درس ۱

۱-۱ نسبیت و تقارن مختصاتی

اگر در قطاری یا یک هواپیما بنشینید که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، حرکت قطار یا هواپیمارا «حس» نخواهید کرد. همه‌ی ما کم و بیش این تجربه را داریم. اگر از درون قطار به قطار دیگری نگاه کنید که بر روی ریل‌های موازی حرکت می‌کند، سخت است که بگویید کدام قطار به راستی در حرکت است. این تجربه را می‌توان این گونه توصیف کرد: با هیچ اندازه‌گیری فیزیکی نمی‌توان حرکت مطلق چارچوب لخت را شناسایی کرد. مفهوم **نسبیت** همین است: در فیزیک، تنها حرکت نسبی قابل اندازه-گیری است. در این مثال‌ها، مسافر، ناظری است که مجموعه‌ای از مختصات (خطکش‌ها و ساعت‌ها) را تعیین می‌کند. هر چیزی را که این ناظر اندازه می‌گیرد، نسبت به این مختصات است. روشن است که ناظر دیگری مجموعه‌ی مختصات خودش را برمی‌گزیند و اندازه‌گیری‌های او هم نسبت به مختصات خودش است. گزاره‌ی «فیزیک نسبت به مختصات مختلف» به معنی فیزیک به دست آمده در مختصات مختلف است. البته پدیده‌ها و رویدادها مستقل از اندازه‌گیری‌های ناظرهای متفاوت است. در نتیجه، فیزیک باید مستقل از مختصات باشد. این گزاره ادعا می‌کند که، فیزیک تقارن دارد. یعنی، تحت تبدیل‌های مختصات، رفتن از یک مجموعه‌ی مختصات به مجموعه مختصات دیگر، قانون‌های فیزیک نباید تغییر کنند و شکل معادله‌های فیزیک در هر دو مجموعه‌ی مختصات باید یک‌سان باشند. ناوردا بودن قانون‌های فیزیک تحت تبدیل مختصات، **تقارن نسبیت**[1] **یا اصل نسبیت** نام دارد. تقارن مختصاتی را می‌توان به طور هم‌ارز این گونه بیان کرد که هیچ اندازه‌گیری فیزیکی نمی‌تواند تغییر مختصات را آشکار کند: اگر فیزیک در همه‌ی مختصات یک‌سان باشد، هیچ آزمایشی وجود ندارد که نشان دهد آزمایش‌گر در کدام دستگاه مختصات قرار دارد (همانند مسافر قطار که نمی‌تواند سرعت ثابت قطار را بفهمد.)

تقارن چرخشی نمونه‌ی آشنایی از تقارن مختصاتی است. در دو چارچوب که نسبت به هم چرخیده اند، معادله‌های فیزیک یکسان هستند. تقارن چرخشی می‌گوید که مهم نیست که ما آزمایش فیزیکی را رو به شمال انجام می‌دهیم یا رو به جنوب؛ اگر شرایط موضعی را نادیده بگیرم، در هر دو حالت (رو به شمال یا رو به جنوب) باید به یک نتیجه‌ی فیزیکی برسیم. هیچ اندازه-گیری فیزیکی نمی‌تواند جهت‌گیری آزمایشگاه را آشکار کند. جهت‌گیری چارچوب مختصات مطلق نیست.

هنگامی که با تلسکوپ ناحیه‌های خیلی دور گیتی را نگاه می‌کنیم، برخی پرسش‌ها خودشان را به رخ می‌کشند. از آن جمله اند:

آیا فضا همگن است؟ یعنی آیا فضا در همه جا یکسان است و قانون‌های فیزیک در کهکشان‌های دوردست همان اند که در روی زمین اند؟

آیا فضا همسان‌گرد است؟ یعنی در هر سویی فضا یکسان است یا محور یا جهت خاصی وجود دارد که بر جهت‌های دیگر برتری دارد؟ برای مثال، آیا سرعت نور در هر سو به یک اندازه است؟

آیا قانون‌های فیزیک با زمان تغییر می‌کنند؟

و سرانجام این که آیا قانون‌های فیزیک مستقل از حرکت یکنواخت نسبی است؟

با نگاه کردن به نوری که از دورترین کهکشان‌ها به ما می‌رسد (با فاصله‌ی بیش از ۱۰ بیلیون سال نوری) می‌توانیم طیف اتم های هیدروژن را شناسایی کنیم. تا جایی که می‌توان گفت، اتم‌های هیدروژن در همه جا یکسان اند. چون نور کهکشانی که به ما می‌رسد، خیلی وقت پیش از کهکشان گسیل شده است، به نظر می‌رسد که قانون‌های فیزیک هم با زمان تغییر نکرده‌اند (با

[1] symmetry of relativity

یک استثناء ممکن در ثابت گرانش G. اما اندازه‌گیری آهنگ تغییر آن بسیار سخت است و تاکنون تغییری مشاهده نشده است). پرسش آخری در قلب نسبیت جای دارد. در درون سفینه‌ای که با سرعت یکنواخت در فضا حرکت می‌کند، اگر آزمایشی انجام دهید (ما با شتاب یا گرانش در اینجا کاری نداریم) آیا همان نتیجه را به‌دست خواهید آورد که همان آزمایش را در درون سفینه‌ی دیگری که با سرعت متفاوتی حرکت می‌کند، انجام دهید؟ «درک یا برداشت عمومی» می‌گوید که باید نتیجه‌ی هر دو آزمایش یکسان باشد. این «درک عمومی» چیزی است که در واژگان فیزیک **اصل نسبیت** نامیده می‌شود و نخست گالیله آن را پیشنهاد کرد. همه‌ی آزمایش‌ها و پدیده‌ها در درون سفینه‌ای که با سرعت ثابت در فضا حرکت می‌کند همان است که اگر سفینه حرکت نمی‌کرد. *هیچ چارچوب لخت خاصی در عالم وجود ندارد که آن را چارچوب «سکون» بنامیم.* بنابراین، با هیچ آزمایشی در درون یک سفینه، قطار یا اتوموبیل نمی‌توان گفت که آن سفینه، قطار یا اتوموبیل با چه سرعتی حرکت می‌کند. برای این کار ناگزیریم به بیرون نگاه کنیم و با مقایسه بگوییم نسبت به پیرامون با چه سرعتی حرکت می‌کنیم. گالیله از کشتی استفاده کرد و گفت که اگر از بالای دکل کشتی سنگی را رها کنیم، چه کشتی ساکن باشد یا حرکت یکنواخت داشته باشد، سنگ در همان نقطه بر عرشه‌ی کشتی فرود خواهد آمد. این البته اندیشه‌ای ساده و گیرا است که درستی آن نیازمند آزمون تجربی است. پیش از آن که فراتر برویم، بگذارید نخست برخی مفهوم‌های مکانیک نیوتونی را به یاد بیاوریم.

از گفتار بالا، اصل نسبیت برمی‌آید:

شکل ریاضی قانون‌های فیزیک در همه‌ی چارچوب‌های لخت یک‌سان است.

در این گزاره، یک واقعیت تجربی گنجانده شده است: قانون‌های طبیعت را می‌توان با معادله‌های ریاضی بیان کرد. چرا چنین است؟ پرسشی است که هنوز به طور کامل فهمیده نشده است، با این حال، نشان می‌دهد که می‌توان رفتار مشاهده شده‌ی سامانه‌ی فیزیکی را تحت شرایط قابل تکرار آزمایش، به کوتاهی بیان کرد: مجموعه‌ای از آزمایش‌گرها یا مشاهده‌گرها را درنظر بگیرید. هر یک از آنها در آزمایشگاهی قرار دارد که نسبت به دیگری با سرعت ثابت حرکت می‌کند. هر آزمایش‌گر، آزمایش‌هایی را انجام می‌دهد تا گزاره‌ی ریاضی قانون طبیعت خاصی را بیابد (مانند واکنش جسمی که به آن نیرو وارد می‌شود). بنابه اصل نسبیت، شکل نهایی معادله‌هایی که آزمایش‌گرها به‌دست می‌آورند (در این مثال، قانون‌های نیوتون) یکسان خواهد بود، همه‌ی ازمایش‌گرها به یک شکل ریاضی قانون‌ها خواهند رسید.

توجه کنید که اگرچه شکل ریاضی قانون‌ها یکسان خواهد بود، اما لازم نیست که مقدارهای عددی داده‌هایی که یک آزمایش‌گر به‌دست می‌آورد با مقدارهای عددی داده‌های آزمایش‌گر دیگر حتما یکی باشد. برای نمونه، آزمایش‌گرهای مختلفی که به نقطه‌ی برخورد دوجسم و زمان برخورد آنها نگاه می‌کنند، لازم نیست که حتما مختصات یکسانی را به برخورد نسبت بدهند. اما همواره یک رابطه‌ی ریاضی وجود دارد که داده‌های آزمایش‌گرها را به هم مربوط می‌کند. برای نسبیت نیوتونی این معادله‌های تبدیل، تبدیل‌های گالیله اند. بنابراین، اصل نسبیت لازم می‌دارد که شکل معادله‌های تبدیل شده در همه‌ی چارچوب‌هایی که با سرعت ثابت نسبت به هم حرکت می‌کنند، یکسان باشند. به بیان دیگر، قانون‌های فیزیک در همه‌ی چارچوب‌هایی که نسبت به هم با سرعت ثابت در حرکت اند، یکسان است.

در بند بالا از «شکل ریاضی»، «چارچوب » و «تبدیل‌های گالیله» گفتیم که هنوز آنها را نپرورانده‌ایم. بنابراین، شاید خوب باشد که گزاره‌ی هم‌ارزی زیر را برای اصل نسبیت بیان کنیم.

برای دو ناظر A و B که با سرعت ثابت نسبت به هم در حرکت اند، هیچ آزمایشی وجود ندارد که نشان دهد کدام یک «ساکن» و کدام یک «در حرکت» است.

نیوتون و پیشینیان پس از او اصل نسبیت را پذیرفتند. نیوتون آن را در بن‌سازه‌ی «فضای مطلق» بیان کرد که حالت سکون مطلق را تعریف می‌کند. او این مفهوم را برای کنار آمدن با دشواری «شتاب نسبت به چه» جسم شتابیده معرفی کرد. برای فهمیدن این نکته تصور کنید که فضا از هر گونه ماده تهی است ودر این فضای تهی دو جرم با یک فنر به هم وصل اند. اگر این چیدمان دو جرم و فنر حول محوری که از وسط فنر می‌گذرد و بر آن عمود است، بچرخد، جرم‌ها شتابیده می‌شوند. بر پایه‌ی تجربه‌ها خود خواهیم گفت که جرم‌ها از هم دور می‌شوند. اما چرا باید آنها از هم دور شوند؟ جرم‌ها از کجا «می‌دانند» که آنها را می‌چرخانیم؟ هیچ علامتی در فضای تهی وجود ندارد. نیوتون پیشنهاد کرد که جرم‌ها نسبت به این فضای مطلق شتابیده می‌شوند و در نتیجه، آنها به همان دلیل از هم دور می‌شوند که از حرکت دایره‌ای انتظار داریم. پیشنهاد نیوتون برای وجود فضای مطلق برای جمع و جور کردن قانون‌های حرکت او بود. ادعایی بود که راستی‌آزمایی آن نشدنی بود و نیوتون از آن آگاه بود. دانشمندان دیگر بیش از نیوتون پذیرای ایده‌ی فضای مطلق بودند و نظریه‌ی الکترومغناطیس مکسول به نظر می‌رسید که گونه‌ای پشتیبان برای این مفهوم فراهم می‌کرد.

یکی از پیش‌بین‌های نظریه‌ی مکسول این بود که نور موج الکترومغناطیسی است که با سرعت $c \approx 3\times 10^{8}\ ms^{-1}$ حرکت می‌کند. اما نسبت به چه؟ نظریه‌ی مکسول مشخص نمی‌کرد که نسبت به چه چارچوبی سرعت نور این مقدار است. پاسخ این پرسش را فرضی فراهم می‌کرد که پیش‌تر درباره‌ی انتشار نور در فضا وجود داشت: آزمایش تداخلی یانگ نشان داده بود که حرکت نور موج‌گونه است؛ اما دیدگاه جهانی نیوتون می‌گفت که نور نمی‌تواند در فضای تهی انتشار یابد، بلکه باید ماده‌ای وجود داشته باشد که با حرکت نور در آن، نوسان کند؛ چیزی شبیه ژله که با حرکت نور در آن نوسان می‌کند. در نتیجه، پیشناد شد که فضا با ماده‌ای به نام اِتِر انباشته شده است و با گذار نور از آن، نوسان می‌کند. فراتر از این، پیشنهاد می‌شد که اتر نسبت به فضای مطلق نیوتون، ساکن است. در نتیجه، پرسش این که سرعت نور نسبت به کدام چارچوب $c \approx 3\times 10^{8}\ ms^{-1}$ است، پاسخ پیدا کرد. افزون بر این، در همکاهنگی با حرکت نسبی معمول، انگاشته می‌شد که اگر نسبت به اتر به سوی باریکه‌ی نور حرکت کنید، سرعت نور را بزرگ‌تر از c و اگر به دور از نور حرکت کنید، سرعت نور را کوچک‌تر از c خواهید یافت. شگفتی هنگامی پدید آمد که آزمایش مایکلسون- مورلی خلاف آن را نشان داد.

مایکلسون و مورلی نظریه‌ی اتر را پذیرفته بودند و می‌خواستند سرعت زمین را نسبت به اتر اندازه بگیرند. نتیجه‌ای که آزمایش آنها به‌دست داد کاملا دور از انتظار بود. جدای از این که زمین در چه موقعیتی در مدارش به دور خورشید بود، نتیجه‌ی اندازه گیری همواره صفر بود. آنها انتظار داشتند که جایی در مدار زمین به دور خورشید، زمین می‌بایست نسبت به اتر حرکت می- کرد. به بیان دیگر، مایکسون و مورلی سرعت نور را اندازه‌گیری کردند و دیدند که مهم نیست که سرعت زمین نسبت به اتر چیست، سرعت نور همواره برابر c است. در واژگان امروز، می‌توان یافته‌ی مایکلسون و مورلی را این گونه فهمید: فرض کنید تعدادی سفینه‌ی فضایی نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. سرنشین‌های این سفینه‌ها، جدای از هم، سرعت نوری را که از یک ستاره به آنها می‌رسد اندازه می‌گیرند و همگی یک مقدار برای سرعت نور می‌یابند. این نتیجه، با قاعده‌ی سرعت‌های نسبی که از نسبیت گالیله برآمده است، در تناقض بود. بنابراین، به نظر می‌رسید که وابسته نبودن سرعت نور به حرکت مشاهده‌گر باید قانون بی چون و چرای طبیعت و در همان حال، با اصل نسبیت ناسازگار باشد. چیزی در اینجا نادرست بود. اینشتین نشان داد که چگونه می‌توان این دشواری را برطرف کرد و با این کار ناگزیر شد که نتیجه بگیرد که فضا و زمان ویژگی‌هایی دارد که در تصویر نیوتون از عالم نمی‌گنجند.

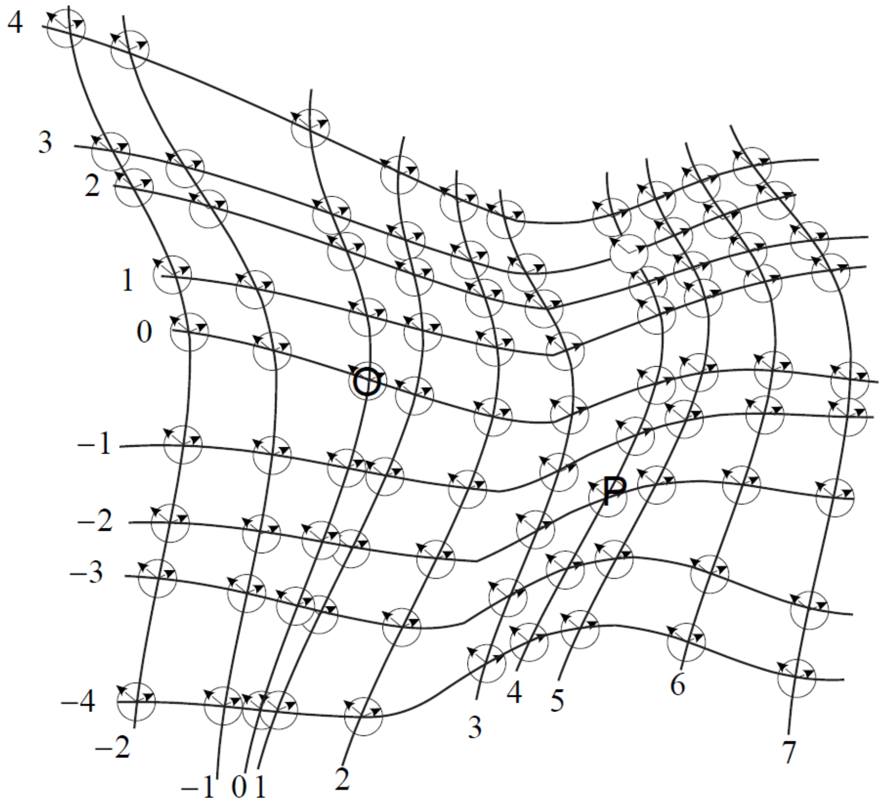
نخستین کاری را که اینشتین کرد، ثابت بودن سرعت نور را به تراز یک بن‌سازه فرا رویاند. او هم‌چنین اصل نسبیت را پذیرفت.

اصل نسبیت به همراه ثابت بودن سرعت نور پایه‌های نظریه‌ی نسبیت خاص اینشتین شدند. این نظریه با فرآیندهای فیزیکی در چارچوب‌هایی سرو کار دارد که با سرعت ثابت نسبت به یکدیگر در حرکت اند؛ چارچوب‌های لخت. در این نظریه، واقعیت این که نتیجه‌ی آزمایش‌ها مستقل از حالت حرکت آزمایش‌گرها است، گنجانده شده است. در سطحی بنیادی، این نظریه را می‌توان برحسب شکل ریاضی قانون‌های طبیعت می‌توان فهمید. به نظر می‌رسد که همه‌ی قانون‌های طبیعت شکل ریاضی دارند و می-توان اصل نسبیت را با بیان این که در همه‌ی چارچوب‌هایی که با سرعت ثابت نسبت به هم در حرکت اند، معادله‌های ریاضی توصیف کننده‌ی قانون طبیعت شکل یکسان دارند، فهمید. سرعت چارچوب در هیچ‌جای این معادله‌ها ظاهر نمی‌شود. برای این که درستی اصل نسبیت برای همه‌ی فرایندهای فیزیکی، از جمله ثابت بودن سرعت نور، تضمین بشود، اینشتین ناگزیر شد افزون بر نسبت دادن ویژگی‌های جدید به فضا و زمان، مفهوم‌های نیوتونی نیرو، تکانه و انرژی را تعمیم دهد. این تعمیم مفهوم، از جمله به معادله‌ی مشهور $E = mc^{2}$ انجامید.
در سال ۱۹۱۵ و پس از تلاش‌های زیاد، اینشتین نظریه‌ی خود را تعمیم داد و محدودیت «چارچوب‌های لخت» را برداشت و نظریه‌ی نسبیت عام را پیشنهاد کرد. در این نظریه، لازم است که قانون‌های طبیعت در **همه‌ی** چارچوب‌ها یکسان باشد. مهم نیست که این چارچوب‌ها نسبت به هم با سرعت ثابت در حرکت اند، یا شتاب دار اند و یا حتی شتاب آنها در مکان‌های متفاوت با هم فرق دارند. به بیان دیگر، همه‌ی فرآیندهای فیزیکی که در فضا و زمان روی می‌دهند، به گونه‌ای اند که توصیف آنها مستقل از چارچوبی است که برای توصیف‌شان به کار می‌رود: باید بتوانیم قانون‌های فیزیک را برحسب معادله‌هایی بیان کنیم که اشاره‌ای به چارچوب مرجع خاصی نباشد. برای دست‌یابی به این هدف، اینشتین توانست نشان دهد که نیروی گرانشی بازتابی از ویژگی‌های هندسه‌ی فضا و زمان است و فضا و زمان را می‌توان یک موجود هندسی پنداشت که می‌تواند خمش را نمایندگی کند.
در این نوشته خواهیم کوشید تا افزون بر بیان ریاضی قانون‌های فیزیک، این ایده‌ها را به زبانی دقیق بپرورانیم. آغاز این سفر فهمیدن چارچوب مرجع و چگونگی ساختن آن است.

۲-۱ ساختن چارچوب مرجع

فرایندهای فیزیکی، به طور مستقیم یا غیرمستقیم، شامل دینامیک حرکت و یا انتشار ذره و میدان در فضا و زمان اند. در نتیجه، همه‌ی قانون‌های بنیادی فیزیک شامل مکان و زمان اند. برای نمونه، هنگامی که قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، را برای یک ذره به کار می‌بریم، مکان ذره را برحسب زمان به‌دست می‌دهد. هم‌چنین، معادله‌های مکسول به معادله‌ی موج $\nabla^{2}\mathbf{E} - \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\mathbf{E}}{\partial t^{2}} = 0$ برای انتشار موج نوری در فضا و زمان می‌انجامد. چیزی که به طور ضمنی در این قانون‌های بنیادی گنجانده شده است، وجود راهی برای اندازه‌گیری، تعیین و یا نشان‌گذاری هر نقطه‌ی فضا در هر زمان معین است. بنابراین، برای توصیف کمی فرایندهای فیزیکی که در عالم روی می‌دهند، یکی از شرط‌های مهم توانایی ما در تعیین این است که رویداد مورد نظر در کجا و در چه زمانی رخ داده است. من از واژه‌ی «رویداد» استفاده کردم. بگذارید آن را تعریف کنم: منظور من از «رویداد» چیزی است که در یک لحظه‌ی زمانی در نقطه‌ای از فضا پدید می‌آید.
برای فرمول‌بندی ریاضی قانون فیزیکی که مثلا حرکت ذره‌ای در فضا را توصیف می‌کند یا ویژگی‌های میدان الکترومغناطیسی را که در فضا انتشار می‌یابد، نیازمند روشی دقیق برای تعیین «کجا» و «کی» آن هستیم. این یعنی تعیین چارچوب مرجع.
چارچوب مرجع را می‌توان به هر روشی ساخت به شرطی که مکان و زمان هر رویداد به شیوه‌ی معین و یگانه نشان گذاری

شده باشد. یک راه رسیدن به آن این است که تصور کنیم که فضا با شبکه‌ی سه بعدی، مانند تور ماهیگیری، انباشته است. چیزی مانند شکل ۱-۱ که در دو بعد نمایش داده شده است. شبکه‌ی ما لازم نیست که سخت باشد و فاصله‌ی بین نقاط همسایه که محورها یکدیگر را قطع می‌کنند لازم نیست که همه جا یکسان باشند.



شکل ۱-۱ شبکه‌ای از محورهای مختصات در فضای دو بعدیو در هر نقطه‌ی تقاطع محورها یک ساعت قرار دارد

هر نقطه‌ی تقاطع محورها در فضای سه بعدی می‌توان با سه عدد حقیقی نشان‌گذاری کرد. در این تور سه بعدی، یک نقطه‌ی دلخواه را مبداء برگزینید و مختصات هر نقطه‌ی تقاطع دیگر را با شمارش از مبداء نشان‌گذاری کنید. برای این که این تور را کامل کنیم، در هر نقطه‌ی تقاطع، یک ساعت قرار خواهیم داد. همان گونه که سخت بودن یا همگن بودن تور لازم نیست، برای ساعت‌ها هم شرط نمی‌کنیم که آهنگ تغییر آنها یکسان باشد (این همارز زمانی هم‌فاصله نبودن نقاط تقاطع فضایی است). حتی لازم نیست که ساعت‌ها هم‌زمان کوک شده باشند. در حال حاضر، نقش این ساعت‌ها مشخص کردن زمانی است که رویدادی در همسایگی یکی از ساعت‌ها رخ داده است. بنابراین، اگر رویدادی مانند انفجار ابرنواختر در فضا روی دهد، نشان سوختگی در تور به جای می‌گذارد و مکان رویداد را نشان می‌دهد و ساعت نزدیک‌ترین تقاطع به ابرنواختر از کار باز خواهد ماند و زمان رویداد را نشان خواهد داد.

تور با فاصله‌ی گره‌های دلخواه خیلی سودمند نیست. بهتر است که فاصله‌ی گره‌ها در هر راستایی همگن باشد. این کار را می‌توان با قرار دادن میله‌های با طول معین در امتداد ریسمان‌های تور انجام داد. هر چه طول میله‌ها کوچک‌تر باشد، بهتر است. در عمل، هم‌چنین داشتن ساعت‌هایی که هر کدام ساز خودشان را می‌نوازند، مناسب نیست. به ویژه، اگر بخواهیم ببینیم رویدادی که در نقطه‌ای از فضا دیرتر یا زودتر از رویداد دیگری در نقطه‌ی دیگر رخ داده است و بخواهیم فاصله‌ی زمانی دو رویداد را مقایسه کنیم، این ساعت‌ها سودمند نخواهند بود. در واقع، این مقایسه ناممکن خواهد بود. بهتر است که این ساعت‌ها را به روشی هم‌زمان کنیم. هم‌زمان کردن ساعت‌ها، نت تنها سرراست نیست، بلکه در برخی حالتاها حتی نشدنی است! اگر همه‌س

ساعت‌ها در یک نقطه باشند، هم‌زمان کردن آنها ساده است. دشواری هنگامی پدید می‌آید که بخواهیم ساعت‌های جایگزیده در نقاط مختلف فضا را بخواهیم هم‌زمان کنیم. در برخی وضعیت‌ها می‌توان فرایند هم‌زمان کردن را پیش برد و یک زمان سراسری را به چارچوب نسبت داد. یک روش برای انجام آن این است که همه‌ی ساعت‌های یکسان را در یک نقطه، مثلا در مبدا مختصات، جمع کرد و در آنجا این ساعت‌ها را با یک «ساعت پایه» هم‌زمان کوک کرد و سپس آنها را خیلی آرام (چون همان گونه که خواهیم دید، ساعت‌های در حال حرکت، کندتر کار می‌کنند و هم‌زمانی را برهم می‌زنند) توزیع کرد. این فرایند را هم-زمانی آدیاباتیک (بی‌در رو) می‌نامند. بسته به میدان گرانش، شاید برخی تنظیم‌های ظریف هم نیاز باشد. در فضایی که گرانش وجود ندارد، وضعیتی که نظریه‌ی نسبیت خاص به آن می‌پردازد، فرایند هم‌زمان کردن ساعت‌ها شدنی است. در عالمی که همسانگرد انبساط می‌یابد، هم‌زمان کردن ساعت‌ها هنوز شدنی است، اما وضعیت‌هایی هم وجود دارند که هم‌زمان کردن ساعت‌ها نشدنی است. یک نمونه، فضازمان حول سیاه‌چاله‌ی چرخان یا الگوی گودل[۲] از عالم گردنده است.

پس، آمیزه‌ای از شبکه‌ی توری و ساعت‌ها، یک چارچوب مرجع برای تعیین مکان و زمان رویداد فراهم می‌کند. با این چارچوب مرجع می‌توان مکان ذره‌ای را که در فضا حرکت می‌کند، می‌توان برحسب تابعی از زمان رسم کرد: تصور کنید که ذره، پرتوزا است و در حرکت خود نشان‌های سوختگی در تور به‌جای می‌گذارد و نزدیک‌ترین ساعت به خود را از کار می‌اندازد. حال ناظری بر روی شبکه‌ی توری می‌گردد و مختصات همه‌ی نقاط سوخته و زمان نزدیک‌ترین ساعت به آن را ثبت می‌کند. همه‌ی این داده‌ها را به آزمایشگاه خودش می‌آورد و تابعی برحسب زمان رسم می‌کند. نتیجه، توصیف مسیری است که ذره‌ی پرتوزا در این چارچوب پیموده است.

به‌کار بردن شبکه‌ی گسسته و ساعت‌هایی که بازه‌ی تیک آنها محدود است، مکان و زمان رویدادها را با دقتی تعیین می‌کنیم که ریز یا درست بودن حلقه‌های تور و بازه‌ی بین دو تیک ساعت تعیین می‌کنند. هرچه تور ما ریزبافت‌تر و بازه‌ی تیک ساعت کوتاه‌تر، دقت تعیین مکان و زمان رویدادها دقیق‌تر. با این حال، باور داریم که مکان و زمان، هر دو، کمیت‌های پیوسته اند (ما در اینجا مکانیک کوانتومی را در نظر نمی‌گیریم). برای رسیدن به این پیوستار، می‌توان پنداشت که تور بسیار ریزبافت و ساعت با بازه‌ی زمانی ناچیز بین دو تیک پی‌درپی شدنی است. به هر حال، سرانجام ناگزیر هستیم که تور و ساعت را رها و به مفهوم انتزاعی چارچوب مرجع بچسبیم.

نسخه‌های زیادی از این گونه چارچوب‌های مرجع می‌توان برافراشت؛ هر یک با شبکه‌ی مختصات و ساعت‌های خودشان. به تقریب، برای برافراشتن یک چارچوب، آزادی کامل داریم که هر جور می‌خواهیم آن را بسازیم، از جمله این که چارچوب‌های مختلف نسبت به هم در حرکت و یا حتی شتاب‌دار باشند و لزوما همه‌جا همانند هم نباشند. اما از هر چارچوب مرجع که برای انجام آزمایش استفاده کنیم، نتیجه‌ی آزمایش و قانون‌های فیزیک را باید برحسب مختصات آن چارچوب گزارش کنیم. پس، اگر قرار است قانون‌های فیزیک برآمده از آزمایش در یک چارچوب مرجع، برحسب مختصات همان چارچوب بیان شود، اصل نسبیت چه می‌شود؟ به یاد بیاورید که اصل نسبیت در بیان عمومی آن، می‌گوید که هر فرایند فیزیکی که در فضا و زمان روی می‌دهد، مستقل از چارچوبی است که برای توصیف آن به کار می‌رود. به بیان دیگر، باید بتوان قانون‌های فیزیک را برحسب کمیت‌هایی نوشت که هیچ اشاره‌ای به چارچوب خاص ندارند. این کار را برای مکانیک نیوتونی می‌توان انجام داد : قانون دوم نیوتون در شکل $\mathbf{F}=m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ به گونه‌ای است که هیچ اشاره‌ای به چارچوب مرجع ندارد (اگر چه در آن یک زمان، زمان مطلق نیوتون در آن ظاهر شده است). اگر می‌خواستیم چارچوب مختصات خاصی را برگزینیم، این قانون به صورت $F_x=m\frac{d^2x}{dt^2}$ و

[۲] Godel

غیره درمی‌آمد و مقدار مولفه‌های $\mathbf{F}$ بستگی به محورهایی می‌شد که برمی‌گزینیم. در بخش‌های بعدی خواهیم دید که چگونه می‌توان در نسبیت خاص، می‌توان قانون‌های فیزیک را مستقل از چارچوب نوشت. این کار را با شرط این که اصل نسبیت در هر چارچوب مرجع درست است، به همراه یک بن‌سازه‌ی دیگر، اصل هم‌ارزی، انجام خواهیم داد.

۳-۱ تبدیل‌های گالیله، نسبیت نیوتونی

- **قانون نخست نیوتون** حال که می‌دانیم چگونه مختصات یک ذره را در فضا و زمان می‌توان اندازه گرفت، اینک می‌خواهیم ببینیم چگونه می‌توان از آنها بهره برد و به ویژگی‌های فیزیکی فضا و زمان پی برد. ذره‌ای را در ژرفای فضا، به دور از هر ماده‌ی دیگر تصور کنید. می‌توان انگاشت که به این ذره هیچ نیرویی وارد نمی‌شود. پرسشی که پیش می‌آید این است: این ذره چه نوع حرکتی دارد؟ برای تعیین نوع حرکت ذره باید مکان آن را برحسب تابعی از زمان اندازه بگیریم و برای این کار باید یگ چارچوب مرجع فراهم کنیم. خب! می‌توان هر چارچوب مرجعی را برگزید. برای نمونه می‌توان چارچوبی را تصور کرد که به یک کشتی فضای که در مسیر پیچیده‌ای حرکت می‌کند، وصل است. در این صورت، مسیر ذره که نسبت به چارچوب همراه کشتی فضایی اندازه‌گیری می‌شود، بساید پیچیده خواهد بود. اما می‌توان ادعا کرد که در برخی چارچوب‌های مرجع، مسیر ذره‌ی ما ساده‌ترین شکل را خواهد داشت، یعنی راست‌خط با سرعت ثابت خواهد بود. تاکنون این ادعا به طور تجربی ثابت نشده است و احتمالا نمی‌توان درستی آن را با تجربه آزمود. با این حال، به عنوان گزاره‌ای درست درباره‌ی حرکت ذره در نبود نیرو، پذیرفته شده است. به بیان دیگر، می‌توانیم گزاره‌ی زیر را به صورت یک قانون طبیعت بپذیریم:

چارچوب‌های مرجعی وجود دارند که نسبت به آنها، در نبود نیرو، حرکت ذره راست‌خط با سرعت ثابت است.

گزاره‌ی بالا، در بنیاد ادعایی درباره‌ویژگی‌های فضازمان است. گزاره‌ی بالا در واقع، بیان قانون نخست نیوتون است. هر چارچوب مرجع که از این ویژگی برخوردار باشد (یعنی در آن حرکت ذره‌ی نقطه‌ای راست‌خط با سرعت ثابت باشد) یک چارچوب لخت است.

گرانش نیروی خاصی است، زیرا اگر تحت اثرهای گرانشی، یک چارچوب لخت سقوط آزاد کند، مشاهده می‌شود که نسبت به آن چارچوب، هر ذره‌ای با سرعت ثابت حرکت راست‌خط دارد. بنابراین، چارچوبی که سقوط آزاد می‌کند (دست‌کم به طور موضعی) یک چارچوب لخت است.

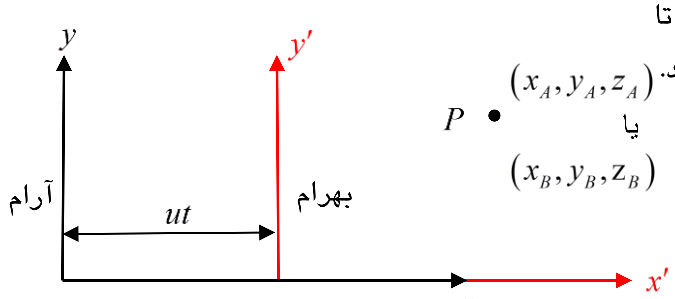
بنا به قانون نخست نیوتون، چارچوب‌های لخت، دستگاه‌های مختصاتی هستند که در آن‌ها حرکت ذره‌ی نقطه‌ای در نبود نیرو، با سرعت ثابت (از جمله سرعت صفر) انجام می‌گیرد. توصیف فیزیکی پدیده‌ها در چارچوب‌های لخت، ساده‌ترین توصیف است. قانون نخست نیوتون به راستی تعریف چارچوب لخت است و پیام نهفته در این قانون، وجود چارچوب لخت است. با این حال، قانون نخست نیوتون نمی‌آموزد که در دنیای فیزیکی چارچوب‌های لخت کدام اند. به طور تجربی می‌دانیم که چارچوب‌های لخت آنهایی اند که نسبت به ستاره‌های ثابت، کهکشان‌های دوردست یا هر ماده‌ی دوردست، تابش زمینه‌ی کیهانی، با سرعت ثابت حرکت می‌کنند[۳]. می‌دانیم که بینهایت چارچوب لخت وجود دارد. تفاوت آنها در جهت‌گیری نسبی محورها، مکان‌های یا جابه‌جایی‌های نسبی مبداء و یا در سرعت نسبی ثابت آنها است.

دو نفر: آرام و بهرام، را در نظر بگیرید. آرام ساکن ایستاده است و بهرام با سرعت u از کنار آرام می‌گذرد. آرام چارچوبی دارد که ما آن را چارچوب A خواهیم نامید. در این چارچوب آرام فاصله‌اش را تا نقطه‌ای دورتر در روی زمین اندازه

[۳] ارنست ماخ در سده‌ی ۱۹ توضیح داد که چرا چارچوب لخت را ماده‌ی دوردست تعریف می‌کند.

می‌گیرد و آن را x_A می‌نامد. در زمان $t=۰$ بهرام با سرعت u از کنار آرام می‌گذرد، بهرام چارچوبی دارد که آن را B بنامید. او با چارچوب خود فاصله‌اش را (که پیوسته تغییر می‌کند) تا همان نقطه در روی زمین اندازه می‌گیرد و آن را x_B می‌نامد. دو چارچوب A و B با تبدیل گالیله به هم مربوط اند:

$$\begin{cases} x_B = x_A - ut_A \\ y_B = y_A \\ z_B = z_A \\ t_B = t_A \end{cases} \qquad (۱-۱)$$



شکل ۲-۱: دو چارچوب لخت

این «شم عمومی» است: می‌بینیم که چگونه فاصله‌ی بهرام تا نقطه‌ی مورد نظر با زمان کاهش می‌یابد و هنگامی که بهرام به نقطه‌ی می‌رسد و از آن می‌گذرد، منفی می‌شود.

رابطه‌ی سرعت‌های آرام و بهرام چگونه است؟ تصور کنید که آرام ساکن ایستاده است و پرنده‌ای را در آسمان تماشا می‌کند که با سرعت v از بالای سرش می‌گذرد. در شکل (۲-۱) پرنده با نقطه‌ی P نشان داده شده است. روشن است که فاصله‌ی پرنده تا آرام پیوسته تغییر می‌کند. او این فاصله‌ی متغیر را x می‌نامد و برای او سرعت v عبارت است از

$$v_A = \frac{dx_A}{dt_A} \qquad (۱-۲)$$

حال اگر از رابطه‌ی (۱-۱) مشتق بگیریم، خواهیم دید که سرعت پرنده برای بهرام عبارت است از

$$v_B = \frac{dx_B}{dt_B} = \frac{dx_B}{dt_A} = \frac{dx_A}{dt} - u = v_A - u \qquad (۱-۳)$$

پس، سرعت در چارچوب بهرام با سرعت در چارچوب آرام فرق دارند. همچنین می‌توان دید که شتاب پرنده در هر دو چارچوب یکسان است:

$$a_B = \frac{dv_B}{dt_B} = \frac{dv_A}{dt_A} = a_A \qquad (۱-٤)$$

در نتیجه، قانون نیوتون، $F = ma$، در هر دو چارچوب یکسان است. پایستگی تکانه هم در هر دو چارچوب برقرار است. بگذارید آن را در مثال زیر نشان دهیم.

مثال ۱-۱ بهرام دو تیله دارد و با آنها بازی می‌کند. یکی از تیله‌ها سفید و دیگری سرخ است. جرم هر دو تیله برابر m اند. تیله‌ی سفید با سرعت $\mathbf{v} = ۱۲\,\hat{\mathbf{i}}\ \frac{cm}{s}$ حرکت می‌کند و با تیله‌ی سرخ ساکن برخورد می‌کند. پس از برخورد، آرام سرعت تیله‌ی سفید را $\mathbf{v}_w = ۱۱٫۱\hat{\mathbf{i}} + ۴٫۶\hat{\mathbf{j}}$ (یعنی $۱۲\frac{cm}{s}$ با زاویه‌ی $۲۲٫۶^\circ$ بالای افق) و سرعت تیله‌ی سرخ را $\mathbf{v}_r = ۱٫۹\hat{\mathbf{i}} - ۴٫۶\hat{\mathbf{j}}$ (یعنی $۵\frac{cm}{s}$ و با زاویه‌ی $۶۷٫۴^\circ$ در زیر افق) اندازه می‌گیرد. فرض کنید که بهرام با سرعت $\mathbf{u} = ۱۲\,\hat{\mathbf{i}}$ از کنار آرام می‌گذرد. بهرام فرایند برخورد را چگونه می‌بیند؟

حل: آشکار است که چون بهرام با همان سرعت پیش از برخورد تیله‌ی سفید حرکت می‌کند، در چارچوب بهرام تیله‌ی سفید، پیش از برخورد،در حال سکون است. این با رابطه‌ی (۱-۳) سازگار است. در چارچوب بهرام، وضعیت تیله‌ی سرخ، پیش از برخورد چگونه بوده است؟ البته در چارچوب بهرام تیله‌ی سرخ در حال سکون نیست، بلکه با سرعت $۰ - ۱۲\hat{\mathbf{i}} = -۱۲\hat{\mathbf{i}}$ رو به

عقب حرکت می‌کند. پس از برخورد، بهرام برای تیله‌ی سفید خواهد داشت

$$\mathbf{v}'_w = \left(۱۱/۱\hat{\mathbf{i}} + ۴/۶\hat{\mathbf{j}}\right) - ۱۳\hat{\mathbf{i}} = -۱/۹\hat{\mathbf{i}} + ۴/۶\hat{\mathbf{j}} \qquad (۱-۵)$$

و برای تیله‌ی سرخ، پس از برخورد:

$$\mathbf{v}'_r = \left(۱/۹\hat{\mathbf{i}} - ۴/۶\hat{\mathbf{j}}\right) - ۱۳\hat{\mathbf{i}} = -۱۱/۱\hat{\mathbf{i}} - ۴/۶\hat{\mathbf{j}} \qquad (۱-٦)$$

پس، از نگاه بهرام، برخورد اساسا تصویر آینه‌ای برخوردی است که آرام در چارچوب خود می‌بیند. از نگاه بهرام، تیله‌ی سرخ است که می‌آید و با تیله‌ی سفید برخورد می‌کند. روشن است که انرژی و تکانه در هر دو چارچوبِ بهرام و آرام پایسته اند.

رابطه‌های تبدیل (۱-۱) بین دو دستگاه مختصات، **خیز**[۴] گالیله نام دارد، برای منظورهای آینده و نگارش عمومی‌تر، بگذارید رابطه‌های (۱-۱) را در شکل دیگری، زیباتر ماتریسی، بنویسیم و بتوانیم آن را برای تبدیل‌های دیگر، مانند چرخش مختصات و یا ترکیب چرخش و خیزتعمیم دهیم. پیش از آن، اما توجه کنید که در مکانیک نیوتونی فرقی بین زمان در چارچوب آرام و چارچوب بهرام نیست: در مکانیک نیوتونی، آهنگ تیک همه‌ی ساعت‌ها یکسان است. فرض کنید که هنگامی که مبداء مختصات آرام و بهرام برهم منطبق اند، اگرساعت‌های آرام و بهرام در صفر هم‌زمان شده باشند، $t_A = t_B = ۰$ ، آنها همیشه هم‌زمان باقی خواهند ماند. این مفهوم زمان مطلق است. در مکانیک نیوتونی، زمان مطلق انگاشته می‌شود.

چهار معادله‌ی رابطه‌ی (۱-۱) را اینک می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{bmatrix} t_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -u & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_A \\ x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \qquad (۱-۷)$$

یا

$$\underset{\sim}{\mathbf{x}}_B = \mathbf{G} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{x}}_A \qquad (۱-۸)$$

نکته‌ی نمادگذاری: در رابطه‌ی بالا، علامت ~ نشان می‌دهد که بردار چهار مولفه دارد: یک چاربردار است. در آینده ما از نمادگذاری بهتری استفاده خواهیم کرد.♣

تبدیل وارون را هم می‌توان به سادگی نوشت. یعنی اگر مجموعه‌ای مختصات در چارچوب بهرام داشته باشیم، می‌خواهیم ببینیم آنها در چارچوب آرام چگونه خواهند بود. برای این کار کافی است که بدانیم که از دید بهرام، آرام با سرعت $-u$ حرکت می‌کند. به بیان دیگر، اگر سرعتبهرام در چارچوب آرام $\mathbf{v}_A = u\,\hat{\mathbf{e}}_x$ باشد، در چارچوب بهرام، آرام با سرعت $\mathbf{v}_B = -u\hat{\mathbf{e}}'_x$ حرکت می‌کند. در نتیجه

$$\underset{\sim}{\mathbf{x}}_A = \mathbf{G}' \cdot \underset{\sim}{\mathbf{x}}_B \ \text{یا} \quad \begin{bmatrix} t_A \\ x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ +u & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} \qquad (۱-۹)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $\mathbf{G}' = \mathbf{G}^{-۱}$ است.

[4] boost

نمونه‌ی دیگر از تبدیل‌های گالیله، چرخش است: فرض کنید چارچوب‌های آرام و بهرام نسبت به هم در حال سکون اند، اما چارچوب بهرام اندازه‌ی زاویه‌ی ϕ حول محور z چرخیده است. شکل ۳-۱ را ببینید. بنابراین، داریم

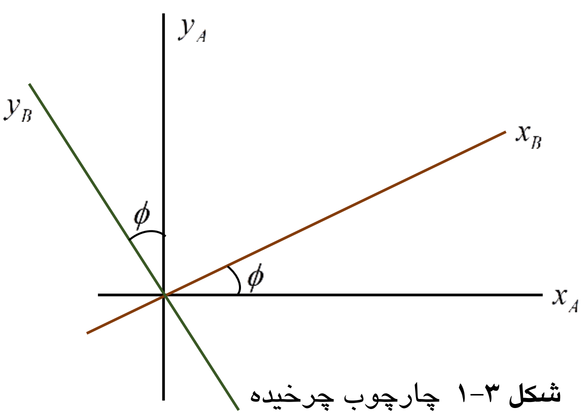
$$\begin{cases} t_B = t_A \\ x_B = x_A\cos\phi + y_A\sin\phi \\ y_B = -x_A\sin\phi + y_A\cos\phi \\ z_B = z_A \end{cases} \qquad (۱-۱۰)$$

بخش فضایی رابطه‌های بالا چیزی جز یک چرخش ساده نیست. بنابراین، در این حالت، تبدیل گالیله عبارت است از

$$\underset{\sim}{\mathbf{x}}_B = \mathbf{G}_R \cdot \underset{\sim}{\mathbf{x}}_A \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} t_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \cos\phi & \sin\phi & ۰ \\ ۰ & -\sin\phi & \cos\phi & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_A \\ x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \qquad (۱-۱۱)$$

که در آن زیرنویس R به معنی چرخش است.

نکته‌ی مهم تبدیل‌های گالیله این است که چارچوب لخت را «لخت» نگه می‌دارد. این را در رابطه‌ی (۱-٤) دیدیم: شتاب تحت تبدیل گالیله تغییر نمی‌کند! تبدیل‌های گالیله تاثیری بر شتاب و در نتیجه نیرو ندارند. مکانیک نیوتونی تحت تبدیل‌های گالیله ناوردا است.



شکل ۳-۱ چارچوب چرخیده

• **قانون دوم نیوتون** اینک که وجود گروه خاصی از چارچوب‌های مرجع، چارچوب‌های لخت، را پذیرفتیم و آموختیم که تبدیل‌های گالیله، مختصات رویدادها در چارچوب‌های لخت مختلف را به هم مربوط می‌کنند، می‌توانیم ببینیم که آیا دو قانون حرکت دیگر نیوتون با اصل نسبیت سازگار اند یا نه؟ روشن است که نسبت به یک چارچوب لخت، ذره‌ها همیشه حرکت راست‌خط با سرعت ثابت ندارند. ذره‌ها می‌توانند شتاب داشته باشند. شتاب‌دار بودن حرکت ذره را به نیرو نسبت می‌دهیم: اگر در یک چارچوب لخت، شتاب ذره‌ای را $\mathbf{a}$ اندازه‌گیری کردیم، گوییم که این شتاب، پی‌آمد اثر نیروی $\mathbf{F}$ است که در آن

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (۱-۱۲)$$

است. جرم m ویژگی سرشتی ذره است و در مکانیک نیوتونی، مقدار آن در همه‌ی چارچوب‌های لخت، یکسان است. این بیان قانون دوم نیوتون است. معادله‌ی (۱-۱۲) نیرو و جرم و شتاب یک جسم را که نسبت به چارچوب لخت معین اندازه‌گیری شده اند، به هم مربوط می‌کند. همان‌گونه که پیش‌تر گفتم، بینهایت چارچوب لخت وجود دارد و بسیار مهم است که بفهمیم اگر جرم، نیرو و شتاب یک ذره را در چارچوب‌های لخت متفاوت اندازه‌گیری کنیم، چه بر سر قانون دوم نیوتون می‌آید؟ برای این کار باید از تبدیل‌های گالیله استفاده کنیم و مختصات (x,y,z,t) ذره را مثلا در چارچوب آرام به مختصات (x',y',z',t') همان ذره در چارچوب لخت دیگر، چارچوب بهرام، مربوط کنیم. پیش از آن، ما هم‌چنین نیاز داریم که به قانون سوم نیوتون نگاهی

بیندازیم.

- **قانون سوم نیوتون** برای هر نیرویی، نیروی مساوی و در خلاف جهت وجود دارد. نیروها جفت اند. می‌توان نشان داد که شکل این قانون در همه‌ی چارچوب‌های لخت یکسان است. اثبات این گزاره مستقیم نیست، زیرا بیان بالا از قانون سوم نیوتون، اما چندان سودمند نیست. بیان سودمندتر و در واقع، پی‌آمد ژرف‌تر آن، هنگامی به‌دست می‌آید که قانون دوم و سوم نیوتون را ترکیب کنیم و قانون پایستگی تکانه را به‌دست آوریم:

در نبود نیروی خارجی، تکانه‌ی کل سامانه مقدار ثابتی است.

حالا، ساده است که با استفاده از تبدیل‌های گالیله نشان دهیم: اگر تکانه در یک چارچوب لخت پایسته باشد، در هر چارچوب لخت دیگر هم پایسته است.

بگذارید نشان دهیم که شکل ریاضی قانون‌های نیوتون در همه‌ی چارچوب‌های لخت یکسان اند. در واقع، پیش‌تر نشان دادیم که تحت تبدیل‌های گالیله، شتاب تغییر نمی‌کند و به این ترتیب، ناوردا بودن قانون دوم نیوتون را تحت تبدیل‌های گالیله ثابت کردیم. در اینجا من از یک مثال بهره خواهم برد و ناوردا بودن قانون‌های نیوتون را نشان خواهم داد.

مثال ۲-۱ دو ذره به جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ با فنری که طول طبیعی ℓ و ثابت فنر k به هم وصل اند. مختصات X جرم‌ها را در چارچوب S با $x_۱$ و $x_۲$ نشان دهید. ثابت کنید که شکل معادله‌های حرکت (قانون دوم نیوتون) و پایستگی تکانه (سوم نیوتون) در چارچوب لخت دیگر S' که نسبت به چارچوب S با سرعت u_x حرکت می‌کند، یکسان اند.

حل: بنابه قانون دوم نیوتون، در چارچوب S معادله‌ی حرکت ذره‌ی با جرم $m_۱$ عبارت است از

$$m_۱\frac{d^۲x_۱}{dt^۲}=-k\left(x_۱-x_۲-\ell\right) \qquad (۱-۱۳)$$

حال اگر این جفت ذره را در چارچوب S' در نظر بگیریم، داریم

$$x_۲=x'_۲+u_xt' \quad \text{و} \quad x_۱=x'_۱+u_xt' \qquad (۱-۱٤)$$

بنابراین، می‌بینیم که

$$\frac{d^۲x_۱}{dt^۲}=\frac{d^۲x'_۱}{dt'^۲} \qquad (۱-۱٥)$$

و

$$x_۲-x_۱=x'_۲-x'_۱ \qquad (۱-۱٦)$$

پس، جایگزینی معادله‌های (۱-۱٥) و (۱-۱٦) در رابطه‌ی (۱-۱۳) به‌دست می‌دهد

$$m_۱\frac{d^۲x'_۱}{dt'^۲}=-k\left(x'_۱-x'_۲-\ell\right) \qquad (۱-۱۷)$$

بنا به مکانیک نیوتونی، جرم ذره‌ها در هر دو چارچوب یکسان اند، $m_۱=m'_۱$، که در آن $m'_۱$ جرم ذره در چارچوب S' است. در نتیجه، داریم

$$m'_۱\frac{d^۲x'_۱}{dt'^۲}=-k\left(x'_۱-x'_۲-\ell\right) \qquad (۱-۱۸)$$

رابطه‌ی (۱-۱۸) همان رابطه‌ی (۱-۱۳) است که در چارچوب S داشتیم. حالا در چارچوب S'، تنها متغیرهای $x_۱$ و $x_۲$ با $x'_۱$ و $x'_۲$ جایگزین شده اند.شکل زیاضی معادله‌ی حرکت که از قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آید، در هر دو چارچوب یکسان اند. این

نتیجه را عمومی تر از حالت دو جرم و فنر می‌توان ثابت کرد. این مثال ساده نشان می‌دهد که شکل ریاضی معادله‌ی حرکت برآمده از قانون دوم نیوتون در همه‌ی چارچوب‌های لخت یکسان است.

در چارچوب S تکانه‌ی کل سامانه‌ی دو جرم و فنر عبارت است از

$$m_۱\dot{x}_۱ + m_۲\dot{x}_۲ = P = \text{constant} \qquad (۱-۱۹)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱-۱٤) دیده می‌شود که در چارچوب S' تکانه‌ی کل عبارت است از

$$P' = m'_۱\dot{x}'_۱ + m'_۲\dot{x}'_۲ = m_۱\dot{x}_۱ + m_۲\dot{x}_۲ - \left(m_۱ + m_۲\right)u_x = P - \left(m_۱ + m_۲\right)u_x \qquad (۱-۲۰)$$

که بازهم مقدار ثابتی است، اما همان مقدار ثابت در چارچوب S نیست که البته لازم هم نیست باشد! زیرا پایسته بودن یک کمیت فیزیکی به این معنی است تغییرات آن کمیت نسبت به زمان صفر باشد. می‌بینیم که در هر دو چارچوب این شرط برقرار است. مانسته‌ی این نتیجه در نسبیت خاص، برای توصیف دینامیک سامانه نقش مرکزی دارد.

نتیجه‌ی عمومی که می‌توان از گفتار بالا گرفت این است که

قانون‌های حرکت نیوتون در همه‌ی چهارچوب‌های لخت یک‌سان اند.

این اصل نسبیت نیوتون یا گالیله است و همه‌ی فیزیک پیشه ها، دست‌کم تا زمانی که مکسول معادله‌های مشهور خود را منتشر کرد، آن را پذیرفته بودند.

جمع‌بندی کنیم: پی‌آمدهای اصل نسبیت این است که (۱) با هیچ آزمایشی که شامل قانون‌های نیوتون باشد، نمی‌توان گفت که آیا یم چارچوب لخت در حال حرکت است یا نه. (۲) قانون‌های فیزیک به سرعت چارچوب مرجع نسبت هر چیز دیگر، بستگی ندارند. اگر چه نیوتون وجود نوعی «فضای مطلق» راپذیرفته بود، چارچوب مرجعی که حالت سکون را تعریف می‌کند و نسبت به آن حرکت هر چیزی را می‌توان اندازه‌گیری کرد، بسیاری از فیزیک‌پیشه‌ها وجود چنین چارچوبی را چشم بسته پذیرفته بودند و برای مدتی اندیشیده می‌شد که نظریه‌ی الکترومغناطیس از آن پشتیبانی می‌کند.

۱-۴ معادله‌های مکسول و اِتِر

پیش از آن که مکسول بنیادهای ریاضی نظریه‌ی خود را درباره‌ی الکترومغناطیس کامل کند و نظریه‌ی ریاضی پیروزمندی برای نور ارایه دهد، اصل نسبیت نیوتونی از اعتبار درخوری برخوردار بود. انتظار می‌رفت که معادله‌های مکسول هم از اصل نسبیت نیوتون پیروی کنند؛ یعنی معادله‌های مکسول هم در چارچوب‌های لخت یکسان باشند. این انتظار البته برآورد نشد و معادله‌های مکسول در چارچوب‌های لخت مختلف، شکل ریاضی خود را حفظ نکردند. به بیان دیگر، اگر معادله‌های مکسول در یک چارچوب شکل ساده‌ای داشتند، در چارچوب لخت دیگر، که نسبت به این چارچوب با سرعت ثابت حرکت می‌کرد، شکل معادله‌ها می‌توانست پیچیده باشند. این را در زیر خواهیم دید. اندکی شکیبا باشید، چیزی را اثبات نکرده نخواهیم گذاشت!

بگذارید از معادله‌های مکسول استفاده کنیم و معادله‌ی موج را برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی (یا برای موج نور) به‌دست آوریم. معادله‌های مکسول عبارت اند از

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_\circ} \tag{۱-۲۱}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \tag{۱-۲۲}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{۱-۲۳}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_\circ\mathbf{J}+\mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{۱-۲۴}$$

که در آن ρ چگالی بار الکتریکی و $\mathbf{J}$ چگالی جریان الکتریکی اند. در خلاء $\rho=\circ$ و $\mathbf{J}=\circ$ و بنابراین، معادله‌های مکسول در خلاء به صورت زیر درمی‌آیند

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\circ \tag{۱-۲۵}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=\circ \tag{۱-۲۶}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{۱-۲۷}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{۱-۲۸}$$

اگر از دو طرف دو معادله‌ی آخر مکسول در خلاء کرل بگیریم خواهیم داشت

$$\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)=\nabla\times\left(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)\Rightarrow\nabla\underbrace{\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)}_{=\circ}-\nabla^{۲}\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)}_{=\mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}}\Rightarrow\boxed{\frac{\partial^{۲}\mathbf{E}}{\partial t^{۲}}-\frac{۱}{\mu_\circ\varepsilon_\circ}\nabla^{۲}\mathbf{E}=\circ} \tag{۱-۲۹}$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)=\nabla\times\left(\mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\Rightarrow\nabla\underbrace{\left(\nabla\cdot\mathbf{B}\right)}_{=\circ}-\nabla^{۲}\mathbf{B}=\mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)}_{-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}}\Rightarrow\boxed{\frac{\partial^{۲}\mathbf{B}}{\partial t^{۲}}-\frac{۱}{\mu_\circ\varepsilon_\circ}\nabla^{۲}\mathbf{B}=\circ} \tag{۱-۳۰}$$

معادله‌های درون جعبه، معادله‌های موج برای میدان‌های الکتریکی، $\mathbf{E}$ و مغناطیسی $\mathbf{B}$ اند. $\frac{۱}{\sqrt{\mu_\circ\varepsilon_\circ}}=c$ سرعت نور است. برای سادگی، بگذارید فرض کنیم که هر دوی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ فقط به x و t بستگی دارند. در این صورت معادله‌های موج (۲۹-۱) و (۳۰-۱) ساده می‌شوند و به شکل زیر درمی‌آیند

$$\frac{\partial^{۲}\mathbf{E}}{\partial t^{۲}}-\frac{۱}{\mu_\circ\varepsilon_\circ}\frac{\partial^{۲}\mathbf{E}}{\partial x^{۲}}=\circ\quad,\quad\frac{\partial^{۲}\mathbf{B}}{\partial t^{۲}}-\frac{۱}{\mu_\circ\varepsilon_\circ}\frac{\partial^{۲}\mathbf{B}}{\partial x^{۲}}=\circ \tag{۱-۳۱}$$

پاسخ این معادله‌های دیفرانسیل به شکل زیر اند

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}\left(x-ct\right)\quad,\quad\mathbf{B}=\mathbf{B}\left(x-ct\right) \tag{۱-۳۲}$$

پرسش واقعی این است: از چه چارچوبی برای رسیدن به این نتیجه استفاده شده است؟ به بیان دیگر، این معادله‌های موج در چه چارچوبی نوشته شده اند و سرعت نور، $\frac{۱}{\sqrt{\mu_\circ\varepsilon_\circ}}=c$ نسبت به کدام چارچوب است؟

خرد عمومی در سده‌ی ۱۹ این بود که امواج الکترومغناطیسی باید در ماده‌ای حرکت کند که آن را اِتِر نامیدند. بنابراین، معادله‌های موجی که دربالا یافتیم، در چارچوب سکون اتر نوشته شده‌اند. اما اتر نسبت به چه چارچوبی ساکن است؟ پاسخ فیزیک‌پیشه‌های سده‌ی نوزدهم، چارچوب «سکون مطلق» نیوتون بود و ماده‌ای که در این چارچوب در حال سکون بود، اتر نام داشت. در اینجا فیزیک مهم و روشنی نهفته است: یک چارچوب لخت خاص وجود دارد که در آن چارچوب سرعت موج

الکترومغناطیسی (نوری) برابر c است. این «چارچوبِ سکون» محیطی است که موج نوری در آن انتشار می‌یابد. مانسته‌ی موج آب را در نظر بگیرید: برای موج آب، «چارچوب سکون» چارچوبی است که به نظر می‌رسد، آب در آن شارش نمی‌کند.

به طور کلی، موج‌ها یک «میدان» F دارند که در فضا انتشار می‌یابد و به شکل زیر است:

$$F = F\left(x - vt\right) \qquad (۱-۳۳)$$

و در معادله‌ی دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$\frac{\partial^{2} F}{\partial t^{2}} - v^{2}\frac{\partial^{2} F}{\partial x^{2}} = 0 \qquad (۱-۳٤)$$

که در آن v سرعت انتشار موج است. به بیان دیگر، رابطه‌ی (۳۳-۱) پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل (۳٤-۱) است. میدان F به نوع موج بستگی دارد، ممکن است فشار موج صوتی، ارتفاع موج آب یا اندازه‌ی پتانسیل الکتریکی و غیره باشد.

تحت تبدیل گالیله، سرعت‌ها تغییر می‌کنند و در نتیجه، انتظار داریم سرعت موج هم تغییر کند. برای چارچوب آرام (A) و چارچوب بهرام (B) داریم

$$F = F\left(x_A - vt_A\right) = F\left(x_B - \left(v-u\right)t_B\right) \qquad (۱-۳۵)$$

وقتی که تبدیل گالیله را برای معادله‌ی موج به کار می‌بریم همین را هم می‌بینیم. در اینجا فیزیک مهم و روشنی نهفته است: یک چارچوب لخت خاص وجود دارد که در آن چارچوب سرعت موج برابر v است. این «چارچوبِ سکون» محیطی است که موج در آن انتشار می‌یابد. همان‌گونه که در بالا دیدیم، . معادله‌های موج که از معادله‌های مکسول نتیجه شد، سرعت یگانه‌ای برای موج الکترومغناطیسی پیش‌بینی می‌کند. محیط متناظر با این چارچوب سکون را اتر نامیدند.

در بالا گفتم که تحت تبدیل‌های گالیله، معادله‌های مکسول شکل ریاضی خود را ثابت نگه نمی‌دارند. اینگ بگذارید آن را دقیق‌تر بررسی کنیم: معادله‌ی موج برای نور در چارچوب خاصی، چارچوب آرام (جایگزین اتر)، عبارت است از

$$\frac{\partial^{2} E_A}{\partial x_A^{2}} - \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2} E_A}{\partial t_A^{2}} = 0 \qquad (۱-۳٦)$$

این معادله‌ی موجی است که با سرعت c انتشار می‌یابد. تحت تبدیل‌های گالیله، این معادله در چارچوب بهرام که با سرعت u_x نسبت به آرام حرکت می‌کند، به شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial^{2} E_B}{\partial x_B^{2}} - \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2} E_B}{\partial t_B^{2}} + \frac{2u_x}{c^{2}}\frac{\partial^{2} E_B}{\partial x_B \partial t_B} - \frac{u_x}{c^{2}}\frac{\partial}{\partial x_B}\left(u_x\frac{\partial E_B}{\partial x_B}\right) = 0 \qquad (۱-۳۷)$$

به یقین می‌بینیم که معادله‌ی موج در چارچوب بهرام، رابطه‌ی (۳۷-۱)، همان شکل ریاضی را ندارد که در چارچوب آرام، رابطه (۳٦-۱)، داشت. برای تمرین، بگذارید تبدیل بالا را با جزییات نشان دهم تا ببینید که دو جمله‌ی اضافی در رابطه‌ی (۳۷-۱) از کجا آمده اند.

اثبات رابطه‌ی (۳۷-۱) : تابع اسکالر $E_A\left(x_A, t_A\right)$ را در چارچوب آرام در نظر بگیرید. در چارچوب بهرام این تابع به صورت زیر نوشته می‌شود

$$E_A\left(x_A, t_A\right) = E_A\left(x_A\left(x_B, t_B\right), t_A\left(x_B, t_B\right)\right) \equiv E_B\left(x_B, t_B\right) \qquad (۱-۳۸)$$

در تساوی آخر، E_Aرا به E_B تبدیل کردم، چون شکل تابعی $E_B\left(x_B, t_B\right)$ با شکل تابعی $E_A\left(x_A, t_A\right)$ فرق دارد. حالا می‌توانیم از قاعده‌ی زنجیر مشتق‌گیری استفاده کنیم. به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial E_A}{\partial t_A}=\frac{\partial E_B}{\partial t_B}\frac{\partial t_B}{\partial t_A}+\frac{\partial E_B}{\partial x_B}\frac{\partial x_B}{\partial t_A}=\frac{\partial E_B}{\partial t_B}(۱)+\frac{\partial E_B}{\partial x_B}(-u_x)=\left[\frac{\partial}{\partial t_B}-u_x\frac{\partial}{\partial x_B}\right]E_B \qquad (۱-۳۹)$$

توجه کنید که از تبدیل‌های گالیله می‌دانیم که $x_B=x_A-u_xt_A \;\Rightarrow\; \frac{\partial x_B}{\partial t_A}=-u_x$ و $t_A=t_B \Rightarrow \frac{\partial t_B}{\partial t_A}=۱$ اند. به همین ترتیب برای

$$\frac{\partial E_A}{\partial x_A}=\frac{\partial E_B}{\partial t_B}\frac{\partial t_B}{\partial x_A}+\frac{\partial E_B}{\partial x_B}\frac{\partial x_B}{\partial x_A}=\frac{\partial E_B}{\partial t_B}(\circ)+\frac{\partial E_B}{\partial x_B}(۱)=\frac{\partial E_B}{\partial x_B} \qquad (۱-٤٠)$$

به همین ترتیب می‌توان دید که:

$$\frac{\partial^۲ E_A}{\partial x_A^۲}=\frac{\partial^۲ E_B}{\partial x_B^۲} \qquad (۱-٤٠)$$

هم‌چنین، داریم

$$\frac{\partial}{\partial t_A}\frac{\partial E_A}{\partial t_A}=\left[\frac{\partial}{\partial t_B}-u_x\frac{\partial}{\partial x_B}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t_B}-u_x\frac{\partial}{\partial x_B}\right]E_B=\left[\frac{\partial^۲}{\partial t_B^۲}-۲u_x\frac{\partial^۲}{\partial t_B\partial x_B}-\frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲}{\partial x_B^۲}\right]E_B \qquad (۱-٤۱)$$

بنابراین، معادله‌ی موج $\left(\frac{\partial^۲}{\partial x_A^۲}-\frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲}{\partial t_A^۲}\right)E_A=\circ$ تحت تبدیل گالیله، در چارچوب بهرام، به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial^۲ E_B}{\partial x_B^۲}-\frac{۱}{c^۲}\frac{\partial^۲ E_B}{\partial t_B^۲}+\frac{۲u_x}{c^۲}\frac{\partial^۲ E_B}{\partial x_B\partial t_B}-\frac{u_x}{c^۲}\frac{\partial}{\partial x_B}\left(u_x\frac{\partial E_B}{\partial x_B}\right)=\circ \qquad (۱-٤۲)$$

که همان رابطه‌ی (۲۵-۱) است.■

چارچوب خاص A (در این جا، چارچوب آرام)، چارچوبی است که حالتِ سکونِ مطلق نیوتون را تعریف می‌کند و چیزی که فرض می‌شد نسبت به آن در حالت سکون است، اتر نام داشت. اتر ماده‌ای بود که پنداشته می‌شد که نور در آن انتشار می‌یابد. چیزی شبیه هوا که موج صوتی را در آن انتشار می‌یابد. در نتیجه، باور این بود که رفتار نور، به ویژه سرعت آن، وقتی از چارچوبی اندازه‌گیری شود که نسبت به اتر حرکت می‌کند، متفاوت از سرعتی خواهد بود که از چارچوب ساکن نسبت به اتر اندازه‌گیری می‌شود. به بیان دیگر، انتظار داریم که اگر در آزمایشگاهی که نسبت به اتر حرکت می‌کند، سرعت نور را اندازه-گیری کنیم، سرعتی به‌دست خواهیم آورد که برابر c نیست. آزمایشگاه‌های ما بر روی زمین قرار دارند. زمین حول محورش می‌چرخد و در مداری حول خورشید می‌گردد. حتی اگر در یک لحظه‌ی زمانی، نسبت به اتر ساکن بوده باشیم، در زمان دیگری نسبت به اتر ساکن نخواهیم بود. بگذارید این جمله‌ی آخر را یک جور دیگر بگوییم: چون زمین بر روی مدار به تقریب دایره‌ای به دور خورشید می‌گردد، در نتیجه، اگر چارچوبی به زمین وصل باشد، ناگزیر است که در مرحله‌ای از گردش به دور خورشید، نسبت به اتر در حرکت باشد و در نتیجه، در طول یک سالی که زمین مدار خود را به دور خورشید کامل می‌کند، باید زمانی وجود داشته باشد که در آن زمان تغییری در سرعت نور به وجود بیاید. از این تغییر می‌توان سرعت زمین نسبت به اتر را حساب کرد. این آزمایش معروف مایکلسون- مورلی بود. آنها گفتند که اگر نور با سرعت c در اتر انتشار می‌یابد، و اگر سرعت زمین در جایی روی مدارش نسبت به اتر، برابر v باشد، آنگاه، سرعت نور نسبت به زمین برابر $c'=c-v$ باشد. این را با حل معادله‌ی موج می‌توان دید:

فرض کنید که موج الکترومغناطیسی در راستای محور x حرکت می‌کند. در چارچوب S (همان چارچوب آرام) یا چارچوب اتر، پاسخ معادله‌ی موج عبارت است از

$$E(x,t)=E(x-ct) \qquad (۱-٤۳)$$

فرض کنید که زمین هم با سرعت u_x نسبت به اتر، در راستای x حرکت می‌کند. چارچوبی را که به زمین وصل است، S' بنامید (چارچوب بهرام). اگر تبدیل گالیله را اعمال کنیم، می‌توانیم میدان $E'(x',t')$ را که در چارچوب S' اندازه‌گیری می‌شود، به‌دست آوریم:

$$E'(x',t')=E(x,t)=E(x'+u_xt'-ct')=E(x'-(c-u_x)t') \qquad (۱-٤٤)$$

و این نشان می‌دهد که در چارچوب S'، موج با سرعت $c-u_x$ حرکت می‌کند. این همان قانون جمع سرعت‌های گالیله است که در رابطه‌ی (۳-۱) دیدیم.

مایکلسون و مورلی آزمایش بسیار دقیقی انجام دادند و دیدند که سرعت نور همیشه مقدار ثابتی است. روشن بود که چیزی نادرست است. به نظر می‌رسید که آزمایش آنها می‌گفت زمین نسبت به اتر حرکت نمی‌کند. این توصیف به روشنی نادرست بود، زیرا زمین در مدار به تقریب دایره‌ای حول خورشید می‌گردید و در نتیجه، در جایی بر روی مدار، ناگزیر است که نسبت به اتر حرکت کند. تلاش‌های زیادی شد تا ایده‌ی نیوتون درباره‌ی فضا و زمان را حفظ کنند. از جمله پیشنهادی بود که می‌گفت: زمین اتر پیرامون خود را با خودش می‌کشد. هم‌چنیم پیشنهاد شد که طول اجسام در راستای حرکت‌شان کوتاه می‌شود. پیشنها آخری را فشتزجرالد کرد و لورنتس آن را تعمیم داد. از این رو، آن را انقباض لورنتس- فیتزجرالد می‌نامند که کوشید نتیجه‌ی منفی آزمایش مایکلسون و مورلی را «توضیی» دهد؛ اما چون سازکار فیزیکی وجود نداشت که سبب این انقباض باشد، به فراموشی سپرده شد. پس از کارهای اینشتین، دوباره انقباض لورنتس- فیتزجرالد مطرح شد، این بار با تفسیری نو. در نتیجه، برخی پیروزی‌های زودگذر به‌دست آمد. با این حال، سرانجام دیده شد که این تلاش‌ها راضی کننده نبودند. این اینشتین بود که راه برون رفت از این دشواری را نشان داد؛ راهی که به دگرگونی بزرگی در نگاه ما به فضا و به ویژه، به زمان انجامید.

۱-۵ آزمایش مایکلسون- مورلی