درس ۲۶

تکانه‌ی زاویه‌ای ...... ادامه....

۶ ویژه‌توابع تکانه‌ی زاویه‌ای مداری

در بخش‌های پیشین ویژه‌مقدارهای شدنی عمل‌گرهای L^2 و L_z را یافتیم. اینک می‌خواهیم ویژه-توابع متناظر آنها را حساب کنیم. اگر $\psi_{\ell m}(r,\theta,\phi)$ ویژه‌حالت همزمان L^2 و L_z با ویژه-مقدارهای، به تر تیب، $\ell(\ell+1)$ و m، باشد، آنگاه $L_z\psi_{\ell m}=m\psi_{\ell m}$ باید در معادله‌ی ویژه‌مقدار زیر صدق کند

$$-i\frac{\partial\psi_{\ell m}}{\partial\phi}=m\psi_{\ell m} \qquad (1)$$

و همان‌گونه که می‌دانید، پاسخ این معادله‌ی دیفرانسیل

$$\psi_{\ell m}(r,\theta,\phi)=g_{\ell m}(r,\theta)e^{im\phi} \qquad (2)$$

است که در آن $g_{\ell m}$ تابع دلخواهی از r و θ است. چون m عدد صحیح است، $\psi_{\ell m}$ نیز تابعی تک‌مقداری از مکان است.

در تعیین طیف مقدارهای شدنی عمل‌گرهای L^2 و L_z، عمل‌گرهای $L_\pm$ نقش مهمی بازی کردند. سودمند است که $L_\pm$ را برحسب پارمشتق‌های نسبت به مختصات کروی بنویسیم. رابطه‌های زیر این خواست را فراهم می‌کنند:

$$\begin{aligned}
L_x&=i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\
L_y&=i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\
L_z&=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned} \qquad (3)$$

بنابراین، داریم:

$$
\begin{aligned}
L_+ &= L_x + iL_y \\
&= \hbar\left\{\left(i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + (i)i\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right\} \\
&= \hbar\left\{(\cos\phi + i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta(\cos\phi + i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\right\} \\
&\Rightarrow \boxed{L_+ = \hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)}
\end{aligned}
\tag{٤}
$$

به همین ترتیب،

$$
\begin{aligned}
L_- &= L_x - iL_y \\
&= \hbar\left\{\left(i\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) - (i)i\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right\} \\
&= \hbar\left\{-(\cos\phi - i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta(\cos\phi - i\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\phi}\right\} \\
&\Rightarrow \boxed{L_- = -\hbar e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)}
\end{aligned}
\tag{٥}
$$

حال که $L_\pm$ را در مختصات کروی نوشتیم، می‌دانیم که حالت $\psi_{\ell\ell}$، حالت با بیشترین مقدار شدنی m به‌ازای هر ℓ معین، باید در معادله‌ی $L_+\psi_{\ell\ell} = \circ$ صدق کند. با جایگزینی از $\psi_{\ell\ell}$ معادله‌ی (٤) در رابطه‌ی (٢) خواهیم داشت

$$
L_+\psi_{\ell\ell} = \circ \quad \Rightarrow \frac{\partial g_{\ell\ell}}{\partial\theta} - \ell\cot\theta\, g_{\ell\ell} = \circ \tag{٦}
$$

که معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول است. این معادله را می‌توان با ضرب کردن در فاکتور انتگرال $e^{-\ell\int d\theta\cot\theta} = \sin^{-\ell}\theta$ حل کرد. پاسخ آن $g_{\ell\ell} = R(r)\sin^{\ell}\theta$ است که در آن، $R(r)$ تابع دلخواهی است. جایگزینی این پاسخ در معادله‌ی (٢) به‌دست می‌دهد

$$
\psi_{\ell\ell}(r,\theta,\phi) = R(r)\sin^{\ell}\theta\, e^{i\ell\phi} \tag{٧}
$$

از رابطه‌ی (٧) تابع‌موج هر حالت $\psi_{\ell m}$ با $m < \ell$ را می‌توان با اعمال L_- به‌دست آورد. برای نمونه،

$$\psi_{\ell(\ell-1)}(r,\theta,\phi)=const.\times R(r)e^{-i\phi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\sin^{\ell}\theta e^{i\ell\phi}$$
$$=const.\times R(r)\sin^{\ell-1}\theta\cos\theta e^{i(\ell-1)\phi} \qquad (۸)$$

پس، ویژه‌حالت‌های L^2 و L_z به‌ازای مقدار مشخص ℓ وابستگی شعاعی، $R(r)$، یکسان دارند. تابعی از θ و ϕ که در R ضرب می‌شود و $\psi_{\ell m}$ را می‌سازد با نماد $Y_{\ell m}$ نشان داده می‌شود و همان‌گونه که می‌دانید، هماهنگ‌های کروی اند. بهنجارش $Y_{\ell m}$ چنان برگزیده می‌شود که

$$\int d\Omega\left|Y_{\ell m}\right|^2=1 \quad ; \quad d\Omega=\sin\theta d\theta d\phi \qquad (۹)$$

باشد. پیش‌تر نشان دادیم که

$$Y_{\ell(\ell-1)}\propto\sin^{\ell-1}\cos\theta e^{i(\ell-1)\phi} \qquad \text{و} \qquad Y_{\ell\ell}\propto\sin^{\ell}\theta e^{i\ell\phi} \qquad (۱۰)$$

اند. هر بار که L_- اثر می‌کند، ضریب بهنجارش را می‌توان به صورت زیر یافت: نخست انتگرال رابطه‌ی (۹) را با $Y_{\ell\ell}$، یعنی

$$\int d\Omega\left|Y_{\ell\ell}\right|^2=\int d\Omega\sin^{2\ell}=4\pi\,\pi 2^{2\ell}\frac{(\ell!)^2}{(2\ell+1)!} \qquad (۱۲)$$

حساب کنید و سپس، آن را هر بار که L_- اثر می‌کند، به $\alpha_\pm=\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m\pm1)}$ تقسیم کنید.

اگر به رابطه‌های (۱۲) توجه کنید، خواهید دید که با هر بار اعمال L_- به $Y_{\ell\ell}$، یک واحد از توان $\sin\theta$ کاسته می‌شود و در یک $\cos\theta$ ضرب می‌شود (بنابراین، انتظار داریم $Y_{\ell(\ell-2)}\propto\sin^{\ell-2}\theta\cos^2\theta$ باشد).

برای ℓهای بزرگ، $Y_{\ell\ell}$ تنها هنگامی به طور چشم‌گیری غیرصفر است که $\sin\theta\simeq1$ باشد، یعنی در استوا، $\theta=\frac{\pi}{2}$. در نتیجه، با کوچک شدن m و رسیدن آن از ℓ به صفر، برجستگی $Y_{\ell m}$ در ناحیه‌های نزدیک به قطب افزایش می‌یابد. این مشاهده‌ها از نظر فیزیکی پذیرفتنی اند: $Y_{\ell\ell}$ تابع موج ذره‌ای است که تمامی تکانه‌ی زاویه‌ای آن اساسا (به تقریب) موازی محور z است. در نتیجه، ذره نباید خیلی از صفحه‌ی xy دور باشد. پس، در زاویه‌ی θ خیلی متفاوت از $\frac{\pi}{2}$، دامنه‌ی

$Y_{\ell\ell}$ برای یافتن ذره باید کوچک باشد. با کاسته شدن از مقدار m، صفحه‌ی مدار هم به صفحه-ی xy نزدیک می‌شود و امکان یافتن ذره در مکان‌های دورتر و دورتر از این صفحه افزایش می‌یابد.

برای ℓهای بزرگ، فاز $Y_{\ell\ell}$ با تغییر ϕ به تندی تغییر می‌کند. این رفتار دور از انتظار نیست، زیرا تکانه‌ی زاویه‌ای مداری بزرگ ذره، $\ell\hbar$، به این معنی است که حرکت مماسی ذره در صفحه‌ی xy بسیار چشم‌گیر است. از فیزیک کلاسیک، می‌توان تخمین زد که تکانه‌ی مماسی ذره $p=\frac{\ell\hbar}{r}$ است و از مکانیک کوانتومی می‌دانیم که این یعنی آهنگ تغییر فاز تابع موج در واحد فاصله، برابر $\frac{p}{\hbar}=\frac{\ell}{r}$ است

به‌ازای هر مقدار m، مقدار چشمداشتی هر دو مولفه‌ی L_x و L_y صفر اند. این را می‌توان از $L_x=\frac{۱}{۲}\left(L_+ + L_-\right)$ نتیجه گرفت. بنابراین، جهت‌گیری مولفه‌های بردار تکانه‌ی زاویه‌ای که در صفحه‌ی xy اند، یعنی جهت‌گیری L_x و L_y، کاملا نامعین اند. به خاطر این عدم یقین، مقدار یا اندازه‌ی $Y_{\ell m}$ مستقل از ϕ است.

۷ تکانه‌ی زاویه‌ای مداری و پاریته

عملگر پاریته، $\tilde{P}$، وقتی بر روی حالتی با تابع‌موج $\psi(\mathbf{r})$ اثر کند، آن حالت را به حالتی با تابع موج $\psi'(\mathbf{r})=\psi(-\mathbf{r})$ تبدیل می‌کند. حال می‌خواهیم نشان دهیم که تابع‌موج‌های متناسب با $Y_{\ell m}$، ویژه‌حالت‌های عملگر پاریته با ویژه‌مقدار $(-۱)^{\ell}$ اند: $\tilde{P}Y_{\ell m}(\theta,\phi)=(-۱)^{\ell}Y_{\ell m}(\theta,\phi)$.

در مختصات کروی، تبدیل $\mathbf{r}\to-\mathbf{r}$ با تبدیل‌های $\theta\to\pi-\theta$، $\phi\to\phi+\pi$ هم‌ارز است. تحت این نگاشت، $\sin(\theta)\to\sin(\theta-\pi)=\sin(\theta)$ و بنابراین تغییر نمی‌کند، اما $e^{i\ell\phi}\to e^{i\ell\pi}e^{i\ell\phi}=\left(e^{i\pi}\right)^{\ell}e^{i\ell\phi}=(-۱)^{\ell}e^{i\ell\phi}$ تبدیل می‌شود.

بنابه رابطه‌ی (۱۰)، $Y_{\ell\ell}\propto\sin^{\ell}\theta e^{i\ell\phi}$ است و در نتیجه، $Y_{\ell\ell}\xrightarrow{P}(-۱)^{\ell}Y_{\ell\ell}$. یعنی، اگر ℓ عدد زوجی باشد، پاریته‌ی $Y_{\ell\ell}$ زوج است. و در غیر این صورت پاریته‌ی آن فرد است. شما می‌دانید که پاریته‌های $\mathbf{r}$ و $\mathbf{p}$ فرد اند: $\tilde{P}\mathbf{p}=-\mathbf{p}$ و $\tilde{P}\mathbf{r}=-\mathbf{r}$. از اینجا و واقعیت این که عملگرهای $\tilde{L}_i$ جمع حاصل‌ضرب‌های یک مولفه‌ی $\mathbf{r}$ و یک مولفه‌ی $\mathbf{p}$ اند (برای نمونه، از آغاز درس ۲۵ به یاد

دارید که $L_x = yp_z - zp_y$است)، نتیجه می‌شود که عملکرهای $\tilde{L}_i$ها و عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده، $\tilde{L}_\pm = \tilde{L}_x \pm \tilde{L}_y$، عملگرهای با پاریته‌ی زوج اند. حال $Y_{\ell,\ell-1} = \tilde{L}_-\left(\frac{Y_{\ell,\ell}}{\alpha_-}\right)$ را در نظر بگیرید که در آن α_- مقدار ثابتی است. اثر عملگر پاریته بر $Y_{\ell,\ell-1}$عبارت است از

$$\tilde{P}Y_{\ell,\ell-1} = \frac{1}{\alpha_-}\tilde{L}_-\tilde{P}Y_{\ell,\ell} = (-1)^\ell \frac{1}{\alpha_-}L_-Y_{\ell,\ell} = (-1)^\ell Y_{\ell,\ell-1} \qquad (13)$$

این نشان می‌دهد که پاریته‌ی $Y_{\ell,\ell-1}$ و پاریته‌ی $Y_{\ell\ell}$ یکسان اند. چون همه‌ی $Y_{\ell m}$ها را، برای هر ℓمعین، می‌توان با اعمال چند باره‌ی $\tilde{L}_-$ بر $Y_{\ell\ell}$ به‌دست آورد، نتیجه می‌گیریم که پاریته‌ی همه‌ی $Y_{\ell m}$ها برابر $(-1)^\ell$ است.

۸ تکانه‌ی زاویه‌ای مداری و انرژی جنبشی

در این بخش، عملگر انرژی جنبشی $\tilde{H}_{kin} = \frac{\tilde{p}^2}{2m}$را به صورت ترکیب سودمندی از عملگرهای انرژی جنبشی شعاعی و مماسی خواهیم نوشت. نخست، با بهره‌گیری از عملگرهای نردبانی نشان خواهیم داد که $\tilde{L}^2$ خویشاوندی نزدیکی با عملگر لاپلاسی، ∇^2 دارد و سپس خواهیم پرسید که عملگر مربوط به تکانه‌ی شعاعی چیست؟ بخش نخست را شما پیش‌تر دیده‌اید و با آن آشنا هستید. با این حال، می‌ارزد که دوباره آن را ببینید.

بگذارید رابطه‌ی (۴۵) درس ۲۵را دوباره بنویسم:

$$\begin{aligned} L_+L_- &= (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) = L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z = L^2 - L_z^2 + \hbar L_z \\ &\Rightarrow \quad L^2 = L_+L_- - \hbar L_z + L_z^2 \end{aligned} \qquad (14)$$

بنابراین، با جایگزینی از رابطه‌های (۴) و (۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} L^2 &= L_+L_- - \hbar L_z + L_z^2 = \\ &\hbar e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left\{-\hbar e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right\} + i\hbar^2\frac{\partial}{\partial\phi} - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \end{aligned} \qquad (15)$$

در رابطه‌ی بالا $\tilde{L}_z$ را با عملگر متناظرش در مختصات کروی، $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$ جایگزین کردیم.

اگر در سمت راست رابطه‌ی (۱۵) پرانتزها را در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت

$$\tilde{L}^{2}=\hbar^{2}\left\{\begin{array}{l}-\frac{\partial^{2}}{\partial\theta^{2}}-\cot^{2}\theta\frac{\partial^{2}}{\partial\phi^{2}}+\cot\theta\left(-\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\\ -i\csc^{2}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}+i\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{\partial^{2}}{\partial\phi^{2}}\end{array}\right\} \qquad (۱۶)$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cot^{2}\theta-\csc^{2}\theta=-۱$، دیده می‌شود که جمله‌های شامل $\frac{\partial}{\partial\phi}$ یکدیگر را حذف می‌کنند. به یاری همین اتحاد مثلثاتی، داریم

$$-\cot^{2}\theta\frac{\partial^{2}}{\partial\phi^{2}}-\frac{\partial^{2}}{\partial\phi^{2}}=-\left(\cot^{2}\theta+۱\right)\frac{\partial^{2}}{\partial\phi^{2}}=-\csc^{2}\theta\frac{\partial^{2}}{\partial\phi^{2}}=-\frac{۱}{\sin^{2}\theta}\frac{\partial^{2}}{\partial\phi^{2}} \qquad (۱۷)$$

پس، رابطه‌ی (۱٦) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\tilde{L}^{2}&=-\hbar^{2}\left\{\frac{\partial^{2}}{\partial\theta^{2}}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{۱}{\sin^{2}\theta}\frac{\partial^{2}}{\partial\phi^{2}}\right\}\\ &=-\hbar^{2}\left\{\frac{۱}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{۱}{\sin^{2}\theta}\frac{\partial^{2}}{\partial\phi^{2}}\right\}\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

عبارت درون $\{\ \}$ چیزی جز r^{2} برابر بخش زاویه‌ای عملگر لاپلاسی ∇^{2} نیست.

اینک، بخش دوم: عملگر متناظر با تکانه‌ی شعاعی چیست؟ به نظر می‌رسد که پاسخ بدیهی عملگر $\hat{\mathbf{r}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}$ باشد که در آن $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه در راستای شعاع است. متاسفانه این عملگر هرمیتی نیست

$$\left(\tilde{\hat{\mathbf{r}}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}\right)^{\dagger}=\tilde{\mathbf{p}}\cdot\tilde{\hat{\mathbf{r}}}\neq\tilde{\hat{\mathbf{r}}}\cdot\tilde{\mathbf{p}} \qquad (۱۹)$$

و در نتیجه، نمی‌تواند نماینده‌ی یک مشاهده‌پذیر باشد. این البته، حالت خاصی از یک قضیه‌ی عمومی است: حاصل‌ضرب MQ دو مشاهده‌پذیر جابه‌جایی ناپذیر M و Q هیچ‌گاه هرمیتی نیست. اما به سادگی می‌توان دید که $\frac{۱}{۲}\left(\tilde{M}\tilde{Q}+\tilde{Q}\tilde{M}\right)$ **هرمیتی است**.

بنابراین، بگذارید عملگر هرمیتی زیر را تعریف کنیم:

$$\tilde{\mathbf{p}}_{r}=\frac{۱}{۲}\left(\tilde{\hat{\mathbf{r}}}\cdot\tilde{\mathbf{p}}+\tilde{\mathbf{p}}\cdot\tilde{\hat{\mathbf{r}}}\right) \qquad (۲۰)$$

حال اگر عملگر تکانه‌ی $\tilde{\mathbf{p}}$ را در فضای مکان با $-i\hbar\nabla$ جایگزین کنیم، به‌دست می‌آید

$$\tilde{\mathbf{p}}_r = -i\frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{r}\mathbf{r}\cdot\nabla + \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\right) \qquad (۲۱)$$

با استفاده از قاعده‌ی زنجیر، به سادگی می‌توان نشان داد که

$$r\frac{\partial}{\partial r} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{r}\cdot\nabla \qquad (۲۲)$$

افزون بر این، $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$ است. پس، رابطه‌ی (۲۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\tilde{\mathbf{p}}_r = -i\frac{\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{r} - \frac{r}{r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\right) = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \qquad (۲۳)$$

رابطه‌ی (۲۳) اجازه می‌دهد تا جابه‌جاگر $\left[\tilde{r}, \tilde{\mathbf{p}}_r\right]$ را حساب کنیم

$$\left[\tilde{r}, \tilde{\mathbf{p}}_r\right] = -i\hbar\left[\tilde{r}, \frac{\partial}{\partial r}\right] = i\hbar \qquad (۲۴)$$

اگر هر دو طرف رابطه‌ی (۲۳) را مجذور کنیم، خواهیم داشت

$$\tilde{p}_r^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{r^2}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) \qquad (۲۵)$$

که $-\hbar^2$ برابر بخش شعاعی عملگر لاپلاسی ∇^2 است. چون پیش‌تر در رابطه‌ی (۱۸) نشان دادیم که $\tilde{L}^2$ با $-r^2$ برابر بخش زاویه‌ای عملگر لاپلاسی برابر است (البته ضرب در $\hbar^2$)، پس نتیجه می‌گیریم که $\nabla^2 = -\left(\frac{p_r^2}{\hbar^2} + \frac{L^2}{r^2}\right)$ است و بنابراین، عملگر انرژی جنبشی به صورت زیر درمی‌آید

$$H_{kin} = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \;\Rightarrow\; H_{kin} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\hbar^2 L^2}{r^2}\right) \qquad (۲۶)$$

توصیف فیزیکی این معادله روشن است: از نظر کلاسیکی، تکانه‌ی زاویه‌ای مداری $\hbar\mathbf{L}$ برابر $\mathbf{r}\times m\mathbf{v} = mrv_t$ است که در آن، v_t سرعت مماسی است. پس جمله‌ی $\frac{\hbar^2 L^2}{2mr^2} = \frac{1}{2}mv_t^2$ انرژی جنبشی مربوط به حرکت مماسی است. از سوی دیگر، $\frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv_r^2$ انرژی جنبشی مربوط به حرکت شعاعی را نشان می‌دهد. برای نیازهای آینده، توجه کنید که عملگر انرژی جنبشی را می‌توان به صورت زیر هم نوشت

$$H_{kin} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{L^2}{r^2}\right\} \qquad (۲۷)$$

۹ حل جبری مسئله‌ی اتم هیدروژن

(الف): مسئله‌ی کپلر

تکانه‌ی زاویه‌ای الکترونی با بار الکتریکی e که در میدان نیروی مرکزی بار الکتریکی مثبت Ze حرکت می‌کند، $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ است. فرض کردیم بار مثبت Ze در مبداء مختصات جایگزیده است. در فیزیک کلاسیک، این تکانه‌ی زاویه‌ای، مقدار ثابتی است. حرکت در صفحه‌ای انجام می‌گیرد که بر $\mathbf{L}$ عمود است. قانون دوم نیوتون می‌گوید آهنگ تغییر تکانه با نیرو برابر است. بنابراین،

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=-\frac{Ze^2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (۲۸)$$

تکانه‌ی زاویه‌ای تنها کمیتی نیست که پایسته است. اگر از مکانیک کلاسیک به یاد بیاورید، بردار رونگ– لنز هم همین ویژگی را دارد. بردار رونگ– لنز[۱] عبارت است از

$$\mathbf{A}=\frac{1}{Ze^2m}(\mathbf{L}\times\mathbf{p})+\hat{\mathbf{r}} \qquad (۲۹)$$

که در آن $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه است. برای این که نشان دهیم این بردار نماینده‌ی یک کمیت پایسته است، از آن نسبت به زمان مشتق بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{dt}&=\frac{1}{Ze^2m}\left(\mathbf{L}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}+\frac{d\mathbf{L}}{dt}\times\mathbf{p}\right)+\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}=\frac{1}{Ze^2m}\left(\mathbf{L}\times\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)+\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\\&=-\frac{1}{m}\left(\mathbf{L}\times\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)+\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}=-\left(\hat{\mathbf{r}}\times\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right)\times\hat{\mathbf{r}}+\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\\&=\left(\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})-\left(\mathbf{r}\cdot\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\right)\right)+\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}=-\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}+\frac{d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r})}{dt}++\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}=0\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

پس، بردار $\mathbf{A}$ ثابت حرکت است و از نظر فیزیکی نشان دهنده‌ی طول و جهت نیم‌محور بزرگ مدار بیضی کلاسیک است. با استفاده از بردار $\mathbf{A}$ می‌توان معادله‌ی مدار بیضی را یافت:

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}\cdot\mathbf{r}=ar\cos\theta=\frac{1}{Ze^2m}(\mathbf{L}\times\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}+\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}=-\frac{1}{Ze^2m}\mathbf{L}\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{p})+r=\frac{L^2}{Ze^2m}+r\\&\Rightarrow\ \frac{1}{r}=\frac{Ze^2m}{L^2}(1-a\cos\theta)\end{aligned} \qquad (۳۱)$$

---

[۱] Runge-Lenz نگاه کنید به: فیروز آرش، مکانیک کلاسیک جلد ۱، فصل ۷، انتشارات نوپردازان (۱۳۹۶).

این معادله‌ی بیضی است و $a\equiv|\mathbf{A}|$ خروج از مرکز است. می‌بینید که شناسایی بردار رونگ- لنز تا چه حد کار را ساده کرد.

(ب): مسئله‌ی مکانیک کوانتومی

برای این که بردار کلاسیک رونگ- لنز در مکانیک کوانتومی هم سودمند باشد، باید آن را تعمیم دهیم. در فیزیک کلاسیک، $\mathbf{L}\times\mathbf{p}=-\mathbf{p}\times\mathbf{L}$ است. در مکانیک کوانتومی این اتحاد برقرار نیست، زیرا، در مکانیک کوانتومی، تکانه و تکانه‌ی زاویه‌ای باید با عملگرهای متناظرشان جایگزین شوند و مولفه‌های عملگر $\mathbf{L}_{op}$ با یکدیگر جابه‌جایی پذیر نیستند. برای این که بردار را با عمل- گر اشتباه نکنیم، در این بخش من از زیرنویس op برای نشان دادن عملگر استفاده خواهم کرد. تعمیم درست بردار رونگ- لنز به عملگر کوانتومی (فراموش نکنیم که عملگر کوانتومی اگر نماینده‌ی مشاهده‌پذیر فیزیکی باشد، باید هرمیتی باشد) عبارت است از

$$\mathbf{A}_{op}=\frac{۱}{۲Ze^{۲}m}\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}-\mathbf{p}_{op}\times\mathbf{L}_{op}\right)+\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)_{op} \qquad (۳۲)$$

این تعریف حالا در $\left[\hat{H},\mathbf{A}_{op}\right]=۰$ صدق می‌کند و می‌گوید که $\mathbf{A}$ ثابت حرکت است. همچنین $\mathbf{A}$ در $\mathbf{A}_{op}\cdot\mathbf{L}_{op}=۰$ صدق می‌کند. جابه‌جاگرهای زیر هم برقرار اند (اثبات آنها را برای تمرین به عهده‌ی خواننده می‌گذاریم)

$$\left[\hat{L}_i,\hat{A}_j\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{A}_k \quad , \quad \left[\hat{L}_i,\hat{p}_j\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{p}_k \quad , \quad \left[\hat{L}_i,\hat{r}_j\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{r}_k \qquad (۳۳)$$

که به رابطه‌ی زیر برای عملگر $\mathbf{A}_{op}$ می‌انجامند:

$$\mathbf{A}_{op}=\frac{۱}{۲Ze^{۲}m}\left(2\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}+i\hbar\mathbf{p}_{op}\right)+\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)_{op} \qquad (۳٤)$$

حال که عملگر $\mathbf{A}_{op}$ را یافتیم، به دو ویژگی مهم $\mathbf{A}$ توجه کنید. ویژگی نخست، پی‌آمد جابه‌جاگر های زیر است

$$\left[\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)_i,\hat{p}_j\right]+\left[\hat{p}_i,\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)_j\right]=۰ \qquad (۳۵)$$

$$\left[\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)_i,\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)_j\right]=-i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k p^۲=-i\hbar\varepsilon_{ijk}p^۲\hat{L}_k \qquad (۳۶)$$

$$\left[\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)_i,\frac{\hat{r}_j}{r}\right]+\left[\frac{\hat{r}_i}{r},\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)_j\right]=۲i\hbar\varepsilon_{ijk}\frac{\hat{L}_k}{r} \qquad (۳۷)$$

و به نتیجه‌ی زیر می‌انجامد

$$\left[\hat{A}_i,\hat{A}_j\right]=i\hbar\left(\frac{-۲\hat{H}}{Z^۲e^۴m}\right)\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \qquad (۳۸)$$

که در آن، $\hat{H}$ همیلتونی سامانه و به صورت زیر است

$$\hat{H}=\frac{\mathbf{p}_{op}^۲}{۲m}-Ze^۲\left(\frac{۱}{r}\right)_{op} \qquad (۳۹)$$

ویژگی دوم، پی‌آمد رابطه‌های زیر است:

$$\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)\cdot\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)=\mathbf{L}_{op}^۲\mathbf{p}_{op}^۲ \qquad (۴۰)$$

$$\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)_{op}\cdot\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)+\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)_{op}=-\frac{۲\mathbf{L}_{op}^۲}{r}+۲i\hbar\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)_{op}\cdot\mathbf{p}_{op} \qquad (۴۱)$$

$$\mathbf{p}_{op}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)_{op}=\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)_{op}\cdot\mathbf{p}_{op}-۲i\hbar\left(\frac{۱}{r}\right)_{op} \qquad (۴۲)$$

$$\mathbf{p}_{op}\cdot\mathbf{L}_{op}=\mathbf{L}_{op}\cdot\mathbf{p}_{op}=۰ \qquad (۴۳)$$

$$\mathbf{p}_{op}\cdot\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)+\left(\mathbf{L}_{op}\times\mathbf{p}_{op}\right)\cdot\mathbf{L}_{op}=۲i\hbar\mathbf{p}_{op}^۲ \qquad (۴۴)$$

این رابطه‌ها به ویژگی دوم می‌انجامند

$$\mathbf{A}_{op}^۲=\mathbf{A}_{op}\cdot\mathbf{A}_{op}=۱+\frac{۲\hat{H}}{Z^۲e^۴m}\left(\mathbf{L}_{op}^۲+\hbar^۲\right) \qquad (۴۵)$$

حال دو عملگر نردبانی تازه تعریف کنید:

$$\mathbf{I}_{op}^{\pm}=\frac{۱}{۲}\left[\hat{L}_{op}\pm\left(-\frac{۲\hat{H}}{Z^۲e^۴m}\right)^{\frac{۱}{۲}}\mathbf{A}_{op}\right] \qquad (۴۶)$$

با استفاده از جابه‌جاگرهای $\left[\hat{A}_i,\hat{A}_j\right]$ در رابطه‌ی (۳۸) و $\left[\hat{L}_i,A_j\right]$ از رابطه‌ی (۴۵)، خواهیم داشت

$$\left[\mathbf{I}^{\pm}_{op,i},\mathbf{I}^{\pm}_{op,j}\right]=i\hbar\varepsilon_{ijk}\mathbf{I}^{\pm}_{op,k} \tag{۴۷}$$

این‌ها البته رابطه‌های جابه‌جاگری تکانه‌ی زاویه‌ای معمولی اند. چون $\mathbf{I}^{\pm}_{op,i}$ها با همیلتونی جابه‌جایی پذیر اند، ویژه‌حالت‌های مشترک با همیلتونی دارند. بنابراین، می‌توان مجموعه‌ای از حالت‌ها را به گونه‌ای یافت که

$$\hat{H}\psi=E\psi \quad \text{و} \quad \left(\mathbf{I}^{\pm}_{op}\right)^۲\psi=i_{\pm}\left(i_{\pm}+۱\right)\hbar^۲\psi \tag{۴۸}$$

می‌توان نشان داد که $\left(\mathbf{I}^{+}_{op}\right)^۲=\left(\mathbf{I}^{-}_{op}\right)^۲$ است. این بدان معنی است که $i_+=i_-$ است. در نتیجه، مانند پیش داریم

$$i_+=۰,\ \frac{۱}{۲},۱,\ \frac{۳}{۲},\ ۲,\frac{۵}{۲},\ ۳,\cdots \tag{۴۹}$$

چون $\mathbf{A}_{op}\cdot\mathbf{L}_{op}=۰$ است، از رابطه‌ی (۴۶) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&۲\left[\left(\mathbf{I}^{+}_{op}\right)^۲+\left(\mathbf{I}^{-}_{op}\right)^۲\right]+\hbar^۲=-\frac{Z^۲e^۴m}{۲\hat{H}} \quad\Rightarrow\quad \left[۴i_+\left(i_++۱\right)+۱\right]\hbar^۲=-\frac{Z^۲e^۴m}{۲E}\\ &\Rightarrow\quad E=-\frac{Z^۲e^۴m}{۲\left(۲i_++۱\right)^۲}=-\frac{Z^۲e^۴m}{۲n^۲}\end{aligned} \tag{۵۰}$$

در نتیجه‌ی آخر بالا از تعریف $n=۲i_+=۱,۲,۳,\cdots$ استفاده کردیم. همان‌گونه که می‌بینید اینها مقدارهای درست انرژی ترازهای اتم هیدروژن اند. در اینجا هم اگرچه انرژی به عدد کوانتومی i_+ (یا n) بستگی دارد، اما هر حالتی، تبهگنی هم دارد. درجه‌ی تبهگنی هر i_+، به تعداد مقدارهای مولفه‌ی z هر i_+ بستگی دارد. یعنی

$$\left(۲i_++۱\right)\left(۲i_-+۱\right)=\left(۲i_++۱\right)^۲=n^۲ \tag{۵۱}$$