اشتباهات رایج در ریاضیات عمومی:

در این فصل برخی از اشتباهاتی که معمولاً دانشجویان کارشناسی مرتکب می‌شوند و همچنین دلایـل این امر و راهکارهایی برای اجتناب از آن‌هـا ارائـه می‌شـود. امیـدواریم پـس از ایـن، شـاهد اشـتباهات جدید، یعنی اشتباهاتی غیر از آن‌هایی که در اینجا به آن‌ها اشاره می‌شود، باشیم!

عناوین بخش‌ها عبارت‌اند از:

۱-۳) خطاهای ارتباطی:

۱-۱-۳) ***مغرور بودن معلم و برخورد غیر دوستانه او و خجالت کشیدن دانش آموز.***

یکی از اشتباهات بزرگ معلمان، نفرت داشتن از مورد سؤال واقع شـدن توسـط دانشـجویان اسـت. در نظر نگرفتن دانشجویان به‌عنوان دشمن و سعی در تدریس بهتر، احساس راحتی بیش‌تری بـه معلمـان خواهد داد. بنابراین معلم باید به سخن دانشجویان گوش کند و آن‌ها را تشویق کنـد تـا سؤال‌هایشـان را بپرسند. اگر معلمی صرفاً سخنرانی کند و مشوق دانشجویان به امر پرسش نباشد، شـاید بهتـر باشـد یک کتاب یا یک فیلم آموزشی را جایگزین او کرد. برای ارائـه یـک تـدریس مـؤثر بایـد دیـد کـه آیـا دانشجویان مطلب را درک کرده‌اند یا نه. مؤثرترین روش برای به‌دست آوردن جواب این سـؤال، گـوش دادن به حرف‌های آن‌ها و نگـاه کـردن بـه چهره‌هـای آن‌هـا اسـت.[۱] شـاید معلـم در ایـن مـورد فقـط دانشجویان ممتاز خود را لحاظ کند، زیـرا آن‌هـا زیبـایی مطـالبی کـه تـدریس می‌کنـد را بهتـر درک می‌کنند. امّا باید توجه داشت که دانشجویان دیگر، نیاز بیشتری به کمک معلم دارند و البته ایـن امـر حق مسلم آن‌ها است.

[۱] البته در این دوره، متاسفانه به دلیل شیوع کرونا از این نعمت محروم مانده‌ایم!

یکی از خصایص نفرت‌آور یک معلم، صفت غرور و تکبر است. طبیعی است کـه معلـم نیـز مرتکـب اشتباه می‌شود، در واقع اشتباهاتی که به آن‌ها اشاره خواهد شد، ممکن است معلم نیز مرتکـب شـود و طبیعی است در این مواقع او به این امر اعتراف کند. امّا ممکن است غرور او مانع ایـن امـر شـود و بـه تدریس خود ادامه دهـد. برخـی از معلمـان بـه جـای اینکـه اشـتباه خـود را بپذیرنـد در ایـن مواقـع می‌گویند: «خوب؛ دانشجویان عزیز! ادامـهٔ اسـتدلال بـدیهی اسـت!» اگـر معلـم مغـرور بـوده و رفتـار دوستانه‌ای با دانشجویان نداشته باشد، دانشجویان نمی‌توانند با او ارتباط سازنده‌ای برقرار کنند.

اگر فکر می‌کنید معلم مرتکب اشتباه شده است، خجالت نکشیده و بـه کـلّ دانشـجویان کـلاس لطـف کرده و آن را اعلام کنید. البته این موضوع را با معلم خود به صورت سؤالی مطرح کنید. بـه‌طور مثـال، به جای اینکه بگویید: «آن ۵ باید ۷ باشد» بگویید: «آیـا آن ۵، نبایـد۷ باشـد؟» همچنـین ایـن سـؤال خود را بلافاصله پس از اینکه معلم مرتکب اشتباه شد، بپرسـید. معلـم تـرجیح می‌دهـد پـس از اتمـام جلسهٔ درسی، دانشجویان با یادداشت‌هایی بدون اشتباه از کلاس خارج شوند.

۲-۱-۳) *جمله‌بندی مبهم.*

زبآن‌های رایج بشری برای بیان ریاضیات در نظر گرفته نشده‌اند. ریاضیات زبان خاص خود را دارد، امّـا برای بیان آن از زبآن‌های رایج بشری نیز استفاده می‌کند و ایـن خـود مشـکلاتی را در پـی دارد، زیـرا ممکن است چندین تعبیر مختلف بـرای یـک واژه یـا اصـطلاح موجـود باشـد. اگـر معلـم در انتخـاب واژه‌های خود دقت نداشته باشد، ممکن است از واژه‌هایی بـا چنـدین تعبیـر مختلـف اسـتفاده کنـد و دانشجو آن معنای مورد نظر معلم را برداشت نکند. انتخاب واژه یا اصطلاح دقیق، یـک هنـر اسـت کـه می‌توان با تمرین آن را ارتقا بخشید. به مثال زیر از آنالیز ترکیبیات توجه کنید:

چند کلمهٔ متفاوت ۵ حرفی را می‌توان از ۷ حرف نقطه‌دار و ۴ حرف بی‌نقطهٔ متمایز ساخت به‌طوری‌که دو حرف نقطه‌دار یا بی‌نقطه با هم نیایند و تکرار نیز مجاز نباشد؟ اگر تکرار مجاز باشد چطور؟

در بخش اول این سؤال «.. با هم نیایند...» مبهم است. آیا منظور این است که آن دو حرف به‌طور متوالی نباشند یا اینکه یک در میان نباشند؟ آیا منظور دو حرف متمایز است؟ تعبیر این شرط بستگی به خواننده دارد و بر اساس هر تعبیری، یک جواب صحیح برای این مسئله ارائه خواهد شد. در مورد بخش دوم این سؤال، دانشجویان باید به این نکته توجه داشته باشند که اگر یک سؤال در ادامه سؤال قبلی مطرح شود، یعنی تمام شرایط مسئلهٔ قبل برقرارند، مگرشرایطی که در سؤال دوم تغییر می‌کنند.

گاهی این ابهام و عدم تفاهم، به واسطهٔ قراردادهای متفاوتی است که در بین ریاضی‌دانان رایج است. به‌طور مثال، برخی از ریاضی‌دانان اثر تابع f روی متغیر x را با $f(x)$ و برخی دیگر با xf نمایش می‌دهند. حال اگر دانشجو از معلم قبلی خود قرارداد اول را آموخته باشد و معلم جدید بر اساس قرارداد دوم عمل کند، یک نوع عدم تفاهم بین معلم و دانشجو به وجود می‌آید و گاهی هر دو نیز از ریشهٔ این اختلاف آگاه نیستند. (مثال‌های بیش‌تری را در بخش ترتیب عملگرها ارائه خواهیم کرد).

گاهی این ابهام به واسطهٔ بی‌توجهی به قراردادهای وضع شده در خود ریاضیات ایجاد می‌شود. به‌طور مثال، $5\times3+2$ را می‌توان به دو معنای متفاوت $5\times(3+2)$ و $(5\times3)+2$ در نظر گرفت که طبق قرارداد دومی مد نظر است.

۳-۱-۳) *دست‌خط بد.*

دست‌خط بد یکی از موانع ایجاد ارتباط صحیح با دیگران و حتی با خود است. اگر چه تعداد کمی از معلمان برای دست‌خط بد نمره منفی در نظر می‌گیرند، نوشتهٔ بد خط ممکن است شما را به جواب نادرست برساند. به‌طور مثال، دانشجویی حاصل $\int (5x^4 + 2)dx$ را $x^5 + 7x + c$ به‌دست آورد. دلیل این اشتباه این بود که ۲ را شبیه ۷ نوشته بود. نوشتهٔ شما باید آن قدر تمیز باشد که خودتان یا هر شخص دیگر به راحتی بتوانید تفاوت حروف و کاراکترهای به‌کار برده شده را تشخیص دهید. یکی از اشتباهات رایج در این زمینه، اشتباه گرفتن علامت «+» و حرف «t» به‌جای یکدیگر است.

۴-۱-۳) *نخواندن دقیق دستورالعمل‌ها.*

دانشجویان گاهی دستورالعمل سؤال را به درستی نمی‌خوانند، بنابراین جواب درست، به یک سؤال نادرست می‌دهند!

۵-۱-۳) *ندیدن و ننوشتن پرانتزها.*

در حین یک محاسبه، اگر نیاز به قرار دادن یک جفت پرانتز باشد و شما به دلیل تنبلی یا کمبود وقت آن‌ها را قرار ندهید، ممکن است در مرحلهٔ بعدیِ محاسبه مرتکب اشتباه شوید. به‌طور مثال:

$$3\int (5x^4 + 7)dx = 3x^5 + 7x + c$$

باید به صورت زیر باشد:

$$3\int (5x^4 + 7)dx = 3(x^5 + 7x) + c = 3x^5 + 21x + c$$

همچنین به‌کاربردن پرانتزهای نامتقارن یکی دیگر از اشتباهات رایج نوشتاری است. به‌طور مثال، «$3(5x^4 + 2x + 7))$» بی‌معنی است، زیرا تعداد پرانتزهای باز شده با تعداد پرانتزهای

بسته شده برابر نیست. برای برقراری تقارن پرانتزها می‌توانیم به دو صورت مختلف $3(5x^4+2x+7)$ یا $3(5x^4+2x)+7$ عمل کنیم، بنابراین باید در این مورد نیز دقت لازم را به‌کار برد که کدام یک مد نظر است.

۶-۱-۳) *جملاتی که در علامت سه نقطه از دست می‌روند.*

علامت سه نقطه (...) طبق قرار داد به معنای «الگو را ادامه دهید.» است و برای نوشتن لیست‌های طولانی به‌کار می‌رود. برای مثال ۱،۲،۳،...,۱۰۰، برای نمایش اعداد طبیعی از ۱تا ۱۰۰ به‌کار می‌رود.

گاهی استفاده از علامت سه نقطه (...) نه تنها یک قرارداد، بلکه یک ضرورت است. به‌طور مثال، $1,2,3,...,n$ برای نمایش اعداد طبیعی از ۱ تا عدد n به‌کار می‌رود و بدون استفاده از علامت سه نقطه، بیان آن ممکن نیست.

علامت سه نقطه برخی از جملات لیست را پنهان می‌کند. از این قرارداد باید زمانی استفاده کرد که تعداد جملات باقی‌مانده به اندازه‌ای باشد که الگوی به‌کاربرده شده را آشکار سازند. به‌طور مثال، ۱,...,۶۴ مبهم است و می‌توان آن را به صورت های مختلف زیر تعبیر کرد:

الف) اعداد طبیعی بین ۱ تا ۶۴: ۱،۲،۳،۴،...,۶۴

ب)توآن‌های ۲: ۱،۲،۴،۸،۱۶،۳۲،۶۴

ج) اعداد مربع کامل بین ۱ تا ۶۴: ۱،۴،۹،۱۶،۲۵،۳۶،۴۹،۶۴

البته ممکن است با توجه به زمینهٔ مورد بحث که ۱,...,۶۴ در آن ظاهر شده است بتوان تشخیص داد کدام یک از تعبیرهای بالا مد نظر است. همچنین تعداد جملات مورد نیاز برای آشکارسازی الگوی به‌کار برده شده نیز یک امر نسبی است و از فردی به فرد دیگر ممکن است فرق‌کند.

به‌کارگیری نادرستِ علامت سه نقطه، می‌تواند در اثبات‌های استقرایی ایجاد مشکل کند. به‌طور مثال، فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$\forall n \in I\!N \;\; 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

حکم برای $n = 1$ برقرار است. فرض می‌کنیم برای یک n نامعین حکم برقرار است و ثابت می‌کنیم برای $n+1$ نیز حکم برقرار است. به دو طرف تساوی برای حالت n، عدد $2n+1$ را اضافه می‌کنیم. یعنی:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + 2n + 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n + 1$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n + 1$$

که غلط است. حال اگر دچار یک اشتباه جبری نیز بشویم و از تساوی آخر به نتیجهٔ درست زیر برسیم. آن‌گاه به اشتباه قبلی خود پی نخواهیم برد.

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

امّا اشتباه چیست؟ در واقع داریم:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + 2n + 1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + (n+1)^2$$

بنابراین جمله n^2 در علامت سه نقطه حذف شده است و عبارت حاصل، خواست مسئله ما نیست.

۲-۳) *اشتباهات جبری*:

۱-۲-۳) *خطای علامت*.

خطاهای علامت، رایج‌ترین اشتباه جبری هستند و نشان‌دهندهٔ بی‌دقتی و عدم توجه دانشجویان هستند. اگر چه دانشجویان خطاهای علامت را بی‌اهمیت می‌دانند، توجه داشته باشید که **یک علامت منفیِ اشتباه در محاسبات یک مهندس، ممکن است موجب فرو ریختن یک پل یا یک ساختمان شود!**

دلایل زیربنایی گوناگونی برای خطاهای علامت وجود دارند. یکی از دلایل، همان «ندیدن پرانتزها» است که در بخش قبل بحث شد. دلیل دیگر این است که برخی از دانشجویان، ناخودآگاه به این نکتهٔ اشتباه باور دارند که «*علامت منفی به معنای یک عدد منفی است*.» شاید ریشه این باور این باشد که ما «$-x$» را به صورت (منفی x) می‌خوانیم و این امر باعث شده که برخی از دانشجویان تصور کنند که حاصل باید یک عدد منفی باشد. اینکه آیا «$-x$» یک عدد منفی است، بستگی به خود x دارد. اگر x مثبت باشد، آن‌گاه $-x$ منفی است. امّا اگر x منفی باشد، آن‌گاه $-x$ مثبت است. به‌طور مثال، اگر $x=-6$، آن‌گاه $-x=+6$ یک عدد مثبت است.

عدم درک صحیح علامت عدد «$-x$» خود باعث اشتباهات بعدی می‌شود. به‌طور مثال، درک تابع قدرمطلق نیز دچار مشکل خواهد شد. به‌طورهندسی معنای $|x|$ فاصله بین x و مبدأ مختصاتِ محور اعداد حقیقی است و فاصله، یک کمیت نامنفی است. به لحاظ جبری $|x|$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

این تعریف پیچیده است و مبتدیان را دچار مشکل می‌کند.

۲-۲-۳) عدم توجه به گسترش مفاهیم.

اعداد مختلط تعمیم اعداد حقیقی است. بسیاری از قوانین حاکم بر دنیای اعداد حقیقی، به دنیای اعداد مختلط گسترش می‌یابد. به‌طور مثال، تمام خواص جبری اعداد حقیقی مانند جابه‌جایی بودن اعمال جمع و ضرب، به همان شکل برای اعداد حقیقی نیز برقرارند. به‌ویژه، نتیجه می‌شود تمام اتحادهای جبری مانند بسط دوجمله‌ای خیام-نیوتن برای اعداد مختلط نیز به همان شکل برقرارند. این امر، بعث می‌شود برخی از دانشجویان فکر کنند هر قانونی که در اعداد حقیقی برقرار است، برای اعداد مختلط نیز برقرار است! درحالی‌که این طور نیست. به‌طور مثال، تابع قدر مطلق را از اعداد حقیقی به اعداد مختلط گسترش می‌دهیم. اما نحوهٔ گسترش این مفهوم، بر اساس علامت اعداد مختلط تعریف نیست، بلکه بر اساس مفهوم هندسی آن است؛ یعنی فاصله یک عدد مختلط تا مبدأ. بنابراین علی‌رغم نمایش دادن قدر مطلق عدد مختلط z به شکل $|z|$، خواص جبری تابع قدر مطلق برای اعداد مختلط الزاماً برقرار نیستند. به‌طور مثال، تساوی $|z|^2 = z^2$ برای اعداد مختلط دلخواه برقرار نیست، کافی است قرار دهیم $z=i=\sqrt{-1}$. درواقع، می‌توان دید این تساوی فقط برای اعداد حقیقی برقرار است. همچنین، نامساوی $|z| < 1$ معادل با $-1 < z < 1$ نیست، بلکه نقاط درون دایرهٔ واحد حول مبدأ را مشخص می‌کند.

دلیلِ عدم برقراری تساوی $|z|^2 = z^2$ و عدم معادل بودن نامساوی $|z| < 1$ با $-1 < z < 1$ چیست؟ یک سنت الهی می‌گوید تا شما چیزی از دست ندهید، چیزی به‌دست نمی‌آورید! دنیای اعداد حقیقی را گسترش داده‌ایم و جایزهٔ ما این بوده است که در این دنیای گسترش‌یافته، هر چندجمله‌ای ریشه دارد و قابل تجزیه به چندجمله‌ای‌های درجهٔ یک است. اما بهایی که پرداخت کرده‌ایم چه بوده است؟ اعداد حقیقی یک میدان مرتب است. یعنی رابطهٔ

کوچکتری اعداد حقیقی با جمع و ضرب اعداد حقیقی سازگار است. این همان چیزی است که در کار کردن با نامعادلات در اعداد حقیقی استفاده می‌کنیم. به‌ویژه، ما در اعداد حقیقی می‌توانیم صحبت از اعداد مثبت و منفی کنیم و مثلاً اینکه حاصل‌ضرب دو عدد هم‌علامتف همواره مثبت است. اما ثابت می‌شود، روی اعداد مختلط نمی‌توان یک رابطهٔ کوچکتری تعریف کرد به‌طوری‌که با جمع و ضرب اعداد مختلط سازگار باشد. به عبارت دیگر، اعداد مختلط تشکیل یک میدان مرتب نمی‌دهد! به‌ویژه، تمام قواعد حاکم بر دنیای اعداد حقیقی که به‌نوعی بر اساس رابطهٔ کوچکتری تعریف می‌شوند، در دنیای اعداد مختلط برقرار نیستند. به‌ویژه، در دنیای اعداد مختلط نمی‌توانیم صحبت از اعداد مختلط مثبت یا منفی کنیم. البته، همین امر هم باعث شده است که بتوانیم صحبت از جذر عدد منفی یک در دنیای اعداد مختلط کنیم.

۳-۲-۳) *همه چیز جمعی است*.

در ریاضیات پیشرفته، تابع یا عملگر f را جمعی می‌نامند، هرگاه به ازای هر x و y در شرط زیر صدق کند:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

برخی از عملگرهای ریاضی جمعی هستند. به‌طور مثال:

الف) حد مجموع برابر است با مجموع حدها.

ب) مشتق مجموع برابر است با مجموع مشتق‌ها.

ج) انتگرال مجموع برابر است با مجموع انتگرال‌ها.

امّا باید توجه داشت که *بسیاری از عملگرها و توابع ریاضی*، جمعی *نیستند*. علی‌رغم این موضوع، برخی از دانشجویان هنوز شرط جمعی را برای آن‌ها در نظر می‌گیرند. بطور مثال، برخلاف انتظار برخی از دانشجویان داریم:

الف) $\sin(x+y)$ برابر با $\sin(x)+\sin(y)$ نیست.

ب) $(x+y)^2$ برابر با x^2+y^2 نیست.

ج) $\sqrt{x+y}$ برابر با $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ نیست.

د) $\frac{1}{x+y}$ برابر با $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ نیست.

البته باید توجه داشت که ممکن است برای مقادیر خاصی از x و y (به‌طورمثال $x=y=0$ در (الف) تا (ج)) تساوی برقرار شود. امّا این به معنای اینکه برای هر x و y تساوی برقرار باشد، نیست. در مورد $\sin(x+y)$ شاید ریشه اشتباه این باشد که دانشجویان پرانتزها را مشاهده کرده و با تابع $\sin$ مانند یک ضرب مثل ۶ در تساوی $6(x+y)=6x+6y$ برخورد می‌کنند.

۴-۲-۳) *همه چیز جابه‌جایی است.*

در ریاضیات پیشرفته، دو عملگر یا تابع f و g را جابه‌جایی می‌نامیم، هرگاه ترتیب ترکیب آن‌ها مهم نباشد؛ به عبارت دیگر $f\circ g=g\circ f$. برخلاف تصور دانشجویان، بسیاری از عملگرها یا توابع با هم جابه‌جا نمی‌شوند. به‌طور مثال:

الف) $log(\sqrt{x})$ برابر با $\sqrt{log(x)}$ نیست.

ب) $\sin(3x)$ برابر با $3\sin(x)$ نیست.

اشتباه رایج دیگر در این زمینه این است که فرض کنیم عمل ضرب با عمل مشتق‌گیری جابه‌جا می‌شود. یعنی به اشتباه $(f.g)'$ را برابر با $f'.g'$ در نظر بگیریم. لایبنیتز در ابتدا مرتکب این اشتباه شد و سپس فرمول صحیح $(f.g)' = f'.g + f.g'$ را اثبات کرد و این خاصیت مشتق، در حال حاضر به خاصیت لایبنیتزیِ مشتق معروف است. اشتباه مشابه دیگر، جابه‌جایی ضرب با عمل انتگرال‌گیری است. یعنی به اشتباه $\int f(x)g(x)dx$ را برابر با $\int f(x)dx \int g(x)dx$ در نظر بگیریم.

۳-۲-۵) *همه چیز شرکت‌پذیر است.*

جمع و ضرب اعداد حقیقی شرکت‌پذیر است. یعنی به ازای هر سه عدد حقیقی a، b و c داریم:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

برخی از دانشجویان به اشتباه تصور می‌کنند که تمام اعمال ریاضی شرکت‌پذیر هستند، درحالی‌که بسیاری از اعمال ریاضی خاصیت شرکت‌پذیری ندارند. به‌طور مثال، اعمال تفریق و تقسیم این ویژگی را ندارند.

۳-۲-۶) *حذف کردن غیر پخشی.*

اشتباه رایج دیگر «قرار دادن پرانتزهای زائد» است. توابع کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) := \frac{(x+7)(x+1)+x^2+1}{(x+7)(x^2+5)}$$

$$g(x) := \frac{(x+7)[(x+1)+x^2+1]}{(x+7)(x^2+5)}$$

با حذف عامل مشترک صورت و مخرج تابع g یعنی $x+7$ (البته با شرط ناصفر بودن آن) داریم:

$$g(x)=\frac{(x+1)+x^2+1}{x^2+5}$$

برخی از دانشجویان صورت تابع کسری f را بادر نظر گرفتن پرانتزهای زائد، به اشتباه $[(x+7)][(x+1)+x^2+1]$ تصورمی‌کنند، بنابراین به نتیجهٔ غلط $f=g$ می‌رسند. شاید ریشه این اشتباه دانشجویان، در عدم آگاهی آنان از برخی از مفاهیم پایه‌ای کسرها باشد. در این زمینه به ذکر چند قاعدهٔ پایه‌ای بسنده می‌کنیم:

- ضرب اعداد حقیقی خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی $xy=yx$. بنابراین بسیاری از قوانین عمل ضرب، متقارن است. به‌طور مثال، ضرب هم از چپ و هم از راست در جمع پخش می‌شود، یعنی:

$$y(x_1+x_2)=yx_1+yx_2 \quad \text{و} \quad (x_1+x_2)y=x_1y+x_2y$$

- عمل تقسیم اعداد حقیقی خاصیت جابه‌جایی ندارد، یعنی در حالت کلّی $\frac{x}{y}$ با $\frac{y}{x}$ برابر نیست. بنابراین قوانین عمل تقسیم (برخلاف تصور بعضی از دانشجویان) متقارن نیست. بطور مثال، اگرچه قانون $\frac{x_1+x_2}{y}=\frac{x_1}{y}+\frac{x_2}{y}$ برقرار است، $\frac{y}{x_1+x_2}=\frac{y}{x_1}+\frac{y}{x_2}$ در حالت کلّی برقرار نیست (کافی است قرار دهیم $y=x_1=x_2=1$).

- در یک کسر، پرانتزها اهمیت بسیاری دارند. به‌طور مثال، $\frac{a+b}{c+d}$ بیانگر $(a+b)/(c+d)$ است و حذف پرانتزها معنای متفاوتی به این عبارت کسری می‌بخشد.

۷-۲-۳) *اشتباهات ابعادی.*

بیشتر اشتباهات اشاره شده در این کتاب، کارهایی است که نباید انجام دهیم، امّا تحلیلِ ابعادی کاری است که باید انجام دهیم. اگرچه تحلیل ابعادی، جواب درست را به ما نمی‌دهد، بلافاصله جواب‌های غلط را مشخص می‌کند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

- فرض کنید که از شما خواسته شده که حجم ناحیه‌ای را به دست آورید. اگر جوابتان بر حسب سانتی‌متر مربع به‌دست آمده باشد، آن‌گاه بی‌شک جواب غلط است، زیرا بُعد (واحد) حجم از قبیل سانتی‌متر مکعب است. در این‌گونه اشتباهات، تبدیل سانتی‌متر به سانتی‌متر مکعب چارهٔ کار نیست، بلکه باید کل محاسبات را مجدداً بازبینی کرد.
- فرض کنید از شما خواسته شده است که حجم یا مساحت ناحیه‌ای را به دست آورید. اگر جوابتان یک عدد منفی باشد، آن‌گاه بی‌شک جواب غلط است. در این مورد نیز فقط به عوض کردن علامت بسنده نکنید.
- اگر تعیین مساحت یک سکه ۵۰۰ تومانی از شما خواسته شده باشد و جواب شما مثلاً ۵ کیلومتر مربع باشد، علی‌رغم درست بودن بُعدِ (واحد) جواب، به نظر می‌رسد که در محاسبات اشتباهی صورت گرفته است.
- فرض کنید فرمول مساحت کره‌ای به شعاع r را فراموش کرده‌اید. با توجه به اینکه با کوچک‌تر شدن شعاع، مساحت نیز کوچک‌تر می‌شود به‌طورحتم این فرمول $\pi(r^2-2r)$ نمی‌تواند درست باشد. چرا؟
- معادله $2n^2+4n=1399$ در اعداد صحیح جواب ندارد، زیرا سمت چپ یک عدد زوج است درحالی‌که سمت راست یک عدد فرد است.

و) فرض کنید n یک عدد طبیعی است. فرمول $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}=\dfrac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$ نمی‌تواند درست باشد، زیرا سمت چپ یک عدد گنگ است درحالی‌که سمت راست یک عدد گویا است.

حال سعی کنید اشتباه استدلال زیرا بیابید:

سانتی‌متر را با cm و متر را با m نمایش می‌دهیم. حال داریم:

$$1m=100cm=(10cm)^2=(0.1m)^2=0.01m=1cm$$

۳-۳) *ابهام در نمادها:*

۳-۳-۱) ***معکوس تابع یا معکوس عدد.***

مشکلات دانشجویان در یادگیری زبان ریاضیات نیاز به توجه بیشتری دارد. اگرچه زبان ریاضی دقیق و سازگار است، برخی از ناسازگاری‌ها نیز در آن دیده می‌شود. به‌طور مثال، $\sin^n(x)$ برحسب اینکه n چیست، معنای متفاوتی دارد. در حالی‌که $\sin^2(x)=\sin(x)\sin(x)$ امّا $\sin^{-1}(x)=\arcsin(x)$. یعنی $\sin^n(x)$ بر حسب مقادیری که می‌گیرد، تغییر معنا می‌دهد. این امر بعضی از دانشجویان را به اشتباه می‌اندازد و آن‌ها را به نتیجهٔ نادرست $\arcsin(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}$ می‌رساند. در واقع ریشهٔ این اشتباه در این است که نمادگذاری a^{-1} برای دو منظور متفاوت به‌کار برده می‌شود: معکوس ضربی عدد حقیقی ناصفر a و همچنین معکوس تابعیِ تابع وارون‌پذیر a.

۲-۳-۳) *جذر اعداد.*

هر عدد حقیقی مثبت b دارای دو جذر است. نماد $\sqrt{b}$ نشان‌دهندهٔ جذر نامنفی b است. دو جذر عدد حقیقی مثبت b را به صورت $\pm\sqrt{b}$ نشان می‌دهند. برخی از دانشجویان $\sqrt{b}$ را برای هر دو جذر عدد حقیقی مثبت b به‌کار می‌برند، یعنی برای آن، دو مقدار در نظر می‌گیرند. شاید ریشه این اشتباه در این باشد که برخی از معلمان وقتی روی تختهٔ کلاس می‌نویسند: « $\sqrt{b}$ » آن را می‌خوانند «جذر b»، درحالی‌که باید گفت: «جذر نامنفی b».

۳-۳-۳) *ترتیب عملگرها.*

برای ترتیب عملگرها و اولویت آن‌ها قراردادهایی وضع شده است تا از استفادهٔ بیش از حد پرانتزها جلوگیری شود. پرانتزها برای جلوگیری از ابهام به‌کار می‌روند، امّا تعداد بیش از حد پرانتزها در یک عبارت، خود می‌تواند ابهام ایجاد کند. به‌طور مثال، $6a+5$ یعنی $(6\times a)+5$ و نه $6\times(a+5)$. به عبارت دیگر عمل ضرب بر عمل جمع اولویت دارد. شاید ریشه این امر این باشد که در حالت‌های خاص، ضرب ساده‌نویسی جمع است. به‌طور مثال، 4×3 یعنی $4+4+4$.

برخی از دانشجویان از اولویت‌بندی صحیح عملگرها آگاه نیستند. به‌طور مثال، -3^2 چند است؟ بسیاری از دانشجویان این عدد را به صورت $(-3)^2$ در نظر می‌گیرند، بنابراین به جواب ۹ می‌رسند. امّا جواب صحیح ۹- است، زیرا طبق قرار داد عمل «به توان رساندن» اولیت بیشتری نسبت به عمل «قرینه‌سازی» دارد.

اولویت‌بندی‌های رایج برای ترتیب عمل‌ها عبارت‌اند از:

الف)«پتضجم» که مخفف این است: عبارت‌های داخل پرانتز، تقسیم، ضرب، جمع و منها. بنابراین $3/5x$ یعنی $(3/5)x$.

ب) «پضتجم» عبارت‌های داخل پرانتز، ضرب، تقسیم، جمع و منها. بنابراین $3/5x$ یعنی $3/(5x)$.

ج) طبق قرارداد مورد استفاده در زبان برنامه نویسی کامپیوتر FORTRAN و برخی دیگر از زبآن‌های برنامه نویسی، عمل ضرب و عمل تقسیم اولویت یکسانی دارند و اگر در یک عبارت کنار هم آمده باشند، آنکه در سمت چپ قرار دارد در اولویت است. بنابراین $3/5x$ یعنی $(3/5)x$.

یکی از دلایل به‌دست آوردن نتایج متفاوت برای یک عبارتِ یکسان توسط ماشین‌حساب‌های الکترونیکی متفاوت، این است که آن‌ها از اولویت‌بندی‌های متفاوتی برای عمل‌ها استفاده می‌کنند. به‌طور مثال، در یک نوع از ماشین‌حساب‌ها برای عبارت 2^{3^4} عدد ۴۰۹۶ را ارائه می‌دهد، درحالی‌که درر برخی دیگر از آن‌ها برای همین عبارت عدد ۲,۴۱۷۸۵۱۶۳۹۲۳ E۲۴ (به‌صورت نمایش علمی) را ارائه می‌دهد. ریشه این اختلاف این است که اولی این عبارت را به صورت $(2^3)^4$ و دومی به صورت $2^{(3^4)}$ تعبیر می‌کند.

از آنجائی‌که یک موافقت عمومی بر روی اولویت‌بندی‌های عمل‌ها وجود ندارد، برای جلوگیری از ابهام به جای عبارت‌هایی مانند $3/5x$ بهتر است از عبارت‌های نامبهمی مانند $(3/5)x$ ، $\frac{3}{5}x$، $3/(5x)$، یا $\frac{5}{3}x$ استفاده کرد.

۴-۳-۳) *طوفانی از نمادهای بی‌معنی.*

برخی از دانشجویان برای محاسبهٔ مشتق سوم x^4+7x^2-5 به طریق زیر عمل می‌کنند:

$$x^4+7x^2-5=4x^3+14x=12x^2+14=24x$$

اگرچه در نهایت جواب صحیح $24x$ را ارائه می‌دهند، راه‌حل آنان از لحاظ ریاضی بی‌معنی است. در واقع آنان از نماد تساوی «=» به جای نماد نتیجه گیری $(\Rightarrow)$ استفاده می‌کنند. بیان صحیح محاسبهٔ بالا به این صورت است:

$$\begin{aligned} &y = x^4 + 7x^2 - 5 \\ &\Rightarrow y' = 4x^3 + 14x \\ &\Rightarrow y'' = 12x^2 + 14 \\ &\Rightarrow y''' = 24x \end{aligned}$$

۴-۳) *خطا در استدلال:*

۱-۴-۳) *با دقت بازبینی نکردن استدلال از ابتدا تا انتهای آن.*

متأسفانه بیشتر کتاب‌های درسی و برخی از معلمان توجهی به بازبینی کارها و تکالیف دانشجویان ندارند. شاید ریشهٔ این امر وجود نداشتن یک تئوری فراگیر برای نحوهٔ ارزیابی کارهای دانشجویان باشد. برخی از دانشجویان به این باور می‌رسند که نیازی به ارزیابی کارهای آنان در طول ترم نیست. فقط یک بار تکالیف را می‌نویسند و امیدوارند که آن‌ها را درست حل کرده باشند. امّا همهٔ ما گاهی اشتباه می‌کنیم و با آگاهی یافتن نسبت به آن‌ها و تمرین برای از بین بردن آن‌ها مطالب جدید را می‌آموزیم.

در ریاضیات، بازبینی کارهایی که انجام داده‌اید، یکی از قسمت‌های مهم فرایند یادگیری است. سعی کنید پس از اینکه تکالیف شما تصحیح و برگردانده شد، تمام اشتباهات خود را بیاموزید. منظور از بازبینی، یعنی سعی کنید درستی نتیجهٔ به‌دست آمده را از روش‌های دیگر بررسی کنید. به‌طور مثال، اگر معادله‌ای را حل کرده‌اید، در پایان ببینید که آیا جواب‌های به‌دست آمده در معادله صدق می‌کنند یا نه. برای مسائل دیگر نیز باید روش‌های دیگری برای بررسیِ درستی جواب بیابید.

اگر روشی نیافتید، مسئله حل شده را برای مدتی کنار بگذارید و سپس با همان روش قبلی، بدون نگاه کردن به برگهٔ پاسخنامهٔ قبلی، مسئله را حل کنید و ببینید آیا جواب یکسانی به‌دست آمده است یا نه. این روش وقت زیادی را از شما خواهد گرفت، ***امّا چگونه می‌توان بدون پی بردن به اشتباهات در درس ریاضی، نمره خوبی گرفت؟***

روش دیگر برای بازبینی تکالیفی که انجام داده‌اید، مقایسه کردن آن‌ها با تکالیف دیگر دانشجویان است. اگر برای یک مسئله، جواب‌های متفاوتی به دست آورده‌اید، با دقت بیشتری راه‌حل خودتان را بررسی کنید.

برخی از اشتباهات به دلیل عجله کردن و صرف وقت کم برای حل تمرینات به‌وجود می‌آیند. گاهی برای یافتن و تصحیح این دسته از اشتباهات باید وقت بیشتری صرف کنید و این بهایی است که برای بی‌دقتیِ خودتان باید بپردازید.

۲-۴-۳) *بی‌توجهی به اینکه برخی از مراحل، برگشت‌پذیر نیستند و بررسی نکردن جواب‌های مجازی.*

اگر عمل یکسانی را روی دو طرف یک معادله انجام دهیم، یک معادله دیگر به‌دست خواهیم آورد. فرض کنید روی دو طرف یک معادله که برخی از مقادیر مجهول x در آن صدق می‌کنند، عمل یکسانی را انجام دهیم. در این‌صورت، همان مقادیر مجهول x در این معادلهٔ جدید نیز صدق می‌کنند. به عبارت دیگر، معادلهٔ جدید جواب‌های معادلهٔ قدیم را خواهد داشت، امّا ممکن *است که برخی جواب‌های جدید را نیز داشته باشد.*

برخی از اعمال برگشت‌پذیرند، یعنی ما مجموعهٔ جواب مشابهی قبل و بعد از آن اعمال داریم. به‌طور مثال، :

- عملِ «ضرب کردن دو طرفه معادله در یک عدد ناصفر» برگشت‌پذیر است. برای مثال، مجموعهٔ جواب معادله $x^2-3x-2=-4$ با مجموعهٔ جواب معادله $2x^2-6x-4=-8$ یکی است. در واقع برای خنثی کردن عمل انجام شده، کافی است دو طرف معادلهٔ جدید را در معکوس آن عدد ناصفر ضرب کنیم.
- عملِ «تفریق یک عدد از دو طرف معادله» برگشت‌پذیر است. برای برگشت به معادله اول، کافی است تا دو طرف معادلهٔ جدید را با قرینهٔ آن عدد جمع کنیم.

برخی اعمال برگشت‌پذیر نیستند و معادله جدید، ممکن است جواب‌های جدیدی نیز داشته باشد. به‌طور مثال:

- عملِ «مجذورکردن دو طرف معادله» برگشت‌پذیر نیست. مثلاً معادله $x=-3$ فقط یک جواب دارد، امّا وقتی که دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم، معادله $x^2=9$ را به‌دست می‌آوریم که دو جواب دارد.
- عملِ «ضرب کردن دو طرف معادله در $x-a$» برگشت‌پذیر نیست. معادله حاصل، همه جواب‌های معادلهٔ قبلی را خواهد داشت، در ضمن $x=a$ نیز یک جواب جدید آن است.

یک روش رایج برای حل معادلات این است:

> ساختن یک دنباله از معادلات، رفتن از یک معادله به معادلهٔ دیگر با انجام دادن عملی مشابه روی دو طرف یک معادله، سعی در ساده‌تر کردن معادلهٔ قبلی و در نهایت رسیدن به چیزی شبیه $x=5$ از معادلهٔ اولیه.

این روش برای کشف جواب‌های معادله بد نیست. *امّا در ضمن قابل اعتماد نیز نیست*. برای قابل اعتماد ساختن این روش باید یک قانون دیگر در نظر گرفت:

اگر حتی یکی از مراحل برگشت‌پذیر نباشد، در انتهای محاسبات باید جواب‌های به‌دست آمده را برای تعیین جواب‌های مجازی احتمالی بررسی کرد.

به همین دلیل است که در انتهای فرایند محاسبات، نه تنها جواب (یا جواب‌های) مسئلهٔ اولیه به‌دست می‌آید، بلکه احتمالاً برخی جواب‌های دیگر نیز وجود دارند که در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کنند. چگونه آن‌ها را امتحان کنیم؟ کافی است هر یک از جواب‌ها را در معادلهٔ اولیه قرار دهیم تا ببینیم که آیا در آن صدق می‌کنند یا نه. بسیاری از دانشجویان این مرحلهٔ آخر را حذف می‌کنند. برای روشن شدن این مبحث، دو مثال می‌آوریم:

مثال اول: معادله $\sqrt{2x+12}-2=x$ را در نظر می‌گیریم. در ابتدا با اضافه کردن ۲ به دو طرف معادله (یک مرحلهٔ برگشت‌پذیر) داریم: $\sqrt{2x+12}=x+2$. حال با به توان ۲ رساندن دو طرف معادله (یک مرحلهٔ برگشت ناپذیر) داریم: $2x+12=x^2+4x+4$. با جمع و تفریق مناسب در دو طرف معادله (یک مرحلهٔ برگشت پذیر) داریم: $x^2+2x-8=0$ حال این معادلهٔ درجه دوم را با استفاده از روش متداولِ حل معادلات درجه دوم حل می‌کنیم و جواب‌های $x=-4$ و $x=2$ را به‌دست می‌آوریم.

بسیاری از دانشجویان در این مرحله توقف کرده و فکر می‌کنند که کار را به پایان رسانده‌اند و می‌نویسند $\{2,-4\}$ مجموعه جواب معادله است. از آنجائی‌که یکی از مراحل برگشت ناپذیر بود، باید احتمال وجود جواب‌های مجازی را بررسی کنیم. لذا هر یک از جواب‌های $x=-4$ و $x=2$ را در معادلهٔ اولیه قرار می دهیم. با قرار دادن $x=-4$ در معادلهٔ اولیه به رابطهٔ نادرست $4=0$

می‌رسیم، بنابراین $x=-4$ یک جواب مجازی معادلهٔ اولیـه اسـت. بـا قـرار دادن $x=2$ در معادلـهٔ اولیه، نتیجه می‌شود که مجموعه جواب $\{2\}$است.

مثـال دوم: معادلـه $\frac{x^3-3}{x}+\frac{3x^2+x+7}{x}=1+\frac{4}{x}$ را در نظـر می‌گیـریم. بـا جمـع و تفریـق مناسب در دو طرف معادله (یک مرحلهٔ برگشت‌پذیر) داریم: $\frac{x^3+3x^2}{x}=0$. با فـاکتورگیری (یـک مرحلهٔ برگشت‌پذیر) داریـم: $\frac{x^2(x+3)}{x}=0$. یـک xرا از معادلـه حـذف مـی‌کنیم (یـک مرحلهـهٔ برگشت ناپذیر) داریم: $x(x+3)=0$ که جواب‌های آن عبارت‌انـد از $x=0$و $x=-3$. برخـی از دانشجویان در این مرحله می‌ایستند. امّا یکی از مراحل برگشت‌ناپذیر است. با بررسی جواب‌هـا نتیجـه می‌شود که $x=0$ یک جواب مجازی است.

صرف نظـر از موضـوع جواب‌هـای مجـازی، دلیـل دیگـر بـرای بررسـی کـردن جواب‌هـا، یـافتن اشتباهات محاسباتی اسـت. در یـک آزمـون بـا موضـوع «معادلـه‌ها و جواب‌هـای مجـازی آن‌هـا» بـه دانشجویان هشدار داده شد که وجود یک جواب مجازی در جواب‌ها، نصف نمـره را از بـین می‌بـرد. بـا این حال در حدود یک‌سوم از دانشجویان از بررسی جواب‌های خود غفلت کردند!

۳-۴-۳) *اشتباه گرفتن یک گزاره شرطی با عکس آن.*

گزاره‌های $A\to B$ و $B\to A$را عکس یکدیگر می‌نامیم. نماد ریاضی«$\to$» برای «نتیجـه می‌دهـد» به‌کار برده می‌شود. بنابراین گزاره «A، B را نتیجه می‌دهد» را با $A\to B$ نمـایش مـی‌دهیم. طبـق تعریف، عکس گزارهٔ $A\to B$ ، گزارهٔ $B\to A$اسـت. معمـولاً ایـن دو گـزاره هـم‌ارز نیسـتند. بـه‌طور

مثال، فرض کنیم گزاره شرطی «اگر من به مراسم عروسی بروم، آن‌گاه چلومرغ می‌خورم»، یک گزاره درست باشد، در این صورت عکس آن، یعنی «اگر من چلومرغ خورده باشم، آن‌گاه من به مراسم عروسی رفته‌ام» لزوماً درست نخواهد بود. زیرا در مراسم عزاداری نیز ممکن است چلومرغ بدهند. به‌عنوان یک مثال دیگر، می‌دانیم هر دنبالهٔ همگرا یک دنباله کراندار است اما الزاماً هر دنباله کرانداری همگرا نیست. اگر چه در این مثال تشخیص معادل نبودن گزاره و عکس آن ساده است، امّا در مثال‌های ریاضی تشخیص این موضوع کار ساده‌ای نیست.

اگر گزارهٔ شرطی $A \to B$ و عکس آن $B \to A$ هر دو درست باشند، به عبارت دیگر اگر گزارهٔ دو شرطی $A \leftrightarrow B$ درست باشد، آن‌گاه گزاره‌های A و B را ***معادل*** می‌نامند. توجه کنید که معادل بودن دو گزاره، دقیقاً به معنای هم‌ارز بودن آن دو است. به‌طور مثال، فرض کنید که p، q و r طول اضلاع یک مثلث باشند و r طول ضلع بزرگ‌تر باشد، گزاره دو شرطی «$p^2 + q^2 = r^2$ اگر و فقط اگر مثلث مورد نظر یک مثلث قائم‌الزاویه باشد»، درست است. قسمت «اگر» از این گزاره دو شرطی، به قضیه فیثاغورس معروف است، و قسمت «فقط اگر» عکس آن است و میزان معروف بودن آن کم‌تر از اولی است.

برخی از دانشجویان یک گزارهٔ شرطی را با عکس آن اشتباه می‌گیرند. این شاید از این موضوع نشأت بگیرد که در بسیاری از موقعیت‌های غیر ریاضی یک عبارت با عکس آن معادل است و معمولاً در زندگی روزمره، «اگر» را با مفهوم «اگر و فقط اگر» قابل معاوضه دانسته و استفاده می‌کنیم.

ریاضیدان‌ها نیز در موقع تعریف یک مفهوم جدید «اگر» را طبق قرار داد معادل «اگر و فقط اگر» در نظر می‌گیرند. این امر کار را برای کسانی که با زبان ریاضی آشنا نیستند سخت‌تر می‌کند. معمولاً مفهومی که تعریف می‌شود به صورت شکسته و با حروف درشت نوشته می‌شود و در واقع

نقش یک میان‌بر شفاهی را برای آن مفهوم بازی می‌کند. به تعریف «گزاره‌های معادل» کـه در صـفحه قبلی ارائه شد، توجه کنید.

برای روشن شدن بحث، تعریف پیوستگی یک تابع حقیقی مانند f را ارائه می‌دهیم:

> f پیوسته است، *اگر* برای هر عدد حقیقی a و هر عدد مثبـت ε یـک عـدد مثبـت δ (که شاید به a و ε وابسته باشد) چنان وجـود داشـته باشـد کـه بـرای هـر عـدد حقیقی x اگر $|x-a|<\delta$، آن‌گاه $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

در این تعریف «*اگر*» به معنای «اگر و فقط اگر» است و بـرای تعریـف «پیوسـتگی» بـه‌کار بـرده شـده است.

۳-۴-۴) *استدلال برعکس*.

یک روش غیر قابل اعتماد برای اثبات که بوسیلهٔ برخی از دانشجویان به‌کار گرفتـه می‌شـود، *اسـتدلال برعکس* است. فرض کنید می‌خواهیم درستی گزاره A را اثبات کنیم. اسـتدلال بـرعکس یعنـی شـروع استدلال با فرض درستی A، (یعنی آنچه که باید درستی آن را اثبات کنیم)، سپس سـعی در رسـیدن به یک گزاره که درستی آن مثل درستی ۱=۱ واضـح باشـد. از درسـتی ایـن نتیجـهٔ واضـح، برخـی از دانشجویان، بدون توجه بـه برگشـت‌ناپذیری بعضـی از مراحـلِ رسـیدن بـه آن نتیجـهٔ واضـح، نتیجـه می‌گیرند که گزاره A نیز درست است.

فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم که ریشه سـوم ۳ از ریشـه دوم ۲ بزرگ‌تـر اسـت. در اسـتدلال بـرعکس، بـا فـرض درسـتی $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$ کـار را شـروع مـی‌کنیم. سـپس هـر دو طـرف را بـه تـوان ۶ می‌رسـانیم. در نتیجـه $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 < \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6$. حـال بـا توجـه بـه قـانون $(a^b)^c = a^{bc}$ بـرای توان‌هـا

داریم $3^2 > 2^3$، یا به عبارت دیگر $8 < 9$. این همان نتیجه واضح است که به دنبال آن بودیم. برخی از دانشجویان به اشتباه تصور می‌کنند که $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$ اثبات شده است. این یک اثبات نیست!

نباید یک اثبات را با فرض درستی چیزی شروع کنید که می‌خواستید آن را اثبات کنید.

در مثال بالا همهٔ مراحل استدلال برگشت‌پذیرند. بنابراین با عکس کردن مراحل، می‌توان یک اثبات برای مسئله ارائه داد. نتیجهٔ واضح $8 < 9$ را به صورت $3^2 > 2^3$ بازنویسی می‌کنیم. با توجه به قانون $(a^b)^c = a^{bc}$ برای توان‌ها آن را به صورت $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 > \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6$ می‌نویسیم. حال از هر دو طرف ریشهٔ ششم می‌گیریم و در نهایت داریم $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$. به این ترتیب ثابت کرده‌ایم که ریشهٔ سوم ۳ از ریشهٔ دوم ۲ بزرگ‌تر است. همان‌طوری‌که در این مثال توضیح داده شد، استدلال برعکس می‌تواند یک روش خوب برای کشف اثبات‌ها باشد. با وجود این، در استفاده از آن باید احتیاط کنیم، زیرا یک روش غیر قابل قبول برای ارائه اثبات است. *البته بین کشف یک اثبات (که می‌تواند اتفاقی، غیر رسمی و حتی غیر منطقی) باشد و ارائه آن که باید دقیق و منطقی باشد، تفاوت بسیاری است.*

اگر به کمک استدلال برعکس، ایده یک اثبات کشف شد، برای ارائه و تکمیل اثبات، باید گزاره‌هایی شرطی مانند $A \to B$ را تبدیل به $B \to A$ کنیم و همان‌طوری‌که قبلاً بحث شد، همیشه مجاز به این کار نیستیم. دانشجویان مبتدی هنگام استفاده از استدلال برعکس، به برگشت‌ناپذیری برخی از مراحل توجه نمی‌کنند. به‌طور مثال، به استدلال زیر توجه کنید:

فرض کنیم $\forall x \in \mathbb{R}\ x > \sqrt{x^2 - 1}$ درست است. $\sqrt{x^2-1}$ به معنی جذر نامنفی x^2-1 است و چون x بزرگ‌تر از آن است، بنابراین آن نیز نامنفی است.

می‌توانیم هر دو طرف نامساوی را به توان۲ برسانیم که با توجه به نامنفی بودن هر دو طرف، یک مرحله برگشت‌پذیر است. بنابراین داریم $x^2 > x^2 - 1$. با کم کردن x^2 از دو طرف داریم $0 > -1$ که صرف نظر از مقدار x، یک نتیجه درست و واضح است. بنابراین $\forall x \in \mathbb{R}\ x > \sqrt{x^2 - 1}$ درست است! امّا به ازای $x = -2$ نامساوی بالا تبدیل به $-2 > \sqrt{3}$ می‌شود که به وضوح نادرست است!!

سعی کنید اشتباه صورت گرفته را پیدا کنید.

۵-۴-۳) *مشکلاتی با سورها*.

همان‌طوری‌که در فصل قبل توضیح دادیم، سورها عباراتی مانند «وجود دارد» یا «برای هر» هستند. بسیاری از دانشجویان در مورد نحوه استفاده و فهم سورها دچار مشکلاتی هستند. به‌طور مثال، در دستگاه اعداد حقیقی کدام یک از این دو عبارت درست هستند؟

الف) برای هر عدد مثبت a یک عدد مثبت b چنان وجود دارد که a از آن کوچک‌تر است.

ب) یک عدد مثبت b چنان وجود دارد که هر عدد مثبت a از آن کوچک‌تر است.

شاید دلیل سختی درک سورها پیچیده‌تر بودن جملات ریاضی در مقایسه با جملات غیر ریاضی، از لحاظ دستوری باشد. به‌طور مثال: « تابع حقیقی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ روی کل اعداد حقیقی، پیوسته است، اگر برای هر نقطه a و هر عدد اپسیلون بزرگ‌تر از صفر، یک عدد دلتای بزرگ‌تر از صفر چنان وجود داشته باشد که برای هر نقطه x اگر فاصله a تا x کوچک‌تر از دلتا باشد، آن‌گاه فاصله $f(a)$ تا $f(x)$ کم‌تر از اپسیلون باشد». در این تعریف چندین عبارت سوردار و تو در تو به‌کار برده شده است:

الف) برای هر نقطه a...
ب) برای هر عدد اپسیلون ...
ج) وجود دارد دلتایی که ...
د) برای هر نقطه x ...

درگرامر زبان‌های غیر ریاضی، جملات ساخته شده از تعداد زیادی عبارت‌های تو در تو، و همچنین سخت‌گیری زیاد نسبت به ترتیب لغات، رایج نیست.

سورها را به‌عنوان مدارکی در نظر بگیرید که در یک دادگاه قانونی هر یک از دو طرف محاکمه ارائه می‌دهند. به‌طور مثال، فرض کنید حریف شما می‌خواهد پیوستگی تابع f روی را $\mathbb{R}$ اثبات کند. بدون اهمیت دادن به آنچه که شما برای نقطه a و عدد اپسیلون تعیین می‌کنید، حریف باید یک عدد مثبت دلتا را چنان ارائه دهد که بدون اهمیت دادن به نقطهٔ انتخابی x شما، اگر فاصله x از a کمتر از دلتای حریف باشد، آن‌گاه او باید ثابت کند که فاصله $f(x)$ و $f(a)$ کمتر از اپسیلون شماست. بنابراین پیوستگی یک تابع حقیقی مقدار f روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} \ \left(\left|x - a\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon\right)$$

در این نحوهٔ بیان، به وضوح چهار سور تو در تو دیده می‌شود که به نوعی نشان‌دهندهٔ پیچیدگی تعریف پیوستگی است.

۶-۴-۳) *راه‌حل‌های اشتباهی که در چند مورد خاص به نتیجهٔ درست رسیده‌اند.*

گاهی اوقات یک روش غلط بر حسب اتفاق به یک نتیجهٔ درست منجر می‌شود و برخی از دانشجویان آن روش را کلّی و قابل قبول در تمام حالات تلقی می‌کنند. به‌طور مثال، برای ساده کردن کسر $\frac{16}{64}$، اگر عدد ۶ را از صورت و مخرج حذف کنیم، به جواب درست $\frac{1}{4}$ می‌رسیم. ممکن است برخی

از دانشجویان به اشتباه این روش ساده کردن را یک قانون کلّی تصور کنند و ساده شدۀ کسر $\frac{36}{64}$ را برابر با $\frac{3}{4}$ بنویسند!

به مثال دیگری که در برگه امتحانی یکی از دانشجویان نوشته شده است، توجه کنید:

$$\int_0^{2\pi} \cos x dx = \frac{\sin x}{x}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{\sin 2\pi}{2\pi} - \frac{\sin 0}{0} = \sin - \sin = 0$$

نکتۀ جالب این است که این دانشجو انتظار گرفتن بخشی از نمرۀ سؤال را داشت، زیرا جواب نهایی او درست بوده است.

۷-۴-۳) *اطمینان بیش از حد به ماشین‌حساب یا نرم‌افزار.*

بسیاری از دانشجویان ایمان دارند که نرم‌افزارها یا ماشین‌حساب‌هایشان همواره درست عمل می‌کنند، امّا این درست نیست. هر نرم‌افزار یا ماشین‌حسابی محدودیت خاص خود را دارد و تحت برخی شرایط جواب نادرست خواهد داد. (***همان‌طوری‌که معلمان و کتاب‌های ریاضی، گاهی جواب نادرست می‌دهند!***)

شاید بیشترین اشتباه ماشین‌حساب‌ها تفاوت قائل نشدن بین «***درجه***» و «***رادیان***» باشد. در کلاس‌های مهندسی از واحد درجه برای اندازه‌گیری زاویه‌ها استفاده می‌شود و در کلاس‌های ریاضیات عالی و محاسبات پیشرفته واحد رادیان برای این منظور به‌کار گرفته می‌شود، زیرا فرمول‌های توابع مثلثاتی بر حسب رادیان ساده‌تر بیان می‌شوند. به‌طور مثال، در فرمول مشتق‌گیری $(\sin x)' = \cos x$، متغیر x بر حسب رادیان است و اگر x بر حسب درجه باشد،

آن‌گاه این فرمول به صورت $(\sin x)' = \frac{\pi}{180}\cos x$ بازنویسی می‌شود. حال خود قضاوت کنید که کدام یک ساده‌تر بیان شده است؟

۵-۳) *تعمیم دادن های بدون پشتوانه*:

۱-۵-۳) *خطای جذر اویلر*:

برخی از دانشجویان یک فرمول یا یک نماد از یک شاخهٔ ریاضی را در شاخه‌های تعمیم‌یافتهٔ آن شاخه، بدونِ در نظر گرفتنِ معنای آن فرمول یا نماد در آن شاخه‌ها به‌کار می‌گیرند. به مثال زیر توجه کنید:

هر عدد مثبت حقیقی دو ریشه دارد: یکی مثبت و دیگری منفی. نماد $\sqrt{b}$ فقط وقتی به‌کار گرفته می‌شود که b یک عدد حقیقی مثبت باشد و به معنی «ریشه دوم نامنفی b» است. نماد $\sqrt{b}$ برای اعداد مختلط نیز به‌کار برده می‌شود. امّا در مورد اعداد مختلط هر عدد مختلط ناصفر b دو ریشهٔ دوم دارد که هر دو را با $\sqrt{b}$ نمایش می‌دهند. *بنابراین معنای نماد $\sqrt{b}$ در دنیای اعداد حقیقی و دنیای تعمیم‌یافتهٔ آن، یعنی اعداد مختلط کاملاً متفاوت است*. عدم توجه به این تفاوت ممکن است ایجاد مشکل کند. به‌طور مثال، فرمول $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ برای اعداد حقیقی نامنفی a و b درست است و برای اعداد مختلط نادرست است. عدم توجه به این نکته، ما را به تناقض زیر می‌رساند:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\times(-1)} = \sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = i \times i = -1$$

ریاضی‌دان بزرگ «لئونارد اویلر» در دوران نوجوانی‌اش شبیه به همین اشتباه را در سال ۱۷۷۰ میلادی در یک کتاب در زمینه نظریهٔ اعداد مختلط منتشر کرده است.

هرگاه z یک عدد مختلط باشد به طوریکه $|z|<1$، آنگاه $-1<z<1$.

۲-۵-۳) مشتق x^x.

مشتق x^x چیست؟ برخی از دانشجویان با اعتقادی راسخ جواب می‌دهند: $x.x^{x-1}$ و پس از ساده کردن x^x تعدادی از آن‌ها می‌گویند: «چه جالب! مشتق x^x با خودش یکی است!» البته این دانشجویان بعد از حدود یک نیم سال باید به جواب درست زیر برسند:

$$\frac{d}{dx}(x^x)=x^x(1+\ln x)$$

ریشه این اشتباه در این است که دانشجویان بدون در نظر گرفتن شرایط درستی فرمول مشتق $\frac{d}{dx}(x^k)=kx^{k-1}$، آن را به خاطر می‌سپارند. در حقیقت این فرمول زمانی درست است که k یک مقدار ثابت بوده و هر دو طرف آن تعریف شده باشند. به‌طور مثال، اگر $k=\frac{1}{2}$، آن‌گاه باید x مثبت باشد. توجه کنید که فرمول تغییری نمی‌کند، امّا شرایط درستی آن را باید مد نظر داشت.

بسیاری از معلمان به شرط ثابت بودن k اهمیت چندانی نداده و به آن اشاره نیز نمی‌کنند، زیرا در ذهن معلم این سنت رایج (که در هیچ جایی هم نوشته نمی‌شود) وجود دارد که x همواره به معنی یک متغیر و k به معنی یک ثابت است. حروف k و x در اینجا برای منظورهای مختلفی به‌کار برده می‌شوند. معلم ریاضی در استفاده از زبان ریاضی روان و ماهر است، درحالی‌که برای اکثر دانشجویان، زبان ریاضی یک زبان خارجی است.

به نظر اکثر دانشجویانریال شرط ثابت بودن k مهم نیست، زیرا در تمام مثال‌های ارائه شده برای آنان k یک مقدار ثابت است. موقعی که هیچ امکان دیگری برای k وجود ندارد، چرا دانشجو

باید به خود زحمت داده و شرط ثابت بودن k را به خاطر بسپارد؟ امّا حذف همین شرط در آینده، دانشجو را دچار مشکل می‌کند، زیرا او از این فرمول در جایی هم که درست نیست، استفاده می‌کند. در واقع:

هر فرمول ریاضی را باید در کنار شرایط درستی آن به خاطر سپرد.

شاید ریشهٔ عدم توجه دانشجویان به شرایط درستی فرمول‌ها، این است که برای اکثر دانشجویان، ریاضیات یک زبان خارجی محسوب می‌شود و دانشجویان روی فرمول‌ها که به نظرشان بیگانه‌ترند، متمرکز می‌شوند. معمولاً شرایط درستی فرمول‌ها به زبان غیر ریاضی و برحسب جملات فارسی بیان می‌شود. از آنجائی‌که جملات فارسی برای دانشجویان آشنا است، روی این قسمت تمرکز کم‌تری می‌کنند. دلیل دیگر این است که دانشجویانِ کارشناسی، به تمرکز روی محاسبات گرایش دارند و از لحاظ ریاضی هنوز به اندازهٔ کافی رشد نکرده‌اند که قادر باشند دربارهٔ ایده‌های نظری و مجرد به سادگی فکر کنند.

معلمی در ابتدای نیم‌سال تحصیلی به دانشجویان گفت که مشتق x^x برابر x^x نیست، بلکه جواب صحیح $x^x(1+\ln x)$ است و به آن‌ها خاطر نشان کرد که این مسئله در امتحان پایان‌ترم خواهد آمد. این موضوع را در حدود ده بار در طول ترم برای آن‌ها تکرار کرد و در آخرین جلسهٔ درس نیز این مسئله را به آن‌ها یادآوری کرد. با وجود این، تقریباً یک‌سوم ازدانشجویان مسئله را در پایان‌ترم اشتباه حل کردند. دلیل این کار علی‌رغم سماجت‌های معلم برای یاد دادن این موضوع به آن‌ها ***پافشاری و وفاداری آن‌ها به فرمول اشتباهی است که یادگرفته‌اند.*** بنابراین یا فرمولی را یاد نگیرید یا اینکه آن را به‌طورصحیح و کامل یاد بگیرید.

۶-۳) *خطاهای رایج دیگر در حسابان:*

۱-۶-۳) *نتیجه‌گیری نادرست درباره بی‌نهایت.*

برخی از مسئله‌های مربوط به نامتناهی، با استفاده از «حساب مقدماتی نامتناهی» حل می‌شوند. این امر برخی از دانشجویان را به این نتیجهٔ اشتباه می‌رساند که همهٔ مسائل مربوط به نامتناهی از «حساب مقدماتی نامتناهی‌ها» حل می‌شوند.

یک مثال از «حساب مقدماتی» این است که با کمی اغماض می‌توانیم بگوییم که $\frac{1}{\infty}=0$.

البته شاید بهتر باشد که برای کم‌تر به اشتباه افتادن از نماد $\frac{1}{\infty}\to 0$ استفاده کنیم. معنای درست این قانون این است که اگر شما یک عدد متناهی را بگیرید و آن را بر یک عدد بسیار بزرگ تقسیم کنید، یک عدد بسیار نزدیک به صفر به‌دست می‌آید. به‌طور مثال، می‌توانیم از این قاعده استفاده کنیم و نتیجه بگیریم که حد $\frac{3}{x^2}$ زمانی‌که $x\to\infty$ برابر با صفر است، بنابراین $\frac{1}{\infty}$ برابر صفر است.

در مورد $\infty-\infty$، وضعیت کاملاً متفاوت است. زیرا دارای یک جواب نیست، بنابراین آن را مبهم می‌نامیم. به این معنی که رفع ابهام هر مسئله به شکل $\infty-\infty$ و تعیین مقدار دقیق آن، نیازمند یک آنالیز و تحلیل جداگانه است. مسائل متفاوتی از این دست، جواب های متفاوتی دارند. به‌طور مثال، حد توابع $\sqrt{x^2+x}-x$، x^3-x و $[x^2+\frac{1}{x}]-x^2$ در بی‌نهایت به ترتیب برابر «$\frac{1}{2}$»، «بی‌نهایت» و «صفر» است. به‌طورمشابه، $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ نیز مانند $\infty-\infty$ مبهم بوده و نیازمند یک تحلیل پیچیده و جداگانه برای هر مسئله هستند.

اشتباه رایج دیگر دانشجویان این است که فکر می‌کنند حـد $(1+\frac{1}{n})^n$ زمانیکـه $n \to \infty$ برابـر یک است؛ زیرا زمانی‌که $n \to \infty$، داریم $1+\frac{1}{n} \to 1$ و حد 1^n زمانی‌که $n \to \infty$ برابر یک اسـت. این‌گونـه اسـتدلال کـردن، ناشـی از کم‌تجربگـی اسـت. شـما مجبوریـد تـا بـا هـر دو n ظـاهر شـده در $(1+\frac{1}{n})^n$ هم‌زمان سروکار داشته باشید. زیرا آن‌هـا هـر دو هم‌زمـان بـه سـمت بی‌نهایـت حرکـت می‌کنند. نمی‌توانید این طور تجسم کنید که یکـی از آن دو بـه سـمت بی‌نهایـت میـل کنـد و سـپس دیگری به بی‌نهایت میل کند. روش‌های آسان و مقدماتی برای محاسبهٔ ایـن حـد کارسـاز نیسـتند. بـه کمک روش‌های پیشرفته‌تر ثابت می‌شود که مقدار این حد، عددی است که به ۲/۷۱۸ نزدیک اسـت و یکی از ثابت‌های بسیار مهم در ریاضیات است که به عـدد نپـر معـروف اسـت و بـا «e» نمـایش داده می‌شود.

مسئله دیگر 0^0 است که باعث نگرانی و موجب زحمت بسیاری برای دانشجویان شـده اسـت. در واقع 0^0 نیز مبهم بوده و یک تعریف دقیق برای آن نداریم. توجه کنید که:

الف) وقتی که x یک عدد مثبت است، آن‌گاه $x^0 = 1$.

ب) وقتی که y یک عدد مثبت است، آن‌گاه $0^y = 0$.

حال اگر در (الف) x را به صفر میل دهیم، حاصل برابر یک می‌شود؛ درحالی‌که اگر در (ب) y را بـه صفر میل دهیم، حاصل برابر صفر می‌شود. برای درک بهتـر ایـن مسـئله، بهتـر اسـت مقـادیر تـابع دو متغیرهٔ x^y را برای مقادیر کوچکی مانند ...,۰/۰۲۵،۰/۰۵،۰/۱،۰/۲،۰/۴ محاسبه کنیم. *طبیعـی اسـت برای تعریف 0^0، زمانی که x و y هر دو هم‌زمان از سمت راست به صفر میل کنند، می تـوان از حـد*

تابع x^y *استفاده کرد*. امّا این حد وجود ندارد! زیرا روی مسیرهای مختلف در صفحه مختصات، مقادیر متفاوتی برای آن به‌دست می‌آید. به‌طور مثال، روی مسیر $y = x$ در صفحه، به کمک فرمول $x^x = e^{x \ln x}$ که برای تمام مقادیر حقیقی مثبت برقرار است و همچنین با به‌کارگیری قاعده هوپیتال نتیجه می‌شود که حد راست x^x در صفر برابر «یک» است.

۲-۶-۳) *مشکلاتی با سری‌ها*.

بیشترین اشتباه دانشجویان در مورد سری‌ها این است که: «اگر $a_1, a_2, a_3, \ldots$ یک دنباله همگرا به صفر باشد، آن‌گاه سری $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ نیز همگراست». اگر چه عکس این حکم همواره برقرار است. شاید ریشهٔ این اشتباه در این است که در اکثر مثال‌هایی که آن‌ها دیده‌اند، این حکم درست است. ساده‌ترین مثال نقض برای این حکم، سری هارمونیک، یعنی سری $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ است که در اثبات واگرایی آن از ریاضیات پیشرفته‌ای استفاده می‌شود.

مشکل دیگر دانشجویان این است که با سری‌ها مانند جمع‌های متناهی برخورد می‌کنند. فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری عددی باشد. قرار می‌دهیم $S_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. حال اگر دنباله S_n همگرا باشد، می‌گوییم سری $\sum a_n$ همگراست. برخی از دانشجویان سری با جملهٔ عمومی $a_n := (-1)^n$ را همگرا تلقی می‌کنند. توجیه آنان این است که $\sum_{n=0} a_n = (1-1) + (1-1) + \cdots = 0$. در این مثال داریم:

$$S_n = \begin{cases} 1 & n = 2k \\ 0 & n = 2k+1 \end{cases}$$

و این دنباله همگرا نیست، بنابراین سری مذکور نیز همگرا نیست.

۳-۶-۳) *در نظر نگرفتن یا استفاده نادرست از ثابت انتگرال.*

«ثابت انتگرال‌گیری» در انتگرال نامعینِ یک تابع، موجب آشفتگی برای بسیاری از دانشجویان می‌شود، زیرا در نماد $\int f(x)dx$ اشاره‌ای به آن نمی‌شود. در *واقع عبارتی شبیه به* $3x^2+5x+c$ *برای نمایش یک دستهٔ نامتناهی از توابع، از قبیل* $3x^2+5x+4$، $3x^2+5x-9$ *و ... به‌کار می‌رود که مشتق همهٔ آن‌ها برابر* $6x+5$ *است.*

مشکل دیگر این است که در یک مسئله، ثابت انتگرال‌گیریِ چندین انتگرال نامعینِ موجود در آن مسئله را با یک حرف « c » نمایش می‌دهیم. درحالی‌که برای مشخص کردن ثابت‌ها، باید برای هر یک از آن‌ها از نمادهای متمایز مثل c_1، c_2 و ... استفاده کرد. با یک مثال، اهمیت این نکته را روشن می‌سازیم. فرمول انتگرال‌گیری جزء، به جزء در کوتاه‌ترین شکل آن، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int udv = uv - \int udv$$

و با جزئیات بیشتر عبارت است از:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

حال فرض کنید $u(x)=\frac{1}{x}$ و $v(x)=x$، با جای‌گذاری این توابع در فرمول بالا داریم:

$$\int (\frac{1}{x})(1)dx = (\frac{1}{x})(x) - \int (-\frac{1}{x^2})(x)(dx)$$

و در نتیجه:

$$\int \frac{1}{x} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$$

حال با حذف کردن $\int \frac{1}{x} dx$ از دو طرف تساوی بالا به تناقض $1 = 0$ می‌رسیم!! چطور ممکـن اسـت این اتفاق بیفتد؟ با دقت بیشتر، متوجه خواهید شد کـه $\int \frac{1}{x} dx$ در دو طـرف تسـاوی آخـر، یکسـان نیست. در واقع تساوی آخر، با انتخاب مقادیر مناسب برای ثابت‌های c_1 و c_2 به صورت زیر است:

$$\ln|x| + c_1 = 1 + \ln|x| + c_2$$

به بیان دیگر، دو عبارت $\ln|x| + c_1$ و $1 + \ln|x| + c_2$ توابعی منحصر بـه فـرد را نمـایش نمی‌دهنـد، بلکه هر یک، مجموعه‌ای از توابع را نمایش می‌دهند:

الف) عبارت $\ln|x| + c_1$ مجموعهٔ همه توابعی بر حسب x را نشان می‌دهد که می‌تواننـد بـا شـروع از تابع $\ln|x|$ و سپس با اضافه کردن یک ثابت مانند c_1 به‌دست آیند.

ب) عبارت $1 + \ln|x| + c_2$ مجموعهٔ همه توابعی بر حسب x را نشان می‌دهد که می‌توانند بـا شـروع از تابع $\ln|x|$ و سپس با اضافه کردن یک ثابت مانند $1 + c_2$ به‌دست آیند.

علی‌رغم ظاهر متفاوت، این دو عبارت در واقع یک مجموعـهٔ یکسـان از توابـع بـر حسـب x را تعیـین می‌کنند. کافی است در (ب) قرار دهیم $c_2 = c_1 - 1$ یا در (الف) قرار دهـیم $c_1 = c_2 + 1$. بـه بیـان دیگر، این دو عبارت از لحاظ مجموعه‌ای با هم برابر هستند.

برخی دیگر از دانشجویان در انتگرال معین، از رابطهٔ درست $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$ شروع می‌کنند و به رابطهٔ نادرست $\int_a^b \frac{1}{x}dx = 1 + \int_a^b \frac{1}{x}dx$ می‌رسند. ریشهٔ این اشتباه در این است که فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء برای انتگرال‌های معین به این صورت است:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

به بیان دیگر $u(x)v(x)$ در گذر از نامعین به معین با $u(b)v(b) - u(a)v(a)$ جای‌گزین می‌شود. حال با قرار دادن $u(x) = \frac{1}{x}$ و $v(x) = x$ در فرمول بالا خواهیم داشت:

$$\int_a^b (\frac{1}{x})(1)dx = (\frac{1}{b})(b) - (\frac{1}{a})(a) - \int_a^b (-\frac{1}{x^2})(x)dx$$

که با فرض اینکه صفر متعلق به بازه $[a,b]$ نباشد، به تساوی بدیهی زیر تبدیل می‌شود:

$$\ln|b| - \ln|a| = 1 - 1 - (-\ln|b| + \ln|a|)$$

۴-۶-۳) *کامل ننوشتن دیفرانسیل‌ها*.

این مورد، هم در مشتق‌گیری و هم در انتگرال‌گیری ظاهر می‌شود. «کامل ننوشتن دیفرانسیل‌ها» شباهت زیادی به بحث « ننوشتن و ندیدن پرانتزها» دارد که قبلاً در همین فصل در مورد آن بحث کردیم و ریشهٔ هر دو، نگارش و نمادگذاری نامرتب و ناقص است.

در ابتدای آموزشِ مشتق‌گیری به دانشجویان، آنان همواره نسبت به متغیری مشابه و به‌طورمعمول بر حسب x مشتق می‌گیرند. به‌طوری‌که نیازی به بیان آن متغیر احساس نمی‌شود.

نمادهای معمول بـرای مشـتق تـابع $y = f(x)$ عبارت‌انـد از: $\frac{dy}{dx}$، Dy، y' و $f'(x)$. در واقـع، داریم $\frac{dy}{dx} = f'(x)$، بنابراین $dy = f'(x)dx$.

نماد اشتباه $dy = f'(x)$ که با حذف dx به‌دست آمده، ممکن است در ذهن دانشـجو تفـاوت چندانی ایجاد نکند و این حذف بی‌قید و بند به صورت یک عـادت بـرای او درآیـد. امّـا بعـدها همـین عادت بد موجب بروز مشکلات فراوانی خواهد شـد. می‌تـوان بـا ملـزم کـردن دانشـجویانِ مبتـدی بـه استفاده از نماد $\frac{dy}{dx}$ برای مشتق، از مشکلات آتی پیش‌گیری کرد.

مشکل نمادگذاری نامناسب برای مشتق، در قاعده زنجیره‌ای خود را بهتر آشکار می‌کنـد. زمـانی که سؤالاتی از قبیل: «مشتق y نسبت به x چیست؟ مشتق y نسبت به u چیست؟ و ایـن دو مشـتق چگونه به هم مربوط می‌شوند؟» مطرح می‌شوند. دانشجویانی که بـه تفـاوت قائـل نشـدن بـین $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{dy}{du}$ عادت کرده‌اند، در درک قاعده زنجیره‌ای دچار مشکلات فراوانی خواهند شـد. همـین امـر باعـث بروز مشکلاتی در قاعدهٔ تغییر متغیر در انتگرال‌ها خواهد شد که همان قاعده زنجیـره‌ای اسـت کـه بـه یک قاعده در مورد انتگرال‌ها تبدیل شـده اسـت. بـه‌طور مثـال، در جـدول زیـر لیسـتی از اشـتباهات دانشجویان در امتحانات ارائه شده است:

جواب درست	جواب اشتباه	مسئله
$\arctan(x) + c$	$\ln(1 + x^2) + c$	$\int \frac{dx}{1 + x^2}$

$\int \frac{dx}{x^3}$	$\ln(x^3)+c$	$\frac{-1}{2}x^{-2}+c$
$\int \frac{dx}{\cos x}$	$\ln(\cos x)+c$	$\ln\lvert \sec x+\tan x\rvert +c$
$\int \sin^2 xdx$	$\frac{1}{3}\sin^3 x+c$	$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$

دلایل این اشتباهات چیست؟

الف) برای سه مسئلهٔ اول، دانشجویان از فرمول درست $\int \frac{1}{u}du=\ln\lvert u\rvert +c$ به‌طور نادرست استفاده کرده‌اند؛ زیرا آن را به صورت نادرست $\int \frac{1}{u}=\ln\lvert u\rvert +c$ یادگرفته‌اند. عبارت $u=1+x^2$ یا $u=x^3$ یا $u=\cos x$ را داخل فرمول قرار داده و سه جواب نادرست به‌دست آورده‌اند. عبارات $\int \frac{1}{u}du$ و $\int \frac{1}{u}dx$ معانی بسیار متفاوتی دارند، و اگر هر دوی آن‌ها را به شکل $\int \frac{1}{u}$ بنویسید، در مورد آن‌ها دچار اشتباه خواهید شد. شاید بهتر باشد این فرمول را به صورت طولانی امّا دقیق زیر بنویسیم:

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln\lvert u(x)\rvert +c$$

ب) برای مسئله آخر، دانشجویان قصد دارند که از فرمول درست $\int u^2du=\frac{1}{3}u^3+c$ استفاده کنند، امّا آن را به صورت نادرست $\int u^2=\frac{1}{3}u^3+c$ به خاطر سپرده‌اند و در نتیجه به جواب اشتباه رسیده‌اند. عبارات $\int u^2du$ و $\int u^2dx$ معانی بسیار متفاوتی دارند.

همان‌طوری‌که در هر عبارت ریاضی باید هر پرانتز باز «(» متناظر با یک پرانتز بسته «)» باشد، همراه با یک علامت انتگرال « $\int$ » نیز باید یک علامت دیفرانسیل از قبیل « dx » یا « du » به‌کاربرده شود. عبارت $\int \frac{1}{u}$ نامتعادل، مبهم و بی‌معنی است و باید از آن پرهیز کرد.

در ضمن با تغییر متغیر $u = 1 + x^2$ در $\int \frac{1}{u} du$ به انتگرال $\int \frac{2x}{u} dx$ می‌رسیم که کاملاً متفاوت از $\int \frac{1}{u} dx$ است.

نکته دیگر اینکه، برخی از دانشجویان در این که آیا $\int \frac{1}{u} du$ باید $\ln|u| + c$ یا $\ln(u) + c$ باشد، دچار اشتباه می‌شوند. انتگرال $\int \frac{1}{u} du$ همواره با $\ln|u| + c$ برابر است. امّا باید به این نکته توجه داشت که در ریاضیات ترجیح می‌دهیم جواب‌هایمان را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسیم و گاهی روی این موضوع پافشاری هم می‌کنیم. به یاد آورید که در دوران ابتدایی از ما خواسته می‌شد تا جواب جمع یا تفریق کسرها را تا حد امکان ساده کنیم. حال اگر بدانیم تابع u فقط مقادیر مثبت را اختیار می‌کند، آن‌گاه $\int \frac{1}{u} du$ را می‌توانیم به صورت $\ln(u) + c$ بنویسیم. البته گاهی اوقات به دلیل اینکه می‌توان در صورت نیاز، دامنهٔ تعریف تابع u را کوچک‌تر کرد به‌طوری‌که فقط مقادیر مثبت را اختیار کند، علامت قدر مطلق را حذف می‌کنیم. امّا اگر u هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را اختیار کند، آن‌گاه $\int \frac{1}{u} du$ را باید به صورت $\ln|u| + c$ بنویسیم.

۳-۷) بیست خطای دانشجویان در منطق گزاره‌ها و مجموعه‌ها.

۱-اشتباه در بیان ریاضی و نمادین جملات شرطی.

اشتباهات زیادی از این نوع وجود دارند. به‌طور مثال، مشکلاتی در نحوهٔ به‌کارگیری کلمه «یا» وجود دارد. مطمئن شوید که بین «یای فاصل» و «یای مانعه الجمع» تفاوت قائل شده‌اید. علی یا محمد بیایید، یعنی اگر هم علی و هم محمد آمدند، اشکالی ندارد. امّا در یای مانعه الجمع فقط علی یا فقط محمد باید بیاید. اغلب کاربرد «یا» به صورت «یای فاصل» است، مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

۲- اشتباهی نقیض کردن جملات مرکب بدون استفاده از قوانین دمورگان، یعنی اینکه $\neg(P\vee Q)$ را به‌طورمنطقی با $\neg P\vee\neg Q$ هم‌ارز گرفتن یا اینکه $\neg(P\vee Q)$ را به‌طورمنطقی با $\neg P\vee\neg Q$ هم‌ارز گرفتن.

به‌طور مثال، اگر جملهٔ «علی امروز شطرنج بازی می‌کند یا به پارک می‌رود» غلط باشد، آن‌گاه «علی شطرنج بازی نمی‌کند و به پارک نمی‌رود» درست خواهد بود. بنابراین $\neg(P\vee Q)$ به‌طورمنطقی با $\neg P\wedge\neg Q$ هم ارز است و همچنین $\neg(P\wedge Q)$ به‌طورمنطقی هم ارز با $\neg P\vee\neg Q$ است. این اشتباه، نمونه‌ای از این مطلب است که ما فرض می‌کنیم که هر عملی روی هر عمل دیگری خاصیت پخشی دارد.

۳- اشتباهی متمم گرفتن از مجموعه‌ها بدون استفاده از قوانین دمورگان یعنی به اشتباه روابط $(A\bigcup B)^c=A^c\bigcup B^c$ و $(A\bigcap B)^c=A^c\bigcap B^c$ را درست فرض می‌کنیم.

این اشتباه نیز نمونه‌ای دیگر از این مطلب است که ما فرض می‌کنیم هر عملی روی هر عمل دیگری پخش می‌شود. اینجا فرض کرده‌ایم که عمل متمم‌گیری روی اشتراک (یا اجتماع) پخش می‌شود.

۴- اشتباه در بیان نمادی عبارت $\exists x(A(x)\wedge B(x))$ به صورت $\exists x(A(x)\rightarrow B(x))$.

به‌عنوان مثال، بیان نمادین جمله «وجود دارد یک عدد زوج که اول باشد.» عبارت است از $\exists x(E(x) \wedge P(x))$ و نه $\exists x(E(x) \rightarrow P(x))$ که در آن $E(x)$ یعنی « x زوج است» و $P(x)$ یعنی « x اول است». به‌عنوان یک قاعده می‌توان گفت معمولاً سورهای وجودی با ترکیب‌های عطفی همراه هستند.

۵- اشتباه در بیان نمادی عبارت $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ به صورت $\forall x(A(x) \wedge B(x))$.

به‌عنوان مثال، بیان نمادین جملهٔ «هر عدد فردی اول است.» عبارت است از $\forall x(O(x) \rightarrow P(x))$ و نه $\forall x(O(x) \wedge P(x))$ که در آن $O(x)$ یعنی « x فرد است» و $P(x)$ یعنی « x اول است». به‌عنوان یک قاعده می‌توان گفت معمولاً سورهای عمومی با ترکیب‌های شرطی همراه هستند.

۶- عدم توانایی در تغییر سورها در نقیض کردن گزاره‌های سوردار به ویژه در بیان فارسی آن‌ها.

به‌طورمثال، نقیض گزارهٔ «بعضی گربه‌ها جگر دوست دارند.»، گزارهٔ «بعضی گربه‌ها جگر دوست ندارند.» نیست. بلکه نقیض آن عبارت است از «همهٔ گربه‌ها جگر دوست ندارند.» یا «هیچ گربه‌ای نیست که جگر دوست داشته باشد».

۷- اشتباه گرفتن مفهوم عضو و مفهوم مجموعه وقتی که با مجموعه توانی یک مجموعه کار می‌کنیم.

مجموعهٔ توانی مجموعه S که با نماد $P(S)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعه‌ای متشکل از تمام زیرمجموعه‌های S. اگر A یک زیر مجموعه S باشد، آن‌گاه A عضوی از $P(S)$ است.

بــه‌طور مثــال، اگــر $S = \{p,r\}$، آن‌گــاه $\{p,r\} \subseteq S$ و $\{p,r\} \in P(S)$ و از طــرف دیگــر $\{p,r\} \not\subset P(S)$ و $\{p,r\} \notin S$. همچنین توجه کنید که $\phi \notin S$ امّا $\phi \in P(S)$.

۸- *نمایش دادن مجموعه تهی به صورت* $\{\phi\}$.

یک دلیل برای اینکه $\{\phi\}$ نمی‌تواند مجموعهٔ تهی باشد این است کـه ایـن مجموعـه یـک عضـو دارد. نمادگذاری صحیح برای مجموعه تهی عبارت است از $\{\ \}$ یا ϕ که مجموعه‌ای بدون عضو است.

۹- *حذف اشتباه پرانتزها در عبارت شامل اجتماع اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها.*

اگر یک ترتیب برای عملگرها در نظر نگرفته باشیم، آن‌گاه عبارتی ماننـد $A \bigcap B \bigcup C$ مـبهم خواهـد بود. زیرا می‌تواند به معنای $(A \bigcap B) \bigcup C$ یا به معنـای $A \bigcap (B \bigcup C)$ باشـد کـه کـاملاً بـا هـم متفاوتند. بنابراین قرار دادن پرانتزها در مکان مناسب، در انتقال مقصود شما به خوانندگان امـری مهـم است.

۱۰- *عدم توانایی تشخیص تفاوت بین مفهوم تابع و مفهوم عضو یا زوج مرتب.*

نماد $f : A \to B$ یعنی f یک فرایند یا یک قاعده است که باید روی هـر یـک از اعضـای A اِعمـال شود و نتیجه در هر بار، عضوی از B باشد. به‌طور مثال، اگر f تابعی از $\{1,2,3\}$ به اعداد طبیعـی بـا ضابطه $f(x) = x^2$ باشد، آن‌گـاه f فراینـدی اسـت کـه ۱ را بـه ۱، ۲ را بـه ۴ و ۳را بـه ۹ می‌بـرد. بنابراین تابع f عدد ۹ یا حتی زوج مرتب (۹و۳) نیست.

۱۱- *عدم بررسی دقیق تعاریف به هنگام ارائهٔ یک اثبات.*

به‌عنوان مثال، اگر بخواهیم مطلبی را دربارهٔ رابطه بخش‌پذیریِ اعداد صحیح اثبات کنیم، آن‌گـاه مهـم است که معنای این رابطه به درستی در یک یا چند مرحله از اثبات استفاده شود.

۱۲- درست در نظر گرفتن گزارهٔ $\forall x\ P(x)$ زمانی‌که درستی $P(x)$ برای تعدادی متناهی یا نامتناهی از اعضای عالم سخن اثبات شده است.

فرض کنید $P(x)$ عبارت باشد از: «x از ۲ کوچکتر است.» دراین صورت اگر a یک عدد حقیقی کوچک‌تر از ۲ باشد، آن‌گاه $P(a)$ درست است. بنابراین گزاره‌نمای $P(x)$ به ازای نامتناهی عدد حقیقی درست است. امّا گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R}\ P(x)$ نادرست است، زیرا به‌طور مثال، $P(3)$ نادرست است.

برای روشن‌تر شدن موضوع، یک مثال دیگر می‌آوریم. چندجمله‌ای $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-m)$ را در نظر بگیرید که در آن $m=10^9$ و فرض کنید $P(n)$ عبارت باشد از: «n یک ریشهٔ $f(x)$ است.» در این صورت $P(n)$ برای یک میلیون عدد طبیعی نخست، یعنی $1,2,3,\ldots,10^9$ درست است. اولین عدد طبیعی n که به ازای آن $P(n)$ نادرست است، عدد یک میلیارد و یک است!

۱۳- تعمیم دادن یک ویژگی خاص در یک مثال خاص به تمامی مثال‌ها و حالت‌ها.

به‌طورمثال، فرض کنید می‌خواهیم ثابت کنیم که به ازای هر عدد صحیح x باقی‌ماندهٔ x^2 بر ۸ همواره برابر یک است. اگر با فرض $x=2n+1$ به‌ازای یک عدد صحیح n اثبات را شروع کنیم و حکم را در این حالت به اثبات برسانیم، آن‌گاه حکم اصلی را فقط برای اعداد فرد ثابت کرده‌ایم و اثبات ناقص است. برای تکمیل اثبات باید حکم را برای اعداد زوج نیز به اثبات برسانیم. برقراری حکم برای اعداد فرد به برقراری حکم برای تمام اعداد صحیح قابل تعمیم نیست. اگرچه ممکن است الهام بخش ایدهٔ اثبات برای اعداد زوج باشد.

۱۴- فراموش کردن مرحلهٔ پایه استقرا ریاضی.

اثبات گزاره $\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$ به کمک استقرای ریاضی از دو مرحله تشکّلیل شده است: مرحلهٔ پایه استقرا $P(1)$ و مرحلهٔ استقرا $\forall n \in \mathbb{N}\left[P(n) \to P(n+1)\right]$. به‌طورمثال، اگر بخواهیم با استقرا ثابت کنیم $\forall n \in \mathbb{N}\ \ n = n+1$، آن‌گاه مرحلهٔ استقرا برقرار است. زیرا اگر $n = n+1$ آن‌گاه $n+1 = n+2$. امّا به وضوح حکم بالا نادرست است و علت این امر در واقع این است که پایه استقرا برقرار نیست زیرا $1 \neq 1+1$.

۱۵- اشتباه گرفتن جمع‌بندی با تابع گزاره‌ای $P(n)$ در یک اثبات استقرایی.

به‌طورمثال، در اثبات اتحاد $\forall n \in \mathbb{N}\ 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ به کمک استقرا، $P(n)$ کل معادله است نه فقط سمت چپ این معادله.

۱۶- نوشتن نادرست $P(n+1)$ در یک اثبات استقرایی.

هرگاه $P(n)$ به‌طور صریح فرمول‌بندی شده باشد، معمولاً برای نوشتن $P(n+1)$ کافی است ماشین‌وار، n را با $n+1$ جای‌گزین کنیم. به‌طور مثال، اگر:

$$P(n): \qquad 2+4+\cdots+2n = n(n+1)$$

باشد، آن‌گاه $P(n+1)$ عبارت خواهد بود از:

$$2+4+\cdots+2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

۱۷- مرتکب اشتباه در محاسبات جبری شدن، به‌ویژه، در ساده کردن عبارت‌ها در یک اثبات استقرائی.

به‌طور مثال، ممکن است از تساوی $2^n + 2^n = 2^{2n}$ استفاده کنید یا برای ساده کردن $(n+1)^3 + 5(n+1)^2$ به جای فاکتورگیری از بسط دادن تک‌تک جملات استفاده کنید. هرگاه

احساس کردید که در مرحلهٔ استقرا دچار مشکل هستید، باید به دقت محاسبات جبری خود را مجدداً بررسی کنید.

۱۸- شمارش بیش از یک بار به خاطر عدم به‌کارگیری اصل رد و شمول.

به‌طور مثال، اگر در یک دانشگاهی ۲۶ دانشجوی کامپیوتر و ۳۴ دانشجوی ریاضیات و کاربردها وجود داشته باشند، آن‌گاه تعداد دانشجویان این دانشگاه که کامپیوتر یا ریاضیات و کاربردها می‌خوانند لزوماً ۶۰ دانشجو نیست، زیرا ممکن است برخی از دانشجویان هم‌زمان در دو رشتهٔ کامپیوتر و رشتهٔ ریاضیات و کاربردها مشغول به تحصیل باشند. برای به‌دست آوردن تعداد صحیح باید تعداد دانشجویانی را که هم‌زمان در رشتهٔ کامپیوتر و رشتهٔ ریاضیات و کاربردها مشغول به تحصیل هستند، از ۶۰ کم کرد.

۱۹- عدم توجه به شمارش بیش از یک بار و نداشتن معیاری برای پرهیز از این امر.

به‌طور مثال، اگر بخواهیم تعداد دست دادن‌های افراد حاضر در یک جلسه به هنگام سلام دادن را بشماریم باید توجه داشته باشیم که هر دست دادنی دو بار حساب می‌شود. یک بار برای هر یک از دو طرف دست‌دهنده. بنابراین در نهایت باید تعداد به‌دست آمده را بر۲ تقسیم کنیم.

۲۰- اشتباه کردن درعلامت های مثبت و منفی در فرمول اصل رد و شمول.

توجه داشته باشید که علامت‌ها با زیاد شدن تعداد مجموعه‌های مورد بحث بیشتر تغییر می‌کنند:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A - C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$