

## کنترل وقوع-تحریک مقاوم سیستم تعلیق فعال خودرو

### با در نظر گرفتن عدم قطعیت و قیده‌های فیزیکی

در این مقاله به کنترل مقاوم فعال سیستم تعلیق نیم-خودرو با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های پارامتری و مکانیزم وقوع-تحریک پرداخته شده است. در طراحی کنترل‌کننده، قیده‌های فیزیکی حاکم بر سیستم نیز در نظر گرفته شده‌اند. در ابتدا با بیان معادلات دینامیکی سیستم تعلیق نیم-خودرو و ارائه مکانیزم وقوع-تحریک، مساله به همراه عدم قطعیت‌های پارامتری فرمول‌بندی شده است. سپس با استفاده از قضیه لیاپانوف-کراسووسکی شرایطی در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی ارائه شده‌اند که پایداری مقاوم و کارایی سیستم تعلیق خودرو را تضمین می‌کنند. در انتها با بررسی یک سیستم تعلیق نمونه، کارایی کنترل‌کننده‌های طراحی شده مورد مطالعه قرار گرفته است.

سیدعرفان رضوی زاده<sup>۱</sup>

دانشجوی کارشناسی ارشد

علی کاظمی<sup>۲</sup>

استادیار

واژه‌های راهنما: سیستم تعلیق فعال خودرو، کنترل وقوع-تحریک، شاخص کارایی  $H_\infty$ ، قضیه لیاپانوف-کراسووسکی

### ۱- مقدمه

سیستم تعلیق اکثر خودروها از اجزاء غیرفعال همانند فنر و میراکننده تشکیل شده است [۱، ۲]. این گونه سیستم‌های غیرفعال عملاً در شرایط مختلف جاده نمی‌توانند رفتار ایده‌آلی از خود نشان بدهند و ممکن است سرنشین در شرایط ناهنجار جاده‌ای احساس ناراحتی کند. بنابراین لزوم استفاده از یک سیستم تعلیق فعال که در شرایط مختلف جاده قابل تنظیم و کنترل باشد احساس می‌گردد [۳]. در سیستم‌های تعلیق فعال در کنار اجزاء غیرفعال، محرک‌هایی نیز قرار دارند که معمولاً هیدرولیکی و یا نیوماتیکی می‌باشند. یک سیستم تعلیق خوب باید بتواند بین خواسته‌های متضاد از تعلیق، یعنی راحتی سفر، افزایش تماس چرخ با جاده و کاهش مصرف انرژی تا حدودی تعادل برقرار کند [۴-۶]. در سال‌های اخیر پژوهش‌های بسیاری برای طراحی تعلیق فعال و نیمه فعال برای رسیدن به پاسخ مطلوب خودرو صورت گرفته است [۷-۱۱]. هدف اصلی بکارگیری تعلیق فعال، کاهش انرژی ارتعاشی بدنه خودرو که توسط تحریک جاده ایجاد شده می‌باشد، درحالی‌که پایداری خودرو در جاده را در یک حد قابل قبول حفظ کند [۱۲].

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه تفرش، تفرش erfankalmal@yahoo.com

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، استادیار، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه تفرش، تفرش kazemy@tafreshu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۷/۱۱/۲۴، تاریخ پذیرش: ۹۹/۰۸/۰۳

در سیستم تعلیق فعال خودرو، تحریک خارجی باتولید نیروی کنترلی وابسته به پاسخ خودرو از طریق فعال کننده با منبع انرژی خارجی خنثی می‌گردد. همچنین عملکرد تعلیق فعال با داشتن اطلاعات ورودی آینده می‌تواند بهبود یابد. کنترل فعال پیش دید تعلیق شامل کسب و بکارگیری اطلاعات مربوط به پروفیل جاده جلو خودرو می‌باشد. استفاده از اطلاعات پیش دید جاده برای بهبود سیستم تعلیق خودرو اولین بار توسط بندر در سال (۱۹۶۸) مطرح کرد [۱۳]. تامسون نگرش فضای حالت را بکار برد و کنترل تعلیق را برای مدل یک چهارم خودرو تحلیل کرد [۱۴]. ساساکی و همکارانش مدل یک دوم خودرو دویبعدی را در نظر گرفتند [۱۵].

دو و ژانگ در سال (۲۰۰۷) کنترل  $H_\infty$  را برای سیستم تعلیق فعال خودرو با تأخیر زمانی عملگر مطرح نموده‌اند [۱۶]. گوسلا در سال (۲۰۰۵) عملکرد کنترل ارتعاشات سیستم تعلیق غیرخطی مدل کامل خودرو با کنترل کننده فازی را بیان نمود [۱۷]. آقای لیو و همکاران در سال (۲۰۲۰) به طراحی کنترل کننده تطبیقی مد لغزشی با در نظر گرفتن عدم قطعیت در سیستم تعلیق خودرو پرداخته‌اند [۱۸]. در مرجع [۱۹]، طراحی کنترل کننده پس گام تطبیقی برای سیستم تعلیق غیرخطی خودرو با عدم قطعیت و اشباع عملگرها مورد بحث قرار گرفته است. همچنین، مساله طراحی کنترل کننده مقاوم در برابر خطا برای سیستم تعلیق غیرخطی خودرو با در نظر گرفتن خطای عملگرها و اغتشاشات جاده در مرجع [۲۰] مورد بررسی قرار گرفته است. عموماً روش‌های مطرح شده برای مدل یک چهارم خودرو ارائه شدند اما مدل‌های کامل تری از جمله مدل نیم خودرو و تمام خودرو نیز در برخی مقالات مورد بررسی قرار گرفتند. به عنوان نمونه، مقاله [۲۱] مساله کنترل  $H_\infty$  مقاوم در برابر خطا را برای مدل کامل خودرو مطرح کرد که در آن طراحی با در نظر گرفتن طیف فرکانسی محدود صورت گرفته است. مقالاتی مانند [۲۲-۲۴] به ارائه روش‌های کنترلی برای مدل نیم خودرو پرداخته‌اند. از طرفی با پیشرفت سیستم‌های کنترل تحت شبکه و استفاده شرکت‌های خودروسازی از شبکه‌های ارتباطی در خودروها، پژوهش‌ها به سمت استفاده از مکانیزم‌های وقوع-تحریک متمایل شد. در این مکانیزم یک شرط تحریک معرفی می‌شود و تا این شرط برآورده نشود، داده‌های سنسور به کنترل کننده ارسال نمی‌شود و در نتیجه حجم داده‌های ارسال شده به شدت کاهش یافته و پهنای باند شبکه افزایش می‌یابد. استفاده از سیستم‌های کنترل وقوع-تحریک بطور گسترده‌ای مورد توجه و پژوهش قرار گرفته است که جهت اطلاع بیشتر می‌توان به مقاله مروری [۲۵] و مراجع ارائه شده در آن مراجعه کرد. در این میان، مقاله [۲۶] و [۲۷] تنها مقالاتی هستند که روش وقوع-تحریک را برای مدل یک چهارم خودرو ارائه کرده‌اند و مساله عدم قطعیت را نیز در نظر نگرفته‌اند. از آنجایی که مدل نیم-خودرو، زاویه پیچش خودرو و شتابی که سرنشین خودرو حس می‌کند را مورد مطالعه قرار می‌دهد، به سیستم واقعی نزدیکتر می‌باشد. با توجه به اینکه روش وقوع-تحریک روی سیستم تعلیق نیم-خودرو تا کنون مورد بررسی قرار نگرفته است، این مقاله مدل مذکور را مورد مطالعه قرار داده و روش‌های وقوع-تحریک ارائه شده در مدل یک چهارم خودرو را بهبود داده است.

علائم و نشانه‌ها: در این مقاله،  $\mathbf{R}^n$  نشان‌دهنده فضای اقلیدسی  $n$  بعدی و  $\mathbf{R}^{n \times m}$  مجموعه ماتریس‌های حقیقی  $n \times m$  است.  $\mathbf{P} > 0$  بیان‌کننده این است که  $\mathbf{P}$  ماتریس حقیقی مثبت معین و متقارن است.  $\mathbf{I}$  ماتریس همانی با ابعاد مناسب و  $\text{diag}\{\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_m\}$  ماتریس حقیقی قطری با المان‌های  $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_m$  است.  $\mathbf{A}^T$  ترانزپوز ماتریس حقیقی  $\mathbf{A}$  است. عناصر متقارن در ماتریس‌های متقارن با علامت \* نشان داده شده و  $\{\mathbf{z}\}_i$  به مفهوم  $i$  امین سطر از بردار (ماتریس)  $\mathbf{z}$  است.

## ۲- مدل سیستم تعلیق نیم-خودرو و بیان مساله

مدل نیم-خودرو در شکل (۱) نشان داده شده است. این مدل یک مدل خطی چهار درجه آزادی است که شامل حرکت عمودی جرم فنربندی نشده چرخ جلو و عقب با حرکات عمودی و دوران حول محور عرضی جرم فنربندی شده (جرم بدنه خودرو) می‌باشد. در شکل (۱) اگر زاویه‌ی  $\varphi(t)$  را کوچک در نظر بگیریم، می‌توان جابجایی جرم فنربندی شده را به صورت زیر تقریب زد:

$$\begin{aligned} z_{sf}(t) &= z_c(t) - l_1 \sin \varphi(t) \approx z_c(t) - l_1 \varphi(t), \\ z_{sr}(t) &= z_c(t) + l_2 \sin \varphi(t) \approx z_c(t) + l_2 \varphi(t), \end{aligned} \quad (1)$$

که  $z_{sf}(t)$  و  $z_{sr}(t)$  به ترتیب جابجایی قسمت جلو و عقب خودرو،  $l_1$  فاصله بین اکسل جلو و مرکز جرم،  $l_2$  فاصله بین اکسل عقب و مرکز جرم،  $\varphi(t)$  زاویه پیچش خودرو و  $z_c(t)$  جابجایی مرکز جرم می‌باشد. با توجه به قانون دوم نیوتن، معادلات حرکت مدل نیم-خودرو به شرح زیر بدست می‌آیند [۲۸]:

$$m_s \ddot{z}_c(t) = -k_{sf}[z_{sf}(t) - z_{uf}(t)] - c_{sf}[\dot{z}_{sf}(t) - \dot{z}_{uf}(t)] - k_{sr}[z_{sr}(t) - z_{ur}(t)] - c_{sr}[\dot{z}_{sr}(t) - \dot{z}_{ur}(t)] + u_f(t) + u_r(t), \quad (2)$$

$$I_\varphi \ddot{\varphi}(t) = l_1 k_{sf}[z_{sf}(t) - z_{uf}(t)] + l_1 c_{sf}[\dot{z}_{sf}(t) - \dot{z}_{uf}(t)] - l_2 k_{sr}[z_{sr}(t) - z_{ur}(t)] - l_2 c_{sr}[\dot{z}_{sr}(t) - \dot{z}_{ur}(t)] - l_1 u_f(t) + l_2 u_r(t), \quad (3)$$

$$m_{uf} \ddot{z}_{uf}(t) = k_{sf}[z_{sf}(t) - z_{uf}(t)] + c_{sf}[\dot{z}_{sf}(t) - \dot{z}_{uf}(t)] - k_{tf}[z_{uf}(t) - z_{rf}(t)] - u_f(t), \quad (4)$$

$$m_{ur} \ddot{z}_{ur}(t) = k_{sr}[z_{sr}(t) - z_{ur}(t)] + c_{sr}[\dot{z}_{sr}(t) - \dot{z}_{ur}(t)] - k_{tr}[z_{ur}(t) - z_{rr}(t)] - u_r(t), \quad (5)$$

که  $m_s$  جرم بدنه خودرو،  $m_{uf}$  و  $m_{ur}$  جرم‌های فنربندی نشده یا به اصطلاح جرم‌های چرخ‌های جلو و عقب،  $I_\varphi$  ممان اینرسی،  $z_{uf}(t)$  و  $z_{ur}(t)$  به ترتیب جابجایی‌های جلو و عقب جرم فنربندی نشده،  $z_{rf}(t)$  و  $z_{rr}(t)$  به ترتیب ناهمواری‌های جاده برای قسمت جلو و عقب خودرو،  $u_f(t)$  و  $u_r(t)$  نیروهای کنترلی است. پارامترهای  $k_{sf}$ ،  $k_{sr}$ ،  $c_{sf}$  و  $c_{sr}$  به ترتیب ضرایب سختی و میرایی عناصر تعلیق غیر فعال برای جلو و عقب خودرو بوده و به طور مشابه  $k_{tr}$ ،  $k_{tf}$ ،  $c_{tr}$  و  $c_{tf}$  به ترتیب سختی و میرایی تایر جلو و عقب می‌باشند.

**توجه ۱:** از آنجا که ضریب میرایی تایر بسیار کمتر از ضریب میرایی کمک فنر تعلیق می‌باشد، از آن صرف نظر می‌شود.

### محدودیت‌های فیزیکی و الزامات طراحی:

- محدودیت انحراف در سیستم تعلیق:

$$\begin{aligned} |z_{sf}(t) - z_{uf}(t)| &\leq z_{fmax}, \\ |z_{sr}(t) - z_{ur}(t)| &\leq z_{rmax}, \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن  $z_{fmax}$  و  $z_{rmax}$  مقادیر مجاز انحراف می‌باشند.

- قابلیت ایستایی در جاده: جهت تماس مداوم چرخ‌ها با جاده باید قیدهای زیر برآورده شوند

$$|k_{tf}(z_{uf}(t) - z_{rf}(t))| \leq F_f, \quad |k_{tr}(z_{ur}(t) - z_{rr}(t))| \leq F_r, \quad (7)$$

که  $F_f$  و  $F_r$  بارهای استاتیکی تایر جلو و عقب خودرو می‌باشند و برابرند با

$$F_f + F_r = (m_s + m_{uf} + m_{ur})g, \quad F_r(l_1 + l_2) = m_s g l_1 + m_{ur} g (l_1 + l_2). \quad (8)$$

- محدودیت عملگرها: به دلیل محدودیت فیزیکی در عملگرها، سیگنال کنترلی باید شرایط زیر را برآورده سازد

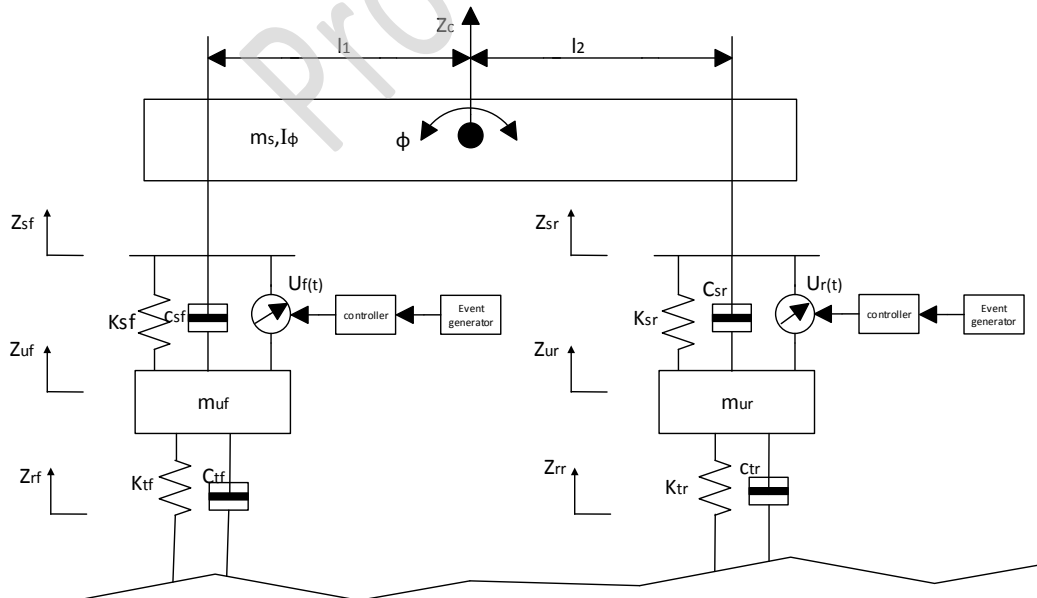
$$|u_f(t)| < u_{fmax}, \quad |u_r(t)| < u_{rmax}, \quad (9)$$

که در آن  $u_{fmax}$  و  $u_{rmax}$  حد توان عملگرهای جلو و عقب خودرو بوده و مقادیر معلومی هستند.

از طرفی، طراحی کنترل کننده به نحوی صورت می‌پذیرد که اثر اغتشاش روی متغیر برداری زیر کمینه گردد

$$\mathbf{z}_1(t) = \begin{bmatrix} \ddot{z}_c(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

که در این صورت شتاب عمودی و دورانی بدنه خودرو کمینه شده و محیط آرام تری را برای راننده نتیجه می‌دهد.



شکل ۱- مدل نیم-خودرو با چهار درجه آزادی

جدول ۱- متغیرهای حالت

شرح	متغیر حالت
انحراف سیستم تعلیق در قسمت جلو بدنه خودرو	$x_1(t) = z_{sf}(t) - z_{uf}(t)$
سرعت عمودی بدنه خودرو در قسمت جلو	$x_2(t) = \dot{z}_{sf}(t)$
انحراف سیستم تعلیق در قسمت عقب بدنه خودرو	$x_3(t) = z_{sr}(t) - z_{ur}(t)$
سرعت عمودی بدنه خودرو در قسمت عقب	$x_4(t) = \dot{z}_{sr}(t)$
انحراف تایردر قسمت جلو بدنه خودرو	$x_5(t) = z_{uf}(t) - z_{rf}(t)$
سرعت عمودی چرخ جلو	$x_6(t) = \dot{z}_{uf}(t)$
انحراف تایر در قسمت عقب بدنه خودرو	$x_7(t) = z_{ur}(t) - z_{rr}(t)$
سرعت عمودی چرخ عقب	$x_8(t) = \dot{z}_{ur}(t)$

با انتخاب متغیرهای حالت همانند آنچه در جدول (۱) آمده است، و در نظر گرفتن  $\omega(t) = [\dot{z}_{rf}(t) \ \dot{z}_{rr}(t)]^T \in L_2[0, \infty)$  به عنوان بردار اغشاش و  $\mathbf{u}(t) = [u_f(t) \ u_r(t)]^T$  به عنوان بردار کنترل، معادلات (۲) تا (۱۰) را می توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_1\omega(t), \\ \mathbf{z}_1(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_1\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{z}_2(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (11)$$

که در معادلات فوق

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -k_{sf}a_1 & -c_{sf}a_1 & -k_{sr}a_2 & -c_{sr}a_2 & 0 & c_{sf}a_1 & 0 & c_{sr}a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -k_{sf}a_2 & -c_{sf}a_2 & -k_{sr}a_3 & -c_{sr}a_3 & 0 & c_{sf}a_2 & 0 & c_{sr}a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_{sf}}{m_{uf}} & \frac{c_{sf}}{m_{uf}} & 0 & 0 & \frac{-k_{tf}}{m_{uf}} & \frac{-c_{sf}}{m_{uf}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_{sr}}{m_{ur}} & \frac{c_{sr}}{m_{ur}} & 0 & 0 & \frac{-k_{tr}}{m_{ur}} & \frac{-c_{sr}}{m_{ur}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \\ a_2 & a_3 \\ 0 & 0 \\ \frac{-1}{m_{uf}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{m_{ur}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_{fmax}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z_{rmax}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tf}}{F_f} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k_{tr}}{F_r} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_s} & \frac{1}{m_s} \\ -l_1 & l_2 \\ I_\varphi & I_\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \frac{-k_{sf}}{m_s} & \frac{-c_{sf}}{m_s} & \frac{-k_{sr}}{m_s} & \frac{-c_{sr}}{m_s} & 0 & \frac{c_{sf}}{m_s} & 0 & \frac{c_{sr}}{m_s} \\ \frac{l_1 k_{sf}}{I_\varphi} & \frac{l_1 c_{sf}}{I_\varphi} & \frac{-l_2 k_{sr}}{I_\varphi} & \frac{-l_2 c_{sr}}{I_\varphi} & 0 & \frac{-l_1 c_{sf}}{I_\varphi} & 0 & \frac{l_2 c_{sr}}{I_\varphi} \end{bmatrix},$$

$$a_1 = \frac{1}{m_s} + \frac{l_1^2}{I_\varphi}, \quad a_2 = \frac{1}{m_s} - \frac{l_1 l_2}{I_\varphi}, \quad a_3 = \frac{1}{m_s} + \frac{l_2^2}{I_\varphi}.$$

با توجه به وجود عدم قطعیت در پارامترهای سیستم، معادله فضای حالت (۱۱) با عدم قطعیت پارامتری به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \bar{\mathbf{B}}_1\omega(t), \\ \mathbf{z}_1(t) = \bar{\mathbf{C}}_1\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{D}}_1\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{z}_2(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (12)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} + \Delta\mathbf{A}(t), \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}(t), \quad \bar{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_1 + \Delta\mathbf{B}_1(t), \\ \bar{\mathbf{C}}_1 &= \mathbf{C}_1 + \Delta\mathbf{C}_1(t), \quad \bar{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{D}_1 + \Delta\mathbf{D}_1(t), \end{aligned} \quad (13)$$

می‌باشند و  $\mathbf{A}$ ،  $\mathbf{B}$ ،  $\mathbf{B}_1$ ،  $\mathbf{C}_1$  و  $\mathbf{D}_1$  ماتریس‌های نامی و معلوم بوده که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} [\Delta\mathbf{A}(t) \quad \Delta\mathbf{B}(t) \quad \Delta\mathbf{B}_1(t)] &= \mathbf{L}_1\mathbf{F}(t)[\mathbf{E}_A \quad \mathbf{E}_B \quad \mathbf{E}_{B_1}], \\ [\Delta\mathbf{C}_1(t) \quad \Delta\mathbf{D}_1(t)] &= \mathbf{L}_2\mathbf{F}(t)[\mathbf{E}_{C_1} \quad \mathbf{E}_{D_1}]. \end{aligned} \quad (14)$$

در روابط فوق، ماتریس‌های  $\mathbf{L}_1$ ،  $\mathbf{L}_2$ ،  $\mathbf{E}_A$ ،  $\mathbf{E}_B$ ،  $\mathbf{E}_{B_1}$ ،  $\mathbf{E}_{C_1}$  و  $\mathbf{E}_{D_1}$  ماتریس‌های معلوم بوده و ماتریس نامعلوم  $\mathbf{F}(t)$  شرط زیر را برآورده می‌سازد:

$$\mathbf{F}^T(t)\mathbf{F}(t) \leq \mathbf{I}. \quad (15)$$

**توجه ۲:** در ساختار عدم قطعیت بیان شده در (۱۴) که با عدم قطعیت نرم-محدود شناخته می‌شود، ماتریس‌های  $\mathbf{E}_{D_1}$ ،  $\mathbf{E}_{C_1}$ ،  $\mathbf{E}_{B_1}$ ،  $\mathbf{E}_B$ ،  $\mathbf{E}_A$ ،  $\mathbf{L}_2$ ،  $\mathbf{L}_1$ ،  $\mathbf{F}(t)$  چگونه در ماتریس‌های  $\Delta \mathbf{A}(t)$ ،  $\Delta \mathbf{B}(t)$ ،  $\Delta \mathbf{B}_1(t)$ ،  $\Delta \mathbf{C}_1(t)$  و  $\Delta \mathbf{D}_1(t)$  ظاهر می‌شوند و به نوعی ماتریس‌های وزنی هستند. با وجود چنین ماتریس‌های وزنی، عموماً می‌توان ماتریس نامعلوم  $\mathbf{F}(t)$  را در شرط (۱۵) فرض کرد. فرض می‌شود که داده‌های اندازه‌گیری شده بطور گسسته به کنترل‌کننده می‌رسند و خروجی کنترل‌کننده از یک نگهدارنده مرتبه صفر<sup>۱</sup> عبور می‌کند. در این صورت کنترل‌کننده فیدبک حالت برابر است با:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t_k h), \quad t \in [t_k h, t_{k+1} h), \quad (16)$$

که در آن ماتریس بهره فیدبک حالت  $\mathbf{K}$  باید طراحی گردد و  $h$  زمان نمونه‌برداری است. جهت کاهش تعداد داده‌های ارسالی از سنسور به کنترل‌کننده که منجر به افزایش پهنای باند شبکه ارتباطی می‌گردد، زمانی داده اندازه‌گیری شده ارسال می‌گردد که شرط زیر نقض گردد

$$\mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}(t) < \sigma \mathbf{x}^T(t_k h + jh) \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}(t_k h + jh), \quad (17)$$

که در آن  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t_k h) - \mathbf{x}(t_k h + jh)$  و  $\sigma \in [0, 1)$  دقت شود که  $\mathbf{x}(t_k h)$  آخرین داده ارسال شده و  $\mathbf{x}(t_k h + jh)$  داده اندازه‌گیری شده فعلی است. بر این اساس  $t_{k+1} h$  در (۱۶) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$t_{k+1} h = t_k h + \inf_{j \geq 1} \{jh \mid \mathbf{e}^T(t) \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}(t) > \sigma \mathbf{x}^T(t_k h + jh) \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}(t_k h + jh)\}.$$

**توجه ۳:** شرط (۱۷) را شاخص وقوع-تحریک گویند و در آن هرچه  $\sigma$  به مقدار واحد نزدیکتر انتخاب شود، مقدار خطای بیشتری قابل انتظار بوده و تعداد داده‌های ارسالی از طریق کانال ارتباطی کاهش خواهد یافت. بطور عکس اگر  $\sigma = 0$  انتخاب شود آنگاه مساله به شرایط ارتباط زمان-پیوسته تبدیل می‌گردد.

با تعریف  $d(t) = t - t_k h - jh$  به عنوان تاخیر متغیر با زمان، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{x}(t_k h) = \mathbf{x}(t - d(t)) + \mathbf{e}(t)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{x}(t - d(t)) + \mathbf{e}(t)). \quad (18)$$

با جایگزینی (۱۸) در (۱۲)، معادله فضای حالت حلقه بسته به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}\mathbf{x}(t - d(t)) + \bar{\mathbf{B}}_1 \boldsymbol{\omega}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}\mathbf{e}(t), \\ \mathbf{z}_1(t) = \bar{\mathbf{C}}_1 \mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{D}}_1 \mathbf{K}\mathbf{x}(t - d(t)) + \bar{\mathbf{D}}_1 \mathbf{K}\mathbf{e}(t), \\ \mathbf{z}_2(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (19)$$

بنابراین، تعریف مساله بصورت زیر جمع‌بندی می‌شود.

<sup>1</sup> Zero-Order-Hold

**تعریف مساله:** طراحی ماتریس بهره کنترل کننده  $\mathbf{K}$  به نحوی که

(۱) سیستم حلقه بسته (۱۹) با  $\omega(t) = 0$  پایدار مجانبی باشد،

(۲) تحت شرایط اولیه صفر، برای هر  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$  شاخص کارایی

$$\|\mathbf{z}_1\|_2 < \gamma \|\omega\|_2, \quad (20)$$

برآورده شود که در آن  $\gamma > 0$  سطح کارایی مورد انتظار است،

(۳) قیدهای فیزیکی (۶) و (۷) برآورده شوند که معادل هستند با

$$|\{z_2(t)\}_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (21)$$

(۴) قیدهای (۹) تعریف شده روی عملگرها برآورده شوند که معادل هستند با

$$|\{\mathbf{u}(t)\}_1| < u_{\text{fmax}}, \quad |\{\mathbf{u}(t)\}_2| < u_{\text{rmax}}. \quad (22)$$

جهت اثبات قضایای فصل بعد از لم‌های زیر استفاده خواهد شد. برای سادگی در بیان روابط،  $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$  یک ماتریس سطری است که تمام درایه‌های آن صفر بوده و تنها درایه  $i$  ام برابر یک می باشد. همچنین  $\{\mathbf{u}(t)\}_i = \bar{\mathbf{F}}_i \mathbf{K} \mathbf{x}(t)$  و  $i = 1, \dots, 4$  برای  $\{z_2(t)\}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{C}_2 \mathbf{x}(t)$  در این صورت  $\bar{\mathbf{F}}_2 = [0 \ 1]$  و  $\bar{\mathbf{F}}_1 = [1 \ 0]$  برای  $i = 1, 2$  می باشد.

**لم ۱ ([۲۹]):** برای هر ماتریس  $\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S} \\ * & \mathbf{M} \end{bmatrix} \geq 0$ ، اسکالرهای  $\tau \geq 0$ ،  $\tau(t) \geq 0$ ،  $0 < \tau(t) \leq \tau$  و تابع برداری

$\mathbf{z}(t + \cdot) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  بنحوی که انتگرال‌های بیان شده خوش تعریف باشند، آنگاه

$$-\tau \int_{t-\tau}^t \dot{\mathbf{z}}^T(\alpha) \mathbf{M} \dot{\mathbf{z}}(\alpha) d\alpha \leq \zeta^T(t) \Psi \zeta(t),$$

که در آن  $\zeta(t) = [\mathbf{x}^T(t), \mathbf{x}^T(t - \tau(t)), \mathbf{x}^T(t - \tau)]^T$  و

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{M} - \mathbf{S} & \mathbf{S} \\ * & -2\mathbf{M} + \mathbf{S} + \mathbf{S}^T & -\mathbf{S} + \mathbf{M} \\ * & * & -\mathbf{M} \end{bmatrix}.$$

**لم ۲ ([۳۰]):** فرض کنید که ماتریس‌های  $\Psi = \Psi^T$ ،  $\mathbf{U}$  و  $\mathbf{V}$  معلوم باشند. در صورتی که  $\mathbf{F}^T(t) \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{I}$  نامساوی

نامساوی

$$\Psi + \mathbf{U} \mathbf{F}(t) \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{F}^T(t) \mathbf{U}^T < 0,$$

برقرار است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد  $\delta > 0$  بنحوی که

$$\Psi + \delta \mathbf{U} \mathbf{U}^T + \delta^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{V} < 0.$$



لم ۳ (مکمل شور): برای ماتریس داده شده  $S = S^T = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ * & S_{22} \end{bmatrix}$  که در آن  $S_{11} \in R^{r \times r}$ ، عبارات زیر

صادق و برابر می‌باشند:

$$\begin{aligned} S &< 0 \\ S_{11} &< 0, \quad S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0 \\ S_{22} &< 0, \quad S_{11} - S_{12}^T S_{22}^{-1} S_{12} < 0 \end{aligned}$$

### ۳- طراحی کنترل کننده بر مبنای وقوع-تحریک

در ادامه قضایی ارائه و اثبات می‌شوند که علاوه بر تضمین پایداری سیستم حلقه بسته (۱۹)، الزامات طراحی و قیدهای مطرح شده را نیز برآورده می‌کنند.

قضیه ۱: برای مقادیر اسکالر داده شده  $h, \gamma, \sigma, \vartheta$ ، و ماتریس بهره کنترل کننده  $K$ ، سیستم حلقه بسته (۱۹) برای  $\omega(t) = 0$  پایدار مجانبی بوده و شاخص کارایی (۲۰)، و همچنین قیدهای (۲۱) و (۲۲) را برای  $\|\omega\|_2 \leq \omega_{\max} = \sqrt{(\vartheta - V(0))} / \gamma$  برآورده می‌سازد، اگر ماتریس‌های متقارن مثبت معین  $P > 0$  و  $Q > 0$  و هر ماتریس  $S$  با ابعاد مناسب وجود داشته باشند که نامساوی‌های ماتریسی زیر را برآورده سازند:

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & S & \bar{P}BK & h\bar{A}^T P \\ * & \bar{E}_{22} & -S + P & 0 & hK^T \bar{B}^T P \\ * & * & -Q - P & 0 & 0 \\ * & * & * & -\Omega & hK^T \bar{B}^T P \\ * & * & * & * & -P \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & S & \bar{P}B_1 & \bar{P}BK & h\bar{A}^T P & \bar{C}_1^T \\ * & \bar{E}_{22} & -S + P & 0 & 0 & hK^T \bar{B}^T P & K^T \bar{D}_1^T \\ * & * & -Q - P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 & h\bar{B}_1^T P & 0 \\ * & * & * & * & -\Omega & hK^T \bar{B}^T P & K^T \bar{D}_1^T \\ * & * & * & * & * & -P & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} -P & \sqrt{\vartheta} C_2^T F_i^T \\ * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} -u_f^2 \max P & \sqrt{\vartheta} K^T \bar{F}_1^T \\ * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -u_r^2 \max P & \sqrt{\vartheta} K^T \bar{F}_2^T \\ * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{S} \\ * & \mathbf{P} \end{bmatrix} > 0, \quad (27)$$

که در آن  $\bar{\mathbf{E}}_{11} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}$ ،  $\bar{\mathbf{E}}_{12} = \mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{K} + \mathbf{P} - \mathbf{S}$ ، و  $\bar{\mathbf{E}}_{22} = -2\mathbf{P} + \mathbf{S} + \mathbf{S}^T + \sigma\boldsymbol{\Omega}$  می‌باشد.

اثبات: کاندید تابع لیاپانوف را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t) + \int_{t-h}^t \mathbf{x}^T(s)\mathbf{Q}\mathbf{x}(s)ds + h \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(s)dsd\theta. \quad (28)$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا و در نظر گرفتن نامساوی (۱۷) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-h)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t-h) + h^2\dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad - h \int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(s)ds - \mathbf{e}^T(t)\boldsymbol{\Omega}\mathbf{e}(t) + \sigma\mathbf{x}^T(t-d(t))\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}(t-d(t)). \end{aligned} \quad (29)$$

با در نظر گرفتن  $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$  و قراردادن  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  از معادلات حلقه بسته (۱۹) در رابطه بالا و استفاده از لم ۱ می‌توان به معادلات جمع‌بندی شده زیر رسید

$$\dot{V}(t) \leq \boldsymbol{\zeta}^T(t)\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\zeta}(t), \quad (30)$$

که در آن  $\boldsymbol{\zeta}(t) = \text{col}\{\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-d(t)), \mathbf{x}(t-h), \mathbf{e}(t)\}$  و

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{11} & \bar{\mathbf{E}}_{12} & \mathbf{S} & \mathbf{P}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{K} \\ * & \bar{\mathbf{E}}_{22} & -\mathbf{S} + \mathbf{P} & 0 \\ * & * & -\mathbf{Q} - \mathbf{P} & 0 \\ * & * & * & -\boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} + h^2\bar{\mathbf{S}}_1^T \mathbf{P}\bar{\mathbf{S}}_1,$$

بوده،  $\bar{\mathbf{S}}_1 = [\bar{\mathbf{A}} \quad \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K} \quad 0 \quad \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}]$ ،  $\bar{\mathbf{E}}_{11}$ ،  $\bar{\mathbf{E}}_{12}$ ،  $\bar{\mathbf{E}}_{22}$  در (۲۳) تعریف شده‌اند. در صورتی که  $\boldsymbol{\Pi} < 0$  باشد آنگاه سیستم حلقه بسته (۱۹) با شرایط  $\boldsymbol{\omega}(t) = 0$  پایدار مجانبی است. با استفاده از لم ۳ به سادگی می‌توان نشان داد که  $\boldsymbol{\Pi} < 0$  در رابطه بالا معادل با (۲۳) است.

حال با افزودن رابطه  $\mathbf{z}_1^T(t)\mathbf{z}_1(t) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^T(t)\boldsymbol{\omega}(t)$  به طرفین رابطه (۲۹) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) + \mathbf{z}_1^T(t)\mathbf{z}_1(t) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^T(t)\boldsymbol{\omega}(t) &\leq 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \\ &\quad - \mathbf{x}^T(t-h)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t-h) + h^2\dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) - h \int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s)\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(s)ds \\ &\quad + \mathbf{z}_1^T(t)\mathbf{z}_1(t) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^T(t)\boldsymbol{\omega}(t) - \mathbf{e}^T(t)\boldsymbol{\Omega}\mathbf{e}(t) + \sigma\mathbf{x}^T(t-d(t))\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}(t-d(t)). \end{aligned} \quad (31)$$

با قراردادن  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  از معادلات حلقه بسته (۱۹) در رابطه بالا و استفاده از لم ۱ می‌توان به معادلات جمع‌بندی شده زیر رسید:

$$\dot{V}(t) + \mathbf{z}_1^T(t)\mathbf{z}_1(t) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^T(t)\boldsymbol{\omega}(t) \leq \boldsymbol{\xi}^T(t)\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\xi}(t), \quad (32)$$

که در آن  $\xi(t) = \text{col}\{x(t), x(t-d(t)), x(t-h), \omega(t), e(t)\}$  و

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11} & \bar{\Xi}_{12} & S & P\bar{B}_1 & P\bar{B}K \\ * & \bar{\Xi}_{22} & -S+P & 0 & 0 \\ * & * & -Q-P & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -\Omega \end{bmatrix} + h^2 S_1^T P S_1 + S_2^T S_2,$$

و  $S_2 = [\bar{C}_1 \quad \bar{D}_1 K \quad 0 \quad 0 \quad \bar{D}_1 K]$ ،  $S_1 = [\bar{A} \quad \bar{B}K \quad 0 \quad \bar{B}_1 \quad \bar{B}K]$  و  $\bar{\Xi}_{11}$ ،  $\bar{\Xi}_{12}$ ،  $\bar{\Xi}_{22}$  در (۲۳) تعریف شده‌اند. در صورتی که بتوان نشان داد  $\Sigma < 0$  است آنگاه رابطه (۳۲) برابر خواهد بود با

$$\dot{V}(t) + z_1^T(t)z_1(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) < 0, \quad (33)$$

که با انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه از 0 تا  $\infty$  با فرض شرایط اولیه صفر می‌توان نوشت

$$\int_0^\infty z_1^T(t)z_1(t)dt < \int_0^\infty \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)dt, \quad (34)$$

که نشان می‌دهد شاخص کارایی (۲۰) برآورده می‌شود. با استفاده از لم ۳ می‌توان نشان داد که  $\Sigma < 0$  معادل است با شرط (۲۴). از طرفی مشخص است که رابطه (۳۳) تضمین می‌کند که

$$\dot{V}(t) < \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t). \quad (35)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه بالا از 0 تا  $t$  داریم

$$V(t) - V(0) < \gamma^2 \int_0^t \omega^T(t)\omega(t)dt \leq \gamma^2 \omega_{\max}, \quad (36)$$

که در آن  $\omega_{\max} = \|\omega\|_2^2$ . با توجه به مثبت بودن تمام عبارت‌های  $V(t)$  در رابطه (۲۸) می‌توان نوشت

$$x^T(t)Px(t) < V(0) + \gamma^2 \omega_{\max} = \mathcal{G}. \quad (37)$$

با استفاده از تبدیل  $\bar{x}(t) = P^{\frac{1}{2}}x(t)$ ، از رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت که  $\bar{x}^T(t)\bar{x}(t) \leq \mathcal{G}$ . در نتیجه

$$\max_{t \geq 0} \{z_2(t)\}_i^2 = \max_{t \geq 0} \|F_i C_2 x(t)\|_2^2 \leq \mathcal{G} \lambda_{\max}(P^{-\frac{1}{2}} C_2^T F_i^T F_i C_2 P^{-\frac{1}{2}}), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (38)$$

بنابراین، قیدهای (۲۱) برقرار هستند اگر رابطه زیر برقرار باشد

$$\mathcal{G} P^{-\frac{1}{2}} C_2^T F_i^T F_i C_2 P^{-\frac{1}{2}} < I, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (39)$$

با ضرب رابطه بالا در  $P^{\frac{1}{2}}$  از چپ و راست و استفاده از لم ۳ می‌توان نشان داد که شرط (۳۹) معادل است با (۲۵). بطور مشابه می‌توان نشان داد که قیدهای (۲۲) با شرایط (۲۶) معادل هستند.

در اینجا اثبات به پایان می‌رسد. در صورتی که بهره کنترل‌کننده  $\mathbf{K}$  در شرایط قضیه ۱ متغیر در نظر گرفته شود آنگاه نامساوی‌های ارائه شده در آن به صورت غیرخطی ظاهر می‌شوند. در نتیجه، شرایط ارائه شده در قضیه ۱ مناسب طراحی نمی‌باشند. از این رو، قضیه زیر برای بدست آوردن بهره پایدارساز  $\mathbf{K}$  ارائه می‌گردد.

**قضیه ۲:** برای مقادیر اسکالر داده شده  $h, \gamma, \sigma, \vartheta$ ، سیستم حلقه بسته (۱۹) برای  $\omega(t) = 0$  پایدار مجانبی بوده و شاخص کارایی (۲۰)، و همچنین قیده‌های (۲۱) و (۲۲) را برای  $\|\omega\|_2 \leq \omega_{\max} = \sqrt{(\vartheta - V(0)) / \gamma}$  برآورده می‌سازد، اگر ماتریس‌های متقارن مثبت معین  $\mathbf{X} > 0$  و  $\bar{\mathbf{Q}} > 0$  و هر ماتریس  $\bar{\mathbf{S}}$  با ابعاد مناسب وجود داشته باشند که نامساوی‌های ماتریسی زیر را برآورده سازند:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{11} & \bar{\mathbf{E}}_{12} & \bar{\mathbf{S}} & \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}} & h\mathbf{X}\bar{\mathbf{A}}^T \\ * & \bar{\mathbf{E}}_{22} & -\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X} & 0 & h\bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{B}}^T \\ * & * & -\bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{X} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{\mathbf{Q}} & h\bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{B}}^T \\ * & * & * & * & -\mathbf{X} \end{bmatrix} < 0, \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{E}}_{11} & \bar{\mathbf{E}}_{12} & \bar{\mathbf{S}} & \bar{\mathbf{B}}_1 & \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}} & h\mathbf{X}\bar{\mathbf{A}}^T & \mathbf{X}\bar{\mathbf{C}}_1^T \\ * & \bar{\mathbf{E}}_{22} & -\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X} & 0 & 0 & h\bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{D}}_1^T \\ * & * & -\bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} & 0 & h\bar{\mathbf{B}}_1^T & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\mathbf{Q}} & h\bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{D}}_1^T \\ * & * & * & * & * & -\mathbf{X} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X} & \sqrt{\vartheta} \mathbf{X} \bar{\mathbf{C}}_2^T \mathbf{F}_i^T \\ * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (42)$$

$$\begin{bmatrix} -u_f^2 \max \mathbf{X} & \sqrt{\vartheta} \bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{F}}_1^T \\ * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -u_r^2 \max \mathbf{X} & \sqrt{\vartheta} \bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{F}}_2^T \\ * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \bar{\mathbf{S}} \\ * & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0, \quad (44)$$

که در آن  $\bar{\mathbf{E}}_{22} = -2\mathbf{X} + \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}}^T + \sigma\bar{\mathbf{Q}}$  و  $\bar{\mathbf{E}}_{12} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}} + \mathbf{X} - \bar{\mathbf{S}}$ ،  $\bar{\mathbf{E}}_{11} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \mathbf{X}\bar{\mathbf{A}}^T + \bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{X}$  بر این در صورتی که شرایط بالا دارای پاسخ باشند آن گاه

$$\mathbf{K} = \mathbf{X}^{-1} \bar{\mathbf{K}}. \quad (45)$$

اثبات: با پیش ضرب و پس ضرب کردن  $\text{diag}\{\mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}\}$  در (۲۳)،  $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P}^{-1}$  جایگذاری و در (۲۴) و  $\text{diag}\{\mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{P}^{-1}, \mathbf{I}\}$  در (۲۵)–(۲۷)، و جایگذاری  $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1}$ ،  $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}$  و  $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \mathbf{P}^{-1}$  در آنها شرایط (۴۰)–(۴۴) بدست می‌آیند. □

**توجه ۴:** شرایط ارائه شده در قضیه ۲ برای سیستم بدون عدم قطعیت با جایگذاری  $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ ،  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$ ،  $\bar{\mathbf{D}}_1 = \mathbf{D}_1$ ،  $\bar{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{C}_1$ ،  $\bar{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_1$  بطور مستقیم قابل استفاده می‌باشند. در این صورت شرایط ارائه شده در قضیه ۲ بصورت نامساوی‌های ماتریسی خطی بوده و توسط روش‌های حل عددی استاندارد قابل حل می‌باشند.

تنها مساله باقیمانده، وجود عدم قطعیت در ماتریس‌های سیستم در شرایط ارائه شده در قضیه ۲ است. این عدم قطعیت‌ها در شرایط ارائه شده در قضیه زیر حذف شده‌اند.

**قضیه ۳:** برای مقادیر اسکالر داده شده  $h$ ،  $\gamma$ ،  $\sigma$ ،  $\vartheta$ ، سیستم حلقه بسته (۱۹) برای  $\omega(t) = 0$  پایدار مجانبی بوده و شاخص کارایی (۲۰)، و همچنین قیده‌های (۲۱) و (۲۲) را برای  $\|\omega\|_2 \leq \omega_{\max} = \sqrt{(\vartheta - V(0))} / \gamma$  برآورده می‌سازد، اگر اسکالره‌های مثبت  $\delta_1 > 0$ ،  $\delta_2 > 0$ ،  $\delta_3 > 0$ ، ماتریس‌های متقارن مثبت معین  $\bar{\mathbf{Q}} > 0$  و  $\bar{\mathbf{X}} > 0$  و هر ماتریس  $\bar{\mathbf{S}}$  با ابعاد مناسب وجود داشته باشند که نامساوی‌های ماتریسی خطی زیر را برآورده سازند:

$$\begin{bmatrix} \hat{\Xi}_{11} & \hat{\Xi}_{12} & \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}} & \hat{\Xi}_{15} & \mathbf{X}\mathbf{E}_B^T \\ * & \hat{\Xi}_{22} & -\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{X}} & 0 & h\bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}^T & \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{E}_B^T \\ * & * & -\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{X}} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{\mathbf{Q}} & h\bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}^T & \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{E}_B^T \\ * & * & * & * & \hat{\Xi}_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\delta_1 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (46)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{11} & \tilde{\Xi}_{12} & \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}} & \tilde{\Xi}_{16} & \mathbf{X}\mathbf{C}_1^T & \mathbf{X}\mathbf{E}_A^T & \mathbf{X}\mathbf{E}_{C_1}^T \\ * & \tilde{\Xi}_{22} & -\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{X}} & 0 & 0 & h\bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}^T & \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{D}_1^T & \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{E}_B^T & \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{E}_{D_1}^T \\ * & * & -\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{X}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 \mathbf{I} & 0 & h\mathbf{B}_1^T & 0 & \mathbf{E}_{B_1}^T & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\mathbf{Q}} & h\bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}^T & \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{D}_1^T & \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{E}_B^T & \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{E}_{D_1}^T \\ * & * & * & * & * & \tilde{\Xi}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \tilde{\Xi}_{77} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\delta_2 \mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\delta_3 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (47)$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{\mathbf{X}} & \sqrt{\vartheta} \mathbf{X} \mathbf{C}_2^T \mathbf{F}_i^T \\ * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} -u_{f \max}^2 \mathbf{X} & \sqrt{g} \bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{F}}_1^T \\ * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -u_{r \max}^2 \mathbf{X} & \sqrt{g} \bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{F}}_2^T \\ * & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \bar{\mathbf{S}} \\ * & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0, \quad (50)$$

که در آن  $\hat{\mathbf{E}}_{22} = -2\mathbf{X} + \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}}^T + \sigma \bar{\mathbf{Q}}$  و  $\hat{\mathbf{E}}_{12} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}} + \mathbf{X} - \bar{\mathbf{S}}$ ،  $\hat{\mathbf{E}}_{11} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{X} + \delta_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T$ ،  $\hat{\mathbf{E}}_{15} = h\mathbf{X}\mathbf{A}^T + \delta_1 h \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T$ ،  $\hat{\mathbf{E}}_{55} = -\mathbf{X} + \delta_1 h^2 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T$ ،  $\hat{\mathbf{E}}_{11} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{X} + \delta_2 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T$ ،  $\hat{\mathbf{E}}_{66} = -\mathbf{X} + \delta_2 h^2 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T$ ،  $\hat{\mathbf{E}}_{16} = h\mathbf{X}\bar{\mathbf{A}}^T + \delta_2 h \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_1^T$ ،  $\hat{\mathbf{E}}_{77} = -\mathbf{I} + \delta_3 h^2 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_2^T$  می‌باشد. علاوه بر این، در صورتی که شرایط بالا دارای پاسخ باشند آنگاه

$$\mathbf{K} = \mathbf{X}^{-1} \bar{\mathbf{K}}. \quad (51)$$

اثبات: نامساوی (۴۰) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}} & h\mathbf{X}\mathbf{A}^T \\ * & \Sigma_{22} & -\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X} & 0 & h\bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}^T \\ * & * & -\bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{X} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{\mathbf{Q}} & h\bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}^T \\ * & * & * & * & -\mathbf{X} \end{bmatrix} + \mathbf{U}\mathbf{F}(t)\mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{F}^T(t)\mathbf{U}^T < 0, \quad (52)$$

که در آن  $\mathbf{U} = [\mathbf{L}_1^T, 0, 0, 0, h\mathbf{L}_1^T]$ ،  $\mathbf{V} = [\mathbf{E}_A \mathbf{X}, \mathbf{E}_B \bar{\mathbf{K}}, 0, \mathbf{E}_B \bar{\mathbf{K}}, 0]$ ،  $\Sigma_{11} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{X}$  و  $\Sigma_{12} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}} + \mathbf{X} - \bar{\mathbf{S}}$ ،  $\Sigma_{22} = -2\mathbf{X} + \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}}^T + \sigma \bar{\mathbf{Q}}$  بر اساس لم ۲، رابطه (۵۲) معادل است با

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \bar{\mathbf{S}} & \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}} & h\mathbf{X}\mathbf{A}^T \\ * & \Sigma_{22} & -\bar{\mathbf{S}} + \mathbf{X} & 0 & h\bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}^T \\ * & * & -\bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{X} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{\mathbf{Q}} & h\bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{B}^T \\ * & * & * & * & -\mathbf{X} \end{bmatrix} + \delta_1 \mathbf{U}\mathbf{U}^T + \delta_1^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{V} < 0. \quad (53)$$

با استفاده از لم ۳ می‌توان نشان داد که (۵۳) معادل است با (۴۶). به روشی مشابه می‌توان نشان داد که (۴۱) معادل است با (۴۷). بدین ترتیب قضیه اثبات شد.

#### ۴- شبیه‌سازی

سیستم (۱۹) با پارامترهای داده شده در جدول (۲) را در نظر بگیرید [۳۱]. با استفاده از مقادیر جدول (۲) و روابط (۸) مقادیر  $F_f = 4014.5 \text{ N}$  و  $F_r = 3580.5 \text{ N}$  محاسبه می‌شوند. مقادیر  $z_{f \max} = z_{r \max} = 0.08 \text{ m}$  و  $u_{f \max} = u_{r \max} = 1500 \text{ N}$  با توجه به محدودیت‌های فیزیکی سیستم تعلیق در نظر گرفته شده‌اند.

اغتشاش استاندارد مطابقت با شکل (۲) به چرخ جلو اعمال می‌گردد که با در نظر گرفتن سرعت 100 km/h و فاصله  $l_1 + l_2 = 2.7$  m محورها نسبت به هم، با اختلاف زمانی 0.1 s به چرخ عقب اعمال می‌شود. سیستم را بدون عدم قطعیت در نظر می‌گیریم. با استفاده از قضیه ۲ (و توجه ۴)، دو بهره فیدبک حالت با مقادیر زیر را بدست می‌آوریم:

$$(۱) \text{ در نظر گرفتن } \sigma = 0.1 \text{ و } \gamma_{\min} = 13.2:$$

$$\mathbf{K} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 21.331 & -21.312 & 105.670 & 2.330 & 84.746 & -0.204 & 106.900 & 0.59 \\ -34.997 & -0.842 & -24.983 & -20.678 & -35.474 & -0.027 & 38.073 & -0.273 \end{bmatrix},$$

$$(۲) \text{ در نظر گرفتن } \sigma = 0.9 \text{ و } \gamma_{\min} = 15.2:$$

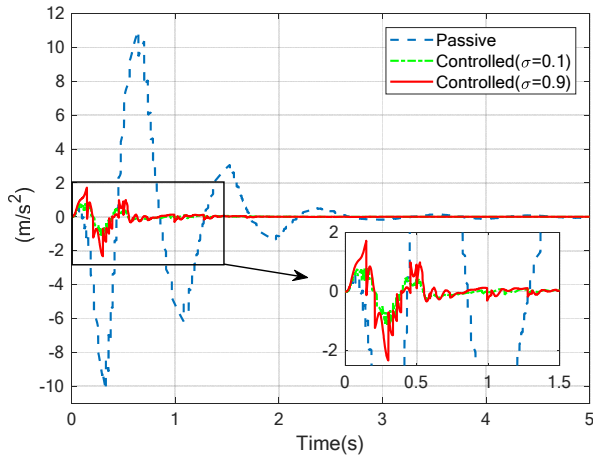
$$\mathbf{K} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 2.596 & -15.568 & 54.302 & -0.630 & 70.182 & 0.607 & 52.567 & -0.103 \\ -30.761 & -1.755 & 3.128 & -16.114 & -32.360 & -0.143 & 69.344 & 0.340 \end{bmatrix}.$$

با اعمال هر دو کنترل کننده طراحی شده به سیستم مورد نظر، نتایج بدست آمده با حالت بدون کنترل (سیستم غیرفعال) در شکل‌های (۳)-(۶) مقایسه شده‌اند. همانطور که در شکل‌های (۳) و (۴) مشخص است، کنترل کننده‌های طراحی شده توانسته‌اند شتاب مرکز جرم خودرو و شتاب زاویه‌ای پیچش خودرو را بطور قابل ملاحظه‌ای کاهش دهند.

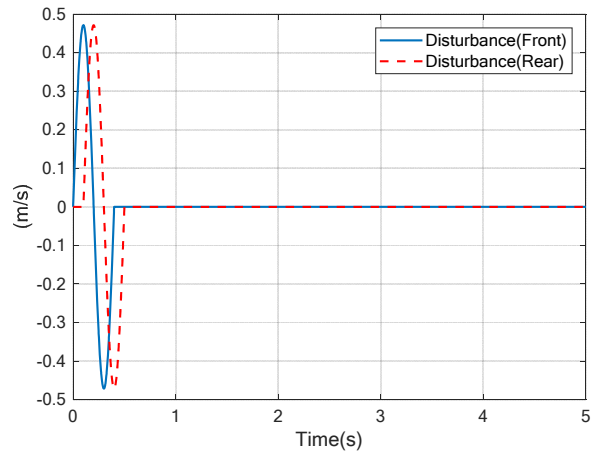
نتایج بدست آمده از کنترل کننده اول (با  $\sigma = 0.1$ ) کارآیی بهتری نسبت به کنترل کننده دوم را نشان می‌دهد که کاملاً منطقی است زیرا هرچه  $\sigma$  کوچکتر انتخاب شود به شرایط ارسال داده بطور پیوسته نزدیکتر می‌شویم (توجه ۳). در شکل (۸) مشخص است که تعداد داده‌های ارسالی توسط کنترل کننده دوم بسیار کمتر است و اگر دقیقتر بررسی کنیم، تعداد داده‌های ارسالی در کنترل کننده اول برابر ۱۷۹ داده و تعداد آنها در کنترل کننده دوم برابر ۷۲ عدد است که در مقایسه با ۵۰۰۰ نمونه در مدت زمان شبیه‌سازی می‌توان گفت که نسبت داده‌های ارسالی به کل داده‌های شبیه‌سازی در کنترل کننده اول و دوم به ترتیب برابر است با 3.58% و 1.44%. این مساله نشان می‌دهد که پهنای باند سیستم ارتباطی به میزان بسیار زیادی افزایش یافته است. علاوه بر این با توجه به شکل‌های (۵)-(۷) مشخص است که قیدهای مورد نظر بطور کامل رعایت شده‌اند.

## جدول ۲- پارامترهای مدل خودرو [۳۱]

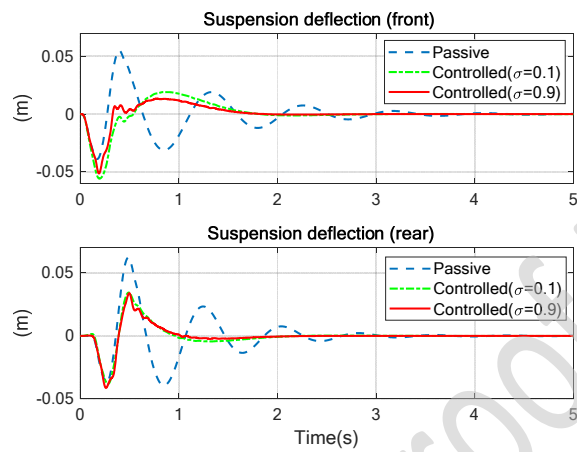
مقدار	متغیر	مقدار	متغیر
1222 kgm <sup>2</sup>	$I_\phi$	690 kg	$m_s$
45 kg	$m_{ur}$	40 kg	$m_{if}$
22000 N/m	$k_{sr}$	18000 N/m	$k_{sf}$
200000 N/m	$k_{tr}$	200000 N/m	$k_{tf}$
1000 Ns/m	$c_{sr}$	1000 Ns/m	$c_{sf}$
1.5 m	$l_2$	1.3 m	$l_1$



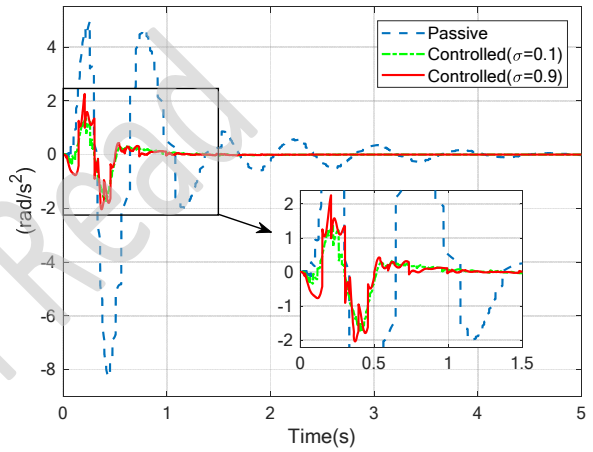
شکل ۳- شتاب مرکز جرم خودرو



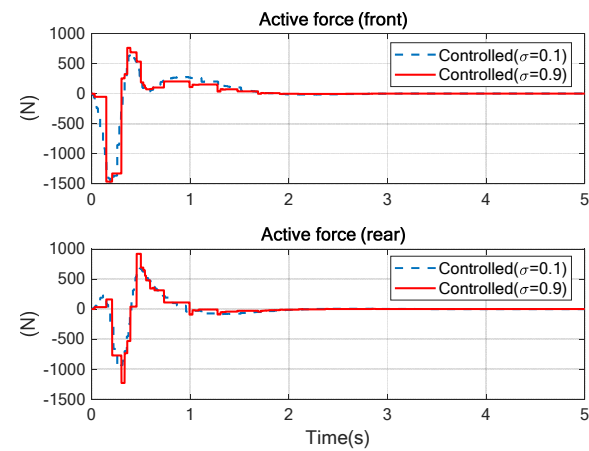
شکل ۲- اغتشاش اعمال شده به چرخ‌های خودرو



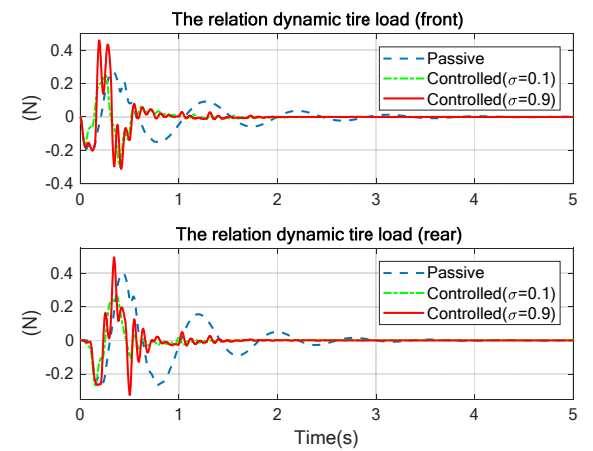
شکل ۵- میزان انحراف سیستم تعلیق چرخ‌های عقب و جلو



شکل ۴- شتاب زاویه ای پیچش خودرو

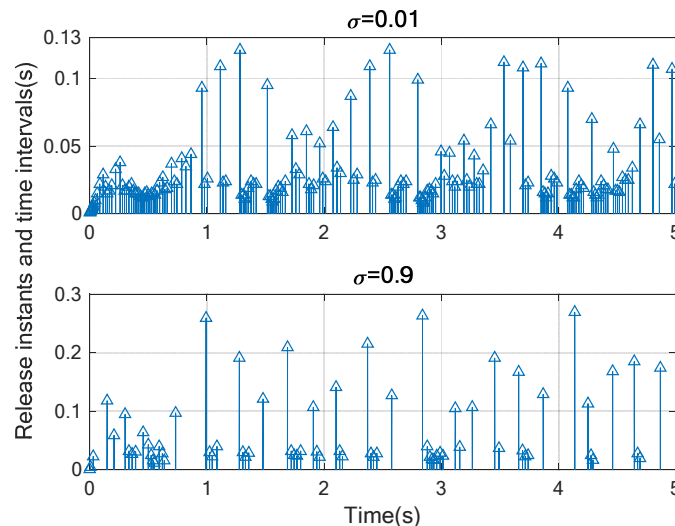


شکل ۷- نیروی تولید شده توسط عملگرها



شکل ۶- بار استاتیکی تایرهای عقب و جلو





شکل ۸- لحظات ارسال داده و فاصله زمانی بین آنها

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله روشی برای کنترل فعال سیستم تعلیق نیم-خودرو با در نظر گرفتن عدم قطعیت‌های پارامتری و مکانیزم وقوع-تحریک ارائه گردید. بدین منظور، با ارائه معادلات دینامیکی خودرو، ارائه مکانیزم وقوع-تحریک برای ارسال اطلاعات سنسور به کنترل کننده، بیان قیدهای فیزیکی حاکم بر سیستم، و معرفی عدم قطعیت‌های پارامتری، مساله فرمول‌بندی شد. پس از آن شرایطی اثبات و ارائه شدند که پایداری و کارایی سیستم تحت کنترل را تضمین می‌کنند. این شرایط با استفاده از قضیه لیاپانوف-کراسووسکی بدست آمدند و در قالب نامساوی‌های ماتریسی خطی ارائه شدند. در پایان، با بررسی یک سیستم تعلیق نمونه، کارایی کنترل کننده‌های طراحی شده مورد مطالعه قرار گرفتند. در شبیه‌سازی‌ها نشان داده شد که کاهش تعداد ارسال اطلاعات سنسور به کنترل کننده باعث کاهش کارایی می‌شود اما مقدار آن زیاد نیست. در مقابل، پهنای باند شبکه افزایش می‌یابد که با مقایسه میزان کاهش کارایی مزیت بیشتری دارد.

## مراجع

- [1] Goodarzi, A., and Khajepour, A., "Vehicle Suspension System Technology and Design", Synthesis Lectures on Advances in Automotive Technology, Vol. 1, No. 1, pp. i-77, (2017).
- [2] Asadi, E., Ribeiro, R., Khamesee, M. B., and Khajepour, A., "Analysis, Prototyping, and Experimental Characterization of an Adaptive Hybrid Electromagnetic Damper for Automotive Suspension Systems", IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 66, No. 5, pp. 3703-3713, (2016).
- [3] Sun, W., Gao, H., and Shi, P., "Advanced Control for Vehicle Active Suspension Systems", Springer, (2020).

- [4] Pan, H., Sun, W., Jing, X., Gao, H., and Yao, J., "Adaptive Tracking Control for Active Suspension Systems with Non-ideal Actuators", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 399, pp. 2-20, (2017).
- [5] Wang, G., Chen, C., and Yu, S., "Robust Non-fragile Finite-frequency  $H_\infty$  Static Output-Feedback Control for Active Suspension Systems", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 91, pp. 41-56, (2017).
- [6] Arana, C., Evangelou, S. A., and Dini, D., "Series Active Variable Geometry Suspension Application to Comfort Enhancement", *Control Engineering Practice*, Vol. 59, pp. 111-126, (2017).
- [7] Hofmann, A., and Hanss, M., "Fuzzy Arithmetical Controller Design for Active Road Vehicle Suspension in the Presence of Uncertainties", in *22<sup>nd</sup> International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, Miedzydroje, Poland, pp. 582-587, (2017).
- [8] Tang, X., Du, H., Sun, S., Ning, D., Xing, Z., and Li, W., "Takagi–Sugeno Fuzzy Control for Semi-active Vehicle Suspension with a Magnetorheological Damper and Experimental Validation", *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, Vol. 22, No. 1, pp. 291-300, (2017).
- [9] Su, X., "Master–slave Control for Active Suspension Systems with Hydraulic Actuator Dynamics", *IEEE Access*, Vol. 5, pp. 3612-3621, (2017).
- [10] Wen, S., Chen, M. Z., Zeng, Z., Yu, X., and Huang, T., "Fuzzy Control for Uncertain Vehicle Active Suspension Systems via Dynamic Sliding-mode Approach", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, Vol. 47, No. 1, pp. 24-32, (2017).
- [11] Jing, H., Wang, R., Li, C., and Bao, J., "Robust Finite-frequency  $H_\infty$  Control of Full-car Active Suspension", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 441, pp. 221-239, (2019).
- [12] Ataei, M., Asadi, E., Goodarzi, A., Khajepour, A., and Khamesee, M. B., "Multi-objective Optimization of a Hybrid Electromagnetic Suspension System for Ride Comfort, Road Holding and Regenerated Power", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 23, No. 5, pp. 782-793, (2017).
- [13] Bender, E., "Optimum Linear Preview Control with Application to Vehicle Suspension", *Journal of Basic Engineering*, Vol. 90, No. 2, pp. 213-221, (1968).
- [14] Thompson, A., Davis, B., and Pearce, C., "An Optimal Linear Active Suspension with Finite Road Preview", *SAE Transactions*, Vol. 89, pp. 2009-2020, (1980).
- [15] Sakami, M., Kamiya, J., and Shimogo, T., "Optimal Preview Control of Vehicle Suspension", *Bulletin of JSME*, Vol. 19, No. 129, pp. 265-273, (1976).
- [16] Du, H., and Zhang, N., " $H_\infty$  Control of Active Vehicle Suspensions with Actuator Time Delay", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 301, No. 1-2, pp. 236-252, (2007).

- [17] Guclu, R., "Fuzzy Logic Control of Seat Vibrations of a Non-linear Full Vehicle Model", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 40, No. 1, pp. 21-34, (2005).
- [18] Liu, Y. J., and Chen, H., "Adaptive Sliding Mode Control for Uncertain Active Suspension Systems with Prescribed Performance", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, Early Access, (2020).
- [19] Wang, G., Liu, F., and Sun, Z., "Saturated Adaptive Backstepping Control for Uncertain Nonlinear Active Suspension Systems with Prescribed Performance", in *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC2019)*, Singapore, pp. 767-776, (2020).
- [20] Pang, H., Liu, X., Shang, Y., and Yao, R., "A Hybrid Fault-tolerant Control for Nonlinear Active Suspension Systems Subjected to Actuator Faults and Road Disturbances", *Complexity*, Vol. 2020, Article ID 1874212, 14 Pages, (2020).
- [21] Wang, R., Jing, H., Karimi, H. R., and Chen, N., "Robust Fault-Tolerant  $H_\infty$  Control of Active Suspension Systems with Finite-frequency Constraint", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 62, pp. 341-355, (2015).
- [22] Hua, C., Chen, J., Li, Y., and Li, L., "Adaptive Prescribed Performance Control of Half-Car Active Suspension System with Unknown Dead-zone Input", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 111, pp. 135-148, (2018).
- [23] Nkomo, L. I., Nyandoro, O. T., and Dove, A., "Comparison of Backstepping and Sliding Mode Control Techniques for a High Performance Active Vehicle Suspension System", *IFAC-Papers OnLine*, Vol. 50, No. 1, pp. 12604-12610, (2017).
- [24] Wang, G., Chen, C., and Yu, S., "Optimization and Static Output-feedback Control for Half-car Active Suspensions with Constrained Information", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 378, pp. 1-13, (2016).
- [25] Peng, C., and Li, F., "A Survey on Recent Advances in Event-triggered Communication and Control", *Information Sciences*, Vol. 457, pp. 113-125, (2018).
- [26] Bansal, K., and Mukhija, P., "Event-triggered Control of Vehicle Active Suspension Systems", in *Indian Control Conference (ICC)*, Kanpur, India, pp. 178-183, (2018).
- [27] Bansal, K., Dahiya, P., and Mukhija, P., "Event-triggered Based Reliable Control of Vehicle Active Suspension System under Actuator Faults", *IFAC-Papers OnLine*, Vol. 51, No. 1, pp. 196-201, (2018).
- [28] Du, H., and Zhang, N., "Constrained  $H_\infty$  Control of Active Suspension for a Half-car Model with a Time Delay in Control", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, Vol. 222, No. 5, pp. 665-684, (2008).
- [29] Wu, Z. G., Park, J. H., Su, H., and Chu, J., "Stochastic Stability Analysis of Piecewise Homogeneous Markovian Jump Neural Networks with Mixed Time-delays", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 349, No. 6, pp. 2136-2150, (2012).

- [31] Kazemy, A., Lam, J., and Li, X., "Finite-frequency  $H_\infty$  Control for Offshore Platforms Subject to Parametric Model Uncertainty and Practical Hard Constraints", ISA Transactions, Vol. 83, pp. 53-65, (2018).
- [32] Li, H., Yu, J., Hilton, C., and Liu, H., "Adaptive Sliding-mode Control for Nonlinear Active Suspension Vehicle Systems using T-S fuzzy Approach", IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 60, No. 8, pp. 3328-3338, (2013).

### فهرست نمادهای انگلیسی

$z_{sf}(t)$  و  $z_{sr}(t)$ : جابجایی قسمت جلو و عقب خودرو  
 $l_1$  و  $l_2$ : فاصله بین اکسل جلو و عقب با مرکز جرم خودرو  
 $\varphi(t)$ : زاویه پیچش خودرو  
 $z_c(t)$ : جابجایی مرکز جرم خودرو  
 $m_{ur}, m_{uf}, m_s$ : جرم بدنه خودرو، چرخ جلو و چرخ عقب  
 $I_\phi$ : ممان اینرسی  
 $z_{ur}(t)$  و  $z_{uf}(t)$ : جابجایی‌های جلو و عقب جرم فنربندی نشده  
 $z_{tr}(t)$  و  $z_{tf}(t)$ : ناهمواری‌های جاده برای قسمت جلو و عقب خودرو  
 $u_r(t)$  و  $u_f(t)$ : نیروهای کنترلی  
 $k_{sr}$  و  $k_{sf}$ : ضرایب سختی عناصر تعلیق غیر فعال جلو و عقب خودرو  
 $c_{sr}$  و  $c_{sf}$ : ضرایب میرایی عناصر تعلیق غیر فعال جلو و عقب خودرو  
 $k_{tr}$  و  $k_{tf}$ : ضرایب سختی تایلر جلو و عقب خودرو  
 $c_{tr}$  و  $c_{tf}$ : ضرایب میرایی تایلر جلو و عقب خودرو  
 $z_{rmax}$  و  $z_{fmax}$ : مقادیر مجاز انحراف سیستم تعلیق جلو و عقب خودرو  
 $F_r$  و  $F_f$ : بارهای استاتیکی تایلر جلو و عقب خودرو  
 $u_{rmax}$  و  $u_{fmax}$ : حد توان عملگرهای جلو و عقب خودرو

**Abstract**

In this paper, the problem of event-triggered robust control of half-car suspension system with parametric uncertainty is investigated. Some physical hard constraints for the system are also considered in the control design procedure. Firstly, the problem is formulated by presenting the dynamic equation of the half-car suspension system and the event-triggered mechanism for sending the sensor measured data to the controller. The parametric uncertainties are also considered in this stage. The event-triggered mechanism decreases the number of sending information from the sensors into the controller which yields a larger bandwidth of the communication network. Then, with help of the Lyapunov - Krasovskii theorem, some conditions are provided in the form of linear matrix inequalities to ensure the stability and performance of the suspension system. These linear matrix inequalities are easily solvable with standard routines. Finally, a numerical half-car suspension system is presented to show the effectiveness of the proposed method.

Proof Read