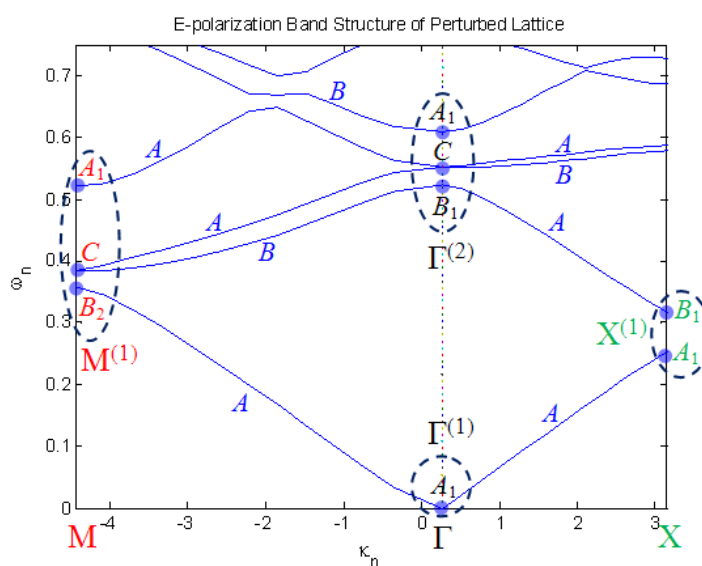
همانطور که با رجوع به (۲۳) انتظار می‌رود تعداد مودها یا نمایش‌های کاهش ناپذیر C_{6v} برابر شش می‌باشد که با تعداد ردیفهای جدول ۴ برابر است. در جدول ۵ سازگاری میان مدها در بلور فوتونی مثلثی نیز ارایه شده است.

تقارن در ساختار باند

چنانچه شبکه تهی را در نظر بگیریم می‌توان به راحتی نتایج اعمال نظریه گروه را بر تقارن‌ها دید.



شکل ۳- ساختار باند بلور فوتونی مربعی برای شبکه‌ی تهی.



شکل ۴- ساختار باند شبکه تهی با اختلال مربعی کوچک برای قطبش الکتریکی.

		T	Σ
Γ	A_1	A	A
	A_2	B	B
	B_1	A	B
	B_2	B	A
	C_1, C_2	A+B	A+B
	K	A_1	B
A_1		B	
C		A+B	
M	A_1, B_1	X	A
	A_2, B_2		B

جدول ۵- نحوه‌ی تبدیل مُدها و سازگاری تقارن‌های نقاط مختلف در ساختار باند بلور فوتونی مثلی.

چنانچه نتایج محاسبات جدول ۲ را با شکل ۲ مقایسه کنیم می‌توان به راحتی دریافت که چرا مثلاً در نقطه $\Gamma^{(1)}$ تنها یک مُد A_1 وجود دارد. به همین ترتیب می‌توان دید که تعداد شاخه‌هایی که به نقاط $X^{(1)}$ ، $M^{(1)}$ و $\Gamma^{(2)}$ می‌رسند به ترتیب برابر است با ۲، ۴، و ۴. به علاوه با محاسبه‌ای نظیر آنچه در جدول ۲ انجام شده است تعداد سایر مُدهای موجود در رئوس و اضلاع ناحیه بریلوین کاهش ناپذیر را می‌توان یافت. از سوی دیگر جدول ۵ اطلاعات تقارن در ساختار باند و نحوه‌ی اتصالات شاخه‌ها به همدیگر را کاملاً تبیین می‌نماید، که از مقایسه‌ی جدول با شکل ۴ به خوبی مشخص خواهد شد.

نئوری گروه در سه بعد

برای عملگرهای میدان الکتریکی و مغناطیسی داشتیم:

$$\mathbb{L}_E \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (25-1)$$

$$\mathbb{L}_H \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[\frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \right] = k_0^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (25-2)$$

در مقایسه با توابع نرده‌ای، اگر $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ یک تابع برداری باشد، نحوه‌ی اعمال عملگرهای تقارن بر آنها بصورت زیر است:

$$\hat{R} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \triangleq \vec{R} \mathbf{F}(\vec{R}^{-1} \mathbf{r}) \quad (۲۶)$$

و در آن $\vec{R} = [R_{ij}]$ یک ماتریس متعامد می‌باشد.

قضیه: روابط زیر برقرارند:

$$[\mathbb{L}_E, \hat{R}] = 0 \quad (۲۷)$$

$$[\mathbb{L}_H, \hat{R}] = 0 \quad (۲۸)$$

اثبات: داریم:

$$\hat{R} (\nabla \times) \hat{R}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{R} (\nabla \times) \vec{R}^{-1} \mathbf{F}(\vec{R} \mathbf{r}) = \vec{R} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (۲۹)$$

که در آن عناصر بردار $\{b\}$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$b_1 = (R_{22}R_{33} - R_{23}R_{32})(F_{zy} - F_{yz}) + (R_{13}R_{32} - R_{12}R_{33})(F_{xz} - F_{zx}) \\ + (R_{12}R_{23} - R_{13}R_{22})(F_{yx} - F_{xy}) \quad (۳۰-۱)$$

$$b_2 = (R_{23}R_{31} - R_{21}R_{33})(F_{zy} - F_{yz}) + (R_{11}R_{33} - R_{13}R_{31})(F_{xz} - F_{zx}) \\ + (R_{13}R_{21} - R_{11}R_{23})(F_{yx} - F_{xy}) \quad (۳۰-۲)$$

$$b_3 = (R_{21}R_{32} - R_{22}R_{31})(F_{zy} - F_{yz}) + (R_{12}R_{31} - R_{11}R_{32})(F_{xz} - F_{zx}) \\ + (R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21})(F_{yx} - F_{xy}) \quad (۳۰-۳)$$

قضیه اساسی جبر بیان می‌دارد که:

$$[\hat{R} (\nabla \times) \hat{R}^{-1}] \mathbf{F}(\mathbf{r}) = |\vec{R}| \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (۳۱)$$

حال می‌توان نوشت:

$$\hat{R} (\mathbb{L}_E) \hat{R}^{-1} = \hat{R} \left[\frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \nabla \times \nabla \times (\cdot) \right] \hat{R}^{-1} = \\ \left(\hat{R} \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})} \hat{R}^{-1} \right) \left\{ \hat{R} [\nabla \times \nabla \times (\cdot)] \hat{R}^{-1} \right\} \quad (۳۲)$$

پس از ساده کردن بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\hat{R}(\mathbb{L}_E)\hat{R}^{-1} &= \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})}\hat{R}\nabla\times\hat{R}^{-1}\hat{R}\nabla\times(\cdot)\hat{R}^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})}\left(\hat{R}\nabla\times\hat{R}^{-1}\right)^2(\cdot) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})}\left\{|\vec{R}|\left[\nabla\times(\cdot)\right]\right\}^2 = \frac{1}{\varepsilon_r(\mathbf{r})}|\vec{R}|^2\left[\nabla\times\nabla\times(\cdot)\right] \\ &= |\vec{R}|^2\mathbb{L}_E\end{aligned}\quad (33)$$

با توجه به $|\vec{R}| = \pm 1$ خواهیم داشت:

$$\hat{R}\mathbb{L}_E\hat{R}^{-1} = \mathbb{L}_E \quad (34)$$

یا:

$$\left[\hat{R}, \mathbb{L}_E\right] = 0 \quad (35)$$

■ که این اثبات صورت قضیه را به اتمام می‌رساند. در مورد (۲۸) به تمرین ۶ رجوع کنید.

حال روابط عملگری زیر را با شاخص‌های $\chi_{nk}(\hat{R})$ در نظر بگیرید:

$$\hat{R}\mathbf{E}_{nk}(\mathbf{r}) = \chi_{nk}^E\mathbf{E}_{nk}(\mathbf{r}) \quad (36-1)$$

$$\hat{R}\mathbf{H}_{nk}(\mathbf{r}) = \chi_{nk}^H\mathbf{H}_{nk}(\mathbf{r}) \quad (36-2)$$

با توجه به معادلات ماکسول خواهیم داشت:

$$\nabla\times\mathbf{E}_{nk}(\mathbf{r}) = -\mu_0 j\omega\mathbf{H}_{nk}(\mathbf{r}) \quad (37-1)$$

$$\nabla\times\mathbf{H}_{nk}(\mathbf{r}) = j\varepsilon\omega\mathbf{E}_{nk}(\mathbf{r}) \quad (37-2)$$

از سمت چپ عملگر تقارن \hat{R} را ضرب کرده و $\hat{R}^{-1}\hat{R}$ را در وسط جا می‌دهیم:

$$\left(\hat{R}\nabla\times\hat{R}^{-1}\right)\left[\hat{R}\mathbf{E}_{nk}(\mathbf{r})\right] = -\mu_0 j\omega\hat{R}\mathbf{H}_{nk}(\mathbf{r}) \quad (39-1)$$

$$\chi_{nk}^E|\vec{R}|\nabla\times\mathbf{E}_{nk}(\mathbf{r}) = -\mu_0 j\omega\chi_{nk}^H\mathbf{H}_{nk}(\mathbf{r}) \quad (39-2)$$

بنابراین رابطه‌ی زیر بین دو شاخص میدان الکتریکی و مغناطیسی بدست می‌آید:

$$\chi_{nk}^H(\hat{R}) = |\vec{R}|\chi_{nk}^E(\hat{R}) \quad (40)$$

اما چون $|\vec{R}| = \pm 1$ پس:

$$\chi_{nk}^H(\hat{R}) = \pm \chi_{nk}^E(\hat{R}) \quad (41)$$

بدیهی است که برای میدان مغناطیسی \mathbf{B} شاخص χ_{nk}^B هم مانند شاخص میدان \mathbf{H} یعنی χ_{nk}^H است، ولی برای میدان جابجایی الکتریکی \mathbf{H} وضعیت χ_{nk}^D روشن نیست. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{R} \mathbf{D}_{nk}(\mathbf{r}) &= \hat{R} [\varepsilon_r(\mathbf{r}) \hat{R}^{-1} \hat{R} \mathbf{E}_{nk}(\mathbf{r})] = \chi_{nk}^E [\hat{R} \varepsilon_r(\mathbf{r}) \hat{R}^{-1}] \mathbf{E}_{nk}(\mathbf{r}) \\ &= \chi_{nk}^E \varepsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{nk}(\mathbf{r}) = \chi_{nk}^E \mathbf{D}_{nk}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (42)$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$\chi_{nk}^D(\hat{R}) = \chi_{nk}^E(\hat{R}) \quad (43)$$

پاسخ اپتیکی بلور فوتونی

با آغاز از معادلات ماکسول داریم:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (44-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \{ \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t) \} \quad (44-2)$$

در نظر داشته باشید که \mathbf{P}_{ext} ، غیر از قطبش دی‌الکتریک که در ε در نظر گرفته‌ایم، به این رابطه اضافه می‌شود. یعنی \mathbf{P}_{ext} میدان قطبش غیر ذاتی است که با تابع دی‌الکتریک $\varepsilon(\mathbf{r})$ توصیف نمی‌شود.

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot [\varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)] \quad (45-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (45-2)$$

حال میدان برداری $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (46)$$

و رابطه‌ی عملگری زیر را تعریف می‌کنیم:

$$-\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbb{H} \right) \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t) \quad (47)$$

به کمک سمت راست رابطه، به بلور فوتونی ورودی میدان اعمال می‌کنیم و با کمک تابع گرین خروجی را محاسبه خواهیم کرد. همانطور که در فصل ۱۱ بحث شد می‌توان نوشت:

$$-\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbb{H}\right) \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \bar{\mathbb{I}} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \delta(t-t') \quad (48-1)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = -\frac{c^2}{V} \sum_{n\mathbf{k}\alpha} (t-t') \left\{ \text{sinc}[\omega_n(\mathbf{k})(t-t')] \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(T)}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(T)*}(\mathbf{r}') + \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(L)}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(L)*}(\mathbf{r}') \right\} \quad (48-2)$$

و جواب (۴۷) را می‌توان نوشت:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \int dt' \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') \frac{1}{c^2 \epsilon_0 \sqrt{\epsilon(\mathbf{r})}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t') \quad (48-3)$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه‌ی زیر

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (49-1)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (49-2)$$

جواب (۴۸-۳) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0 V} \sum_{\bar{\mathbf{k}}n\alpha} \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' (t-t') \times \left\{ \sin[\omega_n(\mathbf{k})(t-t')] \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(T)}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(T)*}(\mathbf{r}') + \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(L)}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(L)*}(\mathbf{r}') \right\} \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\mathbf{r})}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t') \quad (50)$$

حال دو تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{g}(t) = \frac{1}{c^2 \epsilon_0 \sqrt{\epsilon(\mathbf{r})}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t) \quad (51-1)$$

$$\vec{f}(t-t') = \sin[\omega_n(\mathbf{k})(t-t')] \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(T)}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(T)*}(\mathbf{r}') + \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(L)}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{Q}_{n\mathbf{k}}^{(L)*}(\mathbf{r}') \quad (51-2)$$

که در آنها تابعیت مکانی مستتر است. پس (۵۰) با کمک انتگرال‌گیری جزء به جزء:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{f}(t-t') \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathbf{g}(t') dt' = \vec{f}(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{g}(t') \Big|_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \vec{f}(t-t')}{\partial t'} \frac{\partial \mathbf{g}(t')}{\partial t'} dt' \quad (52)$$

بدین شکل ساده می‌شود:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0 V} \sum_{n\alpha\kappa} \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \times \\ \left\{ \cos[\omega_n(\kappa)(t-t')] \mathbf{Q}_{n\kappa}^{(T)}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}^{(T)*}(\mathbf{r}') + \mathbf{Q}_{n\kappa}^{(L)}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}^{(L)*}(\mathbf{r}') \right\} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}')}} \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t')$$

(53)

مجدداً انتگرال گیری جزء به جزء مانند (52) انجام می‌دهیم و بدست می‌آید:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0 V} \sum_{n\alpha\kappa} \int d^3 r' \int_{-\infty}^t \omega_n(\kappa) \sin[\omega_n(\kappa)(t-t')] \times \\ \left[\mathbf{Q}_{n\kappa}^{(T)}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}^{(T)*}(\mathbf{r}') + \mathbf{Q}_{n\kappa}^{(L)}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}^{(L)*}(\mathbf{r}') \right] \frac{\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t')}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}')}} \\ + \frac{1}{\varepsilon_0 V} \sum_{n\kappa} \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \omega_n(\kappa) \sin[\omega_n(\kappa)(t-t')] \mathbf{Q}_{n\kappa}^{(T)}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{Q}_{n\kappa}^{(T)*}(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t')}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}}$$

(54)

که برابر است با:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \frac{-\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}} + \\ \frac{1}{\varepsilon_0 V} \sum_{n\kappa} \mathbf{Q}_{n\kappa}^{(T)}(\mathbf{r}) \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \omega_n(\kappa) \sin[\omega_n(\kappa)(t-t')] \frac{\mathbf{Q}_{n\kappa}^{(T)*}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t')}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})}}$$

(55)

به عبارت دیگر چون $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\varepsilon(\mathbf{r})} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ است، رابطه‌ی فوق را به این صورت هم می‌توان

نوشت:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r})} = \frac{1}{\varepsilon_0 V} \sum_{n\kappa} \mathbf{E}_{n\kappa}^{(T)}(\mathbf{r}) \\ \int d^3 r' \int_{-\infty}^t dt' \omega_n(\kappa) \sin[\omega_n(\kappa)(t-t')] \mathbf{E}_{n\kappa}^{(T)*}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}', t')$$

(56)

اکنون اگر مدهای ویژه‌ی بلور فوتونی را داشته باشیم، به ازای هر ورودی می‌توان خروجی میدان الکتریکی را در هر زمان و مکانی محاسبه کرد.

تابش دو قطبی

اکنون یک دو قطبی به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{P}_{ext}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_d = \mathbf{d}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \exp[-j(\omega + j\delta)t] \quad (57)$$

که در آن \mathbf{d} ممان دو قطبی است. میدان الکتریکی را در بلور فوتونی از رابطه زیر می‌توان یافت:

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r})} \bar{P}_d(\mathbf{r}, t) + \frac{e^{-j\omega t}}{2\varepsilon_0 V} \sum_{n\kappa} \omega_n^{(T)}(\kappa) \mathbf{E}_{n\kappa}^{(T)}(\mathbf{r}) \left\{ \mathbf{E}_{n\kappa}^{(T)*}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d} \right\} \left\{ \frac{1}{\omega + \omega_n^{(T)}(\kappa) + j\delta} - \frac{1}{\omega - \omega_n^{(T)}(\kappa) + j\delta} \right\} \quad (58)$$

که در آن $\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t)$ میدان تشعشع دوقطبی در بلور فوتونی است. اگر $\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)}$ را مقدار انرژی که بطور میانگین در هر نقطه در واحد زمان و در راستای مشخص عبور می‌کند تعریف کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)} &= \frac{1}{4} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) \right\} \times \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, t) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_d^*(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_d^*(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}_d(\mathbf{r}, t) \right\} \end{aligned} \quad (59)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \overline{\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)} &= \frac{1}{4} \left[\mathbf{H}_d^* \cdot \nabla \times \mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \times \mathbf{H}_d^*(\mathbf{r}, t) + \right. \\ &\quad \left. \mathbf{H}_d(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \times \mathbf{E}_d^* - \mathbf{E}_d^* \cdot \nabla \times \mathbf{H}_d(\mathbf{r}, t) \right] \end{aligned} \quad (60)$$

با توجه به معادلات ماکسول برای مولفه‌های قطبش داریم:

$$\mathbf{H}_d = -\frac{j}{\mu_0 \omega} \nabla \times \mathbf{E}_d \quad (61-1)$$

$$\frac{j}{\varepsilon_0 \omega} \nabla \times \mathbf{H}_d = \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}_d + \mathbf{P}_d \quad (61-2)$$

پس از ساده کردن داریم:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} = \frac{j\omega}{4} \{ \mathbf{E}_d^* \cdot \mathbf{P}_d - \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{P}_d^* \} = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \{ \mathbf{E}_d^* \cdot \mathbf{P}_d \} \quad (62)$$

اگر در محیط چشمه نداشته باشیم، آنگاه $\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} = 0$ خواهد شد. پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}} = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left\{ \mathbf{P}_d \cdot \frac{-\mathbf{P}_d(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r})} + \frac{e^{-j\omega t}}{2\varepsilon_0 V} \sum_{n\kappa} \omega_n(\boldsymbol{\kappa}) \mathbf{E}_{n\kappa}^{(T)}(\mathbf{r}) \left[\mathbf{E}_{n\kappa}^{(T)*}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d} \right] \right\} \quad (63-1)$$

و بنابراین:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\pi\omega^2}{\varepsilon_0 V} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \sum_{n\kappa} \left| \mathbf{E}_{n\kappa}^{(T)*}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d} \right|^2 \delta \left[\omega - \omega_n^{(T)}(\boldsymbol{\kappa}) \right] \quad (63-2)$$

حال با استفاده از اتحاد مشهور زیر:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega - \omega_0 \pm j\delta} = \frac{\mathcal{P}}{\omega - \omega_0} \mp \pi j \delta(\omega - \omega_0) \quad (64)$$

که در آن \mathcal{P} عملگر مقدار اصلی است، و توجه به این که جمله $\delta \left[\omega + \omega_n^{(T)}(\boldsymbol{\kappa}) \right]$ بدلیل مثبت بودن $\omega_n^{(T)}(\boldsymbol{\kappa})$ هیچ‌گاه مقدار ندارد و همواره صفر است، انرژی تابشی کل بر واحد زمان را بدست می‌آوریم:

$$U = \oiint \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \iiint \nabla \cdot \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{r}, t) d^3 r = \frac{\pi\omega^2}{4\varepsilon_0 V} \sum_{n\kappa} \left| \mathbf{E}_{n\kappa}^{(T)*}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d} \right|^2 \delta \left[\omega - \omega_n^{(T)}(\boldsymbol{\kappa}) \right] \quad (65)$$

اگر عبارت جمع را به شکل زیر به انتگرال تبدیل کنیم:

$$\sum_{\kappa} \triangleq \frac{1}{V_{BZ}} \iiint_{BZ} d^3 \kappa \equiv \frac{V_{WSC}}{(2\pi)^3} \iiint_{BZ} d^3 \kappa \quad (66)$$

عبارت (65) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$U = \frac{\pi\omega^2}{4\varepsilon_0 V} \frac{V_{WSC}}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \iiint_{BZ} d^3 \kappa \left| \mathbf{E}_{n\kappa}^{(T)*}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d} \right|^2 \delta \left[\omega - \omega_n^{(T)}(\boldsymbol{\kappa}) \right] \quad (67)$$

از آنجاییکه مدهای $\mathbf{E}_{n\kappa}^{(T)}$ بهنجار هستند و \mathbf{d} هم مقدار ثابتی دارد، بنابراین می‌توان مقدار میانگین مناسبی مانند $\left| \mathbf{E}_{\text{eff}}^*(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d} \right|$ جای عبارت داخل قدر مطلق گذاشت و عبارت را از عمل جمع رد کرد:

$$U = \frac{\pi\omega^2}{4\varepsilon_0 V} \frac{V_{WSC}}{(2\pi)^3} \left| \mathbf{E}_{\text{eff}}^* (\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d} \right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \iiint_{BZ} d^3\kappa \delta \left[\omega - \omega_n^{(T)}(\boldsymbol{\kappa}) \right] \quad (68)$$

با تعریف چگالی حالات به شکل:

$$D(\omega) \triangleq \frac{V_{WSC}}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \iiint_{BZ} d^3\kappa \delta \left[\omega - \omega_n^{(T)}(\boldsymbol{\kappa}) \right] \quad (69)$$

می‌توان (۶۸) را به فرم زیر بازنویسی نمود:

$$U = \frac{\pi\omega^2}{4\varepsilon_0 V} \left| \mathbf{E}_{\text{eff}}^* (\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{d} \right|^2 D(\omega) \quad (70)$$

از مبانی اپتیک کوانتومی می‌دانیم که آهنگ گسیل خود به خودی با $\omega D(\omega)$ متناسب است. حال با توجه به تعریف (۶۹)، اگر ω در گاف فوتونی قرار گرفته باشد $D(\omega) = 0$ (چرا؟)، بنابراین گسیل خود به خودی در گاف نخواهیم داشت.

مراجع

- [1] M. Tinkham, *Group Theory and Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, 1964.
- [2] K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer, Berlin, 2001.

تمرین

- ۱- با استفاده از قضیه‌ی تعامد بزرگ نشان دهید نتیجه‌گیری (۱۸) برقرار است.
- ۲- نشان دهید که هر گاه دو تابع متعلق به نمایش‌های کاهش ناپذیر متفاوت، یا ردیف‌های متفاوتی از یک نمایش یکانی باشند متعامد خواهند بود. (راهنمایی: یک ضرب نرده‌ای داخلی تعریف کنید که برای این منظور مناسب باشد).
- ۳- با استفاده از قضیه‌ی تعامد بزرگ ویژگی‌های تعامد شاخص‌ها را ثابت کنید.

$$4- \text{ نشان دهید } \sum_{\hat{R} \in \mathcal{G}} \chi^i(\hat{R})^* \chi^j(\hat{R}) = g \delta_{ij}$$

۵- با رجوع به تعریف گروه C_{3v} نشان دهید که دارای تنها سه خانواده می‌باشد. ارتباط این نتیجه

با جدول ۳ در چیست؟

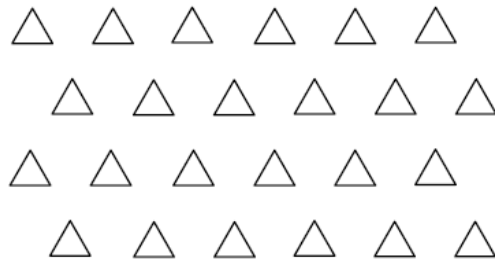
۶- درستی رابطه‌ی (۲۸) را نشان دهید.

۷- با استفاده از قضیه‌ی (۶۴) رابطه‌ی (۲-۶۳) را بدست آورید.

۸- نشان دهید در یک محیط همگن، چگالی حالات به فرم $D(\omega) \propto \omega^{N-1}$ می‌باشد که در آن

N ابعاد فیزیکی مساله است.

۹- بلور فوتونی زیر دارای چه گروه تقارن نقطه‌ای است؟ چرا؟



۱۰- آیا می‌توان ادعا نمود که گروه تقارن نقطه‌ای شبکه‌ی معکوس همواره با گروه تقارن

نقطه‌ای شبکه‌ی اصلی همواره یکسان است؟ بحث جداگانه‌ای برای بلورهای فوتونی یک، دو، و

سه‌بعدی ارائه دهید (راهنمایی: به حل مسئله‌ی قبل توجه نمایید).

بخش ۱۴

مبانی اپتیک کوانتومی بلورهای فوتونی، حالات چگالیده و جابجایی لمب

در این بخش به مطالعه‌ی مبانی اپتیک کوانتومی و نحوه‌ی اعمال کوانتس میدان در بلورهای فوتونی خواهیم پرداخت. به عنوان مثال‌های کاربردی از اپتیک کوانتومی بلورهای فوتونی تولید حالات چگالیده در بلورهای فوتونی و جابجایی لمب در یک اتم شبه هیدروژن را خواهیم دید.

اپتیک کوانتومی در بلورهای فوتونی

تاکنون امواج الکترومغناطیس را به صورت کلاسیک در نظر داشتیم و از آثار کوانتومی و گسستگی در طیف انرژی صرف نظر می‌کردیم. در این قسمت می‌خواهیم از دیدگاه کوانتومی به انتشار مدهای ویژه‌ی بلورهای فوتونی نگاه کنیم. با آغاز از معادلات ماکسول بر حسب توابع پتانسیل برداری و نرده‌ای داریم:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (1-1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1-2)$$

می‌توان دید که معادلات (۱) نسبت به تبدیلات پیمانه‌ی زیر ناوردا هستند:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \xi(\mathbf{r}, t) \quad (۲-۱)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (۲-۲)$$

همواره می‌توانیم $\xi(\mathbf{r}, t)$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $\varphi(\mathbf{r}, t) = 0$ شود. در این صورت از معادله سوم ماکسول:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (۳)$$

بدست می‌آید (چرا؟):

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla \cdot [\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (۴)$$

معادله‌ی اخیر را تحت عنوان پیمانه‌ی کولمب تغییر یافته می‌شناسیم. استفاده از پیمانه‌ی کولمب موجب سادگی عبارات بعدی در سایر محاسبات می‌گردد، ولی باید دقت شود که تحت تبدیل لورنتز ناوردا نیست و چنانچه احتیاج به تغییر دستگاه مختصات باشد می‌بایست از پیمانه‌ی دیگری مانند پیمانه‌ی لورنتز استفاده کرد که در آن داریم:

$$\square \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \left(\nabla - j \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (۵)$$

با در نظر گرفتن پیمانه‌ی کولمب، داشتن پتانسیل برداری $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ، و با استفاده از روابط (۱) می‌توان میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را به سادگی بدست آورد:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (۶)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (۷)$$

بنابراین چون می‌دانیم که $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ فاقد بسامد صفر است و تنها امواج طولی فرکانس صفر دارند، همواره می‌توان $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ را بر حسب امواج عرضی بسط داد، زیرا مجموعه امواج عرضی بلوخ یک بلور فوتونی مجموعه‌ای کامل را توابع پایه می‌سازند. لذا داریم:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{n\mathbf{k}} \left[q_{n\mathbf{k}}(t) \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}^{(T)}(\mathbf{r}) + q_{n\mathbf{k}}^*(t) \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}^{(T)*}(\mathbf{r}) \right] \quad (۸)$$

که در آن:

$$q_{n\mathbf{k}}(t) = \alpha \exp[-j\omega_n^{(r)}(\mathbf{k})t] \quad (۹)$$

یک تابع نوسانی با زمان است که به بسامدهای ویژه ساختار باند وابسته است. چون فقط با امواج عرضی کار می‌کنیم، در بقیه محاسبات بالا نویس (T) را نشان نخواهیم داد.

در نتیجه برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی داریم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{j}{\sqrt{V}} \sum_{n\mathbf{k}} \omega_n(\mathbf{k}) [q_{n\mathbf{k}}(t) \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - q_{n\mathbf{k}}^*(t) \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}^*(\mathbf{r})] \quad (۱۰)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{n\mathbf{k}} [q_{n\mathbf{k}}(t) \nabla \times \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + q_{n\mathbf{k}}^*(t) \nabla \times \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}^*(\mathbf{r})] \quad (۱۱)$$

توابع $q_{n\mathbf{k}}(t)$ شباهت ظاهری با عملگرهای بقا (یا خلق) و فنا در نوسانگر هماهنگ کوانتومی دارند. پس برای کوانتیزه کردن میدان تابشی، مطابق روال استاندارد اپتیک کوانتومی $q_{n\mathbf{k}}(t)$ و مزدوج آن $q_{n\mathbf{k}}^*(t)$ را با عملگرهای زیر جانشین می‌کنیم:

$$q_{n\mathbf{k}}(t) \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_n(\mathbf{k})}} \hat{a}_{n\mathbf{k}}(t) \quad (۱۲-۱)$$

$$q_{n\mathbf{k}}^*(t) \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_n(\mathbf{k})}} \hat{a}_{n\mathbf{k}}^\dagger(t) \quad (۱۲-۲)$$

که در آن به ترتیب $\hat{a}_{n\mathbf{k}}(t)$ و $\hat{a}_{n\mathbf{k}}^\dagger(t)$ عملگرهای فنا و بقای فوتون‌های بلوخ در بلور فوتونی مورد نظر هستند. توجه نمایید که در فرمول‌بندی کنونی اپتیک کوانتومی همواره کوانتس در جزء زمانی فوتون رخ می‌دهد و جزء مکانی توسط اپتیک کلاسیک توصیف می‌شود.

حال برای گذار از اپتیک کلاسیک به اپتیک کوانتومی لازم است که ابتدا هامیلتونی انرژی الکترومغناطیس کلاسیک را نوشت. می‌دانیم که فرم هامیلتونی در تصویر کوانتومی کاملاً مشابه فرم کلاسیک آن است. لذا:

$$U = \frac{1}{2} \iiint \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} + \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} d^3r \equiv U_m + U_e \quad (۱۳)$$

که در آن انرژی کل الکتریکی و مغناطیسی به صورت مجزا به شکل زیر هستند:

$$U_e = \iiint \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}) |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r \quad (14-1)$$

$$U_m = \iiint \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r \quad (14-2)$$

برای بدست آوردن $|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2$ ، از بسط میدان الکتریکی بر توابع بلوخ استفاده می‌کنیم که در (۱۰) ذکر شده است. با توجه به تعامد مدهای بلوخ:

$$\iiint \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_{n'\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{nn'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (15)$$

در نهایت پس از ساده‌سازی خواهیم داشت (تمرین ۱):

$$U_e = \varepsilon_0 \sum_{n\mathbf{k}} \omega_n^2(\mathbf{k}) [q_{n\mathbf{k}} q_{n\mathbf{k}}^* + \text{c.c.}] \quad (16)$$

برای کل انرژی میدان مغناطیسی نیز با استفاده از اتحاد گرین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U_m &= \sum_{n\mathbf{k}} \left\{ \left[\frac{q_{n\mathbf{k}} q_{n\mathbf{k}}^* + \text{c.c.}}{\mu_0} \right] \iiint (\nabla \times \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}^*) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}) d^3r \right\} \\ &= \sum_{n\mathbf{k}} \left\{ \left[\frac{q_{n\mathbf{k}} q_{n\mathbf{k}}^* + \text{c.c.}}{\mu_0} \right] \iiint [\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}^* \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{n\mathbf{k}})] d^3r + \oint \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}^* \times \mathbf{E}_{n\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{S} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن c.c. نماد مزدوج مختلط می‌باشد. چنانچه حجم انتگرال‌گیری مضرب صحیحی از سلول‌های واحد باشد آنگاه انتگرال سطحی دربرگیرنده‌ی کل بلور فوتونی برابر صفر خواهد بود. با توجه به تساوی فوق نتیجه‌ی بسیار مهم و کلی زیر بدست می‌آید:

$$U_m = U_e \quad (18)$$

پس انرژی کل عبارتست از:

$$U = 2\varepsilon_0 \sum_{n\mathbf{k}} \omega_n^2(\mathbf{k}) [q_{n\mathbf{k}} q_{n\mathbf{k}}^* + \text{c.c.}] \quad (19)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی فوق با رابطه‌ی کوانتومی زیر

$$\mathbb{H} = \sum_{n\mathbf{k}} \hbar \omega_n(\mathbf{k}) \left\{ \hat{a}_{n\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{n\mathbf{k}}(t) + \frac{1}{2} \right\} \quad (20)$$

و در نظر داشتن جبر عملگرهای بقا و فنا:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \equiv \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} = 1 \quad (21-1)$$

$$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} \equiv \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} = 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 \quad (21-2)$$

می‌توان نوشت:

$$q \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \hat{a} \quad (22-1)$$

$$q^* \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega}} \hat{a}^\dagger \quad (22-2)$$

$$qq^* + q^*q \rightarrow \frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_n(\mathbf{k})} [\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}] \quad (22-3)$$

در روابط (۲۱) و (۲۲) زیرنویس $n\mathbf{k}$ برای رعایت اختصار نوشته نشده است.

عملگر بقا بدون تغییر بردار موج بلوخ \mathbf{k} شماره‌ی باند را افزایش می‌دهد:

$$\hat{a}_{n\mathbf{k}}^\dagger \mathbf{E}_{n\mathbf{k}} = \sqrt{n+1} \mathbf{E}_{n+1,\mathbf{k}} \quad (23)$$

در حالیکه عملگر فنا بدون تغییر بردار موج بلوخ \mathbf{k} شماره‌ی باند را کاهش می‌دهد:

$$\hat{a}_{n\mathbf{k}} \mathbf{E}_{n\mathbf{k}} = \sqrt{n} \mathbf{E}_{n-1,\mathbf{k}} \quad (24)$$

حال عملگر شمارش را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{N}_{n\mathbf{k}} = \hat{a}_{n\mathbf{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{n\mathbf{k}}(t) \quad (25)$$

بنابراین برای هامیلتونی می‌توان نوشت:

$$\mathbb{H} = \sum_{n\mathbf{k}} \hbar\omega_n(\mathbf{k}) \left\{ \hat{N}_{n\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right\} = \sum_{n\mathbf{k}} \hbar\omega_n(\mathbf{k}) \hat{N}_{n\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{n\mathbf{k}} \hbar\omega_n(\mathbf{k}) \quad (26)$$

توجه نمایید که در (۲۶) جمله‌ی دوم برابر با انرژی نقطه‌ی صفر است و مستقل از طیف و تعداد فوتون‌های موجود در بلور فوتونی است. حضور این مقدار انرژی را می‌توان ناشی از اصل عدم قطعیت دانست که به موجب آن هیچ مودی از مشدودی نمی‌تواند برای مدت محدودی دارای انرژی برابر صفر باشد. معمولاً بدلیل عدم وابستگی این جمله به سایر پارامترها آن را در محاسبات حذف می‌کنند، ولی به هر حال مقدار آن واگرا است و به بی‌نهایت میل می‌کند:

$$\frac{1}{2} \sum_{n\mathbf{k}} \hbar \omega_n(\mathbf{k}) = \frac{\hbar}{2V_{BZ}} \sum_{n=1}^{\infty} \iiint_{BZ} \omega_n(\mathbf{k}) d^3\mathbf{k} \quad (27-1)$$

اما (۲۷) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد (تمرین ۲):

$$\frac{1}{2} \sum_{n\mathbf{k}} \hbar \omega_n(\mathbf{k}) = \frac{\hbar}{2} \int_0^{\infty} \omega D(\omega) d\omega \quad (27-2)$$

حال با کمک (۲۲) و (۸) و (۱۰) عملگرهای میدان الکتریکی و پتانسیل برداری را می‌توان به شکل زیر ساخت:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_n(\mathbf{k})}} \left[\hat{a}_{n\mathbf{k}}(t) \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \hat{a}_{n\mathbf{k}}^\dagger(t) \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \right] \quad (28-1)$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n\mathbf{k}} j \sqrt{\frac{\hbar \omega_n(\mathbf{k})}{2\varepsilon_0 V}} \left[\hat{a}_{n\mathbf{k}}(t) \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \hat{a}_{n\mathbf{k}}^\dagger(t) \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \right] \quad (28-2)$$

حالات چگالیده

اصولاً برای دو کمیت مکان x و اندازه حرکت p که به ترتیب با عملگرهای \hat{x} و \hat{p} مشخص می‌شوند، بدلیل پیروی از اصل عدم قطعیت داریم:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (29)$$

در حالت کلی برای دو عملگر ناسازگار و بدون بُعد مانند \hat{E}_1 و \hat{E}_2 که دارای ویژگی زیر هستند:

$$[\hat{E}_1, \hat{E}_2] = \hat{E}_1 \hat{E}_2 - \hat{E}_2 \hat{E}_1 = 1 \quad (30)$$

می‌توان بصورت کلی نتیجه گرفت که:

$$\Delta E_1 \Delta E_2 \geq \frac{1}{4} \quad (31)$$

بدیهی است که در حالت حداقل عدم قطعیت ضمن حفظ تقارن خواهیم داشت $\Delta E_1 = \Delta E_2 = \frac{1}{2}$. اما

گاه پیش می‌آید که عدم قطعیت در یک کمیت به بهای افزایش در دیگری کاهش می‌یابد. در

ساده‌ترین حالت می‌توانیم داشته باشیم:

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2}g \quad (32-1)$$

$$\Delta E_2 = \frac{1}{2g} \quad (32-2)$$

که در آن g عددی حقیقی و مثبت است. در حالت کلی می‌توان سه وضعیت را تفکیک نمود:

$$\Delta E_1 < \frac{1}{2} < \Delta E_2, \quad 0 < g < 1 \quad (33-1)$$

$$\Delta E_1 = \frac{1}{2} = \Delta E_2, \quad g = 1 \quad (33-2)$$

$$\Delta E_2 < \frac{1}{2} < \Delta E_1, \quad 0 < \frac{1}{g} < 1 \quad (33-3)$$

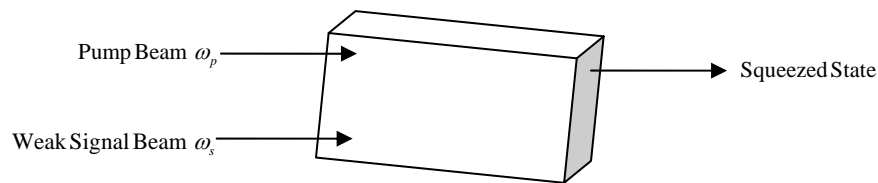
در حالت اول و سوم به ترتیب می‌گوییم پارامتر E_1 و E_2 چگالیده شده‌اند، به این معنی که واریانس تغییرات آنها از میزان $\frac{1}{2}$ که برای حالت غیر چگالیده مطرح می‌شود کمتر خواهد بود. این بدان معنی است که نوفه‌ی کوانتومی که از افت و خیزهای کاتوره‌ای در میدان‌های نقطه‌ی صفر خلاء ناشی می‌شود، در یک مولفه دارای سطح پایین‌تر از معمول است. حال چنانچه به طریقی سیگنال حاوی اطلاعات با کمک این پارامتر ارسال شود بدیهی است که بهبود قابل توجهی در نسبت سیگنال به نوفه بدست خواهد آمد.

قابل ذکر است که برای اولین بار حالات چگالیده در آزمایشگاه‌های بل و در سال ۱۹۸۳ توسط نور تولید شدند. هم اکنون در آزمایشگاه‌ها امکان تولید حالات بسیار چگالیده با g بسیار بزرگتر از ۱ و حتی تا حدود ۱۰۰ با کمک روش تقویت پارامتری نور وجود دارد.

در این روش فوتون‌های یک جبهه‌ی نور لیزر دمش با بسامد ω_p با شدت زیاد ضمن عبور از یک بلور غیرخطی با ویژگی غیر خطی مرتبه‌ی دو، هر یک به دو فوتون کم انرژی‌تر $\omega_r = \frac{1}{2}\omega_p$ می‌شکنند. گرچه سطح مقطع این فرآیند بسیار ناچیز است و در عمل کمتر از ۱ در $1,000,000$ فوتون به فوتون‌های با طول موج دو برابر تفکیک می‌شوند، ولی در شدت‌های زیاد آهنگ واکنش هنوز آن قدر

بالا هست که بتوان تعداد قابل تشخیص از فوتون‌های با طول موج بلند بدست آورد. این مکانیسم فرآیندی کاملاً کوانتومی است و با فیزیک کلاسیک قابل استدلال نمی‌باشد.

حال اگر یک جبهه‌ی موج حاوی سیگنال را که دارای بسامد ω_s است با فوتون‌های شکسته شده مخلوط کنیم حاصل تقویت پارامتری سیگنال می‌باشد که در حالت تشدید $\omega_s = \omega_p$ به حداکثر می‌رسد. معمولاً بسته به آنکه فاز جبهه موج دمش ω_p چه مقداری نسبت به فاز سیگنال ω_s دارد، یکی از دو مولفه‌ی سینوسی یا کسینوسی جبهه‌ی سیگنال، که با هم دارای 90° فاصله در فاز هستند، تقویت و دیگری به همان اندازه تضعیف خواهد شد. پس در واقع جبهه‌ی موج سیگنال پس از ω_s تقویت پارامتری به یک حالت چگالیده تبدیل می‌شود، و با قفل کردن روی فاز مولفه‌ای که چگالیده شده است می‌توان نسبت سیگنال به نوفه بالاتر از حد عادی که به نوفه‌ی کوانتومی محدود می‌شود بدست آورد [۱۰۲].



شکل ۱- نمایش تقویت پارامتری.

حالت همدوس

فرض کنید کت‌های پایه‌ی یک نوسانگر هماهنگ با $|n\rangle$ و مقادیر ویژه انرژی آن با E_n نمایش داده شوند. آنگاه نمایش اندازه حرکت و مقادیر ویژه‌ی انرژی آن به شکل زیر خواهند بود:

$$u_n(\alpha, p) = \langle p | n \rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 p^2} H_n(\alpha p) \quad (34)$$

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (35)$$

در اینجا α ثابتی مختلط و $H_n(\alpha p)$ چند جمله‌ای‌های هرمیت می‌باشند. آنگاه می‌توان به سادگی دید که معادله‌ی

$$\mathbb{H}\psi = j\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (۳۶-۱)$$

$$\mathbb{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{1}{2} K \hat{x}^2 \quad (۳۶-۲)$$

که در آن $K \triangleq \hbar^2 \alpha^4 / m$ ، دارای حل کلی خاصی به شکل زیر است:

$$\psi(p, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-j(n+1/2)\omega t} u_n(\alpha, p) \quad (۳۷)$$

اما شرط بهنجار بودن برای توابع $\psi(p, t)$ عبارتست از:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(p, t)|^2 dp = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = 1 \quad (۳۸)$$

که به ازای C_n های خاص زیر با توزیع پواسون برقرار است:

$$C_n = \sqrt{\frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n}} e^{-jn\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad (۳۹)$$

در (۳۹) فاز φ اختیاری است و بر شرط بهنجار بودن بی‌اثر می‌باشد.

حال ترکیب خطی زیر از کتهای پایه یک نوسانگر هماهنگ را یک حالت همدوس می‌نامیم:

$$|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-jn\varphi} e^{-j\omega(n+\frac{1}{2})t} |n\rangle \quad (۴۰)$$

حالت همدوس متناظر با $\lambda = 0$ را حالت خلاء می‌نامیم و با $|0\rangle$ نمایش می‌دهیم. برخی از مهم‌ترین ویژگی‌های حالت‌های همدوس به قرار زیر می‌باشند:

۱- یک حالت همدوس با تعریف (۴۰) بهنجار است:

$$\langle \lambda | \lambda \rangle = 1 \quad (۴۱)$$

۲- تعداد متوسط کوانتا در حالت همدوس $|\lambda\rangle$ برابر است با خود λ :

$$\langle \lambda | \hat{N} | \lambda \rangle = \lambda \quad (42)$$

که در آن $\hat{N} = \hat{a}\hat{a}^\dagger$ عملگر شمارش می‌باشد.

۳- متوسط انرژی در حالت همدوس $|\lambda\rangle$ از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\langle \lambda | \mathbb{H} | \lambda \rangle = \hbar\omega \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \quad (43)$$

۴- هر حالت همدوس را می‌توان از حالت خلاء $|0\rangle$ بدست آورد:

$$|\lambda\rangle = \hat{D}(\lambda)|0\rangle \quad (44)$$

که در آن $\hat{D}(\lambda)$ عملگر جابجایی نامیده می‌شود و به فرم زیر است:

$$\hat{D}(\lambda) \triangleq \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \exp(\Omega \hat{a}^\dagger) \quad (45-1)$$

$$\Omega = \pm\sqrt{\lambda} e^{-j\varphi} \quad (45-2)$$

می‌توان نشان داد که اگر میدان یک لیزر را در نظر بگیریم و مقدار چشم‌داشتی آن در زمان کاملاً سینوسی باشد، آنگاه توزیع آن ضرایب بسط آن بر روی توابع پایه‌ی نوسانگر هماهنگ باید به فرم پواسون باشد. پس با تقریب صرف نظر از گسیل خود به خودی، خروجی لیزر ایده‌آل یک حالت همدوس خواهد بود. از نقطه نظر تئوری مفهوم توزیع پواسون آنست که تعداد فوتونهای تابش شده از کاواک لیزر در هر فاصله زمانی مانند Δt ثابت نیست و با گذشت زمان مانند یک توزیع پواسون تغییر می‌نماید، که محصول فرآیندی فاقد حافظه (اصطلاحاً مارکوفی) است، بدین مفهوم که کاواک لیزر قادر نیست به خاطر بیاورد چند فوتون در Δt قبلی تابش کرده است. لازم به یادآوری است که می‌توان نشان داد (تمرین ۸) چنانچه تعداد فوتونهای گسیل شده در واحد زمان همواره ثابت باشد آنگاه بر خلاف انتظار مقدار چشم‌داشتی میدان خروجی لیزر صفر خواهد شد.

آنالیز تقویت پارامتری در بلور فوتونی

برای مولفه‌های سیگنال و دمش میدان که به ترتیب با زیرنویسهای s و p مشخص می‌شوند داریم:

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) = jA \left\{ \mathbf{E}_p(\mathbf{r}) e^{-2j\omega_s t + j\theta} - \mathbf{E}_p^*(\mathbf{r}) e^{2j\omega_s t - j\theta} \right\} \quad (46-1)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_s(\mathbf{r}, t) = j \sqrt{\frac{\hbar \omega_s}{2\epsilon_0 V}} \left\{ \hat{a}_s(0) \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) e^{-j\omega_s t} - \hat{a}_s^\dagger(0) \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}) e^{j\omega_s t} \right\} \quad (46-2)$$

همانطور که در بالا دیده می‌شود:

- میدان‌ها را تک بسامد فرض کرده‌ایم،
- میدان سیگنال و دمش را مُد ویژه‌ی بلور فوتونی فرض کردیم، و بنابراین انتشار آنها بدون پراکنش و انعکاس امکان‌پذیر است، و
- از اثرات کوانتومی میدان دمش بدلیل شدت زیاد آن صرف نظر و آنرا به شکل کلاسیک توصیف می‌کنیم.

دقت نمایید که داریم (چرا؟):

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathbb{H}, \hat{a}] = -j\omega_s \hat{a} \quad (47-1)$$

$$\frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathbb{H}, \hat{a}^\dagger] = j\omega_s \hat{a}^\dagger \quad (47-2)$$

اما معادلات (47) دارای حل زیر هستند:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0) e^{-j\omega_s t} \quad (48-1)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0) e^{j\omega_s t} \quad (48-2)$$

که وابستگی زمانی عملگرهای فنا و بقا را نشان می‌دهد.

حال با رجوع به تمرین ۶ فرض می‌کنیم که در زمان اولیه برای حالت همدوس $|\alpha\rangle$ داشته باشیم:

$$\hat{a}_s(0)|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (49)$$

اکنون باید بررسی کنیم که این حالت در باریکه‌ی دمش و سیگنال چه قطبیدگی را در محیط غیر خطی مرتبه‌ی دو القا می‌کند. این قطبیدگی تولید یک میدان الکتربیکی می‌نماید که همراه با دمش،

یک قطبیدگی مرتبه دوم ایجاد می‌کند. بر همین منوال از میدان مرتبه n م قطبیدگی مرتبه $(n+1)$ م القا می‌شود و این سلسله به همین شکل ادامه پیدا می‌کند.

حال قطبیدگی مرتبه صفر را در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$\hat{\mathbf{P}}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \left\{ \chi^{(2)}(\mathbf{r}) \right\} : \left\{ \mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}_s(\mathbf{r}, t) \right\}^2 \quad (50)$$

در اینجا $\left\{ \chi^{(2)}(\mathbf{r}) \right\}$ تانسور نفوذپذیری غیر خطی مرتبه‌ی دو است که دارای رتبه‌ی سه می‌باشد. به علاوه عملگر: برای نمایش ضرب داخلی بکار رفته است. با صرف نظر از جملات کلاسیک \mathbf{E}_p^2 و ضعیف $\hat{\mathbf{E}}_s^2$ ، و با نمایش تانسوری می‌توان نوشت:

$$\hat{P}_i^{(0)}(\mathbf{r}, t) \approx 2\chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}) E_{p_j}(\mathbf{r}, t) \hat{E}_{s_k}(\mathbf{r}, t) \quad (51)$$

که به فرم زیر ساده می‌شود:

$$\hat{P}_i^{(0)}(\mathbf{r}, t) \approx 2A \sqrt{\frac{\hbar\omega_s}{2\varepsilon_0 V}} \chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}) \times \left\{ E_{p_j}(\mathbf{r}) E_{s_k}^*(\mathbf{r}) \hat{a}_s^\dagger(0) e^{-j\omega_s t + j\theta} - E_{p_j}^*(\mathbf{r}) E_{s_k}(\mathbf{r}) \hat{a}_s(0) e^{j\omega_s t - j\theta} \right\} \quad (52)$$

حال میدان الکتریکی کل که قطبیدگی کل \mathbf{P} را در بلور فوتونی القا می‌کند را با \mathbf{E}_{ind} نشان می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}_{ind} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{ind}^{(1)} + \mathbf{E}_{ind}^{(2)} + \dots \quad (53)$$

اکنون $\mathbf{P}^{(0)}$ را به عنوان \mathbf{P}^{ext} در نظر گرفته و میدان القایی را مجدداً محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{E}_{ind}^{(1)} = j l \sqrt{\frac{\hbar\omega_s}{2\varepsilon_0 V}} \left\{ \beta \mathbf{E}_s(r) \hat{a}_s^\dagger(0) e^{-j\omega_s t + j\theta} - \beta^* \mathbf{E}_s^*(r) \hat{a}_s(0) e^{j\omega_s t - j\theta} \right\} \quad (54)$$

در اینجا l طول برهمکنش دو باریکه‌ی دمش و سیگنال در بلور فوتونی است، و:

$$\beta = \frac{AF\omega_s}{\varepsilon_0 v_g} \quad (55-1)$$

که در آن v_g سرعت گروه و F میانگین $\left\{ \chi^{(2)}(\mathbf{r}) \right\}$ نسبت به توزیع مدها می‌باشد:

$$F \triangleq \frac{1}{V} \iiint \chi^{(2)}_{ijk}(\mathbf{r}) E_{s_i}^*(\mathbf{r}) E_{p_j}(\mathbf{r}) E_{s_k}^*(\mathbf{r}) d^3r \quad (55-2)$$

به طور مشابه $\hat{\mathbf{P}}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ را بدست می‌آوریم:

$$\hat{\mathbf{P}}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \chi^{(2)}(\mathbf{r}) : \{ \mathbf{E}_p(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_{ind}^{(1)}(\mathbf{r}, t) \}^2 \quad (56)$$

یا:

$$\hat{P}_i^{(1)}(\mathbf{r}, t) = 2Al \sqrt{\frac{\hbar\omega_s}{2\varepsilon_0 V}} \chi^{(2)}_{ijk}(\mathbf{r}) \left\{ \beta^* E_{s_j}^*(\mathbf{r}) E_{p_k}(\mathbf{r}) \hat{a}_s(0) e^{-j\omega_s t} + \beta E_{s_j}(\mathbf{r}) E_{p_k}^*(\mathbf{r}) \hat{a}_s^\dagger(0) e^{j\omega_s t} \right\} \quad (57)$$

برای $\hat{\mathbf{E}}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ نیز به طریق مشابه داریم:

$$\hat{\mathbf{E}}_{ind}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{j|\beta|^2 l^2}{2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_s}{2\varepsilon_0 V}} \{ \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \hat{a}_s(0) e^{-j\omega_s t} - \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}) \hat{a}_s^\dagger(0) e^{j\omega_s t} \} \quad (58)$$

با توجه به رابطه‌ی (۵۳) میدان را محاسبه می‌کنیم. نتیجه عبارتست از:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = j \sqrt{\frac{\hbar\omega_s}{2\varepsilon_0 V}} \{ \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \hat{b}(0) e^{-j\omega_s t} - \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}) \hat{b}^\dagger(0) e^{j\omega_s t} \} \quad (59)$$

که در آن عملگرهای تعمیم یافته \hat{b} و \hat{b}^\dagger با کمک استقراء به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{b}(0) \triangleq \left\{ 1 + \frac{|\beta|^2 l^2}{2} + \frac{|\beta|^4 l^4}{4} + \dots \right\} \hat{a}_s(0) + e^{j(\theta+\varphi)} \left\{ |\beta|l + \frac{|\beta|^3 l^3}{3!} + \frac{|\beta|^5 l^5}{5!} + \dots \right\} \hat{a}_s^\dagger(0) \quad (60-1)$$

$$\hat{b}^\dagger(0) \triangleq \left\{ 1 + \frac{|\beta|^2 l^2}{2!} + \frac{|\beta|^4 l^4}{4!} + \dots \right\} \hat{a}_s^\dagger(0) + e^{-j(\theta+\varphi)} \left\{ |\beta|l + \frac{|\beta|^3 l^3}{3!} + \frac{|\beta|^5 l^5}{5!} + \dots \right\} \hat{a}_s(0) \quad (60-2)$$

اما روابط (۶۰) را می‌توان به فرم ساده‌تر زیر هم نوشت:

$$\hat{b}(0) \triangleq \cosh(|\beta|l) a_s(0) + e^{j(\theta+\varphi)} \sinh(|\beta|l) a_s^\dagger(0) \quad (61-1)$$

$$\hat{b}^\dagger(0) \triangleq \cosh(|\beta|l) a_s^\dagger(0) + e^{-j(\theta+\varphi)} \sinh(|\beta|l) a_s(0) \quad (61-2)$$

یا:

$$\begin{bmatrix} \hat{b}(0) \\ \hat{b}^\dagger(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(|\beta|l) & e^{j(\theta+\varphi)} \sinh(|\beta|l) \\ e^{-j(\theta+\varphi)} \sinh(|\beta|l) & \cosh(|\beta|l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_s(0) \\ \hat{a}_s^\dagger(0) \end{bmatrix} \quad (۶۲)$$

می‌توان دید (تمرین ۱۲) که

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1 \quad (۶۳)$$

به بیان دیگر جبر عملگرهای فنا و بقای جدید کاملاً به جبر عملگرهای فنا و بقای قبلی شباهت دارد. به این تبدیل خاص که جبر عملگرهای فنا و بقا را عوض نمی‌کند، تبدیل بوگولیوبوف می‌گوییم. به عبارت دیگر می‌توان گفت که $(\hat{b}, \hat{b}^\dagger)$ نگاشتی هم‌ریخت از $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ است.

حال هر میدان الکتریکی مانند $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ را همواره می‌توان به دو جزء سینوسی و کسینوسی تفکیک کرد که با هم ۹۰° اختلاف فاز دارند:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2j} \{ \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega_s t} - \mathcal{E}^*(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_s t} \} \quad (۶۴-۱)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega_s t} + \mathcal{E}^*(\mathbf{r}, t) e^{j\omega_s t} \} \quad (۶۴-۲)$$

در نتیجه برای میدان الکتریکی (۵۹) خواهیم داشت:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_s}{\epsilon_0 V}} \{ \hat{q} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \hat{p} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) \} \quad (۶۵)$$

که در آن:

$$\hat{p} = \frac{j}{2} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \quad (۶۶-۱)$$

$$\hat{q} = \frac{1}{2} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \quad (۶۶-۲)$$

\mathbf{E}_1 و \mathbf{E}_2 نسبت به هم ۹۰° اختلاف فاز دارند و چون عملگرهای آنها سازگار نیستند (تمرین ۱۳)، اگر یکی چگالیده شود دیگری باز خواهد شد.

در حالت خاصی که $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ باشد، خواهیم داشت:

$$\Delta q = \frac{1}{2} e^{\beta l} \quad (۶۷-۱)$$

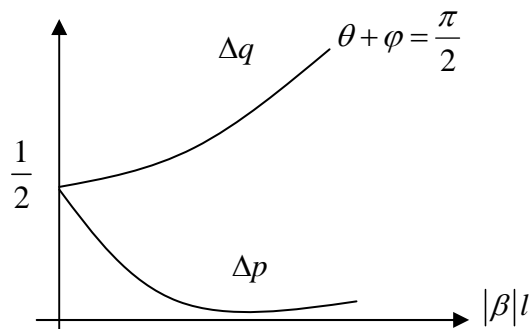
$$\Delta p = \frac{1}{2} e^{-\beta l} \quad (۶۷-۲)$$

و اگر $\theta + \varphi = -\frac{\pi}{2}$ باشد، خواهیم داشت:

$$\Delta q = \frac{1}{2} e^{-\beta l} \quad (۶۸-۱)$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} e^{\beta l} \quad (۶۸-۲)$$

دقت کنید که در هر حال $\Delta p \Delta q = \frac{1}{4}$ برقرار است، یعنی موج در کمینه‌ی عدم قطعیت باقی خواهد ماند.



شکل ۲- تغییرات در واریانس دو جزء متعامد موج سیگنال پس از تقویت پارامتری.

در پایان لازم به یادآوری است که این آنالیز به شرط تطبیق امپدانس فضایی به فرم $\kappa_p = \kappa_s + \mathbf{G}$ احتیاج دارد تا معنی‌دار باشد. به علاوه می‌توان نشان داد که اینجا \mathbf{G} هر بردار شبکه‌ی معکوس می‌تواند باشد. به بیان دیگر حضور تناوب در شبکه‌ی بلور فوتونی امکان برقراری شرط تطبیق امپدانس فضایی را بسیار آسان‌تر نموده است.

تولید حالات چگالیده

یک نوسان ساز محلی را که در واقع یک لیزر پایدار با شدت خروجی زیاد می باشد در نظر بگیرید:

$$\xi_{LO}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon}} \left[\mathbf{E}_{LO}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_{LO}) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{E}_{LO}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (۶۹)$$

بخاطر شدت خیلی زیاد میانگین زمانی آن $\langle \mathbf{E}_{LO}(\mathbf{r}) \rangle \equiv 0$ است. برای میدان الکتریکی داریم:

$$\mathbf{E}_{LO}(\mathbf{r}) \triangleq \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\varepsilon}} \mathbf{E}_{LO}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_{LO}) \triangleq \mathbf{E}_{LO}^+(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_{LO}^-(\mathbf{r}, t) \quad (۷۰)$$

مطابق شکل ۳ برای میدانهای ۱ و ۲ داریم:

$$\hat{\mathbf{E}}_1 = \frac{\xi_{LO} - \hat{\xi}_s}{\sqrt{2}} \equiv \hat{\mathbf{E}}_1^+ + \hat{\mathbf{E}}_1^- \quad (۷۱-۱)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_2 = \frac{\xi_{LO} + \hat{\xi}_s}{\sqrt{2}} \equiv \hat{\mathbf{E}}_2^+ - \hat{\mathbf{E}}_2^- \quad (۷۱-۲)$$

می توان نشان داد [۱] که عملگرهای جریان برای آشکارسازهای نشان داده شده عبارتند از:

$$\hat{I}_1 = \frac{2e\sigma_{\text{det}}}{\hbar\omega} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{E}}_1^- \cdot \hat{\mathbf{E}}_1^+ \quad (۷۲-۱)$$

$$\hat{I}_2 = \frac{2e\sigma_{\text{det}}}{\hbar\omega} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{E}}_2^- \cdot \hat{\mathbf{E}}_2^+ \quad (۷۲-۲)$$

که در آن e بار الکترون و σ_{det} سطح مقطع آشکارساز می باشند. آنگاه بر مبنای (۷۲) می توان خروجی

آشکارساز هومودین را یافت که عبارتست از:

$$I(\varphi_{LO}) = I_1(t) - I_2(t) \propto [\hat{\chi}_1(t) \sin \varphi + \hat{\chi}_2(t) \cos \varphi] \quad (۷۳)$$

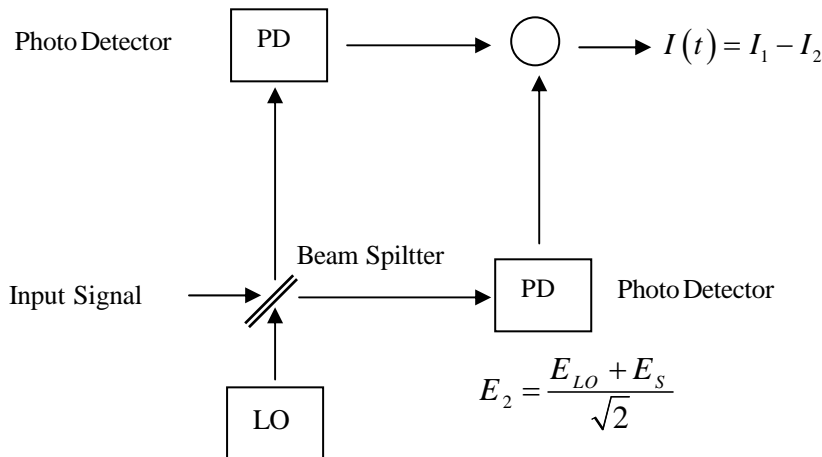
که در آن:

$$\varphi = \varphi_{LO} - \frac{\pi}{4} \quad (۷۴-۱)$$

و نیز رابطه‌ی بین $\hat{\chi}_1(t)$ و $\hat{\chi}_2(t)$ و $\hat{\mathbf{E}}_s^\pm$ عبارتست از:

$$\hat{\mathbf{E}}_s^+ = [\hat{\mathbf{E}}_s^-]^\dagger = -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon}} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) [\hat{\chi}_2(t) - j \hat{\chi}_1(t)] e^{-j\pi/4} e^{-j\omega t} \quad (۷۴-۲)$$

حلقه PLL روی جمله‌ی آن قفل کرد و جمله‌ی دوم را که دارای نوفه‌ی بیش از حد معمول کوانتومی است از بین برد. در شکل ۳ نمودار ساده‌ای از چگونگی تولید حالات چگالیده دیده می‌شود. برای توضیحات بیشتر به [۲] مراجعه نمایید.



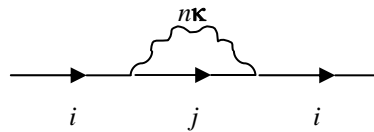
شکل ۳- آشکارساز متوازن همودین.

جابجایی لمب

در اتم هیدروژن بین ترازهای $2s$ و $2p$ اختلاف انرژی وجود دارد که به ساختار ریز اتم هیدروژن موسوم است و نشان داده شده است که ناشی از آثار الکتروستاتیک کوانتومی الکترون می‌باشد. در واقع الکترون ضمن حرکت در مدار می‌تواند مرتباً به خودی خود فوتون گسیل و دوباره جذب کند. توسط نمودار فاینمن این پدیده را می‌توان تشریح نمود (شکل ۴). البته این فوتون مجازی بوده و مستقیماً قابل مشاهده نخواهد بود. با این وجود، جذب و تابش فوتونهای مجازی توسط الکترون است که موجب ایجاد شکاف انرژی قابل اندازه‌گیری بین ترازهای $2s$ و $2p$ می‌گردد.

حال فرض کنید یک اتم هیدروژن را یک بلور فوتونی قرار داده‌ایم. از آنجاییکه تابع چگالی حالات در بلور فوتونی با خلاء بسیار متفاوت است، انتظار می‌رود آهنگ گسیل خودبخود فوتون توسط الکترون

هم بستگی بسیار شدید به بسامد داشته باشد و به عنوان مثال در گاف‌های فوتونی متوقف گردد. لذا پیش‌بینی میکنیم که میزان شکاف انرژی بین ترازهای $2s$ و $2p$ در اتم هیدروژنی که در بلور فوتونی قرار داده شده است نسبت به خلاء متفاوت باشد. در حقیقت با وجود آنکه هنوز از نظر آزمایشگاهی این پیش‌بینی تایید نشده است ولی همانطور که در اینجا خواهیم دید تئوری فرض ارایه شده را ثابت می‌کند [۳].



شکل ۴- دیاگرام فاینمن تابش و جذب فوتون $n\kappa$ در بلور فوتونی توسط الکترون.

حال هامیلتونی بر همکنش به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{H}' = \frac{(\hat{\mathbf{P}} - e\hat{\mathbf{A}})^2}{2m_e} - \frac{P^2}{2m_e} \approx \frac{-e}{2m_e} (\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{P}}) \quad (75)$$

که در آن $\hat{\mathbf{P}}$ عملگر اندازه حرکت الکترون و $\hat{\mathbf{A}}$ عملگر پتانسیل برداری فوتون در بلور فوتونی در پیمانه‌ی کولمب است. حال با توجه به روابط زیر

$$[\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{A}}] \neq 0 \quad (76-1)$$

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{A}} = \frac{\hbar}{j} \nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{P}} \quad (76-2)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \hat{\mathbf{A}}) = \nabla \varepsilon \cdot \hat{\mathbf{A}} + \varepsilon \nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} = 0 \quad (76-3)$$

برای هامیلتونی خواهیم داشت (چرا؟):

$$\hat{H}' = \frac{-e \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{P}}}{m_e} - j \frac{e\hbar}{2m_e} \hat{\mathbf{A}} \cdot (\nabla \log \varepsilon_r) \quad (77)$$

اما طول موج دوبروی الکترون به مراتب از ثابت شبکه بلور فوتونی کوچکتر است. بنابراین الکترون عملاً تغییرات و ناهمگنی گذردهی $\varepsilon(\mathbf{r})$ را حس نمی‌کند و لذا می‌توان از جمله دوم صرف نظر کرد. بنابراین:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}' &= \frac{-e}{m_e} \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{P}} = \\ &= \frac{-e}{m_e \sqrt{V}} \sum_{n\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_n(\mathbf{k})}} \left[\hat{a}_{n\mathbf{k}}(t) \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e) + \hat{a}_{n\mathbf{k}}^\dagger(t) \mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e) \right] \cdot \hat{\mathbf{P}} \end{aligned} \quad (78)$$

اما تغییر در انرژی دارای اجزاء مرتبه اول و دوم است که به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\Delta E_{2s-2p} = \Delta E_{2s-2p}^{(1)} + \Delta E_{2s-2p}^{(2)} + \dots \quad (79)$$

جابجایی غیر نسبیتی مرتبه اول $\Delta E_{2s-2p}^{(1)} \approx 1.05 \text{ GHz}$ در اثر حضور بلور فوتونی تغییر نمی‌کند و بنابراین تنها به محاسبه‌ی جابجایی مرتبه دو $\Delta E_{2s-2p}^{(2)}$ می‌پردازیم. از تئوری اختلال مرتبه ۲ بدست می‌آید:

$$\Delta E_{2s-2p}^{(2)} = \sum_j \sum_{n\mathbf{k}} \frac{\langle i | H' | j, n\mathbf{k} \rangle \langle j, n\mathbf{k} | H' | i \rangle}{E_i - E_j - \hbar \omega_n(\mathbf{k})} \quad (80)$$

که $|j, n\mathbf{k}\rangle = |j\rangle \otimes |n\mathbf{k}\rangle$ ترکیب حالت الکترون در حالت $|j\rangle$ و تک فوتون $|n\mathbf{k}\rangle$ است.

$$\Delta E_{2s-2p}^{(2)} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 m_e^2 V} \sum_j \sum_{n\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e) \cdot \langle i | \hat{\mathbf{P}} | j \rangle|^2}{\omega_n(\mathbf{k}) [\omega_i - \omega_j - \omega_n(\mathbf{k})]} \quad (81)$$

حال برای جابجایی مرتبه‌ی ۲ انرژی یک الکترون آزاد در بلور فوتونی داریم:

$$E_{free}^{(2)} = \sum_{\mathbf{G}} \sum_{n\mathbf{k}} \frac{|\langle \mathbf{P}_e | \mathbb{H}' | \mathbf{P}_e - \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{G}, n\mathbf{k} \rangle|^2}{\frac{P_e^2}{2m} - \left\{ \frac{1}{2m} [\mathbf{P}_e - \hbar(\mathbf{k} + \mathbf{G})]^2 + \hbar\omega_n(\mathbf{k}) \right\}} \quad (82)$$

که در آن $|\mathbf{P}_e - \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{G}, n\mathbf{k}\rangle$ ترکیب حالت الکترون با $|\mathbf{P}_e - \hbar\mathbf{k} - \hbar\mathbf{G}\rangle$ و تک فوتون $|n\mathbf{k}\rangle$ است.

لذا با در نظر گرفتن آنکه تقریباً $\hbar\mathbf{k} \ll P_e$ و $\hbar\omega_n(\mathbf{k}) \ll \frac{P_e^2}{2m}$ برقرارند (چرا؟! خواهیم داشت:

$$E_{free}^{(2)} \approx \frac{-e^2}{2\epsilon_0 m_e^2 V} \sum_{n\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e) \cdot \hat{\mathbf{P}}|^2}{\omega_n^2(\mathbf{k})} \quad (83)$$

اکنون جابجایی را برای یک شبه هیدروژن با عدد اتمی Z که فقط یک الکترون دارد بدست می‌آوریم. اگر به عنوان یک تقریب برای بلور فوتونی گاف مستقیم در نقطه Γ و باند همسانگرد بیضوی در نظر بگیریم در نوار هدایت یا نوار هوا خواهیم داشت:

$$\hbar\omega(\mathbf{k}) = \hbar\omega_c + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m_c} \quad (84)$$

که در آن ω_c بسامد لبه گاف و m_c جرم موثر فوتون می‌باشد:

$$m_c^{-1} = \hbar^{-2} \nabla_{\mathbf{k}} \nabla_{\mathbf{k}} \omega|_{\mathbf{k}=\Gamma} \quad (85)$$

می‌توان نشان داد که چگالی حالات در باند هوا برای گاف همسانگرد عبارتست از:

$$D(\omega) = \frac{V}{\pi^2} \sqrt{\frac{m_c^3 (\omega - \omega_c)}{2\hbar^3}}, \quad \omega \geq \omega_c \quad (86)$$

همچنین به سادگی می‌توان دید که مقدار میانگین ضرب داخلی دو بردار با راستاهای کاتوره‌ای عبارتست از:

$$\overline{|\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e) \cdot \hat{\mathbf{P}}|^2} = \frac{1}{3} |\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e)|^2 |\hat{\mathbf{P}}|^2 \quad (87)$$

بنابراین مقدار چشم‌داشتی جابجایی انرژی سطح i ام توسط رابطه‌ی زیر بخاطر حضور یک اتم در بلور فوتونی داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta E_i^{(2)} &= \frac{-e^2}{2\epsilon_0 m_e^2 V} \sum_{n\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e) \cdot \hat{\mathbf{P}}|^2}{\omega_n^2(\mathbf{k})} - \sum_j \sum_{n\mathbf{k}} \frac{\langle i | \mathbb{H}' | j, n\mathbf{k} \rangle \langle j, n\mathbf{k} | \mathbb{H}' | i \rangle}{E_i - E_j - \hbar\omega_n(\mathbf{k})} \\ &\approx \frac{-e^2 |\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e)|^2}{6\epsilon_0 m_e^2 V} \sum_j \sum_{n\mathbf{k}} \frac{|P_{ij}|^2}{\omega_n [\omega_i - \omega_j - \omega_n(\mathbf{k})]} + \sum_{n\mathbf{k}} \frac{|P_{ii}|^2}{\omega_n^2(\mathbf{k})} \end{aligned} \quad (88)$$

که در آن داریم:

$$P_{ij} = \langle i | \hat{\mathbf{P}} | j \rangle \quad (89-1)$$

$$P_{ii}^2 = \langle i | P^2 | i \rangle \quad (۸۹-۲)$$

با توجه به رابطه فوق، جابجایی انرژی به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\Delta E_i^{(2)} = \frac{e^2 |\mathbf{E}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}_e)|^2}{6\epsilon_0 m_e^2 V} \sum_j \sum_{n\mathbf{k}} \frac{(\omega_i - \omega_j) |P_{ij}|^2}{\omega_n(\mathbf{k}) [\omega_i - \omega_j - \omega_n(\mathbf{k})]} \quad (۹۰)$$

حال با تعریف بسامد معادل گذار بین اربیتال‌های $1s$ و $2p$ بدست می‌آید:

$$\omega_{21} \triangleq \omega_2 - \omega_1 \quad (۹۱)$$

اگر رابطه‌ی چگالی حالت‌ها را از (۸۶) بکار ببریم همواره می‌توان تبدیل زیر را انجام داد:

$$\sum_{n\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_n^2(\mathbf{k}) [\omega_{21} - \omega_n(\mathbf{k})]} = \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{D(\omega)}{\omega^2 (\omega_{21} - \omega)} d\omega = \frac{-V}{2\pi} \sqrt{\frac{m_c^3}{2\hbar\omega_c}} \frac{1}{(\sqrt{\omega_c} + \sqrt{\Omega})^2} \quad (۹۲)$$

که در آن

$$\Omega \triangleq \omega_c - \omega_{21} \quad (۹۳)$$

برای جابجایی انرژی داریم:

$$\Delta E_2^{(2)} = \frac{-e^2}{12\pi\epsilon_0 m_e^2} \sqrt{\frac{m_c^3}{2\hbar\omega_c}} \frac{|\mathbf{E}_c(\mathbf{r}_e)|^2}{(\sqrt{\omega_c} + \sqrt{\Omega})^2} \sum_j (\omega_i - \omega_j) |P_{ij}|^2 \quad (۹۴)$$

به همین شکل برای عبارت جمع می‌توان نوشت:

$$\sum_j (\omega_i - \omega_j) |P_{ij}|^2 = \frac{1}{\hbar} \sum_j \left(\mathbb{H}_a \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{P}} \mathbb{H}_a \right)_{ij} \cdot \mathbf{P}_{ji} \quad (۹۵)$$

اگر هامیلتونی اتمی به شکل زیر باشد:

$$\mathbb{H}_a = \frac{P^2}{2m} + \varphi(\mathbf{r}) \quad (۹۶-۱)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon r} \quad (۹۶-۲)$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\sum_j (\omega_i - \omega_j) |\mathbf{P}_{ij}|^2 = \frac{1}{\hbar} \left[\sum_j (\varphi \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{P}} \varphi) \cdot \hat{\mathbf{P}} \right]_{ii} =$$

$$-\frac{\hbar}{2} \int |\psi_i(\mathbf{r})|^2 \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) d^3r = -\frac{Ze^2 \hbar |\psi_i(0)|^2}{2\epsilon_0} \quad (97)$$

که در آن از رابطه‌ی $\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = \frac{Ze^2}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r})$ استفاده کرده‌ایم. برای آریتال‌های s اگر بهنجار شده باشند و در سطح n نام باشند:

$$\psi_n|_s(0) = \frac{Z^3}{\pi n^3 a_B^3} \quad (98-1)$$

$$\psi_n|_p(0) = 0 \quad (98-2)$$

که در آن شعاع بوهر است. لذا در پایان بدست می‌آوریم:

$$\Delta E_{2s-2p}^{(2)} = \frac{e^4 Z^4}{192 \pi^2 \epsilon_0^2 a_B^3 m_e^2} \sqrt{\frac{m_c^3}{2\hbar\omega_c}} \frac{|\mathbf{E}_c(\mathbf{r}_e)|^2}{(\sqrt{\omega_c} + \sqrt{\Omega})^2} \quad (99)$$

به عنوان مثال برای اتم هیدروژن با $Z=1$ و $\omega_c = \omega_{21} = 1.53 \times 10^{16} \text{ sec}^{-1}$ خواهیم داشت

$$m_c = \frac{\hbar\pi^2}{2\omega_c a^2} \approx 3.59 \times 10^{-35} \text{ Kg} \quad \text{و} \quad \frac{\omega_c}{2\pi c} \sim 0.25$$

بنابراین اگر $|\mathbf{E}_c(\mathbf{r}_e)|^2 \approx 1$ باشد، برای جابجایی انرژی خواهیم داشت:

$$\Delta E_{2s-2p}^2 = \frac{1}{6} \alpha^5 m_e c^2 \approx 0.43 \text{ GHz} \quad (100)$$

مراجع

- [1] A. Yariv, *Quantum Electronics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [2] W. P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley-VCH, Berlin, 2000.
- [3] K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer, Berlin, 2001.

تمرین

- ۱- روابط (۱۶) و (۱۸) را با کمک روابط ماقبل بدست آورید.
- ۲- درستی رابطه (۲۸) را با استفاده از تعریف چگالی حالات بلور فوتونی تحقیق نمایید.
- ۳- عملگر میدان مغناطیسی $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ را دست آورید.
- ۴- نشان دهید (۳۴) در فضای p همواره تابعی بهنجار است.
- ۵- نشان دهید شرط بهنجار بودن (۳۸) برای تابع (۳۷) با انتخاب (۳۹) برقرار است. آیا این تنها جواب ممکن مجموعه‌ی ضرایب C_n برای بهنجار بودن است؟
- ۶- ثابت کنید که $|\lambda\rangle$ یک کت ویژه عملگر فنا \hat{a} است. مقدار ویژه‌ی آن چیست؟
- ۷- ویژگی‌های حالات همدوس را در روابط (۴۱) تا (۴۴) نشان دهید.
- ۸- عملگر میدان الکتریکی بدون بُعد را برای یک مُد تنها با کمک عملگر زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{j}{\sqrt{2}} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) (e^{i\theta} \hat{a} - e^{-i\theta} \hat{a}^\dagger)$$

که در آن θ فازی است ثابت و $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ در مکان بهنجار است. نشان دهید مقدار چشم‌داشتی میدان الکتریکی نسبت به حالت خالص نوسانگر هماهنگ $\langle n | \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) | n \rangle = \langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \rangle$ از این حالت صفر است. آیا مقدار چشم‌داشتی شدت میدان $\langle n | \hat{E}^2(\mathbf{r}, t) | n \rangle = \langle \hat{E}^2(\mathbf{r}, t) \rangle$ هم صفر است؟ توجیه فیزیکی آن چیست؟

- ۹- اگر $|\lambda\rangle$ یک حالت همدوس باشد، ضمن رجوع به تمرین ۸ نشان دهید مقدار چشم‌داشتی میدان الکتریکی نسبت به حالت همدوس $\langle \lambda | \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) | \lambda \rangle = \langle \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \rangle$ تابعی کاملاً سینوسی در زمان است. بسامد، فاز و دامنه‌ی آن را بیابید. نتیجه را برای عملگر پتانسیل برداری بدون

$$\text{بُعد } \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \frac{j}{\sqrt{2}} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) (e^{i\theta} \hat{a} + e^{-i\theta} \hat{a}^\dagger) \text{ تکرار کنید.}$$

- ۱۰- درستی رابطه‌ی (۵۸) را بیازمایید.
- ۱۱- روابط (۶۰) را با استقراء و تکرار حلقه‌ی محاسبات روابط قبلی محاسبه نمایید.

$$-۱۲ \quad \text{ثابت کنید } [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1.$$

$$-۱۳ \quad \text{با توجه به تعریف عملگرهای } \hat{q} = \frac{1}{2}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \text{ و } \hat{p} = \frac{j}{2}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \text{ نشان دهید که}$$

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -\frac{j}{2}$$

$$-۱۴ \quad \text{روابط زیر را اثبات کنید:}$$

$$(\Delta q)^2 = \frac{1}{4} \left\{ \cosh^2(|\beta|l) + \sinh^2(|\beta|l) + 2 \cos\left(\theta + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cosh(|\beta|l) \sinh(|\beta|l) \right\}$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{1}{4} \left\{ \cosh^2(|\beta|l) + \sinh^2(|\beta|l) - 2 \cos\left(\theta + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cosh(|\beta|l) \sinh(|\beta|l) \right\}$$

پیوست الف

فضای هیلبرت و جبر عملگرها

در این پیوست به آرایه‌ی مفاهیم و قضایای مربوط به فضای هیلبرت، جبر عملگرها، و فضای پراکت می‌پردازیم [۱]. ابتدا تعاریف مقدماتی معرفی می‌شوند:

(۱) کت: یک تابع موج، یا بردار حالت، و یا به سادگی یک حالت فیزیکی سیستم را کت می‌نامیم، که با نماد $|\alpha\rangle$ نمایش داده می‌شود.

(۲) فضای کت: مجموعه‌ی تمامی حالات ممکن یک سیستم را فضای کت $\mathcal{K} = \{|\alpha\rangle; \forall \alpha\}$ می‌نامیم. همواره می‌توان بین فضای کت‌ها، فضای توابع، و فضای ماتریس‌های مربع با بُعد فضای کت نگاشت‌های یک به یک تعریف نمود.

(۳) اعمال پایه:

(۱-۳) جمع دو کت در یک مجموعه به یک کت دیگر تبدیل می‌گردد:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{K} : \exists ! \gamma \in \mathcal{K} ; |\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$$

(۲-۳) ضرب نرده‌ای یک عدد در کت یک کت دیگر خواهد بود:

$$\forall c \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathcal{K} : \exists ! \gamma \in \mathcal{K} ; c|\alpha\rangle = |\alpha\rangle c = |\gamma\rangle$$

لازم به ذکر است که در مسایل فیزیکی معمولاً چنانچه $c \neq 0$ باشد، آنگاه $|\alpha\rangle$ و $c|\alpha\rangle$ به یک حالت دلالت دارند و آنها را هم ارز می‌نامیم.

(۴) کت تهی: از ضرب عدد صفر در هر کت دلخواه بدست می‌آید و با $|0\rangle$ نمایش داده می‌شود:

$$\forall \alpha \in \mathcal{K}; |0\rangle = |0\rangle$$

(۵) خطی بودن: فضای کت‌ها نسبت به عمل‌های جمع و ضرب نرده‌ای دارای ویژگی خطی زیر است:

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathcal{K}; c_1|\alpha\rangle + c_2|\alpha\rangle = (c_1 + c_2)|\alpha\rangle$$

از اینجا بلافاصله می‌توان دید که کت وارون نسبت به عمل جمع از ضرب عدد -1 در کت اصلی بدست می‌آید:

$$\forall \alpha \in \mathcal{K}; \exists! \beta \in \mathcal{K}; |\alpha\rangle + |\beta\rangle = |0\rangle; |\alpha\rangle = -|\beta\rangle$$

(۶) پرا: برای هر کتی مانند $|\alpha\rangle$ یک دوگان منحصر به فرد موسوم به پرا تعریف می‌کنیم و با نماد $\langle \alpha |$ نمایش می‌دهیم. فضای دربرگیرنده پراها عبارتست از $\mathcal{B} = \{\langle \alpha |; \forall \alpha\}$. این رابطه یک به یک را می‌توان نوشت $\langle \alpha | \leftrightarrow |\alpha\rangle$. در حالت کلی این نگاشت یک به یک به گونه‌ای تعریف می‌شود که داشته باشیم:

$$c_\alpha |\alpha\rangle + c_\beta |\beta\rangle \leftrightarrow c_\alpha^* \langle \alpha | + c_\beta^* \langle \beta |$$

(۷) ضرب داخلی: از ضرب داخلی یک پرا مانند $\langle \alpha |$ و یک کت مانند $|\beta\rangle$ یک پراکت کامل $\langle \alpha | \beta \rangle \equiv \langle \alpha | \beta \rangle$ بدست می‌آید که در آن برا همواره در سمت چپ نوشته می‌شود. فرض می‌کنیم همواره از ضرب داخلی یک عدد مختلط بدست می‌آید. پس به عنوان فرض‌های سازگار می‌پذیریم که رابطه‌ی زیر برقرار باشند:

$$\forall \alpha \in \mathcal{K}, \beta \in \mathcal{B}; \langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle^*$$

پس $\langle \alpha | \alpha \rangle$ همواره حقیقی است (چرا؟). نیز می‌پذیریم که ضرب داخلی دارای ویژگی زیر است:

$$\forall \alpha \in \mathcal{K}; \langle \alpha | \alpha \rangle \geq 0$$

که در آن علامت تساوی تنها برای کت تهی برقرار است. توجه گردد که اگر برا در سمت راست مانند $|\alpha\rangle\langle\beta|$ نوشته شود، دلالت بر ضرب خارجی دارد که مفهومی کاملاً متفاوت خواهد بود و ذیلاً بدان اشاره خواهد شد. پس اصولاً ترتیب نوشتن براها و کتها کاملاً معنی دار و دارای اهمیت است. در مقایسه میتوان جای عدد در ضرب نرده‌ای را در هر سمتی از برا یا کت قرار داد.

به کمک ضرب داخلی می‌توان نگاشت‌های مورد اشاره در تعریف (۲) را یافت. به عنوان مثال از ضرب داخلی کت‌های $|\alpha\rangle$ و برای مکان $|x\rangle$ می‌توان به نمایش تابع ویژه‌ی موج در مکان $\alpha(x) = \langle x | \alpha \rangle$ رسید. در این صورت می‌نویسیم $\alpha(x) \doteq |\alpha\rangle$ و نماد \doteq بیانگر تناظر یک به یک خواهد بود.

(۸) کت‌ها و براهای متعامد: اگر برای دو کت (برا) دلخواه مانند $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ داشته باشیم $\langle \alpha | \beta \rangle = \langle \beta | \alpha \rangle = 0$ آنگاه آن دو کت (برا) را متعامد می‌نامند.

(۹) نُرم: نُرم یک کت یا برا مانند $|\alpha\rangle$ یا $\langle\alpha|$ تعریف می‌شود $\|\alpha\| \triangleq \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$. بنابراین تنها نُرم کت یا برای تهی برابر صفر خواهد بود. حال به ازای هر کت یا برای دلخواه $|\alpha\rangle$ یا $\langle\alpha|$ می‌توان هم‌ارزی مانند:

$$|\tilde{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}} |\alpha\rangle$$

$$\langle\tilde{\alpha}| = \frac{1}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}} \langle\alpha|$$

یافت به گونه‌ای که نُرم آنها برابر واحد باشد. در این صورت آنها را بهنجار می‌نامیم.

(۱۰) عملگرها: عملگرها بر روی کت‌ها فقط از سمت چپ و بر روی برا فقط از سمت راست اثر می‌کنند و آنها را به کت‌ها یا براهای جدید تصویر می‌نمایند:

$$\forall \alpha \in \mathcal{K}, \mathbb{A} \in \mathcal{A}; \mathbb{A}|\alpha\rangle \in \mathcal{K}$$

$$\forall \alpha \in \mathcal{B}, \mathbb{A} \in \mathcal{A}; \langle \alpha | \mathbb{A} \in \mathcal{B}$$

در اینجا $\mathcal{A} = \{\mathbb{A}; \forall \mathbb{A}\}$ مجموعه‌ی تمامی عملگرهای مانند \mathbb{A} است. دو عملگر مانند \mathbb{A} و \mathbb{B} یکسانند، اگر داشته باشیم:

$$\forall \alpha \in \mathcal{K}; \mathbb{A} | \alpha \rangle = \mathbb{B} | \alpha \rangle$$

(۱۱) عملگر تهی: عملگر \mathbb{A} را تهی می‌نامیم اگر و فقط اگر:

$$\forall \alpha \in \mathcal{K}; \mathbb{A} | \alpha \rangle = | 0 \rangle$$

عملگر تهی را معمولاً با $\hat{0}$ نمایش می‌دهیم.

(۱۲) عملگر همانی: عملگر \mathbb{A} را همانی می‌نامیم اگر و فقط اگر:

$$\forall \alpha \in \mathcal{K}; \mathbb{A} | \alpha \rangle = | \alpha \rangle$$

توجه کنید که $| \alpha \rangle$ دقیقاً به خودش تصویر می‌شود و نه به هم‌ارز آن. عملگر همانی را معمولاً با $\hat{1}$ نمایش می‌دهیم.

(۱۳) کت‌های ویژه، براهای ویژه، و مقادیر ویژه: در حالت کلی $| \alpha \rangle$ و $\mathbb{A} | \alpha \rangle$ ، یا $\langle \alpha | \mathbb{A}$ و $\langle \alpha |$ هم‌ارز نیستند، یعنی $\mathbb{A} | \alpha \rangle \neq c | \alpha \rangle$ و $\langle \alpha | \mathbb{A} \neq c \langle \alpha |$. اما برای هر عملگری مانند \mathbb{A} یک دسته کت‌های خاصی مانند $| a_n \rangle, n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که می‌توان نوشت:

$$\forall n; \mathbb{A} | a_n \rangle = a_n | a_n \rangle$$

در این شرایط $| a_n \rangle$ را کت ویژه و a_n را مقادیر ویژه‌ی عملگر \mathbb{A} می‌نامیم. توجه شود که تعداد کت‌های ویژه نمایانگر بُعد عملگر است. ضمناً گاه پیش می‌آید که به ازای دو یا چند کت ویژه تنها یک مقدار ویژه داریم. در این صورت عملگر \mathbb{A} را نسبت به آن مقدار ویژه تبهگن می‌نامیم و درجه‌ی تبهگنی هم عبارت خواهد بود از تعداد کت‌های ویژه‌ای که دارای مقدار ویژه‌ی یکسان هستند. طبق تعریف، براهای ویژه در رابطه‌ی

$$\forall n; \langle a_n | \mathbb{A}^\dagger = a_n^* \langle a_n |$$

صدق می‌کنند که در آن \mathbb{A}^\dagger دوگان هرمیتی عملگر \mathbb{A} نام دارد. بدیهی است که روابط دوگانگی زیر برقرارند:

$$\mathbb{A} \leftrightarrow \mathbb{A}^\dagger$$

$$|a_n\rangle \leftrightarrow \langle a_n|$$

از ضرب داخلی یک کت دلخواه $|\alpha\rangle$ و براهای پایه $\langle a_n|$ یک عملگر دلخواه مانند \mathbb{A} می‌توان به یک نمایش برداری یا ماتریس ستونی برای $|\alpha\rangle$ دست یافت، به گونه‌ای که $|\alpha\rangle \doteq \langle a_m|\alpha\rangle = \alpha_m$. به همین ترتیب یک عملگر دلخواه مانند \mathbb{B} با کمک کت‌ها و براهای ویژه‌ی عملگر دلخواه \mathbb{A} دارای تناظری یک به یک با یک ماتریس مربع مانند $\mathbb{B} \doteq \langle a_m|\mathbb{B}|a_n\rangle = b_{mn}$ است، که آنرا نمایش \mathbb{B} در فضای \mathbb{A} می‌نامیم.

(۱۴) عملگر هرمیتی: اگر $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ آنگاه \mathbb{A} را هرمیتی می‌نامیم.

(۱۵) عملگر یکانی: اگر $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^\dagger$ آنگاه \mathbb{A} را یکانی می‌نامیم.

(۱۶) عملگر خطی: یک عملگر مانند \mathbb{A} خطی است اگر و فقط اگر:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{K}; \mathbb{A}(c_\alpha|\alpha\rangle + c_\beta|\beta\rangle) = c_\alpha\mathbb{A}|\alpha\rangle + c_\beta\mathbb{A}|\beta\rangle$$

(۱۷) ضرب عملگرها: از پشت سر هم نوشتن عملگرها ضرب آنها بدست می‌آید که خود یک عملگر جدید خواهد بود:

$$\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{A}; \mathbb{A}\mathbb{B}, \mathbb{B}\mathbb{A} \in \mathcal{A}$$

در حالت کلی ضرب عملگرها جابجاپذیر نیست $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$ ، ولی طبق تعریف همواره دارای خاصیت اشتراک‌پذیری است:

$$\mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C}) = (\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}$$

در عمل مفهوم ضرب عملگرها هنگام اثر کردن آنها بر یک یا کت مشخص می‌شود:

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})|\alpha\rangle = \mathbb{A}(\mathbb{B}|\alpha\rangle) = \mathbb{A}\mathbb{B}|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (\langle\alpha|\mathbb{A})\mathbb{B} = \langle\alpha|\mathbb{A}\mathbb{B}$$

پس به عنوان یک قاعده‌ی کلی می‌توان از نوشتن پرانتزها در ضرب عملگرها صرف نظر نمود.

(۱۸) مجموعه‌ی متعامد کامل: می‌پذیریم که کت‌های ویژه یک عملگر هرمیتی مانند $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$ یک مجموعه‌ی متعامد کامل را می‌سازند، بدین مفهوم که هر کت دلخواهی مانند $|\alpha\rangle$ را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از کت‌های ویژه $|a_n\rangle$ عملگر \mathbb{A} نمایش داد

$$|\alpha\rangle = \sum_n \alpha_n |a_n\rangle, \text{ که در آن } \alpha_n = \langle a_n | \alpha \rangle \text{ است.}$$

(۱۹) تعریف فضای هیلبرت: فضای کت‌های \mathcal{H} را به همراه اعمال جمع کت، ضرب نرده‌ای عدد و کت، و ضرب داخلی کت و دوگان کت‌ها یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

$$\text{قضیه ۱: } (\mathbb{A}\mathbb{B})^\dagger = \mathbb{B}^\dagger \mathbb{A}^\dagger.$$

■ اثبات: به تمرین ۲ مراجعه شود.

قضیه ۲: مقادیر ویژه a_n یک عملگر هرمیتی مانند \mathbb{A} حقیقی بوده و کت‌های ویژه $|a_n\rangle$ غیر تبهگن آن متعامدند.

اثبات: چون $\langle a_m | \mathbb{A} | a_n \rangle = \langle a_m | (\mathbb{A} | a_n \rangle) = (\langle a_m | \mathbb{A}) | a_n \rangle$ $\forall m, n$ برقرار است پس:

$$a_n \langle a_m | a_n \rangle = a_m^* \langle a_m | a_n \rangle$$

حال اگر $|a_m\rangle$ و $|a_n\rangle$ تبهگن نباشند لزوماً $a_m \neq a_n$ و $m \neq n \Rightarrow a_m \neq a_n$ و $m = n \Rightarrow a_m = a_n$. حال

اگر حالت $m = n$ را برای کت غیر تهی $|a_n\rangle$ در نظر بگیریم بلافاصله نتیجه می‌شود

$a_m = a_m^*$. اگر $|a_n\rangle$ تهی باشد باز هم خواهیم داشت $a_m = a_m^* = 0$. پس مقادیر ویژه لزوماً

حقیقی هستند. در مرحله‌ی بعد اگر حالت $m \neq n$ را در نظر بگیریم با توجه به حقیقی بودن

مقادیر ویژه میتوان نوشت:

$$a_n \langle a_m | a_n \rangle = a_m \langle a_m | a_n \rangle$$

در این وضعیت تنها راه برقراری تساوی آنست که $\langle a_m | a_n \rangle = 0$ یا آنکه دو کت ویژه متعامد

■ باشند. این پایان اثبات قضیه است.

قضیه ۳: اگر دو عملگر جابجاپذیر باشند آنگاه دارای کت‌های ویژه مشترک خواهند بود.

■ اثبات: به تمرین ۸ مراجعه شود.

مراجع:

- [1] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Rev. Ed., Addison-Wesley, Reading, 1994, Chap. 1.

تمرین:

- ۱- نشان دهید ضرب خارجی یک برا و یک کت دلخواه مانند $|\beta\rangle\langle\alpha|$ همواره یک عملگر است.
- ۲- درستی قضیه ۱ را نشان دهید.
- ۳- آیا در حالت کلی نوشتن دو یا چند برا، یا دو یا چند کت پشت سر هم می‌تواند مجاز باشد؟ در صورت پاسخ مثبت برای آن مفهومی ارائه نمایید.
- ۴- در تعریف (۱۸) با کمک بسط $|\alpha\rangle$ ، تعریف α_n ، و تعریف عملگر همانی نشان دهید که کت‌ها و براهای ویژه یک عملگر هرمیتی همواره می‌توان یک عملگر همانی به شکل

$$\hat{1} = \sum_n |a_n\rangle\langle a_n|$$
 ساخت.
- ۵- در قضیه ۲ با کمک مثال نقض برای ماتریس‌های مربع (به جای عملگرها) و بردارهای ویژه (به جای کت‌های ویژه) نشان دهید اگر بردارهای ویژه تبهگن باشند لزوماً متعامد نیستند، ولی می‌توان مواردی را هم یافت که با وجود تبهگنی متعامد باقی می‌مانند.
- ۶- در قضیه ۲ نشان دهید که اگر کت‌های ویژه همگی بهنجار باشند می‌توان نوشت

$$\langle a_m | a_n \rangle = \delta_{mn}$$
 که در آن δ_{mn} دلتای کرونکر است.
- ۷- برای کت‌های ویژه دو عملگر هرمیتی مانند \mathbb{A} و \mathbb{B} نشان دهید عملگر $\mathbb{U} = \sum_n |b_n\rangle\langle a_n|$ یکانی است. نشان دهید نگاشتی که کت‌های ویژه \mathbb{A} و \mathbb{B} را به هم وصل می‌کند همان

$$\mathbb{U}|a_m\rangle = |b_m\rangle \text{ و } \mathbb{U}^\dagger|b_m\rangle = |a_m\rangle$$
 است.
- ۸- درستی قضیه ۳ را با کمک تمرین ۷ و ویژگی‌های عملگرهای یکانی نشان دهید.

۹- اگر درایه‌های نمایش ماتریسی b_{mn} یک عملگر \mathbb{B} را در فضای یک عملگر هرمیتی مانند \mathbb{A} داشته باشیم نگاشتی را نشان دهید که به کمک آن بتوان \mathbb{B} را از b_{mn} بدست آورد.

پیوست ب

برنامه‌هایی به زبان MATLAB برای محاسبه‌ی نوارهای بسامد

در این پیوست چهار برنامه بصورت جداگانه به زبان MATLAB برای محاسبه و ترسیم نوارهای باند بسامد ارائه شده است :

۱- SharifPWE_BZplot.m : این برنامه قادر به ترسیم ساختار باند فوتونی در پیرامون

ناحیه بریلوین غیر قابل کاهش برای بلور فوتونی مربعی دو بعدی با سوراخ‌های دایروی برای هر نسبت دلخواه ثابت گذردهی الکتریکی و شعاع و هر دو قطبش E و H می‌باشد.

۲- SharifPWE_BZplotTri.m : این برنامه همانند برنامه‌ی قبلی است با این تفاوت که

بلور فوتونی مثلثی را تحلیل می‌نماید.

۳- SharifPWE_3DplotE.m : این برنامه سطوح باند فوتونی برنامه‌ی ۱ را برای قطبش E

بطور کامل نمایش می‌دهد.

۴- SharifPWE_3DplotH.m : این برنامه سطوح باند فوتونی برنامه‌ی ۱ را برای قطبش H

بطور کامل نمایش می‌دهد.

در تمامی برنامه‌ها N تعداد امواج تخت صفحه‌ای برای بسط در هر راستا است (مثلاً ۳ الی ۷)؛ پس تعداد کل امواج برابر خواهد بود با $M = (2N + 1) \times (2N + 1)$. تعداد تقسیمات طولی در امتداد پیرامون ناحیه‌ی کاهش‌ناپذیر (مثلاً ۵ الی ۱۰)، r نسبت شعاع به ثابت شبکه (حداکثر ۰.۵)، و epa و epb به ترتیب گذردهی الکتریکی سوراخ‌ها و دی‌الکتریک پس‌زمینه می‌باشند.

۱- برنامه‌ی SharifPWE_BZplot.m

```

function SharifPWE_BZplot(N,RES,r,epa,epb)

%
%The output is the TE/TM band structure (first five bands) along principal
%directions (G-X-M-G) of a square-lattice photonic crystal with unit cell
%consisting of a substrate of "epb" relative permittivity with circular
%rods(holes) of "epa" relative permittivity and radius "r".
%
%Usage is
%   SharifPWE_BZplot(N,RES,r,epa,epb)
%
% N:   N in PWE algorithm (number at which the summations are truncated)
% RES: number of the divisions on every side of BZ#1
% r:   normalized radius of the circle of holes/rods (0<r<0.5)
% epa: relative permittivity of holes/rods
% epb: relative permittivity of the substrate
%
% Written by Amir Hosseini
% for the Course Photonic Crystals
%
% (C) Copyright 2005
% School of Electrical Engineering
% Sharif University of Technology
% All Rights Reserved
%

L=1;

Band1=zeros(1,3*RES+1);
Band2=zeros(1,3*RES+1);
Band3=zeros(1,3*RES+1);
Band4=zeros(1,3*RES+1);
Band5=zeros(1,3*RES+1);

Band1TM=zeros(1,3*RES+1);
Band2TM=zeros(1,3*RES+1);
Band3TM=zeros(1,3*RES+1);
Band4TM=zeros(1,3*RES+1);
Band5TM=zeros(1,3*RES+1);

index=0;

%GAMMA-X section
for KappaX=0:pi/L/RES:pi/L
    index=index+1;
    KappaY=0;
    W=PWE TE (KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);
    WTM=PWE TM (KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);

    dTM=eig(WTM);
    dTM=sort(sqrt(dTM));
    Band1TM(index)=dTM(1);
    Band2TM(index)=dTM(2);
    Band3TM(index)=dTM(3);
    Band4TM(index)=dTM(4);
    Band5TM(index)=dTM(5);

    d=eig(W);
    d=sort(sqrt(d));
    %d=sort(d);
    Band1(index)=d(1);
    Band2(index)=d(2);
    Band3(index)=d(3);
    Band4(index)=d(4);
    Band5(index)=d(5);
end
%X-M section
for KappaY=0+pi/L/RES:pi/L/RES:pi/L
    index=index+1;

```

```

KappaX=pi/L;
W=PWETE(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);

d=eig(W);
d=sort(sqrt(d));
%d=sort(d);
Band1(index)=d(1);
Band2(index)=d(2);
Band3(index)=d(3);
Band4(index)=d(4);
Band5(index)=d(5);

WTM=PWETM(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);

dTM=eig(WTM);
dTM=sort(sqrt(dTM));
Band1TM(index)=dTM(1);
Band2TM(index)=dTM(2);
Band3TM(index)=dTM(3);
Band4TM(index)=dTM(4);
Band5TM(index)=dTM(5);
end
%M-Gamma section
for KappaX=pi/L-pi/L/RES:-pi/L/RES:0
    index=index+1;
    KappaY=KappaX;
    W=PWETE(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);
    d=eig(W);
    d=sort(sqrt(d));
    %d=sort(d);
    Band1(index)=d(1);
    Band2(index)=d(2);
    Band3(index)=d(3);
    Band4(index)=d(4);
    Band5(index)=d(5);

    WTM=PWETM(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);

    dTM=eig(WTM);
    dTM=sort(sqrt(dTM));
    Band1TM(index)=dTM(1);
    Band2TM(index)=dTM(2);
    Band3TM(index)=dTM(3);
    Band4TM(index)=dTM(4);
    Band5TM(index)=dTM(5);
end

MAX=max(max(Band3TM),max(Band3));
KAPPA_SCAN=zeros(size(Band1));

for i=1:2*RES+1
    KAPPA_SCAN(i)=(i-1)*pi/L/RES;
end
for j=i+1:3*RES+1
    KAPPA_SCAN(j)=(i-1)*pi/L/RES+(j-i)*pi/L/RES*sqrt(2);
end
KAPPA_SCAN;
plot(KAPPA_SCAN*L,Band1*L/2/pi)
hold
plot(KAPPA_SCAN*L,Band2*L/2/pi)
plot(KAPPA_SCAN*L,Band3*L/2/pi)
plot(KAPPA_SCAN*L,Band4*L/2/pi)
plot(KAPPA_SCAN*L,Band5*L/2/pi)

plot(KAPPA_SCAN*L,Band1TM*L/2/pi,'--r')
plot(KAPPA_SCAN*L,Band2TM*L/2/pi,'--r')
plot(KAPPA_SCAN*L,Band3TM*L/2/pi,'--r')
plot(KAPPA_SCAN*L,Band4TM*L/2/pi,'--r')
plot(KAPPA_SCAN*L,Band5TM*L/2/pi,'--r')

plot(KAPPA_SCAN(RES+1)*L,0:MAX*L/2/pi/100:MAX*L/2/pi)
plot(KAPPA_SCAN(i)*L,0:MAX*L/2/pi/100:MAX*L/2/pi)

```

```

plot(KAPPA_SCAN(j)*L,0:MAX*L/2/pi/100:MAX*L/2/pi)
title('Blue-Solid Line: E-polarization, Red-Dashed Line: H-polarization')
%
text(1.5,.05,['r/L=',num2str(r),'', {\epsilon}_a=',num2str(epa),...
', {\epsilon}_b=',num2str(epb)])

XLABEL({'\kappa}_n','FontSize',12)
YLABEL({'\omega}_n','FontSize',12)
hold off

axis tight

function W=PWETE(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb)

for q=-N:N
for p=-N:N
for n=-N:N
for m=-N:N
S_MATRIX((p+N+1)+(q+N)*(2*N+1),(m+N+1)+(n+N)*(2*N+1))=...
SmnpqTE(m,n,p,q,KappaX,KappaY,L,r,epa,epb);
end
end
end
end

W=S_MATRIX;

function Smnpq=SmnpqTE(m,n,p,q,Kappax,Kappay,L,r,epa,epb)

Smnpq=((2*pi/L)^2)*(m^2+n^2)+(4*pi/L)*(m*Kappax+n*Kappay)+(Kappay^2+Kappax^2)...
*Relative_Epsilon_Expansion(1/epa,1/epb,L,r,p-m,q-n);

function W=PWETM(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb)

for q=-N:N
for p=-N:N
for n=-N:N
for m=-N:N
S_MATRIX((p+N+1)+(q+N)*(2*N+1),(m+N+1)+(n+N)*(2*N+1))=...
SmnpqTM(m,n,p,q,KappaX,KappaY,L,r,epa,epb);
end
end
end
end

W=S_MATRIX;

function Smnpq=SmnpqTM(m,n,p,q,Kappax,Kappay,L,r,epa,epb)

Smnpq=(Kappax^2+Kappay^2+(2*pi/L)*((m+p)*Kappax+(n+q)*Kappay)+((2*pi/L)^2)*...
(m*p+q*n))*Relative_Epsilon_Expansion(1/epa,1/epb,L,r,p-m,q-n);
function epmn=Relative_Epsilon_Expansion(epa,epb,L,r,m,n)

Gmn=(2*pi/L)*sqrt(m^2+n^2);
if r>0
if Gmn==0
epmn=epb+(epa-epb)*pi*(r^2)/L^2;
else
epmn=epb*mydelta(r*Gmn)+(-epb+epa)*2*pi*(r^2)/(L^2)*besselj(1,Gmn*r)/Gmn/r;
end
else
if Gmn==0
epmn=epb;
else
epmn=0;
end
end

function output=mydelta(x)

output=0;

```

```
if x==0  
    output=1;  
end
```

۲- برنامه‌ی SharifPWE_BZplotTri.m

```

function PWE_BZ_plotTri(N,RES,r,epa,epb)

%
%The output is the TE/TM band structure (first five bands) along principal
%directions (G-M-K-G) of a triangular-lattice photonic crystal with unit cell
%consisting of a substrate of "epb" relative permittivity with circular
%rods(holes) of "epa" relative permittivity and radius "r".
%
%Usage is
%   SharifPWE_BZplotTri(N,RES,r,epa,epb)
%
% N:   N in PWE algorithm (number at which the summations are truncated)
% RES: number of the divisions on every side of BZ#1
% r:   normalized radius of the circle of holes/rods (0<r<0.5)
% epa: relative permittivity of holes/rods
% epb: relative permittivity of the substrate
%
% Written by Amir Hosseini
% for the Course Photonic Crystals
%
% (C) Copyright 2005
% School of Electrical Engineering
% Sharif University of Technology
% All Rights Reserved
%

L=1;

Band1TE=zeros(1,3*RES+1);
Band2TE=zeros(1,3*RES+1);
Band3TE=zeros(1,3*RES+1);
Band4TE=zeros(1,3*RES+1);

Band1TM=zeros(1,3*RES+1);
Band2TM=zeros(1,3*RES+1);
Band3TM=zeros(1,3*RES+1);
Band4TM=zeros(1,3*RES+1);

KAPPA_SCAN=zeros(size(Band1TE));
index=0;
kx=0;
ky=0;
%Calculation the Band Structure

%GAMMA-M section
for KappaX=0:pi/L/RES:pi/L
    index=index+1;

    KappaY=-KappaX/sqrt(3);
    %PWE matrices
    WTE=PWETET(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);
    WTM=PWETMT(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);
    dTE=eig(WTE);
    dTM=eig(WTM);
    %sorting the vector of the PWE matrices
    dTE=sort(sqrt(dTE));
    dTM=sort(sqrt(dTM));
    %construction of the first 3 band
    Band1TE(index)=dTE(1);
    Band2TE(index)=dTE(2);
    Band3TE(index)=dTE(3);
    Band4TE(index)=dTE(4);

    Band1TM(index)=dTM(1);
    Band2TM(index)=dTM(2);
    Band3TM(index)=dTM(3);
    Band4TM(index)=dTM(4);

    if index>1

```

```

        KAPPA_SCAN(index)=sqrt((KappaX-kx)^2+(KappaY-ky)^2)+KAPPA_SCAN(index-1);
        kx=KappaX;
        ky=KappaY;
    else
        KAPPA_SCAN(index)=0;
    end
end
%M-K section
for KappaX=pi/L+pi/3/L/RES:+pi/3/L/RES:4*pi/3/L;
    index=index+1;
    KappaY=sqrt(3)*KappaX-4*pi/sqrt(3);
    %PWE matrices
    WTE=PWETET(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);
    WTM=PWETMT(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);
    %eigen values vector of the PWE matrices
    dTE=eig(WTE);
    dTM=eig(WTM);
    %sorting the vector of the PWE matrices
    dTE=sort(sqrt(dTE));
    dTM=sort(sqrt(dTM));
    %construction of the first 3 band
    Band1TE(index)=dTE(1);
    Band2TE(index)=dTE(2);
    Band3TE(index)=dTE(3);
    Band4TE(index)=dTE(4);

    Band1TM(index)=dTM(1);
    Band2TM(index)=dTM(2);
    Band3TM(index)=dTM(3);
    Band4TM(index)=dTM(4);

    KAPPA_SCAN(index)=sqrt((KappaX-kx)^2+(KappaY-ky)^2)+KAPPA_SCAN(index-1);
    kx=KappaX;
    ky=KappaY;
end
%K-Gamma section
for KappaX=4*pi/3/L-4*pi/3/L/RES:-4*pi/3/L/RES:0
    index=index+1;
    KappaY=0;
    %PWE matrices
    WTE=PWETET(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);
    WTM=PWETMT(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);
    %eigen values vector of the PWE matrices
    dTE=eig(WTE);
    dTM=eig(WTM);
    %sorting the vector of the PWE matrices
    dTE=sort(sqrt(dTE));
    dTM=sort(sqrt(dTM));
    %construction of the first 3 band
    Band1TE(index)=dTE(1);
    Band2TE(index)=dTE(2);
    Band3TE(index)=dTE(3);
    Band4TE(index)=dTE(4);

    Band1TM(index)=dTM(1);
    Band2TM(index)=dTM(2);
    Band3TM(index)=dTM(3);
    Band4TM(index)=dTM(4);

    KAPPA_SCAN(index)=sqrt((KappaX-kx)^2+(KappaY-ky)^2)+KAPPA_SCAN(index-1);
    kx=KappaX;
    ky=KappaY;
end
%plot the bands

plot(KAPPA_SCAN*L,abs(Band1TE)*L/2/pi)
hold
plot(KAPPA_SCAN*L,abs(Band2TE)*L/2/pi)
plot(KAPPA_SCAN*L,abs(Band3TE)*L/2/pi)
plot(KAPPA_SCAN*L,abs(Band4TE)*L/2/pi)
plot(KAPPA_SCAN*L,abs(Band1TM)*L/2/pi,'--r')

```

```

plot(KAPPA_SCAN*L,abs(Band2TM)*L/2/pi,'--r')
plot(KAPPA_SCAN*L,abs(Band3TM)*L/2/pi,'--r')
plot(KAPPA_SCAN*L,abs(Band4TM)*L/2/pi,'--r')
%plot vertical lines to separate Gamma-M, M-K and K-Gamma sections

%section notations based on J.D. Joannopoulos's
MAX=max(max(Band4TM),max(Band4TE));

plot(KAPPA_SCAN*(RES+1)*L,0:MAX*L/2/pi/100:MAX*L/2/pi)
plot(KAPPA_SCAN*(2*RES+1)*L,0:MAX*L/2/pi/100:MAX*L/2/pi)
plot(KAPPA_SCAN*(3*RES+1)*L,0:MAX*L/2/pi/100:MAX*L/2/pi)

title('Blue-Solid Line: E-polarization, Red-Dashed Line: H-polarization')
text(1.5,.05,['r',num2str(r),'', {\epsilon}_a=',num2str(epa),...
', {\epsilon}_b=',num2str(epb)])
text(0,-.046,{'\Gamma'})
text(KAPPA_SCAN*(RES+1)*L,-.046,['M'])
text(KAPPA_SCAN*(2*RES+1)*L,-.046,['K'])
text(KAPPA_SCAN*(3*RES+1)*L,-.046,{'\Gamma'})

XLABEL({'\kappa}a','FontSize',12)
YLABEL({'\omega}_n','FontSize',12)

axis tight
hold off

function W=PWETET(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb)
for q=-N:N
    for p=-N:N
        for n=-N:N
            for m=-N:N
                S_MATRIX((p+N+1)+(q+N)*(2*N+1),(m+N+1)+(n+N)*(2*N+1))=...
                    SmnpqTET(m,n,p,q,KappaX,KappaY,L,r,epa,epb);
            end
        end
    end
end

W=S_MATRIX;

function Smnpq=SmnpqTET(m,n,p,q,KappaX,KappaY,L,r,epa,epb)
Rel=Relative_Epsilon_ExpansionT(1/epa,1/epb,L,r,p-m,q-n);
Smnpq=((2*pi/L)^2)*(m^2+(-m+2*n)*(-m+2*n)/3)+(4*pi/L)*...
((m)*KappaX+1/sqrt(3)*(-(m)+2*(n))*KappaY)+(KappaY^2+KappaX^2)*Rel;

function W=PWETMT(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb)
for q=-N:N
    for p=-N:N
        for n=-N:N
            for m=-N:N
                S_MATRIX((p+N+1)+(q+N)*(2*N+1),(m+N+1)+(n+N)*(2*N+1))=...
                    SmnpqTMT(m,n,p,q,KappaX,KappaY,L,r,epa,epb);
            end
        end
    end
end

W=S_MATRIX;

function Smnpq=SmnpqTMT(m,n,p,q,KappaX,KappaY,L,r,epa,epb)
Rel=Relative_Epsilon_ExpansionT(1/epa,1/epb,L,r,p-m,q-n);
Smnpq=((2*pi/L)^2)*(m*p+(-m+2*n)*(-p+2*q)/3)+(2*pi/L)*...
((m+p)*KappaX+1/sqrt(3)*(-(m+p)+2*(n+q))*KappaY)+(KappaY^2+KappaX^2)*Rel;

function epmn=Relative_Epsilon_ExpansionT(epa,epb,L,r,m,n)
Gmn=(2*pi/L)*sqrt(m^2+1/3*(-m+2*n)^2);
if Gmn==0

```

```
epmn=epb+(epa-epb)*pi*(r^2)/((L^2)*sqrt(3)/2);  
else  
epmn=(-epb+epa)*2*pi*(r^2)/((L^2)*sqrt(3)/2)*besselj(1,Gmn*r)/Gmn/r;  
end
```


۳- برنامه‌ی SharifPWE_3DplotE.m

```

function SharifPWE_3DplotE(N,RES,r,epa,epb)

%
%The output is the 3D E-polarization band structure (3 first band surfaces)
%of a square-lattice photonic crystal with unit cell consisting of a
%substrate of "epb" relative permittivity with circular rods(holes) of
%"epa" relative permittivity and radius "r".
%
%Usage is
%   SharifPWE_3DplotE(N,RES,r,epa,epb)
%
% N:   N in PWE algorithm (number at which the summations are truncated)
% RES: number of the divisions on every side of BZ#1
% r:   normalized radius of the circle of holes/rods (r<0.5)
% epa: relative permittivity of holes/rods
% epb: relative permittivity of the substrate
%
% Written by Amir Hosseini
% for the Course Photonic Crystals
%
% (C) Copyright 2005
% School of Electrical Engineering
% Sharif University of Technology
% All Rights Reserved
%

global Band1 Band2 Band3 KappaX KappaY

L=1;
indexX=0;
for KappaX=-pi/L:pi/L/RES:pi/L
    indexX=indexX+1;
    indexY=0;
    for KappaY=+pi/L:-pi/L/RES:-pi/L
        indexY=indexY+1;
        W=PWETE(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);
        d=eig(W);
        d=sort(sqrt(d));
        Band1(indexX,indexY)=d(1);
        Band2(indexX,indexY)=d(2);
        Band3(indexX,indexY)=d(3);
    end
end
KappaX=-pi/L:pi/L/RES:pi/L;
KappaY=+pi/L:-pi/L/RES:-pi/L;
subplot(3,1,1)
surf(KappaX,KappaY,Band1/2/pi)
title(['E-polarization, first(lowest) surface, r/L=',...
    num2str(r),' , {\epsilon}_a=',num2str(epa),' , {\epsilon}_b=',num2str(epb)])
subplot(3,1,2)
surf(KappaX,KappaY,Band2/2/pi)
title(['E-polarization, second surface, r/L=',num2str(r),...
    ', {\epsilon}_a=',num2str(epa),' , {\epsilon}_b=',num2str(epb)])
subplot(3,1,3)
surf(KappaX,KappaY,Band3/2/pi)
title(['E-polarization, third surface, r/L=',num2str(r),...
    ', {\epsilon}_a=',num2str(epa),' , {\epsilon}_b=',num2str(epb)])

%return

figure
surf(KappaX,KappaY,Band1/2/pi)
hold on
surf(KappaX,KappaY,Band2/2/pi)
title(['E-polarization, first and second surfaces, r/L=',num2str(r),...
    ', {\epsilon}_a=',num2str(epa),' , {\epsilon}_b=',num2str(epb)])
hold off

figure

```

```

surf(KappaX,KappaY,Band1/2/pi)
hold on
surf(KappaX,KappaY,Band2/2/pi)
surf(KappaX,KappaY,Band3/2/pi)
title(['E-polarization, first three surfaces, r/L=',num2str(r),...
      ', {\epsilon}_a=',num2str(epa),', {\epsilon}_b=',num2str(epb)])
hold off

figure
contour(KappaX,KappaY,Band1/2/pi)
axis equal
title(['E-polarization, first(lowest) surface, r/L=',...
      num2str(r),', {\epsilon}_a=',num2str(epa),', {\epsilon}_b=',num2str(epb)])

figure
contour(KappaX,KappaY,Band2/2/pi)
axis equal
title(['E-polarization, second surface, r/L=',num2str(r),...
      ', {\epsilon}_a=',num2str(epa),', {\epsilon}_b=',num2str(epb)])

figure
contour(KappaX,KappaY,Band3/2/pi)
axis equal
title(['E-polarization, third surface, r/L=',num2str(r),...
      ', {\epsilon}_a=',num2str(epa),', {\epsilon}_b=',num2str(epb)])

function W=PWETE(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb)

for q=-N:N
    for p=-N:N
        for n=-N:N
            for m=-N:N
                S_MATRIX((p+N+1)+(q+N)*(2*N+1),(m+N+1)+(n+N)*(2*N+1))=...
                    SmnpqTE(m,n,p,q,KappaX,KappaY,L,r,epa,epb);
            end
        end
    end
end

W=S_MATRIX;

function Smnpq=SmnpqTE(m,n,p,q,Kappax,Kappay,L,r,epa,epb)

Smnpq=((2*pi/L)^2)*(m^2+n^2)+(4*pi/L)*(m*Kappax+n*Kappay)+(Kappay^2+Kappax^2)...
    *Relative_Epsilon_Expansion(1/epa,1/epb,L,r,p-m,q-n);

function epmn=Relative_Epsilon_Expansion(epa,epb,L,r,m,n)

Gmn=(2*pi/L)*sqrt(m^2+n^2);
if r>0
    if Gmn==0
        epmn=epb+(epa-epb)*pi*(r^2)/L^2;
    else
        epmn=epb*mydelta(r*Gmn)+(-epb+epa)*2*pi*(r^2)/(L^2)*besselj(1,Gmn*r)/Gmn/r;
    end
else
    if Gmn==0
        epmn=epb;
    else
        epmn=0;
    end
end

function output=mydelta(x)

output=0;
if x==0
    output=1;
end

```

۵- برنامه‌ی SharifPWE_3DplotH.m

```

function SharifPWE_3DplotH(N,RES,r,epa,epb)

%
%The output is the 3D H-polarization band structure (3 first band surfaces)
%of a square-lattice photonic crystal with unit cell consisting of a
%substrate of "epb" relative permittivity with circular rods(holes) of
%"epa" relative permittivity and radius "r".
%
%Usage is
%   SharifPWE_3DplotH(N,RES,r,epa,epb)
%
% N:   N in PWE algorithm (number at which the summations are truncated)
% RES: number of the divisions on every side of BZ#1
% r:   normalized radius of the circle of holes/rods (0<r<0.5)
% epa: relative permittivity of holes/rods
% epb: relative permittivity of the substrate
%
% Written by Amir Hosseini
% for the Course Photonic Crystals
%
% (C) Copyright 2005
% School of Electrical Engineering
% Sharif University of Technology
% All Rights Reserved
%

global Band1 Band2 Band3 KappaX KappaY

L=1;
indexX=0;
for KappaX=-pi/L:pi/L/RES:pi/L
    indexX=indexX+1;
    indexY=0;
    for KappaY=+pi/L:-pi/L/RES:-pi/L
        indexY=indexY+1;
        W=PWETM(KappaX,KappaY,N,L,r,epa,epb);
        d=eig(W);
        d=sort(sqrt(d));
        Band1(indexX,indexY)=d(1);
        Band2(indexX,indexY)=d(2);
        Band3(indexX,indexY)=d(3);
    end
end

KappaX=-pi/L:pi/L/RES:pi/L;
KappaY=+pi/L:-pi/L/RES:-pi/L;
subplot(3,1,1)
surf(KappaX,KappaY,Band1/2/pi)
title(['H-polarization, first(lowest) surface, L=',num2str(L),' r=',...
    num2str(r),' {\epsilon}_a=',num2str(epa),' {\epsilon}_b=',num2str(epb)])
subplot(3,1,2)
surf(KappaX,KappaY,Band2/2/pi)
title(['H-polarization, second surface, L=',num2str(L),' r=',num2str(r),...
    ', {\epsilon}_a=',num2str(epa),' {\epsilon}_b=',num2str(epb)])
subplot(3,1,3)
surf(KappaX,KappaY,Band3/2/pi)
title(['H-polarization, third surface, L=',num2str(L),' r=',num2str(r),...
    ', {\epsilon}_a=',num2str(epa),' {\epsilon}_b=',num2str(epb)])

%return

figure
surf(KappaX,KappaY,Band1/2/pi)
hold on
surf(KappaX,KappaY,Band2/2/pi)
title(['H-polarization, first and second surfaces, L=',num2str(L),' r=',...
    num2str(r),' {\epsilon}_a=',num2str(epa),' {\epsilon}_b=',num2str(epb)])
hold off

```

```

figure
contour(KappaX,KappaY,Band1/2/pi)
axis equal
title(['H-polarization, first(lowest) surface, r/L=',...
      num2str(r), ', {\epsilon}_a=',num2str(epsa), ', {\epsilon}_b=',num2str(epb)])

figure
contour(KappaX,KappaY,Band2/2/pi)
axis equal
title(['H-polarization, second surface, r/L=',num2str(r),...
      ', {\epsilon}_a=',num2str(epsa), ', {\epsilon}_b=',num2str(epb)])

figure
contour(KappaX,KappaY,Band3/2/pi)
axis equal
title(['H-polarization, third surface, r/L=',num2str(r),...
      ', {\epsilon}_a=',num2str(epsa), ', {\epsilon}_b=',num2str(epb)])

function W=PWETM(KappaX,KappaY,N,L,r,epsa,epb)
for q=-N:N
    for p=-N:N
        for n=-N:N
            for m=-N:N
                S_MATRIX((p+N+1)+(q+N)*(2*N+1),(m+N+1)+(n+N)*(2*N+1))=...
                    SmnpqTM(m,n,p,q,KappaX,KappaY,L,r,epsa,epb);
            end
        end
    end
end
W=S_MATRIX;
function Smnpq=SmnpqTM(m,n,p,q,Kappax,Kappay,L,r,epsa,epb)
Smnpq=(Kappax^2+Kappay^2+(2*pi/L)*((m+p)*Kappax+(n+q)*Kappay))+((2*pi/L)^2)*...
(m*p+q*n)*Relative_Epsilon_Expansion(1/epsa,1/epb,L,r,p-m,q-n);
function epmn=Relative_Epsilon_Expansion(epsa,epb,L,r,m,n)
Gmn=(2*pi/L)*sqrt(m^2+n^2);
if r>0
    if Gmn==0
        epmn=epb+(epsa-epb)*pi*(r^2)/L^2;
    else
        epmn=epb*mydelta(r*Gmn)+(-epb+epsa)*2*pi*(r^2)/(L^2)*besselj(1,Gmn*r)/Gmn/r;
    end
else
    if Gmn==0
        epmn=epb;
    else
        epmn=0;
    end
end
function output=mydelta(x)
output=0;
if x==0
    output=1;
end
end

```

پیوست پ

مراجع و پیوندهای مفید

(الف) کتب مرتبط با بلورهای فوتونی

- [1] J. D. Joannopoulos, R. D. Meade, and J. N. Winn, *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*, Princeton University Press, Princeton, 1995.
- [2] J.-M. Lourtioz, H. Benisty, V. Berger, J.-M. Gerard, D. Maystre, and A. Tchelnokov, *Photonic Crystals: Towards Nano-scale Photonic Devices*, Springer, Berlin, 1999.
- [3] A. Taflove and S. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain*, 2nd ed., Artech House, Boston, 2000.
- [4] D. M. Sullivan, *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method*, IEEE Press, Piscataway, 2000.
- [5] A. Bjarklev, J. Broeng, and A. S. Bjarklev, *Photonic Crystal Fibres*, Springer, 2001.
- [6] R. E. Slusher and B. J. Eggleton, eds., *Nonlinear Photonic Crystals*, Springer, Berlin, 2002.
- [7] S. G. Johnson and J. D. Joannopoulos, *Photonic Crystals: The Road from Theory to Practice*, Springer, Berlin, 2003.
- [8] S. Noda and T. Baba, eds., *Roadmap on Photonic Crystals*, Springer, Berlin, 2003.

- [9] K. Busch, S. Lölkes, R. B. Wehrspohn, and H. Föll, eds., *Photonic Crystals: Advances in Design, Fabrication, and Characterization*, Wiley-VCH, Berlin, 2004.
- [10] K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2004.
- [11] C. M. Soukoulis, ed., *Photonic Crystals and Light Localization in the 21st Century*, Springer, 2005.
- [12] K. Inoue and K. Ohtaka, eds., *Photonic Crystals: Physics, Fabrication and Applications*, Springer, 2006.
- [13] M. Charlton, G. Parker, eds., *Photonic Crystals: Nanostructures for Controlling Light*, Taylor & Francis, 2008.
- [14] P. Halevi, *Photonic and Phononic Crystals*, John Wiley & Sons Inc., 2008.

(ب) پایگاه‌های موجود بر روی اینترنت

فهرست به روز کلیه‌ی مقالات منتشر شده در زمینه‌ی بلورهای فوتونی و فونونی

<http://phys.lsu.edu/~jdowling/pbgbib.html>

پایگاه بلورهای فوتونی در دانشگاه MIT

<http://ab-initio.mit.edu/photons/>

پایگاه اطلاعات بلورهای فوتونی

<http://www.pbglink.com/>

وب‌گاه بلورهای فوتونی در دانشگاه صنعتی شریف

<http://ee.sharif.edu/~pbg/>

پیرامون سرعت نور در خلاء

<http://www.speed-light.info/>

واژه نامه (انگلیسی به فارسی)

Abelian (Commutative) Group	گروه آبلی (جابجایی)
Acousto-optic Effect	اثر نورصدا
Allowed Frequency Gap	نوار مجاز بسامد
Amplifier	تقویت کننده
Anisotropic	ناهمسانگرد
Annihilation Operator	عملگر فنا
Backward Travelling Wave	موج پسرو
Basis Vectors	بردارهای پایه شبکه
Bloch-Floquet Theorem	قضیه‌ی بلوخ-فلوکه
Bogolioubov Transformation	تبدیل بوگولیوبوف
Bound State	حالت مقید
Bra	برا
Bracket = Bra + (c) + Ket	براکت = برا + کت
Brillouin Zones	ناحیه‌ی بریلوین
Causal System	سیستم علی

Cavity	کاواک
Character	مشخصه
Class	خانواده
Classical Diffraction Limit	مرز کلاسیک پراش
Coherent State	حالت همدوس
Colloids	کولوئیدها
Compatibility	سازگاری
Completeness Relation	رابطه‌ی تمامیت
Conjugate	مزدوج (هم‌یوغ)
Constitutive Relations	معادلات سازنده
Constructive Interference	تداخل سازنده
Convolution	پیچش
Coulomb Gauge	پیمانه‌ی کولمب
Coupled Photonic Crystal Resonator Array	آرایه‌ی کاواک‌های مزدوج بلور فوتونی
Creation Operator	عملگر بقا (خلق)
Curl (Rotation)	چرخش
De Broglie's Wavelength	طول موج دوبروی
Defect	نقص
Demultiplexer	تفکیک ساز
Dense Wavelength Division Multiplexing	مخابرات تفکیک طول موج چگال
Density of States	چگالی حالات
Destructive Interference	تداخل مخرب

Differential Transfer Matrix Method	روش ماتریس انتقال تفاضلی
Diffraction	پراش
Dipole Moment	ممان دوقطبی
Dipole Radiation	تابش دوقطبی
Dipole Source	منبع دوقطبی
Direct Gap	گاف مستقیم
Direct Laser Write	نوشتن مستقیم لیزری
Direct Sum	جمع مستقیم
Dispersion	پاشندگی
Divergence	واگرایی
Double-periodic Function	تابع دوتناوبی
Electrochemical Etching	تراش الکتروشیمیایی
Electromagnetic Wave	موج الکترومغناطیس
Electron Beam Lithography	پرتونگاری باریکه‌ی الکترونی
Electron Rest Mass	جرم الکترون آزاد
Element Order	رتبه‌ی عضو
Envelope Function	تابع بسته
Even Symmetry	تقارن زوج
Expectation Value	مقدار چشم‌داشتی
Fiber Optics Communications	مخابرات فیبر نوری
Field Quantization	کوانتیزه کردن میدان
Fill Factor	ضریب پُرشدگی

Fine Structure	ساختار ریز
Flattening	تسطیح
Focused Ion Beam Etching	تراش باریکه‌ی متمرکز یونی
Forbidden Frequency Gap	نوار ممنوع بسامد
Forward Travelling Wave	موج پیشرو
Four-Fold	چهارگون
Fourier Transform	تبدیل فوریه
Fourier-Bessel Transform	تبدیل بسل-فوریه
Frequency	بسامد
Full Gap	گاف کامل
Fundamental Propagating Mode	مود پایه انتشار
Fundamental Theorem of Algebra	قضیه‌ی اساسی جبر
Gap Width	پهنای گاف
Gap-to-Midgap Ratio	نسبت گاف
General Solution	حل عمومی
Great Orthogonality Theorem	قضیه‌ی تعامد بزرگ
Group Order	مرتبه‌ی گروه
Group Theory	نظریه‌ی گروه
Guided Mode	مود هدایت شده
Harmonic Oscillator	نوسانگر هماهنگ
Hermitian Adjoint	دوگان هرمیتی
Hermitian Operator	عملگر هرمیتی

Holey Fiber	فیبر سوراخدار
Holography	هولوگرافی
Homogeneous	همگن
Homomorphism	جورریختی
Host Dielectric	دی‌الکتریک میزبان
Huygens' Source	منبع هویگنس
Identity Operator	عملگر همانی
Impedance	امپدانس
Impedance Matching	تطبیق امپدانس
Impermeability	نشت ناپذیری
Imprinting	نگاشت
Incident Wave	موج تابنده
Incompatible Operators	عملگرهای ناسازگار
Index	زیرنویس
Infrared	فروسرخ
Initial Field	میدان اولیه
Integer Part	جزء صحیح
Interaction Hamiltonian	هامیلتونی برهمکنش
Interference	تداخل
Interlaced	درهم‌تنیده
Interwoven Helical Structure	ساختار مارپیچ درهم بافته
Invariant Points	نقاط ناورد

Inverse Fourier Transform	تبدیل عکس فوریه
Inverse Opal Structure	ساختار آپال وارون
Irreducible Representation	نمایش کاهش ناپذیر
Irreducible Zone	ناحیه‌ی کاهش ناپذیر
Isomorphism	هم‌ریختی
Isotropic	همسانگرد
Ket	کت
Kronecker's Delta	دلتای کرونکر
Lamb Shift	جابجایی لمب
Layer-by-Layer Lithography	پرتونگاری لایه لایه
Leaky Mode	مود نشتی
Light Cone	مخروط نور
Light Emitting Diode	دیود نوری
Line Defect	نقص خطی
Lithography	پرتونگاری
Local Oscillator	نوسان‌ساز محلی
Loss	اتلاف
Magnetic Field	میدان مغناطیسی
Matrix Representation	نمایش ماتریسی
Maxwell's Equations	معادلات ماکسول
Microlaser	ریزلیزر
Microwave	ریزموج

Mid-Gap (Central) Frequency	بسامد مرکزی گاف
Mode	مود
Mode Volume	حجم مود
Moore's Law	قانون مور
Nano-Optics	نانوآپتیک
Nearest Neighbour	نزدیک‌ترین همسایه
Negative Refraction	شکست منفی
Nonhomogeneous (Inhomogeneous)	ناهمگن
Nonlinear Effects	اثرات غیرخطی
Non-relativistic	غیر نسبیتی
Non-singular	غیر تکین
Normalization	بهنجارش
Null Operator	عملگر تهی
Number Operator	عملگر شمارش
One-to-One Correspondence	تناظر یک به یک
Opal Structure	ساختار اپال
Operator	عملگر
Optical Activity	فعالیت اپتیکی
Optical Cooling	سردسازی نوری
Optical Fiber	فیبر نوری
Optoelectronics	الکترونیک نوری
Orbital	أربیتال

Periodicity	تناوب
Permeability	گذردهی مغناطیسی
Permittivity	گذردهی الکتریکی
Phase Velocity	سرعت فاز
Phasor	فازور
Phonon	فونون
Phononic Crystal	بلورهای فونونی
Photo-detector	آشکارساز نوری
Photon Recycling	بازیافت فوتون
Photonic Crystal	بلور فوتونی
Photonic Crystal Optical Fiber	فیبر نوری بلور فوتونی
Photonic Density of States	چگالی حالات فوتونی
Photonic Gap	گاف فوتونی
Piezoelectricity	اثر پیزوالکتریک
Planar Defect	نقص صفحه‌ای
Plane Wave Expansion Method	روش بسط امواج تخت
Plasma Frequency	بسامد پلاسما
Point Defect	نقص نقطه‌ای
Point Source	منبع نقطه‌ای
Poisson Distribution	توزیع پواسون
Polarization	قطبش
Poly Silicon	سیلیکون چندبلوری

Projection Operator	عملگر تصویر
Potential Well	چاه پتانسیل
Process	فرآیند
Propagation	انتشار
Pseudo-periodic	شبه‌متناوب
Pump Beam	باریکه‌ی دمش
Quality Factor	ضریب کیفیت
Quantum Electrodynamics (QED)	الکترودینامیک کوانتومی
Quantum Optics	اپتیک کوانتومی
Quasi-Crystal	شبه‌بلور
Rank of Tensor	رتبه‌ی تانسور
Reducible Representation	نمایش کاهش‌پذیر
Reduction	کاهش
Reflected Wave	موج بازتاب
Refraction	انکسار
Repeater	تکرار‌ساز
Rotational Symmetry	تقارن دورانی
Scalar	نرده‌ای
Scaling	مقیاس‌بندی
Selection Rules	قواعد انتخاب
Self-adjoint Operator	عملگر خودالحاق
Semiconductor	نیمه‌هادی

Set of Partners	مجموعه‌ی شرکاء
Silicon Nanoparticles	نانو ذرات سیلیکون
Similarity Transformation	تبدیل تشابه
Sinusoidal Steady State	حالت پایای سینوسی
Six-Fold	شش‌گون
Snell's Law	قانون اسنل
Source	چشمه
Space-Time	فضا-زمان
Sparse Matrix	ماتریس تُنک
Spectrum	طیف
Spontaneous Emission	گسیل خودبه‌خودی
Squeezed State	حالت چگالیده
State Vector	بردار حالت
Stepwise	پله‌ای
Stochastic	کاتوره‌ای
Strain	کرنش
Subroutine	زیرروال
Substrate Mode	مود بستر
Subwavelength	زیرموج
Super-prism Effect	اثر ابرمنشور
Symmetry	تقارن
Tensor	تانسور

Threshold Current	جریان آستانه
Total-Field Scattered-Field Method	روش میدان کامل - میدان پراکنش
Transfer Matrix Method	روش ماتریس انتقال
Translational Symmetry	تقارن انتقالی
Triple-periodic Function	تابع سه‌تناوبی
Two-photon Lithography	پرتونگاری دو فوتونی
Unbounded State	حالت غیر مقید
Uncertainty Principle	اصل عدم قطعیت
Unit Cell	سلول واحد
Unitary Operator	عملگر یکانی
Vector	بردار
Vector Field	میدان برداری
Vector Potential	پتانسیل برداری
Wafer Fusion	پیوند ویفر
Wave Equation	معادله‌ی موج
Waveguide	موج‌بر
Wavenumber	عدد موج
Weak Signal Beam	باریکه‌ی سیگنال ضعیف
Wigner-Seitz Cell	سلول ویگنر-سایتز
Woodpile Structure	ساختار افزازهی چوبی
X-Ray Interference Lithography	پرتونگاری تداخلی موج X
Yablonovite	یابلونوویت

واژه نامه (فارسی به انگلیسی)

Coupled Photonic Crystal Resonator Array	آرایه‌ی کاواک‌های مزدوج بلور فوتونی
Photo-detector	آشکارساز نوری
Orbital	أریتال
Quantum Optics	اپتیک کوانتومی
Loss	اتلاف
Super-prism Effect	اثر ابرمنشور
Piezoelectricity	اثر پیزوالکتریک
Acousto-optic Effect	اثر نورصدا
Nonlinear Effects	اثرات غیرخطی
Uncertainty Principle	اصل عدم قطعیت
Quantum Electrodynamics (QED)	الکترودینامیک کوانتومی
Optoelectronics	الکترونیک نوری
Impedance	امپدانس
Propagation	انتشار
Refraction	انکسار
Pump Beam	باریکه‌ی دمش

Weak Signal Beam	باریکه‌ی سیگنال ضعیف
Photon Recycling	بازیافت فوتون
Bra	برا
Bracket = Bra + (c) + Ket	براکت = برا+کت
Vector	بردار
State Vector	بردار حالت
Basis Vectors	بردارهای پایه شبکه
Frequency	بسامد
Plasma Frequency	بسامد پلاسما
Photonic Crystal	بلور فوتونی
Phononic Crystal	بلورهای فونونی
Dispersion	پاشندگی
Vector Potential	پتانسیل برداری
Diffraction	پراش
Lithography	پرتونگاری
Electron Beam Lithography	پرتونگاری باریکه‌ی الکترونی
X-Ray Interference Lithography	پرتونگاری تداخلی موج x
Two-photon Lithography	پرتونگاری دو فوتونی
Layer-by-Layer Lithography	پرتونگاری لایه لایه
Stepwise	پله‌ای
Gap Width	پهنای گاف
Convolution	پیچش

Coulomb Gauge	پیمانانه کولمب
Wafer Fusion	پیوند ویفر
Dipole Radiation	تابش دوقطبی
Envelope Function	تابع بسته
Double-periodic Function	تابع دوتناوبی
Triple-periodic Function	تابع سه‌تناوبی
Tensor	تانسور
Fourier-Bessel Transform	تبدیل بسل-فوریه
Bogolioubov Transformation	تبدیل بوگولیووف
Similarity Transformation	تبدیل تشابه
Inverse Fourier Transform	تبدیل عکس فوریه
Fourier Transform	تبدیل فوریه
Interference	تداخل
Constructive Interference	تداخل سازنده
Destructive Interference	تداخل مخرب
Electrochemical Etching	تراش الکتروشیمیایی
Focused Ion Beam Etching	تراش باریکه متمرکز یونی
Flattening	تسطیح
Impedance Matching	تطبیق امپدانس
Demultiplexer	تفکیک ساز
Symmetry	تقارن
Translational Symmetry	تقارن انتقالی

Rotational Symmetry	تقارن دورانی
Even Symmetry	تقارن زوج
Amplifier	تقویت کننده
Repeater	تکرارساز
One-to-One Correspondence	تناظر یک به یک
Periodicity	تناوب
Poisson Distribution	توزیع پواسون
Lamb Shift	جابجایی لمب
Electron Rest Mass	جرم الکترون آزاد
Threshold Current	جریان آستانه
Integer Part	جزء صحیح
Direct Sum	جمع مستقیم
Homomorphism	جورریختی
Potential Well	چاه پتانسیل
Curl (Rotation)	چرخش
Source	چشمه
Photonic Density of States	چگالی حالات فوتونی
Density of States	چگالی حالات
Four-Fold	چهارگون
Sinusoidal Steady State	حالت پایای سینوسی
Squeezed State	حالت چگالیده
Unbounded State	حالت غیر مقید

Bound State	حالت مقید
Coherent State	حالت همدوس
Mode Volume	حجم مود
General Solution	حل عمومی
Class	خانواده
Interlaced	درهم‌تنیده
Kronecker's Delta	دلتای کرونکر
Hermitian Adjoint	دوگان هرمیتی
Host Dielectric	دی‌الکتریک میزبان
Light Emitting Diode	دیود نوری
Completeness Relation	رابطه‌ی تمامیت
Rank of Tensor	رتبه‌ی تانسور
Element Order	رتبه‌ی عضو
Plane Wave Expansion Method	روش بسط امواج تخت
Transfer Matrix Method	روش ماتریس انتقال
Differential Transfer Matrix Method	روش ماتریس انتقال تفاضلی
Total-Field Scattered-Field Method	روش میدان کامل - میدان پراکنش
Microlaser	ریزلیزر
Microwave	ریزموج
Subroutine	زیرروال
Subwavelength	زیرموج
Index	زیرنویس

Opal Structure	ساختار آپال
Inverse Opal Structure	ساختار آپال وارون
Woodpile Structure	ساختار افزای چوبی
Fine Structure	ساختار ریز
Interwoven Helical Structure	ساختار مارپیچ درهم بافته
Compatibility	سازگاری
Optical Cooling	سردسازی نوری
Phase Velocity	سرعت فاز
Unit Cell	سلول واحد
Wigner-Seitz Cell	سلول ویگنر-سایتز
Causal System	سیستم علی
Poly Silicon	سیلیکون چندبلوری
Quasi-Crystal	شبه‌بلور
Pseudo-periodic	شبه‌متناوب
Six-Fold	شش‌گون
Negative Refraction	شکست منفی
Fill Factor	ضریب پُرشدگی
Quality Factor	ضریب کیفیت
De Broglie's Wavelength	طول موج دوبروی
Spectrum	طیف
Wavenumber	عدد موج
Operator	عملگر

Creation Operator	عملگر بقا (خلق)
Porjection Operator	عملگر تصویر
Null Operator	عملگر تهی
Self-adjoint Operator	عملگر خودالحاق
Number Operator	عملگر شمارش
Annihilation Operator	عملگر فنا
Hermitian Operator	عملگر هرمیتی
Identity Operator	عملگر همانی
Unitary Operator	عملگر یکانی
Incompatible Operators	عملگرهای ناسازگار
Non-relativitic	غیر نسبیتی
Non-singular	غیر تکین
Phasor	فازور
Process	فرآیند
Mid-Gap (Central) Frequency	بسامد مرکزی گاف
Infrared	فروسرخ
Space-Time	فضا-زمان
Optical Activity	فعالیت اپتیکی
Phonon	فونون
Holey Fiber	فیبر سوراخدار
Optical Fiber	فیبر نوری
Photonic Crystal Optical Fiber	فیبر نوری بلور فوتونی

Snell's Law	قانون اسنل
Moore's Law	قانون مور
Bloch-Floquet Theorem	قضیه‌ی بلوخ-فلوکه
Great Orthogonality Theorem	قضیه‌ی تعامد بزرگ
Fundamental Theorem of Algebra	قضیه‌ی اساسی جبر
Polarization	قطبش
Selection Rules	قواعد انتخاب
Stochastic	کاتوره‌ای
Cavity	کاواک
Reduction	کاهش
Ket	کت
Strain	کرنش
Field Quantization	کوانتیزه کردن میدان
Colloids	کولوئیدها
Photonic Gap	گاف فوتونی
Full Gap	گاف کامل
Direct Gap	گاف مستقیم
Permittivity	گذردهی الکتریکی
Permeability	گذردهی مغناطیسی
Abelian (Commutative) Group	گروه آبدلی (جابجایی)
Spontaneous Emission	گسیل خودبه‌خودی
Sparse Matrix	ماتریس تُنک

Set of Partners	مجموعه‌ی شرکاء
Dense Wavelength Division Multiplexing	مخابرات تفکیک طول موج چگال
Fiber Optics Communications	مخابرات فیبر نوری
Light Cone	مخروط نور
Group Order	مرتبه‌ی گروه
Classical Diffraction Limit	مرز کلاسیک پراش
Conjugate	مزدوج (هم‌یوغ)
Character	مشخصه
Constitutive Relations	معادلات سازنده
Maxwell's Equations	معادلات ماکسول
Wave Equation	معادله‌ی موج
Expectation Value	مقدار چشم‌داشتی
Scaling	مقیاس‌بندی
Dipole Moment	ممان دو قطبی
Dipole Source	منبع دو قطبی
Point Source	منبع نقطه‌ای
Huygens' Source	منبع هویگنس
Electromagnetic Wave	موج الکترومغناطیس
Reflected Wave	موج بازتاب
Backward Travelling Wave	موج پسرو
Forward Travelling Wave	موج پیشرو
Incident Wave	موج تابنده

Waveguide	موج‌بر
Mode	مود
Substrate Mode	مود بستر
Fundamental Propagating Mode	مود پایه‌ی انتشار
Leaky Mode	مود نشتی
Guided Mode	مود هدایت‌شده
Initial Field	میدان اولیه
Vector Field	میدان برداری
Magnetic Field	میدان مغناطیسی
Brillouin Zones	ناحیه بریلوین
Irreducible Zone	ناحیه‌ی کاهش‌ناپذیر
Silicon Nanoparticles	نانو ذرات سیلیکون
Nano-Optics	نانو‌اپتیک
Anisotropic	ناهمسانگرد
Nonhomogeneous (Inhomogeneous)	ناهمگن
Scalar	نرده‌ای
Normalization	بهنجارش
Nearest Neighbour	نزدیک‌ترین همسایه
Gap-to-Midgap Ratio	نسبت گاف
Impermeability	نشت‌ناپذیری
Group Theory	نظریه‌ی گروه
Invariant Points	نقاط ناورد

Defect	نقص
Line Defect	نقص خطی
Planar Defect	نقص صفحه‌ای
Point Defect	نقص نقطه‌ای
Imprinting	نگاشت
Reducible Representation	نمایش کاهش پذیر
Irreducible Representation	نمایش کاهش ناپذیر
Matrix Representation	نمایش ماتریسی
Allowed Frequency Gap	نوار مجاز بسامد
Forbidden Frequency Gap	نوار ممنوع بسامد
Local Oscillator	نوسان ساز محلی
Harmonic Oscillator	نوسانگر هماهنگ
Direct Laser Write	نوشتن مستقیم لیزری
Semiconductor	نیمه هادی
Divergence	واگرایی
Interaction Hamiltonian	هامیلتونی برهمکنش
Isomorphism	هم‌ریختی
Isotropic	همسانگرد
Homogeneous	همگن
Holography	هولوگرافی
Yablonovite	یابلونوویت

